حرکت‌شناسی فصل اول

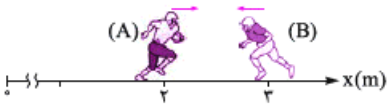
آموزش فیزیک را باید با مبحث مکانیک آغاز کرد. مکانیک آن بخش از علم فیزیک است که به مطالعه‌ی حرکت می‌پردازد. خود مکانیک به دو شاخه‌ی اصلی تقسیم می‌شود: «سینماتیک» و «دینامیک». سینماتیک (حرکت‌شناسی) آن شاخه از مکانیک است که حرکت اجسام را توصیف می‌کند، بدون آن‌که از نیروهای درگیر در حرکت حرفی به میان آورد. در این فصل خواهید دید که یک حرکت به ظاهر ساده ممکن است توصیف ریاضی پیچیده‌ای داشته باشد.

تست‌های استاندارد

واحد ۱: کلیات سینماتیک

مکان - جابه‌جایی

۱- دو شخص A و B بر روی محور x در حرکتند. شکل زیر، تصویر این دو شخص را در لحظه‌ای که A به فاصله‌ی ۲ متری مبدأ و B به فاصله‌ی ۳ متری مبدأ قرار دارند، نشان می‌دهد. بردار مکان این دو شخص در SI کدام است؟



۱) $\vec{r}_A = 2\vec{i}$ و $\vec{r}_B = 3\vec{i}$
۲) $\vec{r}_A = 2\vec{i}$ و $\vec{r}_B = -3\vec{i}$
۳) $\vec{r}_A = 2\vec{j}$ و $\vec{r}_B = 3\vec{j}$
۴) $\vec{r}_A = 2\vec{j}$ و $\vec{r}_B = -3\vec{j}$

۲- در تست ۱، بردار مکان شخص A و شخص B به‌ترتیب در کدام جهت است؟

۱) → و →
۲) → و ←
۳) ← و →
۴) ← و ←

۳- در تست ۱، اگر جهت حرکت دو شخص A و B تغییر نکند، بردار جابه‌جایی آن‌ها در یک مدت معین، به‌ترتیب در کدام جهت است؟

۱) → و →
۲) → و ←
۳) ← و →
۴) ← و ←

۴- جسمی که بر روی محور x حرکت می‌کند، از مکان $x_1 = -3\ m$ به مکان $x_2 = 1\ m$ و از آن‌جا به مکان $x_3 = -2\ m$ منتقل می‌شود. بردار جابه‌جایی جسم در این حرکت (در SI) کدام است؟

۱) $\Delta\vec{r} = \vec{i}$
۲) $\Delta\vec{r} = -\vec{i}$
۳) $\Delta\vec{r} = 7\vec{i}$
۴) $\Delta\vec{r} = -7\vec{i}$

۵- در تست ۴، اگر جهت محور x (و بردار یکه‌اش) قرینه انتخاب شود، بردار مکان نهایی جسم (در SI) کدام خواهد بود؟

۱) $\vec{r} = \vec{i}$
۲) $\vec{r} = -\vec{i}$
۳) $\vec{r} = 2\vec{i}$
۴) $\vec{r} = -7\vec{i}$

۶- متحرکی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B، مطابق شکل، جابه‌جا شده است. اگر $AB = BC$ باشد، نسبت مسافت طی‌شده به جابه‌جایی کدام است؟ *(آزمایشی آموزش و پرورش شهر تهران - ۸۳)*

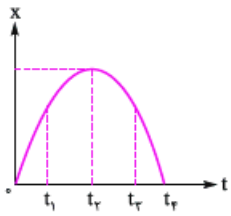
۱) ۱
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) ۳

۷- شناگری بر مسیری مستقیم، درازای استخری به طول ۱۰ m را در هر دقیقه یک‌بار طی می‌کند. اگر شناگر از یک انتهای استخر شروع به حرکت رفت‌وبرگشت کرده باشد، اندازه‌ی جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط او پس از گذشت یک ربع ساعت (به‌ترتیب) چند متر است؟

۱) ۰ و ۱۰
۲) ۰ و ۱۵۰
۳) ۱۰ و ۱۰
۴) ۱۰ و ۱۵۰

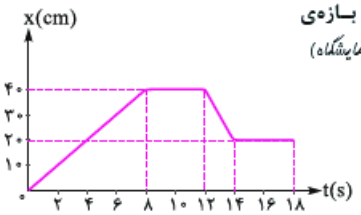
مقدمه‌ای بر نمودار مکان - زمان

۸- در کدام‌یک از لحظه‌های نشان‌داده‌شده در نمودار، متحرک بیشترین فاصله را از مبدأ دارد؟ *(سراسری تجربی - ۷۶)*



۱) t_1
۲) t_2
۳) t_3
۴) t_4

۹- مورچه‌ای روی یک خط راست در حرکت است. نمودار مکان ـ زمان مورچه به شکل زیر است. مورچه در بازه‌ی زمانی $t = 0$ تا $t = 18\ s$، چند ثانیه در جهت محور x حرکت می‌کند؟ *(برگرفته از مثال ۲-۱ کتاب فیزیک ۲ و آزمایشگاه)*



۱) ۸
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۸

۱۰- در تست ۹، مورچه چند ثانیه در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؟ *(همان منبع تست ۹)*

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) هیچ‌گاه

۱۱- در تست ۹، مورچه در مجموع، چند ثانیه ساکن بوده است؟ *(همان منبع تست ۹)*

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) هیچ‌گاه

۱۲- در تست ۹، مورچه چند ثانیه در مکان‌های مثبت بوده است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

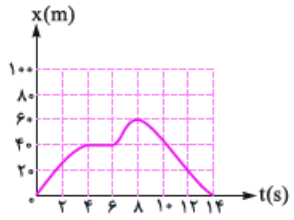
۱۳- در تست ۹، در چه لحظه‌هایی (برحسب ثانیه)، فاصله‌ی مورچه از مبدأ ۳۰cm است؟ *(همان منبع تست ۹)*

۱) ۵ و ۱۲/۵ ۲) ۶ و ۱۲/۵ ۳) ۵ و ۱۳ ۴) ۶ و ۱۳

۱۴- در تست ۹، جابه‌جایی مورچه در بازه‌ی زمانی ۴s تا ۸s چند سانتی‌متر است؟ *(همان منبع تست ۹)*

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۴۰

۱۵- شکل زیر، نمودار مکان ـ زمان دوچرخه‌سواری را نشان می‌دهد که روی یک مسیر مستقیم در حال حرکت است. دوچرخه‌سوار در مجموع، چند متر در جهت محور x حرکت می‌کند؟ *(برگرفته از تمرین‌های پایان فصل کتاب فیزیک ۲ و آزمایشگاه)*

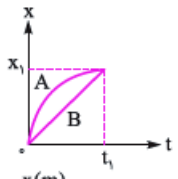


۱) ۲۰
۲) ۴۰
۳) ۶۰
۴) ۸۰

۱۶- در تست ۱۵، مسافت طی‌شده توسط دوچرخه‌سوار چند متر است؟

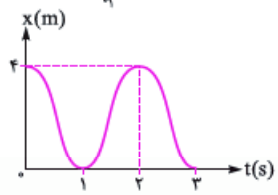
۱) صفر ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۶۰

۱۷- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B مطابق شکل زیر است. کدام مقایسه بین جابه‌جایی‌های دو متحرک $(\Delta x_A$ و $\Delta x_B)$ و مسافت طی‌شده توسط آن‌ها $(d_A$ و $d_B)$، در بازه‌ی زمانی ۰ تا t_1 درست است؟



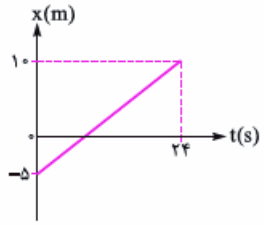
۱) $d_A > d_B$ و $\Delta x_A > \Delta x_B$
۲) $d_A > d_B$ و $\Delta x_A = \Delta x_B$
۳) $d_A = d_B$ و $\Delta x_A = \Delta x_B$
۴) $d_A = d_B$ و $\Delta x_A > \Delta x_B$

۱۸- نمودار مکان ـ زمان متحرکی به شکل مقابل است. نسبت جابه‌جایی متحرک به مسافت طی‌شده توسط آن، در بازه‌ی زمانی ۰ تا ۳s کدام است؟



۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$
۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۹- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x جابه‌جا می‌شود، مطابق شکل مقابل است. در بازه‌ی زمانی نمایش‌داده‌شده، متحرک در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه)، از مبدأ مکان عبور می‌کند؟

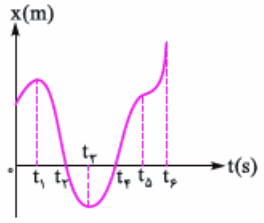


۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) هیچ‌گاه

۲۰- در تست ۱۹، متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) هیچ‌گاه

۲۱- نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل زیر است. سوی حرکت متحرک در چه لحظه‌هایی تغییر کرده است؟ *(برگرفته از تمرین‌های پایان فصل کتاب فیزیک۲ و آزمایشگاه)*



۱) t_1 و t_2
۲) t_1 و t_3
۳) t_2 و t_4
۴) t_1 و t_3 و t_5

۲۲- در تست ۲۱، در کدام‌یک از بازه‌های زمانی زیر، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است؟ *(همان منبع تست ۲۱)*

۱) t_1 تا t_3 ۲) t_2 تا t_3 ۳) t_3 تا t_4 ۴) t_4 تا t_6

معادله‌ی حرکت

۲۳- کدام‌یک از رابطه‌های زیر، می‌تواند بیانگر معادله‌ی حرکت یک جسم باشد؟ (x، نماد مکان، v، نماد سرعت و t، نماد زمان حرکت جسم است.)

۱) $v = -2t + 4$ ۲) $x = \pm(t^2 - 1)$ ۳) $v^2 = 2x$ ۴) $x = 1 + \cos \pi t$

۲۴- کدام‌یک از معادله‌های زیر، بیانگر معادله‌ی حرکت جسمی است که بر روی خط راست حرکت می‌کند؟

۱) $x = 2t - 4$ ۲) $x = \sin \pi t$ ۳) $x = \frac{1}{t}$ ۴) هر سه گزینه‌ی قبلی

۲۵- معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = t^2 - 2t - 3$ است. این متحرک در لحظه‌ی $t = 1s$ در چند متری مبدأ مکان قرار می‌گیرد؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) -4 ۴) ۴

۲۶- در تست ۲۵، متحرک در لحظه‌ی $t=1s$ در چه فاصله‌ای از مکان اولیه‌اش (برحسب متر) قرار می‌گیرد؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -4 ۴) 4

۲۷- در تست ۲۵، متحرک چند ثانیه پس از لحظه‌ی صفر، مجدداً از مکان اولیه‌اش عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۸- در تست ۲۵، متحرک پس از مبدأ زمان، چندبار از مبدأ مکان عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ‌گاه

۲۹- معادله‌ی حرکت ذره‌ای در SI به‌صورت $x=t^2-2t+1$ است. بردار مکان این متحرک در طول مسیر، چندبار تغییر جهت می‌دهد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۰- معادله‌های مکان ـ زمان دو متحرک که روی محور x حرکت می‌کنند، در SI به‌صورت $x_1=-t^2+2t$ و $x_2=t^2+6t+10$ می‌باشد. این دو متحرک چندبار از کنار هم می‌گذرند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ‌گاه

۳۱- معادله‌ی حرکت یک متحرک در SI به‌صورت $x=-2t^3+6t+8$ است. نسبت جابه‌جایی این متحرک در ثانیه‌ی دوم به جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی اول کدام است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۸۹)*

۱) -2 ۲) -1 ۳) $+1$ ۴) $+2$

۳۲- معادله‌ی حرکت جسمی در SI به‌صورت $x=t^2-6t+10$ است. کم‌ترین فاصله‌ی جسم از مبدأ مکان $(x=0)$ چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۱۰

۳۳- معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=t^2-6t+8$ است. کم‌ترین فاصله‌ی متحرک از مبدأ مکان چند متر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴- معادله‌ی حرکت ذره‌ای در SI به‌صورت $x=-t^2+2t+8$ است. بیشینه‌ی فاصله‌ی ذره از مبدأ مکان، در ۵ ثانیه‌ی اول حرکت چند متر است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

سرعت متوسط

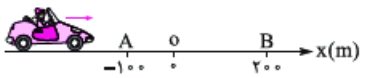
۳۵- شناگری یک مسیر ۴۰ متری را در مدت ۲۰ ثانیه رفته و در مدت ۲۵ ثانیه برگشته است. سرعت متوسط کل شناگر چند متر بر ثانیه بوده است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۷۷)*

۱) ۱/۸ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۳۶- در تست ۳۵، نسبت سرعت متوسط شناگر در مدت رفت به سرعت متوسط او در مدت برگشت کدام است؟

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $-\frac{4}{5}$ ۳) $-\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{4}$

۳۷- اتومبیلی بر روی محور x و در جهت نشان‌داده‌شده در شکل زیر، حرکت می‌کند. اتومبیل در لحظه‌ی $t_1=10s$ از نقطه‌ی A و در لحظه‌ی $t_2=20s$ از نقطه‌ی B عبور می‌کند. سرعت متوسط اتومبیل در مسیر AB چند متر بر ثانیه است؟



۱) $\frac{10}{3}$ ۲) $\frac{100}{3}$ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۳۸- در شکل تست ۳۷، اگر اتومبیل در مدت ۱۰s از نقطه‌ی A تا o و در مدت ۲۰s از نقطه‌ی o تا B جابه‌جا شود، سرعت متوسط آن در کل مسیر (AB) چند متر بر ثانیه است؟

۱) $\frac{100}{3}$ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۳۹- بزرگی سرعت متوسط متحرکی در جابه‌جایی بین دو نقطه‌ی A و B برابر $72\,km/h$ است. اگر $AB=3600\,m$ باشد، متحرک، فاصله‌ی بین این دو نقطه را در چه مدتی طی می‌کند؟

۱) ۳۰ ثانیه ۲) ۳ دقیقه ۳) ۵۰ ثانیه ۴) ۵ دقیقه

۴۰- معادله‌ی حرکت متحرکی به‌صورت $x=0/25+\sin\pi t$ (در SI) می‌باشد. سرعت متوسط آن در ۵ ثانیه‌ی اول حرکت، چند متر بر ثانیه است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۷۱)*

۱) صفر ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۱۵

۴۱- معادله‌ی مکان ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x=5t^2-2$ است. سرعت متوسط این متحرک در بازه‌ی زمانی ۱ تا ۲ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟ *(آزمایشی آموزش و پرورش شهر تهران ـ ۹۲)*

۱) ۵ ۲) ۱۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۲/۵

۴۲- معادله‌ی حرکت متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x=2t^2-16t+14$ است. سرعت متوسط متحرک از لحظه‌ی $t=0$ تا کدام لحظه (برحسب ثانیه) صفر می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۴۳- معادله‌ی حرکت متحرکی بر خط راست، در SI به‌صورت $x=t^2-5t+6$ است. سرعت متوسط این متحرک از لحظه‌ی $t=0$ تا لحظه‌ای که برای اولین‌بار به مبدأ مکان می‌رسد، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۲ ۴) -2

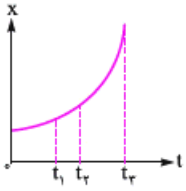
۴۴- معادله‌ی مکان ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x=A+Bt^3$ می‌باشد. اگر سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی صفر تا ۳ ثانیه، برابر $18\,m/s$ و مکان متحرک در لحظه‌ی $t=2s$ برابر ۲۴ متر باشد، مقادیر A و B در SI کدامند؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۹۲)*

۱) ۸ و ۳ ۲) ۸ و ۲ ۳) ۶ و ۳ ۴) ۶ و ۲

۴۵- در یک برج، آسانسوری در مدت ۲۰s از طبقه‌ی اول تا دهم جابه‌جا می‌شود و ۵s بعد، در مدت ۱۰s از طبقه‌ی دهم تا هفتم جابه‌جا می‌شود. اگر فاصله‌ی بین طبقه‌های متوالی ۵m باشد، سرعت متوسط آسانسور در کل مسیر، چند متر بر ثانیه است؟

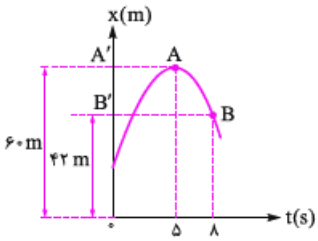
۱) ۱ ۲) $\frac{۶}{۷}$ ۳) $\frac{۱۲}{۷}$ ۴) ۲

تعیین سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان



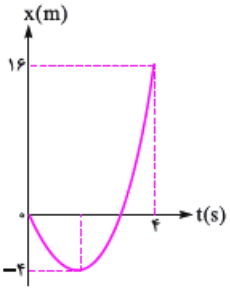
۴۶- نمودار مکان ـ زمان متحرکی، سهمی و مطابق شکل است. سرعت متوسط متحرک در کدام بازه‌ی زمانی بیشتر است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۸۵)*

۱) ۰ تا t_1
۲) t_1 تا t_3
۳) t_2 تا t_3
۴) بستگی به اندازه‌ی فاصله‌های زمانی دارد.



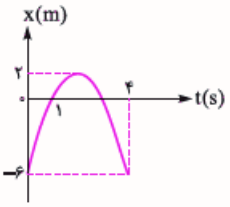
۴۷- نمودار مکان ـ زمان متحرکی به‌صورت شکل مقابل است. اندازه‌ی سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی $t_1 = ۵s$ تا $t_2 = ۸s$، چند متر بر ثانیه و در کدام جهت است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۹۲)*

۱) ۶ و در راستای $A'B'$ و از A' به طرف B'
۲) ۶ و در راستای AB و از A به طرف B
۳) ۱۲ و در راستای AB و از A به طرف B
۴) ۱۲ و در راستای $A'B'$ و از B' به طرف A'



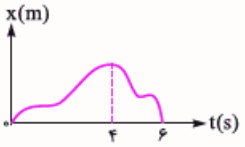
۴۸- شکل مقابل، نمودار مکان ـ زمان متحرکی در یک مسیر مستقیم است. سرعت متوسط متحرک در این ۴ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۸۲)*

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵



۴۹- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل است. سرعت متوسط در فاصله‌ی زمانی $t = ۱s$ تا $t = ۴s$ چند متر بر ثانیه است؟ *(سراسری تجربی ـ ۸۷)*

۱) ۲
۲) −۲
۳) ۶
۴) −۶



۵۰- در شکل مقابل، سرعت متوسط در ۴ ثانیه‌ی اول، چند برابر سرعت متوسط در ۲ ثانیه‌ی بعدی است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۸۶)*

۱) −۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

سرعت لحظه‌ای

۵۱- اگر معادله‌ی مکان ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x = \frac{۱}{۳}t^۳ + ۳t$ باشد، سرعت آن در لحظه‌ی $t = ۲s$ چند m/s است؟ *(آزاد تجربی ـ ۸۰)*

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۲- معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = t^۲ + ۲t - ۱$ است. سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = ۲s$، چند برابر سرعت متوسط متحرک در دو ثانیه‌ی اول حرکت است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۵۳- معادله‌های حرکت دو متحرک در SI به‌صورت $x_1 = ۳t^۲ + ۱$ و $x_2 = t^۳ - ۹t$ است. سرعت دو متحرک در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) برابر می‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۴- معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = ۴t^۲ + ۸t + ۱۶$ می‌باشد. حرکت این متحرک چگونه است؟ $(t \geq ۰)$ *(آزمایشی سنجش ـ ۸۵)*

۱) پیوسته در جهت محور x
۲) پیوسته در خلاف جهت محور x
۳) ابتدا در جهت محور x و سپس در خلاف جهت محور
۴) ابتدا در خلاف جهت محور x و سپس در جهت محور

۵۵- رابطه‌ی سرعت و مکان جسمی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در یک لحظه به‌صورت $v=-4x$ است. در این لحظه، جسم در چه وضعیتی قرار دارد؟ $(v\neq 0)$

۱) از مبدأ دور می‌شود. ۲) به مبدأ نزدیک می‌شود. ۳) بر روی مبدأ قرار دارد. ۴) اظهار نظر قطعی ممکن نیست.

۵۶- معادله‌ی مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x=2t^2-t-1$ است. این متحرک (از لحظه‌ی $t=0$ به بعد) چند ثانیه در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۵۷- در تست ۵۶، متحرک در چه لحظه‌ای (برحسب ثانیه) تغییر جهت می‌دهد؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۵۸- در تست ۵۶، متحرک (از لحظه‌ی $t=0$ به بعد) چند ثانیه در قسمت منفی محور x بوده است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ∞

۵۹- معادله‌ی مکان ـ زمان متحرکی که بر خط راست حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x=-t^3+6t^2-9t$ است. فاصله‌ی زمانی بین دو تغییر جهتِ آن، چند ثانیه است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۸۹)*

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۵

۶۰- معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=\frac{t^3}{3}-t^2+t$ است. متحرک در کدام لحظه (برحسب ثانیه) تغییر جهت می‌دهد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ‌گاه

۶۱- معادله‌ی سرعت ذره‌ای که بر روی محور x حرکت می‌کند، به‌صورت $v=t^2-18-3t$ است (SI). بزرگی سرعت ذره در کدام لحظه (برحسب ثانیه) کمینه (مینیمم) است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۶۲- معادله‌ی مکان متحرکی در SI به‌صورت $x=\frac{2}{3}t^3-6t^2+20t$ است. کم‌ترین سرعتی که این متحرک در مسیر حرکت پیدا می‌کند، چند متر بر ثانیه است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۹۲)*

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

تعیین تابع مکان ـ زمان از روی تابع سرعت ـ زمان

۶۳- معادله‌ی سرعت متحرکی در SI به‌صورت $v=-6t^2+6t$ است. اگر حرکت در مسیر مستقیم بوده و مکان آن در لحظه‌ی $t=1s$، نقطه‌ی $x=-2m$ باشد، معادله‌ی مکان آن کدام است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۸۶)*

۱) $x=-12t+6$ ۲) $x=-12t+10$ ۳) $x=-3t^2+3t-3$ ۴) $x=-2t^3+3t^2-3$

۶۴- سرعت اتومبیلی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، طبق معادله‌ی $v=3t^2-8$ (در SI) تغییر می‌کند. این اتومبیل چند ثانیه پس از لحظه‌ی $t=0$، دوباره از مکان اولیه‌اش عبور می‌کند؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{\frac{2}{3}}$

۶۵- معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=-2t+4$ است. بزرگی جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیه‌ی سوم چند متر است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۸۸)*

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۶۶- معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=2t+1$ است. سرعت متوسط متحرک در ثانیه‌ی دومِ حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۷- معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=3t^2-6t+2$ است. سرعت متوسط آن در ثانیه‌ی سومِ حرکت چند متر بر ثانیه است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۹۰)*

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۳

محاسبه‌ی مسافت

۶۸- معادله‌ی مکان ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $x=t^3+6t^2+20$ است. مسافت طی‌شده در ثانیه‌ی دوم حرکت چند متر است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۹۲)*

۱) ۱۹ ۲) ۲۵ ۳) ۳۹ ۴) ۴۵

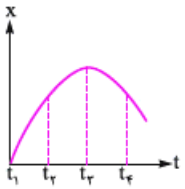
۶۹- متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و معادله‌ی مکان ـ زمان آن در SI به‌صورت $x=\frac{3}{2}t^2-6t+20$ است. مسافتی که این متحرک در ۳ ثانیه‌ی اول طی می‌کند، چند متر است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۹۳)*

۱) ۴/۵ ۲) ۷/۵ ۳) ۱۵/۵ ۴) ۲۴/۵

۷۰- معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $v=-2t+8$ است. مسافت طی‌شده در ۸ ثانیه‌ی اول حرکت متحرک چند متر است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۹۰)*

۱) صفر ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۶۴

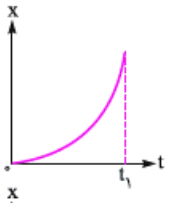
تعیین سرعت لحظه‌ای از روی نمودار مکان - زمان



۷۱- سهمی مقابل، نمودار مکان ـ زمان یک متحرک در مسیر مستقیم است. سرعت آن در کدام لحظه‌ی نشان داده‌شده بیشتر است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۸۴)*

۱) t_1 ۲) t_2

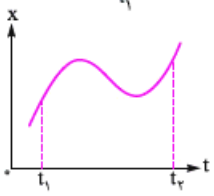
۳) t_3 ۴) t_4



۷۲- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، بخشی از یک سهمی به شکل روبه‌رو است. در بازه‌ی زمانی ۰ تا t_1، سرعت متحرک از سرعت متوسط آن در کل بازه ..... است.

۱) همواره بیشتر ۲) همواره کم‌تر

۳) ابتدا بیشتر، سپس کم‌تر ۴) ابتدا کم‌تر، سپس بیشتر



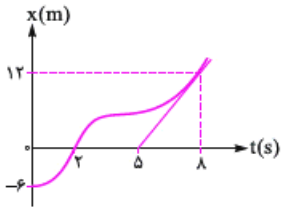
۷۳- نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل است. در فاصله‌ی زمانی میان t_1 تا t_2، سرعت جسم چندبار تغییر جهت داده است؟ *(سراسری تجربی ـ ۶۹)*

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

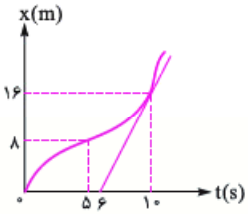
۴) ۳



۷۴- با توجه به نمودار روبه‌رو، سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = 8\,s$ چند برابر سرعت متوسط آن در کل مدت $8\,s$ است؟ *(آزمایشی آموزش و پرورش شهر تهران ـ ۸۶)*

۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{9}{16}$

۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$



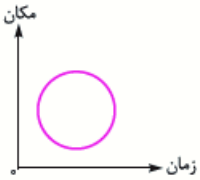
۷۵- نمودار مکان ـ زمان متحرکی بر روی مسیر مستقیم به شکل زیر است. اگر سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = 10\,s$ برابر سرعت متوسط آن بین دو لحظه‌ی $t_1 = 5\,s$ و $t_2 = 12\,s$ باشد، متحرک در لحظه‌ی $t = 12\,s$ در چند متری مبدأ می‌باشد؟ *(آزاد ریاضی ـ ۷۶)*

۱) ۲۸

۲) ۲۴

۳) ۳۶

۴) ۲۰

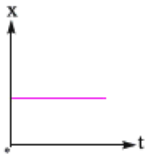


۷۶- نمودار مکان ـ زمانی که در شکل مقابل رسم شده است، معرف کدام حرکت است؟ *(آزمون ضمن خدمت دبیران ـ ۷۳، با یک گزینه‌ی اضافه)*

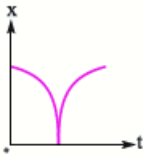
۱) حرکت نوسانی ۲) حرکت دایره‌ای

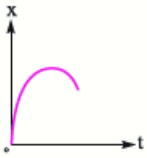
۳) چنین حرکتی امکان ندارد. ۴) اظهار نظر قطعی ممکن نیست.

۷۷- نمودار مکان ـ زمان جسمی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق کدام‌یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد؟

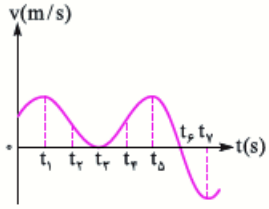
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

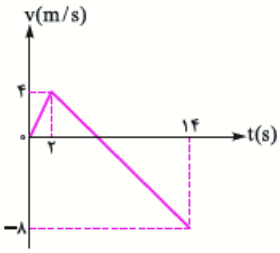
مقدمه‌ای بر نمودار سرعت ـ زمان



۷۸- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی مطابق شکل روبه‌رو است. در کدام لحظه (یا لحظه‌ها)، متحرک تغییر جهت می‌دهد؟ (لحظه‌های t_2، t_4 و t_6 نقاط عطف نمودارند.) *(آزمایشی آموزش و پرورش شهر تهران ـ ۸۹، با توضیح اضافه)*

۱) t_2، t_4 و t_6 ۲) t_6

۳) t_1، t_3، t_5 و t_7 ۴) t_3



۷۹- متحرکی روی محور x حرکت می‌کند و نمودار سرعت ـ زمان آن مطابق شکل روبه‌رو است. متحرک در ۱۴ ثانیه‌ی اول، چند ثانیه در سوی مخالف محور x حرکت کرده است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۸۹)*

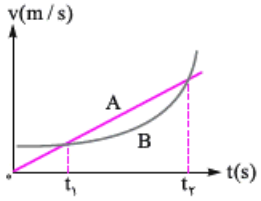
۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۲

۸۰- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B مطابق شکل است. اگر بزرگی سرعت متوسط آن‌ها بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 به‌ترتیب $\overline{v}_A$ و $\overline{v}_B$ باشد، کدام رابطه درست است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۷۵)*

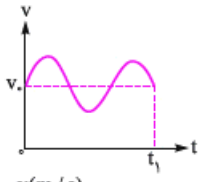


۱) $\overline{v}_B \geq \overline{v}_A$
۲) $\overline{v}_B < \overline{v}_A$
۳) $\overline{v}_B \leq \overline{v}_A$
۴) $\overline{v}_B > \overline{v}_A$

۸۱- اگر نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B مطابق شکل رسم‌شده در صورت تست ۸۰ باشد، کدام رابطه درست است؟

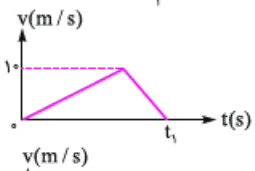
۱) $\overline{v}_A > \overline{v}_B$
۲) $\overline{v}_A < \overline{v}_B$
۳) $\overline{v}_A = \overline{v}_B$
۴) اظهار نظر قطعی ممکن نیست.

۸۲- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی یک نمودار سینوسی به شکل مقابل است. اگر سرعت متوسط متحرک را در بازه‌ی زمانی ۰ تا t_1 با $\overline{v}$ نشان دهیم، کدام گزینه صحیح است؟



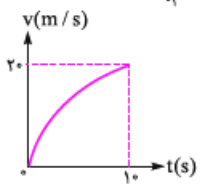
۱) $\overline{v} > v_0$
۲) $\overline{v} = v_0$
۳) $\overline{v} < v_0$
۴) گزینه‌ی ۱ یا گزینه‌ی ۲

۸۳- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی مطابق شکل است. سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی صفر تا t_1، کدام گزینه می‌تواند باشد؟



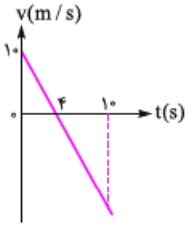
۱) $\overline{v} < 5\,m/s$
۲) $\overline{v} = 5\,m/s$
۳) $5\,m/s < \overline{v} < 10\,m/s$
۴) $\overline{v} = 10\,m/s$

۸۴- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر سرعت متوسط متحرک را در بازه‌ی زمانی $t = 0$ تا $t = 10\,s$ با $\overline{v}$ نشان دهیم، کدام گزینه درست است؟



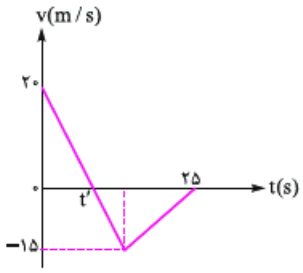
۱) $\overline{v} < 10\,m/s$
۲) $\overline{v} = 10\,m/s$
۳) $10\,m/s < \overline{v} < 20\,m/s$
۴) $\overline{v} = 20\,m/s$

۸۵- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است. متحرک در لحظه‌ی $t = 10\,s$، در چند متری مبدأ قرار دارد؟ (متحرک در لحظه‌ی $t = 0$، در $x = +2\,m$ قرار داشته و xهای مثبت در سمت راست مبدأ مختصات واقعند.) *(سراسری ریاضی ـ ۸۴، خارج از کشور)*



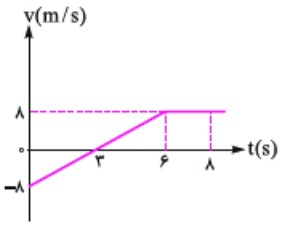
۱) ۲۷ متری سمت راست مبدأ
۲) ۲۳ متری سمت چپ مبدأ
۳) ۲۵ متری سمت چپ مبدأ
۴) ۲۲۷ متری سمت راست مبدأ

۸۶- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. بزرگی سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی که حرکت متحرک خلاف جهت محور x است، چند متر بر ثانیه است؟ *(سراسری ریاضی ـ ۹۴)*



۱) صفر
۲) ۲/۵
۳) ۷/۵
۴) ۱۰

۸۷- نمودار سرعت ـ زمان جسمی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. سرعت متوسط جسم در مدت ۸ ثانیه‌ی نشان‌داده‌شده، چند متر بر ثانیه است؟ *(سراسری تجربی ـ ۸۵)*

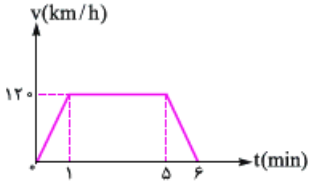


۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۸۸- در تست ۸۷، مسافت طی‌شده توسط متحرک از لحظه‌ی $t = 0$ تا $t = 8\,s$ چند متر است؟

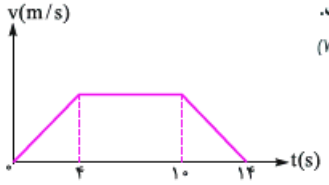
۱) ۸
۲) ۱۶
۳) ۲۴
۴) ۴۰

۸۹- نمودار سرعت ـ زمان قطاری که بر روی یک ریل مستقیم از ایستگاه A شروع به حرکت می‌کند و در ایستگاه B متوقف می‌شود، مطابق شکل مقابل است. فاصله‌ی بین دو ایستگاه (AB) چند کیلومتر است؟



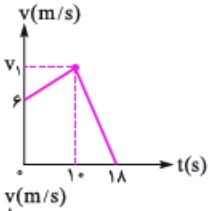
۱) ۱۰
۲) ۱۰۰
۳) ۶۰
۴) ۶۰۰

۹۰- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی به شکل مقابل و مسافت طی‌شده توسط آن در مدت ۱۴ ثانیه، برابر ۱۲۰ متر است. این متحرک در ۴ ثانیه‌ی اول، چند متر طی کرده است؟ *(آزاد ریاضی ـ ۷۳)*



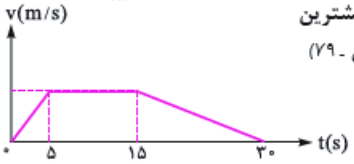
۱) ۱۴
۲) ۲۴
۳) ۲۸
۴) ۳۰

۹۱- شکل مقابل، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی در مسیر مستقیم است. اگر سرعت متوسط در مدت ۱۸ ثانیه برابر $\frac{۲۰}{۳}\,m/s$ باشد، $v_۱$ چند متر بر ثانیه است؟ *(سراسری تجربی ـ ۷۷)*



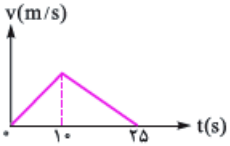
۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۵

۹۲- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی به شکل مقابل است. اگر سرعت متوسط آن در کل مسیر $۱۲\,m/s$ باشد، بیشترین مقدار سرعت آن چند متر بر ثانیه است؟ *(آزاد پزشکی ـ ۷۹)*



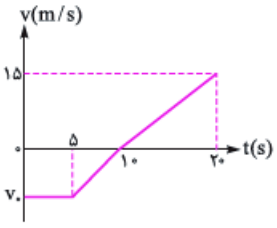
۱) ۲۵
۲) ۲۰
۳) ۲۴
۴) ۱۸

۹۳- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. جابه‌جایی متحرک در بازه‌ی $t_۱ = ۵\,s$ تا $t_۲ = ۱۵\,s$ چند برابر جابه‌جایی متحرک در ۱۰ ثانیه‌ی اول است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۹۳)*



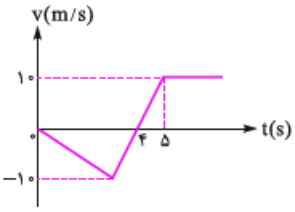
۱) $\frac{۱۷}{۱۲}$
۲) $\frac{۱۷}{۲۴}$
۳) $\frac{۱۹}{۱۲}$
۴) $\frac{۱۹}{۲۴}$

۹۴- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر خط راست در حال حرکت است، مطابق شکل مقابل است و متحرک بعد از $۲۰\,s$ دوباره به محل شروع حرکت برمی‌گردد؛ در این صورت، سرعت اولیه‌ی متحرک چند متر بر ثانیه است؟ *(آزمایشی آموزش و پرورش شهر تهران ـ ۸۸، با ویرایش)*



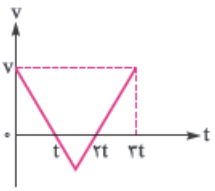
۱) -۵
۲) $-۷/۵$
۳) -۱۰
۴) $-۱۲/۵$

۹۵- شکل مقابل، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که در مبدأ زمان از مکان $x = -۲\,m$ شروع به حرکت می‌کند. این متحرک در چه لحظه‌ای از مبدأ مکان $(x = ۰)$ عبور می‌کند؟



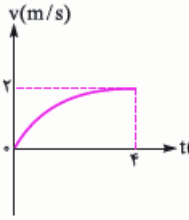
۱) ۶/۳
۲) ۶/۷
۳) ۷/۵
۴) ۸

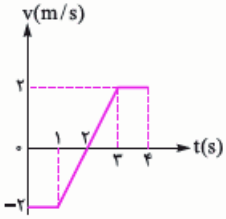
۹۶- نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی صفر تا ۳t کدام است؟

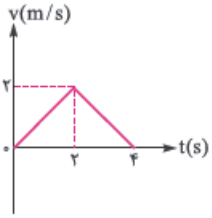


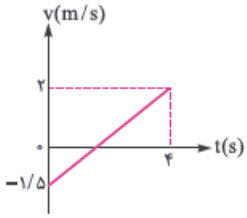
۱) ۰
۲) $\frac{۱}{۴}v$
۳) $\frac{۵}{۱۲}v$
۴) $\frac{۳}{۴}v$

۹۷- نمودار سرعت ـ زمان چهار متحرک به شکل رسم‌شده در گزینه‌های زیر است. تا پایان ثانیه‌ی چهارم، جابه‌جایی کدام متحرک بیشتر است؟

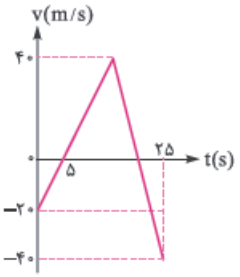
۱)


۲)


۳)


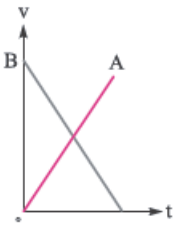
۴)


۹۸- شکل روبه‌رو، نمودار سرعت ـ زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم، در مبدأ زمان از مبدأ مکان گذشته است. بیشترین فاصله‌ای که متحرک در این ۲۵ ثانیه از مبدأ پیدا می‌کند، چند متر است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۹۰)*

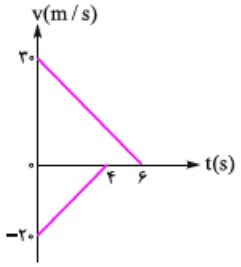


۱) ۲۰۰
۲) ۲۵۰
۳) ۳۰۰
۴) ۳۵۰

۹۹- نمودار سرعت ـ زمان دو اتومبیل A و B که روی محور x حرکت می‌کنند و هر دو در مبدأ زمان از مبدأ مکان عبور کرده‌اند، مطابق شکل است. اگر در لحظه‌ای که سرعت دو اتومبیل برابر می‌شود، اتومبیل A از مکان $x = +۲۰\,m$ عبور کند، اتومبیل B در چه مکانی (برحسب متر) قرار می‌گیرد؟ (شیب نمودارها هم‌اندازه است.)



۱) -۲۰
۲) ۲۰
۳) -۶۰
۴) ۶۰



۱۰۰- دو قطار در امتداد یک خط راست، به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. نمودار تغییرات سرعت برحسب زمان دو قطار، مطابق شکل است. اگر در لحظه‌ی $t=0$ فاصله‌ی دو قطار از هم ۲۰۰ متر باشد، وقتی دو قطار متوقف می‌شوند، چند متر از هم فاصله دارند؟

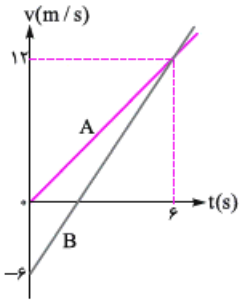
(سراسری تجربی - ۸۷، خارج از کشور)

۱) ۲۰

۲) ۷۰

۳) ۱۰۰

۴) ۱۵۰



۱۰۱- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک مطابق شکل روبه‌روست. اگر در لحظه‌ی $t=0$، هر دو از یک نقطه عبور کرده باشند، در لحظه‌ای که سرعت آن‌ها برابر است، در چه فاصله‌ای از هم، برحسب متر، قرار گرفته‌اند؟

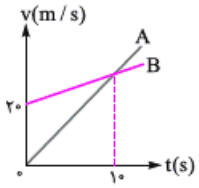
(آزمایشی آموزش و پرورش شهر تهران - ۸۸)

۱) ۱۸

۲) ۲۴

۳) ۳۶

۴) ۵۴



۱۰۲- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که در مبدأ زمان از یک مکان عبور کرده‌اند، مطابق شکل روبه‌روست. بیشترین فاصله‌ی دو متحرک از یکدیگر در ۱۰ ثانیه‌ی اول حرکت چند متر است؟

۱) ۲۰

۲) ۱۰۰

۳) ۲۰۰

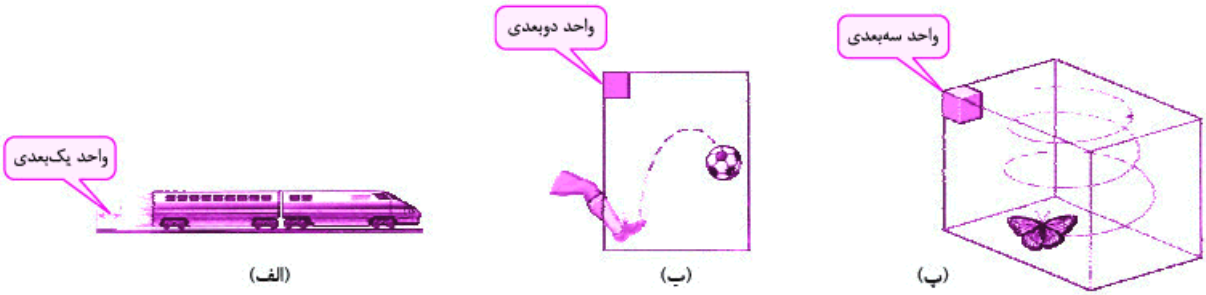
۴) اطلاعات داده‌شده کافی نیست.

فصل اول: حرکت‌شناسی

۱- **گزینه ۱** درس‌نامه‌های این کتاب رو از اول تا آخرش می‌خونید! *به جان شما، اصلاً جای چونه نداره!! اولیشو تحویل بگیرید!!*

۱) مکان ـ جابه‌جایی

◀ **طبقه‌بندی حرکت بر مبنای مسیر حرکت:** اگر مسیر حرکت متحرکی به شکل خطی باشد، حرکت آن را «یک‌بُعدی» و اگر بر مسیر خمیده‌ای در یک صفحه حرکت کند، حرکت آن را «دوبعدی» و اگر نتوان مسیر حرکت آن را در یک صفحه‌ی مسطح نشان داد، حرکت آن را «سه‌بعدی» می‌گوییم (شکل ۱). ما فعلاً حرکت‌های یک‌بعدی را بررسی می‌کنیم و پس از تسلط به مفاهیم آن، وارد فضای دوبعدی می‌شویم.

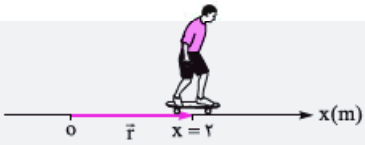


شکل ۱، الف) نمونه‌ای از حرکت یک‌بعدی. ب) نمونه‌ای از حرکت دوبعدی. پ) نمونه‌ای از حرکت سه‌بعدی.

◀ **بردار مکان:** برای تشخیص مکان یک متحرک، نقطه‌ای را به عنوان مبدأ مختصات (مبدأ مکان) در نظر می‌گیرند و تمام فاصله‌ها را نسبت به این نقطه می‌سنجند. **برداری که مبدأ مختصات را به مکان متحرک وصل می‌کند، «بردار مکان» می‌نامیم** و معمولاً آن را با نماد $\vec{r}$ نشان می‌دهیم.

توجه ۱ مختصه‌ی مبدأ مکان، صفر در نظر گرفته می‌شود؛ مگر این‌که طراح مسئله فرض دیگری را جلوی پای ما بگذارد.

نمونه ۱ در شکل ۲، بردار مکان اسکیت‌سواری که به فاصله‌ی ۲ متری از مبدأ مختصات (نقطه‌ی o) و در قسمت مثبت محور x قرار دارد، رسم شده است. بردار مکان این شخص به‌صورت $\vec{r} = x\vec{i} = ۲\vec{i}$ (در SI) نمایش داده می‌شود.



شکل ۲

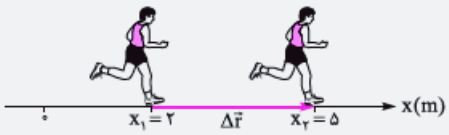
توجه ۲ برای معرفی مکان جسمی که روی محور مکان (در یک بُعد) حرکت می‌کند، لازم نیست حتماً از نمایش بُرداری استفاده کنیم. با مشخص کردن مختصات جسم، مکان جسم معلوم می‌شود.

نمونه ۲ در شکل ۲، می‌توان موقعیت مکانی شخص را با عبارت $x = +۲\ m$ بیان کرد؛ از این عبارت برداشت می‌شود که شخص روی محور x و در ناحیه‌ی مثبت آن و به فاصله‌ی ۲ متری مبدأ قرار دارد.

⚠ حواس‌ها جمع! بردار مکان یک جسم در یک لحظه، هیچ اطلاعی در مورد جهت حرکت جسم در آن لحظه به ما نمی‌دهد.

◀ **جابه‌جایی:** برای نمایش تغییر مکان یک متحرک، از بردار «جابه‌جایی» استفاده می‌کنیم. **جابه‌جایی، برداری است که مکان اولیه‌ی متحرک را به مکان ثانویه‌ی آن وصل می‌کند.**

نمونه ۳ شکل ۳ بردار جابه‌جایی شخصی را نشان می‌دهد که از مکان $x_۱ = ۲\ m$ به مکان $x_۲ = ۵\ m$ منتقل شده است.



شکل ۳

توجه ۳ مقدار جابه‌جایی یک متحرک را در انتقال از مکان $x_۱$ به مکان $x_۲$، می‌توان به کمک رابطه‌ی ۱ محاسبه کرد.

$$\boxed{\Delta x = x_۲ - x_۱}$$ (رابطه‌ی ۱)

نمونه ۴ جابه‌جایی شخص در شکل ۳، برابر است با:

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۵ - ۲ \rightarrow \Delta x = ۳\ m$$

که نمایش برداری آن (در SI) به‌صورت مقابل است:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} = ۳\vec{i}$$

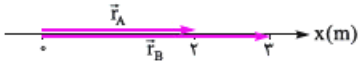
نکته ۱ اگر $\Delta x > ۰$ باشد، متحرک در جهت محور x و اگر $\Delta x < ۰$ باشد، متحرک در خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود.

◄ **مسافت: طول مسیر طی‌شده توسط متحرک را «مسافت» می‌نامیم.** برخلاف جابه‌جایی، که اندازه‌اش فقط به فاصله‌ی مکان اولیه تا مکان ثانویه بستگی دارد، مسافت به مسیر پیموده‌شده نیز بستگی دارد.

نمونه ۵ اگر شناگری درازای استخری به طول $۲۰\,m$ را در امتداد یک خط راست به‌صورت رفت‌وبرگشت طی کند و سر جای اولیه‌ی خود برگردد، مسافت طی‌شده توسط او برابر $۴۰\,m$ و جابه‌جایی‌اش برابر صفر خواهد بود.

نکته ۲ در صورتی که متحرک روی یک خط راست حرکت کند و تغییر جهت ندهد، مسافت و جابه‌جاییِ آن هم‌اندازه‌اند.

نکته ۳ جابه‌جایی یک کمیت **برداری** است و در حرکت یک‌بعدی، ممکن است مثبت یا منفی باشد؛ اما مسافت کمیتی **نرده‌ای** و همواره مثبت است.



در شکل روبه‌رو، بردارهای مکان جناب A و جناب B را نشان داده‌ایم! واضح است که در SI، $\vec{r}_A = ۲\vec{i}$ و $\vec{r}_B = ۳\vec{i}$ است؛ به جهت حرکتشون هم ربطی نداره!

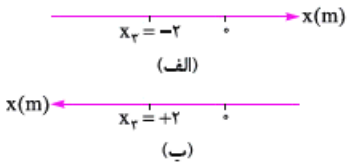
۲- **گزینه ۱** شکل بالا رو ببینید؛ *نه! چون من ببینید!!*

۳- **گزینه ۲** چون A در جهت محور x حرکت می‌کند، $\Delta x_A > ۰$ و چون B در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، $\Delta x_B < ۰$ است. پس $\Delta\vec{r}_A$ در جهت محور x و $\Delta\vec{r}_B$ در خلاف جهت محور x است.

۴- **گزینه ۱** وقتی می‌خواهیم جابه‌جایی متحرک را در یک مسیر حساب کنیم، فقط ابتدا و انتهای مسیر متحرک برای ما مهم است و *این‌که متحرک در اواسط مسیر کجا رفته، با کی گشته و ...، به ما ربطی نداره!!* بنابراین، بردار جابه‌جایی متحرک در انتقال از مکان $x_۱$ به مکان $x_۳$ و در SI برابر است با:

$$\Delta\vec{r} = (x_۳ - x_۱)\vec{i} = [-۲-(-۳)]\vec{i} \rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{i}$$

۵- **گزینه ۳** اولاً که جسم در نهایت، به مکان $x_۳$ منتقل شده است و به فاصله‌ی ۲ متری مبدأ قرار دارد (یا ۳، یا ۴). ثانیاً وقتی می‌گوییم: «$x_۳ = -۲\,m$ است.» یعنی اگر از مبدأ، $۲\,m$ در خلاف جهت محور x حرکت کنیم، به مکان $x_۳$ می‌رسیم (شکل الف). حالا اگر جهت محور x عکس شود (شکل ب)، به این برداشت می‌رسیم که برای رسیدن به مکان $x_۳$، این‌بار باید $۲\,m$ در جهت محور x حرکت کنیم؛ یعنی در این شرایط، $x_۳ = +۲\,m$ و به زبان برداری $\vec{r}_۳ = ۲\vec{i}$ (در SI) است.



۶- **گزینه ۴** اندازه‌ی جابه‌جایی، برابر فاصله‌ی نقطه‌ی آغاز تا پایان حرکت است: $\Delta x = AB$

اما مسافت (d) برابر طول کل مسیر حرکت است: $d = AC + CB \xrightarrow[(CB=AB)]{(AC=۲AB)} d = ۳AB \rightarrow d = ۳\Delta x$

۷- **گزینه ۴** شناگر در هر دقیقه مسافت $۱۰\,m$ و در ۱۵ دقیقه مسافت $۱۵۰\,m$ (یعنی $۱۵\times۱۰\,m$) را طی می‌کند؛ این از مسافت! و اما جابه‌جایی: شناگر در مدت ۱۵ دقیقه، ۱۵بار طول استخر را طی می‌کند. از آن‌جا که شناگر در هر رفت‌وبرگشت، به نقطه‌ی شروع حرکتش می‌رسد، بعد از پیمودن ۱۴باره‌ی طول استخر (۷ رفت‌وبرگشت) به مکان اولیه و بار ۱۵اُم به انتهای دیگر استخر می‌رسد و به فاصله‌ی ۱۰ متری از مکان اولیه‌اش می‌رسد. (باز هم تأکید می‌کنم که جابه‌جایی به فاصله‌ی مستقیم مبدأ تا مقصد بستگی دارد و به طول مسیر طی‌شده بی‌اعتناست!)

۸- **گزینه ۲** به نظر من این تست، ساده‌ترین تست در تاریخ کنکورهای سراسریه!! با آوردن این تست، خواستم یک بحث مقدماتی رو در رابطه با نمودار مکان ـ زمان راه بندازم! همراه ما باشید!

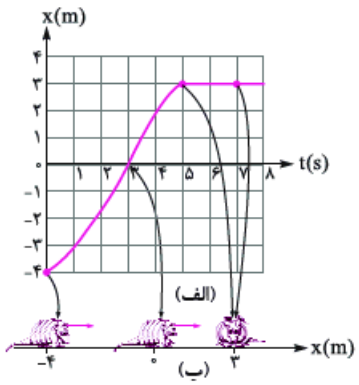
۲) مقدمه‌ای بر نمودار مکان ـ زمان (x - t)

از روی نمودار مکان ـ زمان یک متحرک، می‌توان مکان، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط آن را به‌دست آورد.

۱ **مکان در هر لحظه:** این کم‌ترین انتظار ما از نمودار مکان ـ زمان است!

نمونه ۱ شکل ۴ نمودار مکان ـ زمان جانوری را نشان می‌دهد که روی محور x در حال حرکت است. از روی این نمودار، می‌فهمیم که جانور ...

- در مبدأ زمان $(t_۰ = ۰)$، در مکان $x_۰ = -۴\,m$ بوده است.
- در لحظه‌ی $t = ۳\,s$، از مبدأ مکان $(x = ۰)$ عبور کرده است.
- تا لحظه‌ی $t = ۳\,s$، در قسمت منفی محور x و از این لحظه به بعد، در قسمت مثبت محور x بوده است.
- تا لحظه‌ی $t = ۵\,s$، در جهت محور x حرکت کرده است.
- از لحظه‌ی $t = ۵\,s$ به بعد، در مکان $x = ۳\,m$ جاخوش‌کرده است!



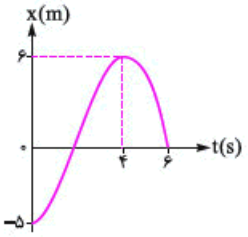
شکل ۴، الف) نمودار مکان ـ زمان یک جانور.
ب) نمایش مسیر حرکت جانور.

خیلی از دانش‌آموزان، مسیر حرکت یک متحرک را با شکل نمودار مکان ـ زمان آن یکی می‌گیرند؛ اشتباه است! همان‌طور که در نمونه‌ی بالا می‌بینید، ممکن است نمودار مکان ـ زمان یک متحرک به شکل منحنی، اما مسیر حرکت آن یک خط راست باشد؛ خواهشاً بین این دو، فرق بگذارید!

۲ جابه‌جایی: واضح است که با در دست داشتن مکان متحرک در دو لحظه، می‌توان جابه‌جایی متحرک را در بین آن دو لحظه حساب کرد $(\Delta x = x_2 - x_1)$.

۳ مسافت: اگر مجموع جابه‌جایی‌های متحرک در جهت مثبت را با اندازه‌ی مجموع جابه‌جایی‌های آن در جهت منفی جمع کنید، مسافت طی‌شده توسط متحرک به‌دست می‌آید.

نمونه۲ شکل ۵ نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که از مبدأ زمان تا لحظه‌ی $t_1 = 4\,s$ در جهت محور x و از این لحظه تا لحظه‌ی $t_2 = 6\,s$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. جابه‌جایی متحرک را در بازه‌ی زمانی $t_0 = 0$ تا t_1 با Δx_1 و در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 با Δx_2 نشان می‌دهیم؛ داریم:



شکل ۵

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = -5\,m \\ t_1 = 4\,s \rightarrow x_1 = 6\,m \\ t_2 = 6\,s \rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 6 - (-5) = 11\,m$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 0 - 6 = -6\,m$$

جابه‌جایی متحرک (Δx) در بازه‌ی زمانی t_0 تا t_2 برابر است با:

$$\Delta x = x_2 - x_0 = 0 - (-5) \rightarrow \Delta x = 5\,m$$

البته برای محاسبه‌ی Δx، می‌توانیم جابه‌جایی‌های مسیر را با هم جمع جبری کنیم:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 11 - 6 \rightarrow \Delta x = 5\,m$$

برای محاسبه‌ی مسافت (d)، باید اندازه‌ی جابه‌جایی‌ها را با هم جمع کنیم:

$$d = \Delta x_1 + |\Delta x_2| = 11 + 6 \rightarrow d = 17\,m$$

نکته در نمونه‌ی ۲، تا لحظه‌ی $t = 4\,s$ متحرک در جهت محور x و از لحظه‌ی $t = 4\,s$ تا $t = 6\,s$ متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. بنابراین، متحرک در لحظه‌ی $t = 4\,s$ تغییر جهت می‌دهد. نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی روی نمودار را نقاط اکسترمم نسبی می‌نامیم. متحرک در این نقاط (در نمودار مکان ـ زمان) تغییر جهت می‌دهد.

۹- **گزینه۱** حرکت مورچه را می‌توان به چهار مرحله تقسیم کرد:

الف در بازه‌ی زمانی $t = 0$ تا $t = 8\,s$، از مبدأ مکان $(x = 0)$ به مکان $x = 40\,cm$ می‌رود؛ یعنی $+40\,cm$ جابه‌جا می‌شود:

(الف)

$$\Delta x = x - x_0 = 40 - 0 = 40\,cm$$

ب در بازه‌ی زمانی $t = 8\,s$ تا $t = 12\,s$، در مکان $x = 40\,cm$ قرار دارد و ساکن است.

(ب)

پ در بازه‌ی زمانی $t = 12\,s$ تا $t = 14\,s$، از مکان $x_1 = 40\,cm$ به مکان $x_2 = 20\,cm$ منتقل می‌شود؛ یعنی $-20\,cm$ جابه‌جا می‌شود:

(پ)

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 20 - 40 = -20\,cm$$

ث در بازه‌ی زمانی $t = 14\,s$ تا $t = 18\,s$، در مکان $x = 20\,cm$ قرار می‌گیرد.

با توجه به این صحبت‌ها، مورچه فقط در ۸ ثانیه‌ی اول، در جهت محور x حرکت می‌کند.

(ث)

۱۰- **گزینه۱** به مدت ۲s و در بازه‌ی زمانی $[12\,s, 14\,s]$.

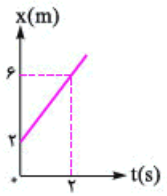
۱۱- **گزینه۲** به مدت ۸s و در بازه‌های زمانی $[8\,s, 12\,s]$ و $[14\,s, 18\,s]$.

۱۲- **گزینه۴** در تمام مدت ۱۸s، مورچه در مکان‌های $x > 0$ است.

۱۳- **گزینه۴** یکی از مهارت‌های اولیه‌ای که باید در تجزیه و تحلیل نمودارهای خطی به آن برسید، تعیین سریع مختصات یک نقطه از نمودار با استفاده از شیب آن است.

۳) تعیین مختصات نقاط روی نمودارهای خطی با استفاده از مفهوم شیب

نمونه فرض کنید نمودار مکان ـ زمان متحرکی مطابق شکل الف است و می‌خواهیم مکان متحرک را در لحظه‌ی $t=5s$ تعیین کنیم. سه راه اصلی در پیش داریم؛ انتخاب می‌کنید!



(الف)

۱ استفاده از معادله‌ی خط: شیب خط رو حساب می‌کنیم:

$$m=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{6-2}{2-0}=2$$

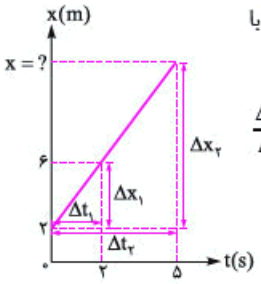
با توجه به عرض از مبدأ نمودار $(x_0=2m)$، معادله‌ی خط رو می‌نویسیم:

$$x=mt+x_0=2t+2$$

حالا لحظه‌ی $t=5s$ رو در معادله قرار می‌دیم:

$$x=2\times5+2=12m$$

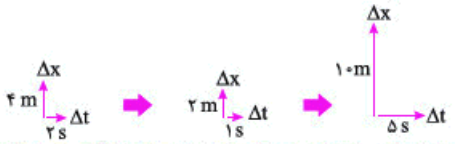
۲ استفاده از تشابه مثلثاتی: نسبت تشابه بین مثلث‌هایی که ارتفاع و قاعده‌ی آن‌ها در شکل ب، با نمادهای Δx و Δt نشان داده شده، x را در لحظه‌ی $t=5s$ مشخص می‌کند:



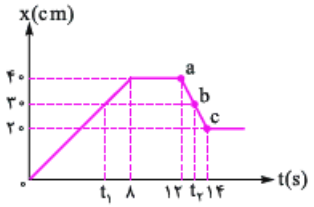
(ب)

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}\rightarrow\frac{6-2}{2-0}=\frac{x-2}{5-0}\rightarrow\frac{x-2}{5}=2\rightarrow x-2=10\rightarrow x=12m$$

۳ استفاده از مفهوم شیب: شیب خط، ثابت است. پس نسبت تغییرات کمیت واقع بر محور قائم به تغییرات کمیت واقع بر محور افقی، مقداری است ثابت. شکل ب نشان می‌دهد که متحرک در مدت ۲ ثانیه، $4m$ جابه‌جا شده است؛ یعنی هر ثانیه $2m$ جابه‌جا می‌شود و در مدت ۵ ثانیه، $10m$ جابه‌جا می‌شود و از مکان $x_0=2m$ به مکان $x=12m$ می‌رسد. این مطالب رو می‌تونیم به‌صورت رمزی و به شکل مقابل نشون بدیم:



با توجه به شکل مقابل، فاصله‌ی متحرک از مبدأ در لحظه‌های t_1 و t_2، $30cm$ شده. متحرک در مرحله‌ی اول $40cm$ رو در $8s$ طی می‌کنه؛ پس $30cm$ رو در $6s$ می‌ره.



زمان (s)	جابه‌جایی (cm)
۸	۴۰
t_1	۳۰

$$\rightarrow t_1=\frac{8\times30}{40}=6s$$

محاسبه‌ی t_2 نیاز به این کارا نداره! نقطه‌ی b وسط پاره‌خط ac قرار داره (چون $x_b=\frac{x_a+x_c}{2}$ است).

پس t_2 هم وسط $t_a=12s$ و $t_c=14s$ قرار گرفته:

$$t_2=\frac{t_a+t_c}{2}=\frac{12+14}{2}=13s$$

۱۴- گزینه۲ مورچه در لحظه‌ی $t=4s$ (که وسط لحظه‌های $t=0$ و $t=8s$ است) در مکان $x=20cm$ (که وسط مکان‌های $x=0$ و $x=40cm$ است) قرار می‌گیرد. پس:

$$\Delta x=x_{(t=8s)}-x_{(t=4s)}=40-20\rightarrow\Delta x=20cm$$

۱۵- گزینه۳ دوچرخه‌سوار در بازه‌ی زمانی $t=0$ تا $t=4s$ به اندازه‌ی $40m$ و در بازه‌ی زمانی $t=6s$ تا $t=8s$ به اندازه‌ی $20m$ در جهت محور x حرکت می‌کند که مجموع این دو جابه‌جایی می‌شود $60m$ در جهت محور x.

۱۶- گزینه۳ با توجه به نمونه‌ی ۲ درس‌نامه‌ی ۲، جابه‌جایی را در بازه‌ی زمانی $t=0$ تا $t=8s$ با Δx_1 و در بازه‌ی زمانی $t=8s$ تا $t=14s$ با Δx_2 نشان می‌دهیم و می‌نویسیم:

$$\Delta x_1=x_{(t=8s)}-x_0=60-0=60m$$

$$\Delta x_2=x_{(t=14s)}-x_{(t=8s)}=0-60=-60m\rightarrow d=\Delta x_1+|\Delta x_2|=60+60\rightarrow d=120m$$

۱۷- گزینه۳ هر دو متحرک روی محور x از مکان ۰ تا x_1 جابه‌جا شده‌اند؛ تغییر جهت نداده‌اند؛ پس جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط دو متحرک برابر است:

$$\Delta x_A=\Delta x_B\quad,\quad d_A=d_B$$

۱۸- گزینه۱ جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی $t=0$ تا $t=1s$:

$$\Delta x_1=x_{(t=1s)}-x_0=0-4=-4m$$

جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی $t=1s$ تا $t=2s$:

$$\Delta x_2=x_{(t=2s)}-x_{(t=1s)}=4-0=4m$$

جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی $t=2s$ تا $t=3s$:

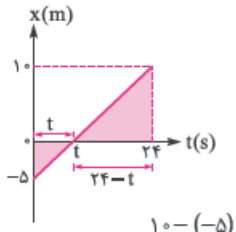
$$\Delta x_3=x_{(t=3s)}-x_{(t=2s)}=0-4=-4m$$

کل جابه‌جایی: $\Delta x = x_{(t=3\,s)} - x_0 = 0 - 4 = -4\,m$ یا $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = -4 + 4 - 4 = -4\,m$

و مسافت کل: $d = |\Delta x_1| + \Delta x_2 + |\Delta x_3| = 4 + 4 + 4 = 12\,m$

و نسبت این دو: $\frac{\Delta x}{d} = \frac{-4}{12} \rightarrow \frac{\Delta x}{d} = -\frac{1}{3}$

۱۹- گزینه۲ **(استفاده از تشابه مثلثاتی):** با توجه به شکل مقابل، متحرک در لحظه‌ی t، از مبدأ مکان عبور می‌کند. برای محاسبه‌ی t می‌توانیم بین مثلث‌های مشخص‌شده در شکل، نسبت تشابه بنویسیم:



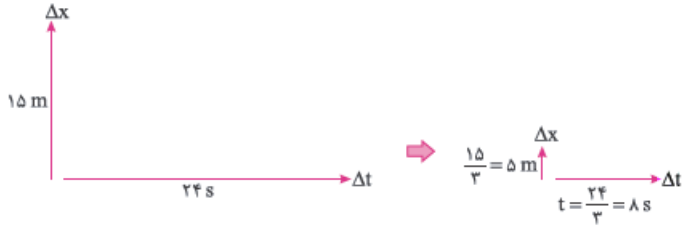
$$\frac{10}{5} = \frac{24-t}{t} \rightarrow 2 = \frac{24-t}{t} \rightarrow 2t = 24 - t \rightarrow 3t = 24 \rightarrow t = 8\,s$$

(استفاده از معادله‌ی خط): متحرک در مدت ۲۴ s، $10 - (-5) = 15\,m$ جابه‌جا شده؛ پس: $m = \frac{10-(-5)}{24-0} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ (شیب خط)

عرض از مبدأ نمودار، برابر $x_0 = -5\,m$ است و: $x = mt + x_0 = \frac{5}{8}t - 5$

حالا باید ببینیم در چه لحظه‌ای $x = 0$ می‌شود: $0 = \frac{5}{8}t - 5 \rightarrow \frac{5}{8}t = 5 \rightarrow t = 8\,s$

تیزباش بهترین کار اینه که ذهنی حساب کنی! متحرک در مدت ۲۴ s، ۱۵ m جابه‌جا می‌شه و در مدت t ثانیه، ۵ m (از مکان $x_0 = -5\,m$ می‌رسه به مکان $x = 0$). با توجه به شیب ثابت نمودار، نسبت $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ثابت می‌ماند؛ پس t برابر ۸ s است. من از نوشتن رمزیِ این تناسب، خیلی خوشم می‌یاد! ببین!



۲۰- گزینه۴ متحرک همیشه در جهت محور x حرکت می‌کنه ($\Delta x > 0$) و هیچ‌وقت تغییر جهت نمی‌ده.

۲۱- گزینه۲ در لحظه‌های t_1 و t_3 (نقاط اکسترمم نسبی نمودار)، سوی حرکت تغییر می‌کند.

۲۲- گزینه۳ در بازه‌های زمانی t_1 تا t_2 و t_3 تا t_4 که نمودار به محور زمان نزدیک می‌شود، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است.

۲۳- گزینه۴ لطفاً به یک درس‌نامه‌ی دیگر توجه بفرمایید.

۴) معادله‌ی حرکت

◄ معادله‌ی ریاضی‌ای که مکان متحرک را به‌صورت تابعی از زمان بیان می‌کند و توسط آن می‌توان مکان متحرک را در هر لحظه تعیین کرد، «معادله‌ی مکان ـ زمان» یا «معادله‌ی حرکت» نام دارد. نمایش معادله‌ی حرکت جسمی که روی محور x حرکت می‌کند، به‌صورت $x = f(t)$، نشان می‌دهد که مکان متحرک تابع زمان حرکت است.

نمونه۱ فرض کنید معادله‌ی حرکت جسمی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = t^2 - 2t + 1$ است. از این معادله می‌فهمیم که متحرک ...

- در مبدأ زمان ($t_0 = 0$) در مکان $x_0 = 1\,m$ بوده است. $t_0 = 0 \rightarrow x_0 = 0^2 - 2\times0 + 1 = 1\,m$
- در لحظه‌ی $t_1 = 1\,s$ از مبدأ مکان ($x = 0$) عبور کرده است. $t_1 = 1\,s \rightarrow x_1 = 1^2 - 2\times1 + 1 = 0$
- در لحظه‌ی $t_2 = 2\,s$ به مکان اولیه‌اش برگشته است. $t_2 = 2\,s \rightarrow x_2 = 2^2 - 2\times2 + 1 = 1\,m \rightarrow x_2 = x_0$

نکته۱ به مکان متحرک در مبدأ زمان، می‌گوییم «مکان اولیه». برای محاسبه‌ی مکان اولیه، باید x را در لحظه‌ی $t = 0$ به‌دست آوریم.

توجه **منظور از مبدأ زمان، لحظه‌ی شروع مطالعه‌ی حرکت است**؛ دقت! دقت! گفتم لحظه‌ی شروع مطالعه‌ی حرکت؛ نه لحظه‌ی شروع حرکت! این عبارت‌ها به یک معنا نیستند. (مثلاً ممکن است حرکتی را از اواسط آن، مورد بررسی قرار دهیم؛ در این صورت، مبدأ زمان نسبت به لحظه‌ی شروع حرکت، تأخیر دارد!)

نکته۲ در حرکت بر محور x، متحرک به تعداد دفعاتی که $x = 0$ می‌شود، از مبدأ مکان عبور می‌کند.

نکته۳ برای محاسبه‌ی جابه‌جایی بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2، مکان متحرک در این دو لحظه رو به‌دست می‌یاریم و از هم کم می‌کنیم $(\Delta x = x_2 - x_1)$.

نمونه۲ در نمونه‌ی ۱، جابه‌جایی متحرک بین دو لحظه‌ی $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$ می‌شود: $\Delta x = x_2 - x_1 = 1 - 0 \rightarrow \Delta x = 1m$

یکایک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) معادله‌ی حرکت، رابطه‌ی مکان و زمان حرکت را بیان می‌کند؛ نه رابطه‌ی سرعت و زمان حرکت را!!

۲) قیافش که نشون می‌ده یک معادله‌ی حرکته! اما حرکتی با این معادله تا به حال دیده نشده! چرا که به ازای هر t، دوتا x به‌دست می‌آید (یکی مثبت، یکی منفی). یعنی متحرک در هر لحظه، می‌تواند در دو جا حضور داشته باشد! می‌شه؟!

۳) *رل‌بندم!* مکان ـ زمان؛ نه سرعت ـ مکان!

۴) این معادله، مکان را به‌صورت تابعی از زمان نشان می‌دهد؛ **پس فورِ فورشه!**

۲۴- **گزینه۴** سه گزینه‌ی اول، معادله‌های حرکت اجسامی را نشان می‌دهند که بر روی محور x حرکت می‌کنند. دقت کنید که معادله‌ی حرکت جسمی که روی یک خط راست حرکت می‌کند، می‌تواند معادله‌ی ریاضی ساده‌ای داشته باشد (مثل $x = 2t$)؛ می‌تواند معادله‌ی ریاضی پیچیده‌ای داشته باشد (مثل $x = \log t^2$!)؛ در هر دو صورت، متحرک از صراط مستقیم (در این مثال‌ها، محورx) خارج نمی‌شود!!

۲۵- **گزینه۴** مکان متحرک در لحظه‌ی $t = 1s$ برابر است با: $x = t^2 - 2t - 3 = 1^2 - 2\times1 - 3 = -4m$

پس متحرک در لحظه‌ی $t = 1s$ در فاصله‌ی ۴ متری مبدأ قرار می‌گیرد (دقت کنید که همواره فاصله با عددی مثبت بیان می‌شود). $|x| = 4m$

۲۶- **گزینه۲** با جای‌گذاری لحظه‌ی $t_0 = 0$ در معادله‌ی حرکت، مکان اولیه‌اش معلوم می‌شود: $x_0 = 0^2 - 2\times0 - 3 = -3m$

صورت تست در واقع، فاصله‌ی مکان‌های x تا x_0 را از ما می‌خواهد: $|\Delta x| = |x - x_0| = |-4-(-3)| \rightarrow |\Delta x| = 1m$

۲۷- **گزینه۲** می‌خواهیم ببینیم چند ثانیه پس از لحظه‌ی $t = 0$، مجدداً $x = x_0 = -3m$ می‌شود. کافی است ریشه‌های معادله‌ی $x = -3m$ را به‌دست آوریم: $x = t^2 - 2t - 3 = -3 \rightarrow t^2 - 2t = 0 \rightarrow t = 0$ ✗ , $t = 2s$ ✓

۲۸- **گزینه۱** از حل معادله‌ی $x = 0$، لحظه‌های عبور متحرک از مبدأ به‌دست می‌آید.

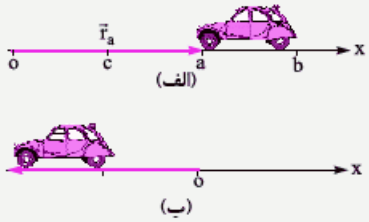
$t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow (t-3)(t+1) = 0 \rightarrow t = -1s$ ✗ , $t = 3s$ ✓

توجه داشته باشید که ما حرکت را از لحظه‌ی $t = 0$ به بعد بررسی می‌کنیم و به زمان‌های قبل از آن، حتی اگر حرکتی وجود داشته باشد، کاری نداریم (یعنی $t \in R^+$). بنابراین، متحرک فقط یک‌بار (در لحظه‌ی $t = 3s$) از مبدأ مکان عبور می‌کند. *(اونایی که ۳ رو زیرا طراح تست که نقطه‌ی عبور از مبدا رو نفواسته! این‌جور اشتباه‌ها خیلی سوختن داره! خواستونو بیشتر جمع کنیدا)*

۲۹- **گزینه۱** یک متن آموزشی و ادامه‌ی ماجرا!

۵) شرط تغییر جهت بردار مکان

فرض کنید همانند شکل ۶ـ الف، اتومبیلی در مکان $x = a$ قرار دارد. بردار مکان سپر جلوی اتومبیل $(\vec{r}_a)$ در جهت محور x است. اگر اتومبیل در مکان‌های مثبت b یا c قرار بگیرد، باز هم بردار مکان در جهت محور x خواهد بود و تغییر جهت نمی‌دهد. پس چه موقعی بردار مکان اتومبیل تغییر جهت می‌دهد؟ زمانی که مطابق شکل ۶ـ ب، از مبدأ مختصات عبور کند. در این صورت، بردار مکان اتومبیل در خلاف جهت محور x خواهد بود.



شکل ۶

نتیجه شرط تغییر جهت بردار مکان یک متحرک، آن است که متحرک از مبدأ مختصات عبور کند.

نمونه فرض کنید معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = t^2 - 4t + 3$ است. این معادله را می‌توان به‌صورت $x = (t-1)(t-3)$ نوشت و ریشه‌های آن را حساب و مطابق جدول مقابل تعیین علامت کرد.

t (s)	۰		۱		۳		∞
x		+		−		+	

جدول نشان می‌دهد که متحرک دوبار (در لحظه‌های $t = 1s$ و $t = 3s$) از مبدأ مکان عبور کرده؛ پس بردار مکان متحرک دوبار تغییر جهت داده است.

معادله‌ی حرکت ذره‌ی مطرح‌شده در صورت تست ۲۹، برابر است با: $x = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$

این ذره هرگز در مکان‌های منفی قرار نمی‌گیرد $(x \geq 0)$. پس، بردار مکان آن مادام‌العمر در جهت محور x است و هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

۳۰- **گزینه۴** **در لحظه‌ی به‌هم‌رسیدن، دو متحرک در یک مکان قرار می‌گیرند؛** یعنی xشان برابر می‌شود؛ پس باید ریشه‌های قابل پذیرش معادله‌ی $x_1 = x_2$ را به‌دست آوریم. $x_2 = x_1 \rightarrow t^2 + 6t + 10 = -t^2 + 2t \rightarrow 2t^2 + 4t + 10 = 0$

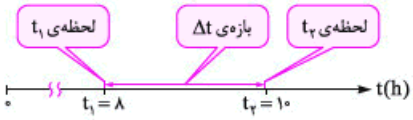
Δی معادله‌ی بالا منفی است $(\Delta = 4^2 - 4\times2\times10 = -64)$. پس هیچ لحظه‌ای پیدا نمی‌شود که به ازای آن، دو متحرک در کنار یکدیگر دیده شوند.

۳۱- **گزینه۱** بهتر است به بهانه‌ی حل این تست، گریزی به مفهوم بازه‌ی زمانی بزنیم.

۶) مفهوم زمان

نمونه‌ی ۱ فرق بین لحظه و بازه‌ی زمانی را مشخص می‌کند.

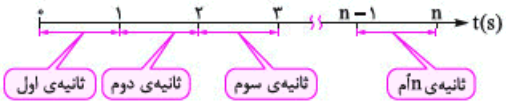
نمونه۱ فرض کنید رأس ساعت ۸ وارد مدرسه شده‌اید و رأس ساعت ۱۰ (به *دلیل مشغله‌ی کاری!*) مدرسه را ترک می‌کنید. مدت زمان حضور شما در مدرسه، ۲ h به‌طول می‌انجامد (از لحظه‌ی $t_1 = 8\,h$ شروع و تا لحظه‌ی $t_2 = 10\,h$ ادامه می‌یابد.) به عبارت دیگر، بازه‌ی زمانی حضور شما در کلاس، تمام لحظه‌های بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 را شامل می‌شود و مدت آن برابر است با: $\Delta t = t_2 - t_1 = 10 - 8 \rightarrow \Delta t = 2\,h$



شکل ۷، هر لحظه با یک نقطه روی محور زمان نشان داده می‌شود. بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$، همه‌ی لحظه‌های بین دو لحظه‌ی t_1 و t_2 را دربرمی‌گیرد.

در شکل ۷، لحظه‌های t_1، t_2 و بازه‌ی زمانی Δt را روی محور زمان نمایش داده‌ایم.

توجه۱ منظور از ثانیه‌ی اول حرکت، بازه‌ی زمانی $t_0 = 0$ تا $t = 1\,s$؛ منظور از ثانیه‌ی دوم، بازه‌ی زمانی $t = 1\,s$ تا $t = 2\,s$ و ... است. با این حساب، ثانیه‌ی nاُم حرکت، بازه‌ی زمانی‌ای است که از لحظه‌ی $t = n - 1$ تا $t = n$ (هر دو برحسب ثانیه) طول می‌کشد (شکل ۸).



شکل ۸، نمایش بازه‌های زمانیِ یک‌ثانیه‌ای بر روی محور زمان.

توجه۲ منظور از t ثانیه‌ی nاُم، بازه‌ی زمانی‌ای است که از لحظه‌ی $(n-1)t$ ثانیه شروع و در لحظه‌ی nt ثانیه خاتمه می‌یابد.

نمونه۲ دو ثانیه‌ی اول حرکت، یعنی از لحظه‌ی $t = 0$ تا $t = 2\,s$؛ دو ثانیه‌ی دوم حرکت، یعنی از لحظه‌ی $t = 2\,s$ تا $t = 4\,s$ و در حالت کلی، دو ثانیه‌ی nاُم یعنی از لحظه‌ی $t = 2n - 2$ تا $t = 2n$ (هر دو برحسب ثانیه).

نیزباش وقتی می‌گن ۲ ثانیه‌ی دهم، سریع ۲ رو ضرب در ۱۰ کن (۲۰)، حالا ۲تا ازش کم کن (۱۸)؛ پس می‌شه بازه‌ی زمانی $t = 18\,s$ تا $t = 20\,s$. حالا شما بگید: ۴ ثانیه‌ی پنجم از کی تا کی می‌شه؟ بله! از لحظه‌ی $t = 16\,s$ تا $t = 20\,s$ ($20 - 4 = 16\,s$ و $4 \times 5 = 20\,s$).

مکان متحرک در مبدأ زمان ($t_0 = 0$) برابر است با: $x_0 = -2 \times 0^3 + 6 \times 0 + 8 = 8\,m$

و مکان آن در لحظه‌ی $t_1 = 1\,s$: $x_1 = -2 \times 1^3 + 6 \times 1 + 8 = 12\,m$

و مکان آن در لحظه‌ی $t_2 = 2\,s$: $x_2 = -2 \times 2^3 + 6 \times 2 + 8 = 4\,m$

جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی اول (بازه‌ی زمانی t_0 تا t_1) می‌شود: $\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 12 - 8 = 4\,m$

جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی دوم (بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2) می‌شود: $\Delta x_2 = x_2 - x_1 = 4 - 12 = -8\,m$

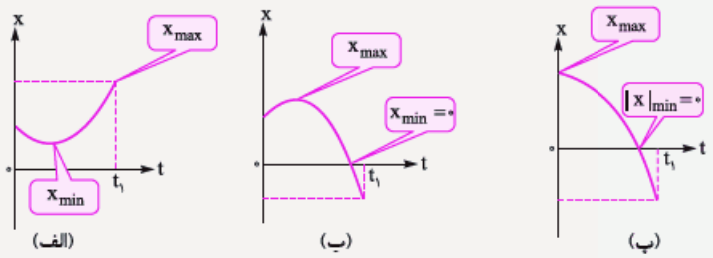
حالا خواسته‌ی طراح تست را اجابت می‌کنیم! $\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{-8}{4} \rightarrow \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -2$

۳۲- **گزینه۲** جنبه‌ی ریاضی این تست‌ها قوی‌تر از جنبه‌ی فیزیکی اون‌هاست! در متن زیر، روش حل این مدل تست‌ها را توضیح داده‌ایم.

۷) استراتژی محاسبه‌ی بیشترین و کم‌ترین فاصله‌ی متحرک از مبدأ مکان

در شکل ۹، نمودار مکان ـ زمان چند متحرک فرضی رو در مدت t_1 رسم کردم.

با توجه به این شکل‌ها، در چه لحظه‌هایی فاصله‌ی متحرک از مبدأ ($|x|$)، بیشینه یا مینیمم می‌شه؟



شکل ۹

پاسخ فاصله‌ی متحرک از مبدأ در شکل ۹ـ پ در اولین لحظه (لحظه‌ی $t = 0$)، در شکل ۹ـ الف در آخرین لحظه‌ی بررسی حرکت (لحظه‌ی t_1) و در شکل ۹ـ ب در نقطه‌ی اکسترمم، بیشینه شده. یعنی برای تعیین x_{max} باید مکان متحرک رو در سه لحظه با هم مقایسه کنی: اول ـ آخر ـ اکسترمم.

برای محاسبه‌ی $|x|_{min}$ هم همین‌کار رو می‌کنیم؛ فقط حواستون رو جمع کنید که اگه مطابق شکل‌های ۹ـ ب و ۹ـ پ متحرک از مبدأ عبور کنه، $|x|_{min} = 0$ می‌شه.

مثال معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x = t^2 - 2t + 6$ است. کم‌ترین و بیشترین فاصله‌ی این متحرک از مبدأ مکان تا لحظه‌ی $t = 3\,s$ چند متر است؟

پاسخ مفهومی‌ترین راه برای حل این سؤال، استفاده از نمودار مکان ـ زمان است. برای رسم نمودار مکان ـ زمان یک معادله‌ی درجه‌ی ۲، کافیه مختصات سه‌تا نقطه‌ی مهم رو معلوم کنی: اول ـ آخر ـ اکسترمم.

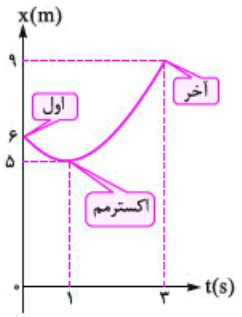
۱ اول: در لحظه‌ی $t = 0$: $x_0 = 0^2 - 2\times 0 + 6 = 6\,m$

۲ آخر: در لحظه‌ی $t = 3\,s$: $x = 3^2 - 2\times 3 + 6 = 9 - 6 + 6 = 9\,m$

۳ اکسترمم: با توجه به این‌که x تابع درجه‌ی دوم از زمان است، نمودار $x - t$ متحرک به شکل یک سهمی است و چون ضریب عبارت درجه ۲ (یعنی ضریب t^2) مثبت است، این سهمی دارای نقطه‌ی مینیمم است. برای تعیین مختصات نقطه‌ی مینیمم، می‌تونی از فرمول آشنای $t = \frac{-b}{2a}$ استفاده کنی:

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 6 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \xrightarrow{(a=1,\ b=-2)} t = \frac{-(-2)}{2\times 1} = 1\,s \rightarrow x = 1^2 - 2\times 1 + 6 = 1 - 2 + 6 = 5\,m$$

ولی بهتره از مفهوم مشتق استفاده کنی. شیب خط مماس بر نمودار در رأس سهمی برابر صفره؛ بنابراین، مشتق تابع (x) نسبت به متغیر (t) در رأس سهمی برابر صفر است.



$$\frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow 2t - 2 = 0 \rightarrow (t = 1\,s\ ,\ x = 5\,m)$$ (مشتق تابع x نسبت به متغیر t)

حالا نمودار مکان ـ زمان متحرک رو رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، کم‌ترین فاصله‌ی متحرک از مبدأ مکان ۵ m و بیشترین فاصله‌ی آن از مبدأ (تا لحظه‌ی $t = 3\,s$)، ۹ m است:

$$x_{min} = 5\,m\ ,\ x_{max} = 9\,m$$

نیوباش لازم نیست حتماً نمودار رسم کنی! مختصات x در لحظه‌ی اول، آخر و اکسترمم رو که حساب کردی، ببین کدوم x از بقیه کم‌تر و کدوم x از بقیه بیشتره.

x رو به شکلی بنویس که از دل اون یک اتحاد (اتحاد دوم) و یک عدد ثابت بیرون بیاد! مطمئنم این کار را قبلاً در درس ریاضی بارها انجام داده‌اید! ببینید:

$$x = t^2 - 2t + 6 = (t^2 - 2t + 1) + 5 = (t - 1)^2 + 5$$

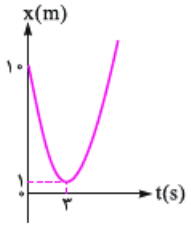
x زمانی مینیمم است که عبارت داخل پرانتز بالا صفر بشه:

$$t = 1\,s:\ t - 1 = 0 \rightarrow x_{min} = 5\,m$$

و وقتی ماکزیمم است که t ماکزیمم باشد. یعنی در لحظه‌ی $t = 3\,s$:

$$t = 3\,s:\ x = 3^2 - 2\times 3 + 6 \rightarrow x_{max} = 9\,m$$

برای پیدا کردن مختصات نقطه‌ی اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) یک تابع درجه‌ی ۲، می‌توان مشتق تابع را نسبت به متغیر، مساوی صفر قرار داد؛ یعنی:



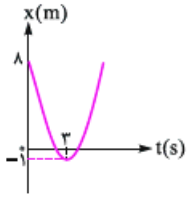
$$\frac{dx}{dt} = 2t - 6 = 0 \rightarrow 2t = 6 \rightarrow t = 3\,s \rightarrow x_{min} = 3^2 - 6\times 3 + 10 = 9 - 18 + 10 \rightarrow x_{min} = 1\,m$$

نمودار مکان ـ زمان متحرک هم به وضوح، جواب بالا را تأیید می‌کند!

x را به شکل مجموع یک اتحاد و یک عدد ثابت می‌نویسیم:

$$x = t^2 - 6t + 10 = (t^2 - 6t + 9) + 1 = (t - 3)^2 + 1 \xrightarrow{(t=3\,s \rightarrow t-3=0)} x_{min} = 1\,m$$

۳۳- گزینه ۱ این‌بار تعیین مختصات نقطه‌ی اکسترمم را در دستور کار خود قرار می‌دهیم:



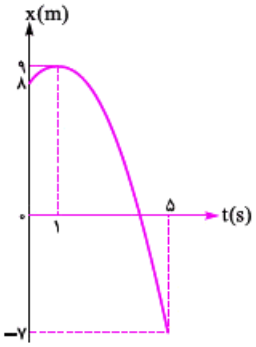
$$\frac{dx}{dt} = 2t - 6 = 0 \rightarrow 2t = 6 \rightarrow t = 3\,s \rightarrow x = 3^2 - 6\times 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1\,m$$

یه‌دفعه عجله نکنی ۲ رو بزنی!

مکان اولیه‌ی متحرک $x_0 = 8\,m$ است و برای رسیدن به مکان $x = -1\,m$، قطعاً از مبدأ عبور می‌کند. پس $|x|_{min} = 0$ است؛ برای درک بهتر مطلب، نمودار مکان ـ زمان متحرک رو هم براتون رسم کردم!

$$x = t^2 - 6t + 8 = (t^2 - 6t + 9) - 1 = (t - 3)^2 - 1$$

در رابطه‌ی بالا، اگر به‌جای عدد «۱-» یک عدد مثبت قرار داشت، امکان نداشت x برابر صفر بشه؛ ولی حالا که یک عدد منفی در کنار عبارت $(t-3)^2$ قرار گرفته، x دوبار صفر می‌شه؛ یک‌بار قبل از لحظه‌ی $t = 3\,s$ (در لحظه‌ی $t = 2\,s$) و یک‌بار بعد از لحظه‌ی $t = 3\,s$ (در لحظه‌ی $t = 4\,s$).



۳۴- گزینه ۳ ریشه‌ی مشتق معادله، نقطه‌ی اکسترمم نمودار را مشخص می‌کند.

$$\frac{dx}{dt}=-۲t+۲=۰ \rightarrow t=۱s \rightarrow x=-۱^۲+۲\times۱+۸=۹\,m$$

با توجه به نمودار نیز، بیشترین فاصله‌ی ذره از مبدأ مکان در ۵ ثانیه‌ی اول، ۹ m است. $x_{max}=۹\,m$

$$x=-t^۲+۲t+۸=-(t^۲-۲t-۸)=-(t^۲-۲t+۱)+۹=۹-(t-۱)^۲$$

بیشترین فاصله‌ی ذره از مبدأ در مکان‌های مثبت برابر است با: $t=۱s: t-۱=۰ \rightarrow x_{max}=۹\,m$

و در مکان‌های منفی: $t=۵s: x=-۵^۲+۲\times۵+۸=-۲۵+۱۰+۸=-۷\,m \rightarrow |x|=۷\,m$

یادتون نره که دعوا بین سه‌تا نقطه‌س: اول، آخر، اکسترمم که در این تست، نقطه‌ی اکسترمم بیشترین x رو داشت.

۳۵- گزینه ۴ درس‌نامه‌ی بعدی به بررسی مفهوم سرعت متوسط می‌پردازد.

۸) سرعت متوسط

به نسبت جابه‌جایی به زمان جابه‌جایی یک متحرک، می‌گوییم «سرعت متوسط» و مقدار آن را با $\bar{v}$ نشان می‌دهیم. بنابراین، در حرکت یک‌بعدی بر روی محور x، رابطه‌ی ۲ برقرار است.

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$ (رابطه‌ی ۲)

توجه یکای سرعت متوسط در SI، «متر بر ثانیه (m/s)» است؛ البته متداول‌ترین یکایی که ما ـ در زندگی روزمره ـ برای بیان سرعت استفاده می‌کنیم، «کیلومتر بر ساعت (km/h)» است. نحوه‌ی تبدیل این دو یکا را در نمونه‌های ۱ و ۲ ملاحظه بفرمایید.

نمونه ۱ فرض کنید سرعت متوسط اتومبیلی ۷۲ km/h است. با توجه به این‌که هر کیلومتر معادل ۱۰۰۰ متر و هر ساعت معادل ۳۶۰۰ ثانیه است، سرعت اتومبیل برحسب متر بر ثانیه برابر است با:

$$\bar{v}=۷۲\frac{km}{h}=۷۲\times\frac{۱۰^۳\,m}{۳۶۰۰\,s}=۷۲\times\frac{۱}{۳/۶}\,m/s \rightarrow \bar{v}=۲۰\,m/s$$

نمونه ۲ فرض کنید سرعت متوسط اتومبیلی ۱۰ m/s است. این سرعت برحسب کیلومتر بر ساعت برابر است با:

$$\bar{v}=۱۰\frac{m}{s}=۱۰\times\frac{۱۰^{-۳}\,km}{\frac{۱}{۳۶۰۰}\,h}=۱۰\times۳/۶\,km/h \rightarrow \bar{v}=۳۶\,km/h$$

نتیجه برای تبدیل یکای km/h به m/s، سرعت مورد نظر را تقسیم بر ۳/۶ و برای تبدیل یکای m/s به km/h، سرعت مورد نظر را ضرب در ۳/۶ می‌کنیم.

نیم‌نگاه بالای ۹۰٪ تست‌هایی که در اون‌ها نیاز به تبدیل واحد km/h به m/s و برعکس وجود داره، سرعت متحرک برحسب m/s، مضرب درستی از ۵ و سرعت متحرک برحسب km/h، مضرب درستی از ۱۸ است. توجه کنید که $۵\,m/s=۱۸\,km/h$ است و برای تبدیل سریع‌تر این دو واحد، می‌تونید از این تساوی استفاده کنید. اگر هم که مقادیر جدول ۱ رو به‌خاطر سپردید که چه بهتر!

v (m/s)	v (km/h)
۵	۱۸
۱۰	۳۶
۱۵	۵۴
۲۰	۷۲
۲۵	۹۰
۳۰	۱۰۸

+۵ +۵ +۵ +۵ +۵ — +۱۸ +۱۸ +۱۸ +۱۸ +۱۸

جدول ۱

نکته از آن‌جا که Δt همواره مثبت است،[1] علامت $\bar{v}$ تابع علامت Δx است. اگر متحرک در جهت محور x جابه‌جا شود، $\bar{v}>۰$ و اگر در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود، $\bar{v}<۰$ است.

۱ - هیچ‌گاه نمی‌توان زمان را به عقب بازگرداند. (به‌پز در فیلم‌های تخیلی!!) پس همیشه $t_۲>t_۱$ و $\Delta t>۰$ است.

«آقا ما قهرمان شنای المپیک رو می‌شناسیم! رفیقمه!! اون‌قدر سرعت متوسطش زیاده! سه‌سوته طول یک استخر رو می‌ره و برمی‌گرده!!»

جمله‌ی فوق اشتباه است! چون پس از بازگشت به نقطه‌ی اولیه، جابه‌جایی و در نتیجه، سرعت متوسط شناگر صفر می‌شود!

۳۶- گزینه ۳ اگر محور x را در جهت جابه‌جایی شناگر در مدت رفت در نظر بگیریم، سرعت متوسط او در این مدت برابر است با:

$$\bar{v}_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}=\frac{40}{20}=2\,m/s$$

چون شناگر مسیرِ آمده را در جهت عکس برمی‌گردد، جابه‌جایی او در مسیر برگشت، منفیِ جابه‌جایی‌اش در مسیر رفت است؛ به این معنی که $\Delta x_2=-\Delta x_1=-40\,m$ می‌باشد. پس:

$$\bar{v}_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}=\frac{-40}{25}=-1/6\,m/s \Rightarrow \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2}=\frac{2}{-1/6} \rightarrow \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2}=-\frac{5}{4}$$

توجه اگر محور x را در جهت جابه‌جایی شناگر در مسیر برگشت انتخاب کنیم، علامت $\bar{v}_1$، منفی و علامت $\bar{v}_2$، مثبت می‌شود؛ اما در جواب نهایی تغییری حاصل نمی‌شود.

۳۷- گزینه ۴ زمان سپری‌شده در جابه‌جایی اتومبیل از نقطه‌ی A تا B برابر است با:

$$\Delta t=t_2-t_1=20-10=10\,s$$

بنابراین، سرعت متوسط اتومبیل در مسیر AB برابر است با:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_B-x_A}{\Delta t}=\frac{200-(-100)}{10}=\frac{300}{10} \rightarrow \bar{v}=30\,m/s$$

۳۸- گزینه ۲ مدت زمانی را که طول می‌کشد تا اتومبیل از A تا o جابه‌جا شود، با Δt_1 و زمان جابه‌جایی از o تا B را با Δt_2 نشان می‌دهیم. زمان جابه‌جایی از A تا B (یعنی Δt) برابر مجموع زمان‌های این دو بازه خواهد بود:

$$\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2=10+20=30\,s$$

بنابراین، سرعت متوسط اتومبیل در مسیر AB می‌شود:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_B-x_A}{\Delta t}=\frac{200-(-100)}{30}=\frac{300}{30} \rightarrow \bar{v}=10\,m/s$$

۹) چه وقت زمان‌ها رو با هم جمع می‌کنیم و چه وقت ازهم کم؟!

طول مدت بازه‌ی زمانی بین لحظه‌های t_1 و t_2، برابر اندازه‌ی تفاضل این دو لحظه از یکدیگر است $(\Delta t=t_2-t_1)$؛ اما اگر حرکتی در چند بازه‌ی زمانی (متوالی) صورت بگیرد، کل زمان حرکت، برابر مجموع زمان‌های این بازه‌هاست $(\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2+\cdots+\Delta t_n)$.

نمونه فرض کنید متحرکی نصف مسیری رو در مدت $\Delta t_1=10\,s$ و نصف دیگرش رو در مدت $\Delta t_2=30\,s$ طی می‌کند. کل زمان حرکت متحرک می‌شه:

$$\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2=10+30 \rightarrow \Delta t=40\,s$$

حالا اگر متحرک همون مسیر رو بین دو لحظه‌ی $t_1=10\,s$ و $t_2=30\,s$ طی کند، مدت زمان حرکتش می‌شه:

$$\Delta t=t_2-t_1=30-10 \rightarrow \Delta t=20\,s$$

۳۹- گزینه ۲

$$\bar{v}=72\,km/h=72\times\frac{1000\,m}{3600\,s}=\frac{72}{3/6}\,m/s=20\,m/s$$

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow 20=\frac{3600}{\Delta t} \rightarrow \Delta t=180\,s=3\times60\,s \rightarrow \Delta t=3\,min$$

۴۰- گزینه ۱ منظور از ۵ ثانیه‌ی اول، بازه‌ی زمانی بین دو لحظه‌ی $t_0=0$ و $t=5\,s$ است. ابتدا جابه‌جایی متحرک را در این بازه‌ی زمانی، حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} t_0=0 \rightarrow x_0=0/25+\sin 0=0/25+0=0/25\,m \\ t=5\,s \rightarrow x=0/25+\sin 5\pi=0/25+0=0/25\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x-x_0=0/25-0/25=0$$

خب؛ مطابق رابطه‌ی ۲، وقتی جابه‌جایی متحرک صفر باشد، سرعت متوسط آن نیز صفر است.

۴۱- گزینه ۲

$$\begin{cases} t_1=1\,s \rightarrow x_1=5\times1^2-2=3\,m \\ t_2=2\,s \rightarrow x_2=5\times2^2-2=18\,m \end{cases} \Rightarrow \bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{18-3}{2-1}=\frac{15}{1} \rightarrow \bar{v}=15\,m/s$$

۴۲- گزینه ۳ سرعت متوسط متحرک هنگامی صفر می‌شود که متحرک برگردد سر جای اولیه‌اش. معادله‌ی حرکت متحرک نشان می‌دهد که متحرک در لحظه‌ی $t_0=0$، در مکان $x=x_0=14\,m$ بوده است.

$$t_0=0 \rightarrow x=x_0=14\,m$$

حالا باید ببینیم متحرک در چه لحظه‌ای دوباره در مکان $x=14\,m$ قرار می‌گیرد.

$$x=2t^2-16t+14=14 \rightarrow 2t^2-16t=0 \rightarrow t^2-8t=0$$

معادله‌ی بالا دوتا ریشه دارد؛ یکی صفر که وِش (!) و دیگری $t=8\,s$ که در دل ۳ جا دارد!

۴۳- گزینه ۲ در لحظه‌ی عبور از مبدأ مکان، $x=0$ می‌شود.

$$x=0 \rightarrow t^2-5t+6=0 \rightarrow (t-2)(t-3)=0 \rightarrow (t_1=2\,s \quad , \quad t_2=3\,s)$$

بنابراین، متحرک در لحظه‌ی $t_1=2\,s$ برای اولین‌بار و در لحظه‌ی $t_2=3\,s$ برای دومین‌بار از مبدأ مکان عبور می‌کند.

$$\begin{cases} t_0=0 \rightarrow x_0=6\,m \\ t_1=2\,s \rightarrow x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0}=\frac{0-6}{2-0}=-\frac{6}{2} \rightarrow \bar{v}=-3\,m/s$$

۴۴- گزینه۲

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = A \\ t = 3\,s \rightarrow x = A + B\times 3^3 = A + 27B \end{cases} \Rightarrow \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(A+27B)-A}{3-0} = 9B \xrightarrow{(\bar{v}=18\,m/s)} 9B = 18 \rightarrow B = 2 \ (\text{در SI})$$

$$x = A + 2t^3 \xrightarrow{(t=2\,s \ \rightarrow \ x=24\,m)} 24 = A + 2\times 2^3 \rightarrow A + 16 = 24 \rightarrow A = 8\,m$$

۴۵- گزینه۲ در هنگام تعیین جابه‌جایی، اول و آخر مسیر را می‌بینیم. آسانسور در ابتدای مسیر در طبقه‌ی اول و در انتهای مسیر در طبقه‌ی هفتم واقع است. فاصله‌ی بین این دو طبقه (Δy) برابر است با:

$$\Delta y = (7-1)\times 5 = 30\,m$$

(چون آسانسور در راستای قائم حرکت می‌کند، جابه‌جایی‌اش را با Δy نشان داده‌ایم.) از طرفی، زمان کل حرکت، برابر مجموع زمان‌های بازه‌های مطرح‌شده در صورت تست است.

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 20 + 5 + 10 = 35\,s$$

Δy را بر Δt تقسیم کنید تا به جواب برسید.

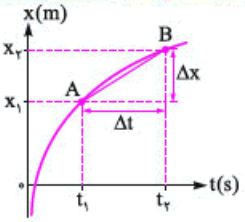
$$\bar{v} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{30}{35} \rightarrow \bar{v} = \frac{6}{7}\,m/s$$

۴۶- گزینه۳ لطفاً به درس‌نامه‌ی بعدی توجه بفرمایید.

۱۰) تعیین سرعت متوسط از روی نمودار مکان ـ زمان

شکل ۱۰ نمودار مکان ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که در لحظه‌ی t_1 در مکان x_1 و در لحظه‌ی t_2، در مکان x_2 قرار دارد. اگر نقطه‌ی $A(t_1, x_1)$ را به نقطه‌ی $B(t_2, x_2)$ وصل کنیم، پاره‌خطی حاصل می‌شود که شیب آن برابر است با:

$$\text{شیب پاره‌خط } AB = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \text{شیب پاره‌خط } AB = \bar{v}_{(\text{در بازه‌ی زمانی } t_1 \text{ تا } t_2)}$$

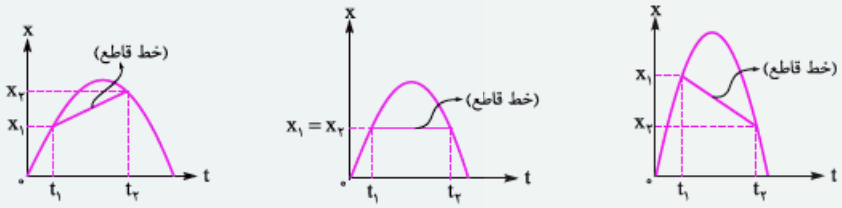


شکل ۱۰

نتیجه **سرعت متوسط یک متحرک بین دو لحظه از زمان، برابر شیب پاره‌خطی است که نقاط متناظر با آن دو لحظه را بر روی نمودار مکان ـ زمان به هم وصل می‌کند.**

یادداشت ریاضی اگر یک خط، به شکل صعودی باشد (شبیه این: ／)، علامت شیب آن مثبت و اگر به شکل نزولی باشد (شبیه این: ＼)، علامت شیب آن منفی و اگر افقی باشد (شبیه این: ——)، مقدار شیب آن صفر است.

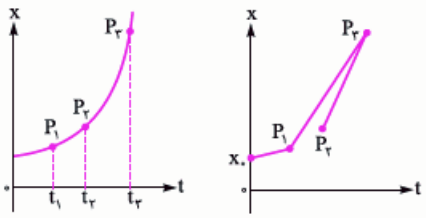
نمونه در شکل‌های ۱۱، علامت سرعت متوسط را بین دو لحظه‌ی دل‌خواه t_1 و t_2 بر روی نمودار مکان ـ زمان مشخص کرده‌ایم.



الف) $\Delta x > 0 \Rightarrow \bar{v} > 0$ ب) $\Delta x = 0 \Rightarrow \bar{v} = 0$ پ) $\Delta x < 0 \Rightarrow \bar{v} < 0$

شکل ۱۱

با توجه به شکل الف، پاره‌خط‌های قاطع بر نمودار را در بازه‌های زمانی ارائه‌شده در گزینه‌ها، رسم می‌کنیم (شکل ب). سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی ۰ تا t_1 برابر شیب پاره‌خط x_0P_1 و در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_3 برابر شیب پاره‌خط P_1P_3 و در بازه‌ی زمانی t_2 تا t_3 برابر شیب پاره‌خط P_2P_3 است. در بین این سه، امتداد پاره‌خط P_2P_3 زاویه‌ی بزرگ‌تری با محور افقی می‌سازد؛ بنابراین، شیب پاره‌خط P_2P_3 بیشتر از دو پاره‌خط دیگر است و سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی t_2 تا t_3 بیشتر از سایر بازه‌هاست.


(الف) (ب)

۴۷- گزینه۱ با این فرض که متحرک روی همین محور x در نمودار حرکت می‌کند، متحرک در لحظه‌ی $t_1 = 5\,s$ در مکان A' است (نه A) و در لحظه‌ی $t_2 = 8\,s$ به مکان B' (نه B) منتقل می‌شود. جابه‌جایی متحرک در این مدت برابر است با:

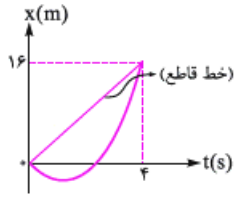
$$\Delta x = x_{B'} - x_{A'} = 42 - 60 = -18\,m$$

و سرعت متوسط آن:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-18}{8-5} = \frac{-18}{3} = -6\,m/s \rightarrow |\bar{v}| = 6\,m/s$$

بردار سرعت متوسط در جهت جابه‌جایی، یعنی از A' به طرف B' است.

۴۸- **گزینه۳** با توجه به نمودار مکان ـ زمان، متحرک در لحظه‌ی $t_0=0$ در مکان $x_0=0$ و در لحظه‌ی $t=4s$ در مکان $x=16m$ است. بنابراین:



$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x-x_0}{t-t_0}=\frac{16-0}{4-0}=\frac{16}{4}\rightarrow \bar{v}=4m/s$$

البته می‌تونستید شیب خط قاطع بر نمودار رو بین دو لحظه‌ی $t_0=0$ و $t=4s$ حساب کنید و به همین جواب برسید.

۴۹- **گزینه۲** نمی‌دونم طراح، از طرح این‌که شتاب حرکت متحرک ثابته چه منظوری داشته! چون در محاسبه‌ی سرعت متوسط فقط مکان‌های اولیه و نهایی مهمند و نوع حرکت متحرک تأثیری در جواب نداره.

$$\begin{cases}t_1=1s: x_1=0\\ t_2=4s: x_2=-6m\end{cases}\Rightarrow \bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{-6-0}{4-1}=\frac{-6}{3}\rightarrow \bar{v}=-2m/s$$

۵۰- **گزینه۲** سرعت متوسط را در ۴ ثانیه‌ی اول با $\bar{v}_1$ و در ۲ ثانیه‌ی بعدی با $\bar{v}_2$ نشان می‌دهیم.

$$\begin{cases}t_0=0: x_0=0\\ t=4s: x=x_1\\ t=6s: x_2=0\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\bar{v}_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}=\frac{x_1-0}{4-0}=\frac{x_1}{4}\\ \bar{v}_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}=\frac{0-x_1}{6-4}=\frac{-x_1}{2}\end{cases}\Rightarrow \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2}=-\frac{1}{2}$$

۵۱- **گزینه۱** *درس‌نامه‌ی زیر به شما رو کرده! روشو زمین نندازید!!*

۱۱) سرعت لحظه‌ای

بنا به تعریف، سرعت متحرک در لحظه‌ی t_1، برابر حد سرعت متوسط آن در یک بازه‌ی زمانیِ بی‌نهایت کوچک در همسایگی t_1 است.

$$\bar{v}=\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{x(t_1+\Delta t)-x(t_1)}{\Delta t}\rightarrow v(t_1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_1+\Delta t)-x(t_1)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

(سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2)

با توجه به نمادگذاری‌های به‌کاررفته در کتاب‌های ریاضیات، جمله‌ی بالا را به‌صورت $\frac{dx}{dt}$ می‌نویسند و به آن می‌گویند: «مشتق مکان نسبت به زمان». بنابراین، سرعت متحرک در هر لحظه (v) از رابطه‌ی ۳ به‌دست می‌آید:

$$\boxed{v=\frac{dx}{dt}}$$ (رابطه‌ی ۳)

نمونه۱ اگر معادله‌ی حرکت متحرکی در SI به‌صورت $x=t^2+2t+1$ باشد، معادله‌ی سرعت آن در SI برابر است با:

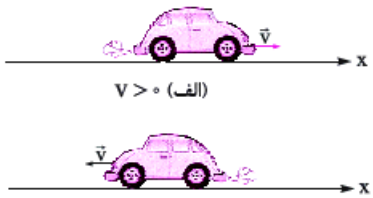
$$v=\frac{dx}{dt}=2t+2$$

توسط معادله‌ی اخیر، می‌توانیم سرعت متحرک را در هر لحظه حساب کنیم؛ مثلاً در لحظه‌ی $t=1s$:

$$v=2\times 1+2\rightarrow v=4m/s$$

توجه سرعت لحظه‌ای را به‌اختصار، سرعت می‌نامیم؛ اما سرعت متوسط را همان سرعت متوسط صدا می‌زنیم!!!

نکته۱ دقت کنید که سرعت، یک کمیت برداری است که توسط رابطه‌ی ۳، می‌توان مقدار جبری آن را در حرکت یک‌بعدی به‌دست آورد. **زمانی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، بردار سرعت آن در جهت محور x و $v>0$ است و زمانی که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، بردار سرعت آن در خلاف جهت محور x و $v<0$ است.** شکل ۱۲ را تماشا کنید!



شکل ۱۲

نکته۲ اگر سرعت متحرکی تابع درجه‌ی اول از زمان باشد، برای محاسبه‌ی $\bar{v}$ می‌توان میانگین زمان‌ها $(\bar{t})$ را در معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرک جای‌گذاری کرد.

اگر: $v=at+v_0\rightarrow \bar{v}=a\bar{t}+v_0$

نمونه۲ در نمونه‌ی ۱، چون v تابع درجه‌ی اول از زمان است، برای محاسبه‌ی $\bar{v}$ می‌توانیم $\bar{t}$ را در معادله‌ی $v-t$ متحرک جای‌گزین کنیم. مثلاً سرعت متوسط متحرک در ثانیه‌ی اول (از $t_0=0$ تا $t_1=1s$) می‌شود:

$$\bar{t}=\frac{t_1+t_0}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}s\rightarrow \bar{v}=2\bar{t}+2=2\times\frac{1}{2}+2\rightarrow \bar{v}=3m/s$$

و اما تست ۵۱؛ ابتدا از تابع مکان ـ زمان متحرک (نسبت به زمان) مشتق می‌گیریم:

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}\times 3t^2+3=t^2+3$$

حالا سرعت متحرک را در لحظه‌ی $t=2s$ تعیین می‌کنیم:

$$v=2^2+3=4+3\rightarrow v=7m/s$$

۵۲- گزینه۳

$$v=\frac{dx}{dt}=2t+2 \xrightarrow{(t=2s)} v=2\times2+2=4+2=6\,m/s$$

$$\begin{cases} t_0=0 \rightarrow x_0=0^2+2\times0-1=-1\,m \\ t_1=2s \rightarrow x_1=2^2+2\times2-1=4+4-1=7\,m \end{cases} \Rightarrow \bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{7-(-1)}{2-0}=\frac{8}{2}=4\,m/s \rightarrow \frac{v}{\bar{v}}=\frac{6}{4} \rightarrow \frac{v}{\bar{v}}=\frac{3}{2}$$

تیزباش چون v تابع درجه‌ی اول از زمانه، می‌تونی میانگین زمان‌ها رو در معادله‌ی $v-t$ قرار بدی و در زمان حل تست، صرفه‌جویی کنی!

$$\bar{t}=\frac{t_0+t_1}{2}=\frac{0+2}{2}=1s$$

$$v=2t+2 \rightarrow \bar{v}=2\bar{t}+2=2\times1+2=4\,m/s$$

فقط برای تابع‌های درجه‌ی اولِ زمان، می‌توانید مقدار متوسط تابع را با جای‌گذاری مقدار متوسط متغیر به‌دست آورید.

۵۳- گزینه۳ با یک تستِ صرفاً محاسباتی سروکار داریم؛ پس *توضیح، بی‌توضیح!!*

$$v_1=\frac{dx_1}{dt}=6t \quad , \quad v_2=\frac{dx_2}{dt}=3t^2-9$$

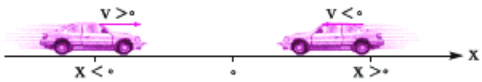
$$v_1=v_2 \rightarrow 6t=3t^2-9 \rightarrow 3t^2-6t-9=0 \rightarrow t^2-2t-3=0 \rightarrow (t+1)(t-3)=0 \rightarrow t=-1s \ \boxtimes \ , \ t=3s \ \checkmark$$

۵۴- گزینه۱ علامت سرعت متحرک جهت حرکت آن را نشان می‌دهد. پس باید سرعت متحرک را تعیین علامت کنیم.

$$v=\frac{dx}{dt}=8t+8 \xrightarrow{(t\geq0)} v>0$$

(پس متحرک پیوسته در جهت محور x حرکت می‌کند.)

۵۵- گزینه۲ با توجه به رابطه‌ی $v=-4x$، دو حالت بیشتر نداریم:



یا $x>0$ و $v<0$ است؛ یا $x<0$ و $v>0$ است. در هر دو حالت، متحرک به مبدأ مکان نزدیک می‌شود. در شکل مقابل، هر دو حالت ممکن دیده می‌شوند.

۵۶- گزینه۱ اول با یک حرکت سریع، مشتق x را نسبت به t به‌دست می‌آوریم!

$$v=\frac{dx}{dt}=4t-1$$

حالا نوبت تعیین علامت v است. این کار را در جدول روبه‌رو انجام داده‌ام. مطابق این جدول، متحرک از لحظه‌ی $t_0=0$ تا $t=\frac{1}{4}s$ در خلاف جهت محور x و از لحظه‌ی $t=\frac{1}{4}s$ به بعد در جهت محور x حرکت می‌کند.

t (s)	۰		$\frac{1}{4}$		∞
v		−	⋮	+	

۵۷- گزینه۱ اول، به متن آموزشی زیر توجه کنید.

۱۲) شرط تغییر جهت متحرک

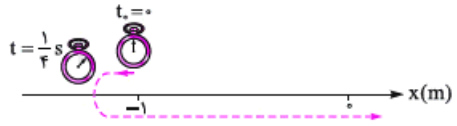
◄ وقتی متحرکی می‌ایستد، سرعتش صفر و وقتی برمی‌گردد، علامت سرعتش تغییر می‌کند. در نتیجه ...

نتیجه **شرط تغییر جهت متحرک، صفر شدن سرعت و سپس تغییر علامت آن است.**

نمونه۱ اگر معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی در SI به‌صورت $v=t-1$ باشد، سرعت متحرک در لحظه‌ی $t=1s$ صفر و سپس تغییر علامت می‌دهد. پس متحرک در لحظه‌ی $t=1s$ تغییر جهت می‌دهد.

نمونه۲ اگر معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی به‌صورت $v=t^2+2t$ باشد، چون همواره $v>0$ است، متحرک از مبدأ زمان به بعد، هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

با توجه به پاسخ تست ۵۶، سرعت متحرک در لحظه‌ی $t=\frac{1}{4}s$ صفر شده و سپس تغییر علامت داده است. لذا در این لحظه، متحرک تغییر جهت می‌دهد. در شکل مقابل، نحوه‌ی حرکت متحرک را نشان داده‌ایم (دقت کنید که متحرک، چه در هنگام رفت و چه در هنگام برگشت، روی محور x حرکت می‌کند؛ منتها برای تمایز بین این دو، مسیر رفت را بالاتر از محور x و مسیر برگشت را پایین‌تر از محور x رسم کرده‌ایم.)



۵۸- گزینه۳ می‌خواهیم ببینیم متحرک چند ثانیه در مکان‌های منفی بوده است. به این منظور، معادله‌ی مکان ـ زمان متحرک را تعیین علامت می‌کنیم. اول ریشه‌های معادله را به‌دست بیاریم:

$$x=2t^2-t-1=0 \rightarrow (2t+1)(t-1)=0 \rightarrow t=-\frac{1}{2}s \quad , \quad t=1s$$

جدول روبه‌رو علامت x را از لحظه‌ی $t_0=0$ به بعد، نشان می‌دهد. با توجه به جدول، متحرک به مدت ۱s (از لحظه‌ی $t_0=0$ تا $t=1s$) در مکان‌های منفی بوده است.

t (s)	۰		۱		∞
x		−	⋮	+	

۵۹- گزینه۱ معادله‌ی سرعت متحرک را به‌دست آورده، آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+12t-9$$

$$v=0 \rightarrow -3t^2+12t-9=0 \rightarrow t^2-4t+3=0 \rightarrow (t-1)(t-3)=0 \rightarrow t_1=1s \quad , \quad t_2=3s$$

با توجه به جدول روبه‌رو، متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 تغییر جهت می‌دهد. بازه‌ی زمانی بین لحظه‌های این دو تغییر جهت، برابر است با:

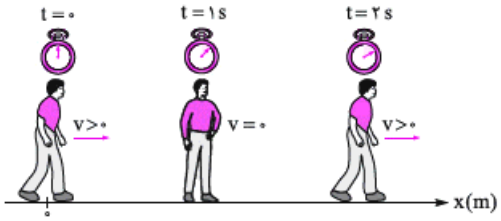
$$\Delta t=t_2-t_1=3-1 \rightarrow \Delta t=2s$$

t (s)	۰		۱		۳		∞
v		+	⋮	−	⋮	+	

۶۰- **گزینه ۴** معادله‌ی سرعت متحرک عبارت است از: $v=\frac{dx}{dt}=t^2-2t+1=(t-1)^2$

با توجه به معادله‌ی فوق، v همواره مثبت یا صفر است؛ بنابراین، متحرک همواره در جهت محور x حرکت می‌کند و هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد.

توجه در لحظه‌ی $t=1s$، سرعت متحرک صفر می‌شود؛ صفر شدن سرعت، شرط لازم برای تغییر جهت متحرک است، اما کافی نیست؛ شرط دوم برای تغییر جهت متحرک، تغییر علامت v است که در این مثال، محقق نشده و مطابق شکل مقابل، متحرک در یک لحظه متوقف شده و سپس در همان جهت قبلی به حرکت خود ادامه داده است.



۶۱- **گزینه ۳** اندازه‌ی سرعت، کم‌تر از صفر که نمی‌شه! می‌شه؟!

$v=t^2-3t-18=0 \rightarrow (t-6)(t+3)=0 \rightarrow t_1=-3s$ ✗ ، $t_2=6s$ ✓

توجه در لحظه‌ی $t=1/5s$، $\frac{dv}{dt}=0$ می‌شود. در این لحظه، تابع سرعت ـ زمان متحرک مینیمم می‌شود؛ یعنی سرعت متحرک منفی‌ترین مقدار ممکن را دارد $(v=-20/25\ m/s)$؛ اما منفی بودن سرعت که نشان‌دهنده‌ی کمی اندازه‌ی آن نیست! نشان‌دهنده‌ی حرکت متحرک در خلاف جهت محور مکان است.

۶۲- **گزینه ۳**

$v=\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}\times 3t^2-6\times 2t+20=2t^2-12t+20=2(t^2-6t+10)$

$v=2[(t-3)^2+1] \xrightarrow{(\text{اگر: } t=3s)} v=v_{min}=2\times(0^2+1)=2\times 1 \rightarrow v_{min}=2\ m/s$

برای پیدا کردن کمینه‌ی مقدار v، از معادله‌ی آن نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و عبارت حاصل را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$\frac{dv}{dt}=4t-12=0 \rightarrow t=3s$

$v_{min}=2\times 3^2-12\times 3+20=18-36+20=38-36 \rightarrow v_{min}=2\ m/s$

۶۳- **گزینه ۴**

۱۳) رسیدن از تابع سرعت ـ زمان به تابع مکان ـ زمان

با مشتق گرفتن از تابع مکان ـ زمان، تابع سرعت ـ زمان به‌دست می‌آید. عکس این عمل، پادمشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری نام دارد.

یادداشت ریاضی فرض کنید تابع $F(x)$، پادمشتق (یا انتگرال) تابع $f(x)$ باشد. این عبارت به‌صورت $\int f(x)dx=F(x)$ نوشته می‌شود. در این صورت، مشتق تابع $F(x)$ برابر $f(x)$ است: $F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$

نمونه اگر $F(x)$ پادمشتق تابع $f(x)=x^2$ باشد، داریم: $f(x)=x^2 \rightarrow F(x)=\frac{1}{3}x^3+c$ (عدد ثابت)

$F'(x)=\frac{1}{3}\times 3x^2+0=x^2 \rightarrow F'(x)=f(x)$ یا $\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+c$ (مشتق عدد ثابت c صفر است.)

نتیجه تابع مکان ـ زمان یک متحرک، برابر انتگرال تابع سرعت ـ زمان آن است. $\boxed{x(t)=\int v(t)dt}$ (رابطه‌ی ۴)

نکته اگر v تابع درجه‌ی nاُم زمان و به شکل $v=at^n$ باشد، آن‌گاه: $x=\int at^n dt=\frac{a}{n+1}t^{n+1}+x_0$

نیزباش هم باید یک درجه به درجه‌ی t اضافه کنی و هم حاصل رو به شکل ضریب بیاری توی مخرج! مثلاً فرض کن $v=t^3$ است؛ یکی به توان t اضافه کن، (t^4)، حالا توان t رو برعکس کن $(\frac{1}{4})$، حالا این دو رو کنار هم بذار تا x معلوم بشه: $\frac{1}{4}t^4$.

نمونه $v=3t^2+t+1 \rightarrow x=3\times(\frac{1}{2+1}\times t^{2+1})+(\frac{1}{1+1}\times t^{1+1})+t+x_0 \rightarrow x=t^3+\frac{1}{2}t^2+t+x_0$

مثال **معادله‌ی سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $v=20t-40$ است. اگر این متحرک در مبدأ زمان از مبدأ مکان گذشته باشد، در لحظه‌ی $t=5s$ در چند متری مبدأ مکان است؟** *(آزمایشی سنجش ـ ۹۳)*

۱) ۹۰ ۲) ۶۰ ۳) ۵۰ ۴) ۲۰

پاسخ **گزینه‌ی «۳»** برای محاسبه‌ی مکان متحرک، نیاز به معادله‌ی مکان ـ زمان آن داریم. معادله‌ی مکان ـ زمان متحرک، معادله‌ای است که اگر از آن نسبت به زمان مشتق بگیریم، معادله‌ی $20t-40$ حاصل شود. آن معادله عبارت است از:

$x=20\times\frac{1}{2}t^2-40t+x_0=10t^2-40t+x_0 \xrightarrow{(\text{فرض تست: } x_0=0)} x=10t^2-40t$

بنابراین، مکان متحرک در لحظه‌ی $t=5s$، برابر است با: $x=10\times 5^2-40\times 5=250-200 \rightarrow x=50m$

می‌تونی از معادله‌های مطرح‌شده در گزینه‌ها نسبت به زمان مشتق بگیری یا اصلاً مثل یه بچه‌ی ریاضی‌بلد، انتگرال معادله‌ی سرعت متحرک رو حساب کنی! آن‌چه مشتقش نسبت به زمان می‌شود $v=-6t^2+6t$، عبارت است از:

$$x=-6\times(\frac{1}{2+1}\times t^{2+1})+6\times(\frac{1}{1+1}\times t^{1+1})+x_0=-6\times\frac{1}{3}t^3+6\times\frac{1}{2}t^2+x_0=-2t^3+3t^2+x_0$$

x_0 مقدار ثابتی است که بعد از مشتق‌گیری نابود می‌شه!! برای محاسبه‌ی x_0، مختصات $(t=1s \quad , \quad x=-2m)$ را در معادله‌ی فوق جای‌گذاری می‌کنیم:

$$t=1s \rightarrow x=-2\times1^3+3\times1^2+x_0=-2 \rightarrow -2+3+x_0=-2 \rightarrow x_0=-3m \rightarrow x=-2t^3+3t^2-3$$

نیزباش x یک درجه بالاتر از v است؛ پس x تابع درجه‌ی سوم از زمان است. سر جلسه‌ی کنکور، بد نیست بعضی موقع‌ها سرتو بالا بگیری و یه نگاه به گزینه‌ها بندازی! فقط ۴ می‌تونه جواب تست باشه!

۶۴- گزینه۳ باز هم باید در جهت عکس عمل مشتق‌گیری حرکت کنیم و انتگرال معادله‌ی $v-t$ را به‌دست آوریم: $x=t^3-8t+x_0$

$$x=x_0 \rightarrow t^3-8t+x_0=x_0 \rightarrow t^3-8t=0 \rightarrow t^3=8t \xrightarrow{(t>0)} t=0 \ \boxed{\times} \ , \ t=2\sqrt{2}\,s \ \boxed{\checkmark}$$

۶۵- گزینه۲ معادله‌ی مکان ـ زمان متحرک عبارت است از: $x=-t^2+4t+c$

که منظور از c یک عدد ثابت است (که در این‌جا معرف مکان اولیه‌ی متحرک است). حالا می‌توانیم در کمال خونسردی، جابه‌جایی متحرک را در بازه‌ی زمانی $t_1=4s$ تا $t_2=6s$ حساب کنیم.

$$\begin{cases} t_1=4s \rightarrow x_1=-4^2+4\times4+c=c \\ t_2=6s \rightarrow x_2=-6^2+4\times6+c=-12+c \end{cases} \Rightarrow \Delta x=x_2-x_1=(-12+c)-c=-12m \rightarrow |\Delta x|=12m$$

نیزباش در پاسخ تست، متوجه شدید که c هر مقداری که داشته باشد، در جواب نهایی تأثیری ندارد؛ پس در محاسبه‌ی جابه‌جایی، می‌توان c را به حساب نیاورد؛ یا اصلاً یک کار بهتر کنیم! c را سمت چپ معادله‌ی مکان ـ زمان ببریم:

$$x-c=-t^2+4t \xrightarrow{(c=x_0)} x-x_0=-t^2+4t \rightarrow \Delta x=-t^2+4t$$

با جای‌گذاری $t_1=4s$ و $t_2=6s$ در معادله‌ی بالا، به‌ترتیب جابه‌جایی متحرک در بازه‌های زمانی ۰ تا t_1 و ۰ تا t_2 به‌دست می‌آید؛ می‌توان گفت:

$$\begin{cases} \Delta x_1=-4^2+4\times4=0 \\ \Delta x_2=-6^2+4\times6=-12m \end{cases} \Rightarrow \Delta x=\Delta x_2-\Delta x_1=-12-0=-12m \rightarrow |\Delta x|=12m$$

چون سرعت متحرک تابع درجه‌ی اول از زمان است، می‌توانیم با جای‌گذاری مقدار متوسط t، مقدار متوسط v را به‌دست آوریم:

$$\bar{v}=-2\bar{t}+4=-2\times(\frac{t_1+t_2}{2})+4=-2\times5+4=-10+4=-6m/s$$

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \Delta x=\bar{v}\Delta t=-6\times(6-4)=-6\times2 \rightarrow \Delta x=-12m \rightarrow |\Delta x|=12m$$

۶۶- گزینه۳ از معادله‌ی سرعت، نسبت به زمان، انتگرال می‌گیریم: $x=t^2+t+x_0$

$$\begin{cases} t_1=1s \rightarrow x_1=1^2+1+x_0=2+x_0 \\ t_2=2s \rightarrow x_2=2^2+2+x_0=6+x_0 \end{cases} \Rightarrow \bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{(6+x_0)-(2+x_0)}{2-1}=\frac{4}{1} \rightarrow \bar{v}=4m/s$$

چون v تابع درجه‌ی اول از زمان است، می‌توانیم بگوییم: $v=2t+1 \rightarrow \bar{v}=2\bar{t}+1$

$$\bar{t}=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}s \rightarrow \bar{v}=2\times\frac{3}{2}+1=3+1 \rightarrow \bar{v}=4m/s$$

۶۷- گزینه۱ مشتق چی می‌شه $v=3t^2-6t+2$؟ باریکلا، $x=t^3-3t^2+2t+x_0$

ثانیه‌ی سوم یعنی بازه‌ی زمانی $t_1=2s$ تا $t_2=3s$. همون‌طور که قبلاً گفتم برای محاسبه‌ی Δx، می‌تونی عدد ثابت x_0 رو به حساب نیاری!

$$\begin{cases} t_1=2s \rightarrow x_1=2^3-3\times2^2+2\times2=8-12+4=0 \\ t_2=3s \rightarrow x_2=3^3-3\times3^2+2\times3=27-27+6=6m \end{cases} \Rightarrow \bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{6-0}{3-2}=\frac{6}{1} \rightarrow \bar{v}=6m/s$$

۶۸- گزینه۲ برای جواب دادن به این تیپ تست‌ها، از نکات ارائه‌شده در متن آموزشی زیر استفاده می‌کنیم:

۱۴) روش محاسبه‌ی مسافت

برای محاسبه‌ی مسافت طی‌شده توسط متحرک در یک بازه‌ی زمانی، معادله‌ی سرعت متحرک را به‌دست آورده، سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم تا مشخص شود در بازه‌ی زمانی ارائه‌شده، جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند یا نه. اگر جهت حرکت متحرک تغییر نکند، اندازه‌ی جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط متحرک، برابر است. اگر جهت حرکت متحرک تغییر کند، باید اندازه‌ی جابه‌جایی در جهت + و اندازه‌ی جابه‌جایی در جهت − محور را جداجدا حساب کرده و آن‌ها را با هم جمع کنیم.

مثال معادله‌ی مکان ـ زمان متحرکی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = 4t^2 - 16t + 8$ است. مسافت طی‌شده توسط این متحرک در فاصله‌ی زمانی $0 \le t \le 3s$ چند متر است؟ *(آزمایشی سنجش ـ ۹۲)*

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰

پاسخ **گزینه‌ی «۴»** سرعت متحرک رو تعیین علامت می‌کنیم.

$$v = \frac{dx}{dt} = 8t - 16 = 0 \rightarrow t = 2s$$

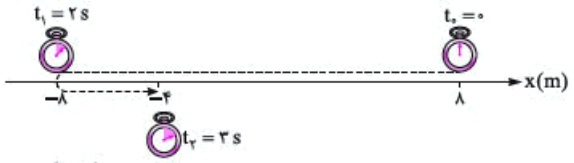
جدول تعیین علامت v نشون می‌ده متحرک در لحظه‌ی $t = 2s$ تغییر جهت می‌ده. تا لحظه‌ای که متحرک تغییر جهت نمی‌ده، جابه‌جایی و مسافت طی‌شده توسط اون هم‌اندازن. پس اندازه‌ی جابه‌جایی رو یک‌بار از لحظه‌ی $t_0 = 0$ تا $t_1 = 2s$ و بار دیگه از لحظه‌ی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 3s$ حساب می‌کنیم و سپس این مقادیر رو با هم جمع می‌کنیم.

t(s)	0		2		∞
v		−	0	+	

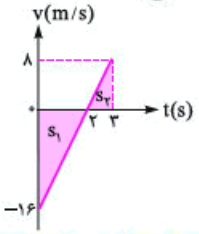
$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = 8\,m \\ t_1 = 2s \rightarrow x_1 = 4\times 2^2 - 16\times 2 + 8 = -8\,m \\ t_2 = 3s \rightarrow x_2 = 4\times 3^2 - 16\times 3 + 8 = -4\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - x_0 = -8 - 8 = -16\,m \\ \Delta x_2 = x_2 - x_1 = -4 + 8 = 4\,m \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(d = |\Delta x_1| + \Delta x_2)} d = 16 + 4 \rightarrow d = 20\,m$$

توجه مسیر حرکت متحرک به شکل زیر است. از لحظه‌ی $t_0 = 0$ تا $t_1 = 2s$، مسافت 16 m را در خلاف جهت محور x و از لحظه‌ی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 3s$، مسافت 4 m را در جهت محور x طی کرده که این 4 m با اون 16 m می‌شه 20 m!



ببین! جلوی این راه حل یک تیک بزن؛ بعد از خوندن درس‌نامه‌ی ۱۶، بهش مراجعه کن. اون‌جا بهت می‌گم که برای محاسبه‌ی مسافت طی‌شده توسط متحرک، می‌تونی نمودار سرعت ـ زمان اون رو رسم کنی و اندازه‌ی مساحت‌های بین نمودار و محور زمان رو با هم جمع کنی.



$$d = |S_1| + S_2 = \frac{16\times 2}{2} + \frac{8\times 1}{2} = 16 + 4 \rightarrow d = 20\,m$$

معادله‌ی سرعت متحرک می‌شود:

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 12t$$

با توجه به این‌که $t > 0$ است، $v > 0$ است. یعنی متحرک همواره در جهت محور x حرکت می‌کند و تغییر جهت نمی‌دهد. لذا مسافت طی‌شده هم‌اندازه با جابه‌جایی متحرک است $(d = |\Delta x|)$

$$\begin{cases} t_1 = 1s \rightarrow x_1 = 1^3 + 6\times 1^2 + 20 = 7 + 20 \\ t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 2^3 + 6\times 2^2 + 20 = 32 + 20 \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 32 - 7 = 25\,m \xrightarrow{(d = |\Delta x|)} d = 25\,m$$

(حتماً تا الان متوجه شدید که من تا چه اندازه از دقالت x_0 در محاسبه‌ی Δx بدم می‌یاد!!)

۶۹- گزینه۲ اول ببینیم متحرک تغییر جهت می‌ده یا نه.

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t - 6 = 0 \rightarrow t = 2s$$

خب؛ متحرک در لحظه‌ی $t = 2s$ تغییر جهت می‌ده. پس باید اندازه‌ی جابه‌جایی رو از مبدأ زمان تا لحظه‌ی $t_1 = 2s$ و از لحظه‌ی t_1 تا $t_2 = 3s$ جداگانه حساب کنیم و آخر سر اون‌ها رو با هم جمع کنیم.

t(s)	0		2		∞
v		−	0	+	

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = 20\,m \\ t_1 = 2s \rightarrow x_1 = \frac{3}{2}\times 2^2 - 6\times 2 + 20 = -6\,m + 20\,m \\ t_2 = 3s \rightarrow x_2 = \frac{3}{2}\times 3^2 - 6\times 3 + 20 = -4/5\,m + 20\,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - x_0 = -6\,m \\ \Delta x_2 = x_2 - x_1 = 1/5\,m \end{cases} \Rightarrow d = |\Delta x_1| + \Delta x_2 = 6 + 1/5 \rightarrow d = 7/5\,m$$

۷۰- گزینه۳ **گام اول:** ابتدا لحظه‌ی تغییر جهت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$v = -2t + 8 = 0 \rightarrow 2t = 8 \rightarrow t = 4s$$

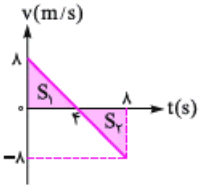
گام دوم: مشتقِ چی می‌شه $-2t + 8$؟! اون چیزه می‌شه معادله‌ی مکان ـ زمان متحرک:

$$x = -t^2 + 8t + x_0$$

گام سوم: بزرگی جابه‌جایی متحرک را در بازه‌ی زمانی $t_0 = 0$ تا $t_1 = 4s$، حساب و با بزرگی جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 8s$، جمع می‌کنیم تا مسافت طی‌شده حساب شود.

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x = x_0 \\ t_1 = 4s \rightarrow x_1 = -4^2 + 8\times 4 + x_0 = 16 + x_0 \\ t_2 = 8s \rightarrow x_2 = -8^2 + 8\times 8 + x_0 = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - x_0 = 16\,m \\ |\Delta x_2| = |x_2 - x_1| = |-16| = 16\,m \end{cases} \Rightarrow d = \Delta x_1 + |\Delta x_2| = 16 + 16 \rightarrow d = 32\,m$$

تیزباش با توجه به مطلب ارائه‌شده در درس‌نامه‌ی ۱۶، می‌تونی نمودار $v-t$ متحرک رو رسم کنی و بزرگی مساحت‌های ایجادشده بین نمودار و محور زمان را به عنوان جواب انتخاب کنی.



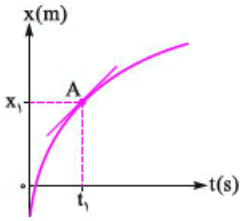
$$d = S_1 + |S_2| = \frac{۸\times۴}{۲} + \frac{۸\times۴}{۲} = ۱۶+۱۶ \rightarrow d = ۳۲\,m$$

۷۱- گزینه ۱ یک درس‌نامه و ادامه‌ی ماجرا!

۱۵) تعیین سرعت لحظه‌ای از روی نمودار مکان ـ زمان

یادداشت ریاضی مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی (x_1 , y_1)، برابر شیب خط مماس بر نمودار $y-x$ در نقطه‌ی (x_1 , y_1) است. اگر $f'(x_1) > ۰$ باشد، نمودار به شکل صعودی و اگر $f'(x_1) < ۰$ باشد، نمودار به شکل نزولی است.

◄ خب؛ سرعت، مشتق مکان است نسبت به زمان؛ بنابراین، **سرعت متحرک در هر لحظه، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در آن لحظه است.** بنابراین، در شکل ۱۳، شیب خط مماس بر نمودار در نقطه‌ی A: $v_{t_1} = A$

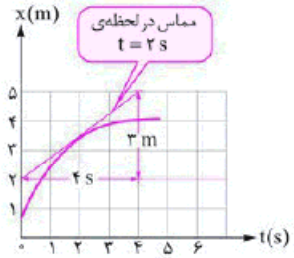


شکل ۱۳

نتیجه اگر شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در یک لحظه ...

- به شکل **صعودی** باشد (مثل: ╱)، سرعت متحرک **مثبت** است $(v > ۰)$.
- به شکل **نزولی** باشد (مثل: ╲)، سرعت متحرک **منفی** است $(v < ۰)$.
- به شکل **افقی** باشد (مثل: ═)، سرعت متحرک **صفر** است $(v = ۰)$.

نمونه ۱ فرض کنید نمودار مکان ـ زمان متحرکی، یک منحنی به شکل ۱۴ باشد. برای تعیین سرعت متحرک در لحظه‌ی $t = ۲\,s$، خط مماس بر نمودار را در این لحظه رسم کرده‌ایم. شیب این خط برابر است با:

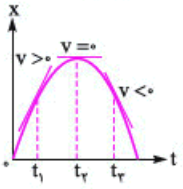


شکل ۱۴

$$\text{شیب خط مماس بر نمودار در لحظه‌ی } t = ۲\,s = \frac{۳\,(m)}{۴\,(s)} \rightarrow v = ۰/۷۵\,m/s$$

نمونه ۲ اگر ودار مکان ـ زمان متحرکی به شکل ۱۵ باشد، سرعت آن از مبدأ زمان تا لحظه‌ی t_2، مثبت و در لحظه‌ی t_2، صفر و از t_2 به بعد منفی است.

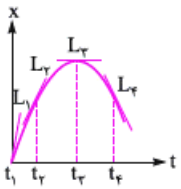
$$v_{t_1} > ۰ \quad , \quad v_{t_2} = ۰ \quad , \quad v_{t_3} < ۰$$



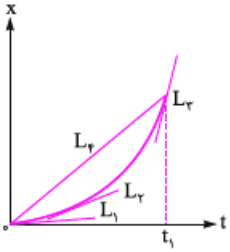
شکل ۱۵

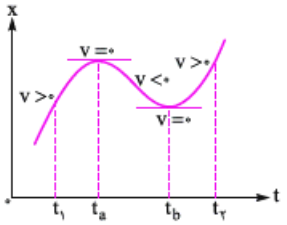
نتیجه در نقاط اکسترمم نسبی روی نمودار مکان ـ زمان، سرعت متحرک صفر می‌شود و سپس تغییر علامت می‌دهد. قبلاً هم عرض کردیم که در این نقاط، متحرک تغییر جهت می‌دهد.

باید خط‌های مماس بر نمودار را در لحظه‌های گفته‌شده رسم کنیم و شیب‌هایشان را با هم مقایسه کنیم. با توجه به شکل مقابل، شیب مماس بر نمودار در لحظه‌ی t_1 بیشینه و در لحظه‌ی t_3 اندازه‌ی شیب، کمینه (صفر) است. پس سرعت متحرک در لحظه‌ی t_1 بیشتر از سایر لحظه‌هاست.



۷۲- گزینه ۴ سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی ۰ تا t_1 برابر شیب خط قاطع بر نمودار مکان ـ زمان متحرک در این بازه است (شیب پاره‌خط L_4). برای تشخیص نحوه‌ی تغییرات سرعت متحرک، باید نحوه‌ی تغییرات شیب خط مماس بر نمودار را دنبال کنیم. همان‌طور که در شکل روبه‌رو دیده می‌شود، با افزایش t، شیب خطوط مماس بر نمودار (مثل شیب خطوط L_1 و L_2) در ابتدا، از شیب پاره‌خط L_4 کوچک‌تر و از یک لحظه به بعد، بزرگ‌تر است (مثلاً شیب L_3 از L_4 بزرگ‌تر است). پس سرعت متحرک در زمان‌های اولیه‌ی حرکت، کم‌تر از سرعت متوسط آن و از اواسط حرکت تا لحظه‌ی t_1، بیشتر از سرعت متوسط آن است.

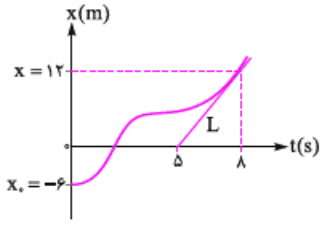




۷۳- گزینه۳ با توجه به شکل روبه‌رو، ...

- در بازه‌ی زمانی $t_1 < t < t_a$، سرعت متحرک مثبت است.
- در بازه‌ی زمانی $t_a < t < t_b$، سرعت متحرک منفی است.
- در بازه‌ی زمانی $t_b < t < t_2$، سرعت متحرک مثبت است.

بنابراین، سرعت متحرک در لحظه‌های t_a و t_b صفر می‌شود و سپس تغییر علامت می‌دهد.



۷۴- گزینه۱ سرعت متحرک در لحظه‌ی $t=8\,s$، برابر شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه است:

$$v = L \text{ شیب پاره‌خط } = \frac{12-0}{8-5} = 4\,m/s$$

محاسبه‌ی $\bar{v}$ راحت‌تر است:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{\Delta t} = \frac{12-(-6)}{8} = \frac{9}{4}\,m/s$$

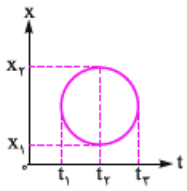
در نتیجه:

$$\frac{v}{\bar{v}} = \frac{4}{\frac{9}{4}} \rightarrow \frac{v}{\bar{v}} = \frac{16}{9}$$

۷۵- گزینه۳ سرعت متحرک در لحظه‌ی $t=10\,s$ برابر شیب خطی است که در این لحظه بر نمودار مماس شده است. این خط مثلثی ساخته که قاعده‌ی آن $4\,s$ (یعنی $10\,s-6\,s$) و ارتفاع آن $16\,m$ است. پس:

$$v_{(t=10\,s)} = \frac{16}{4} = 4\,m/s$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow{[\bar{v}=v_{(t=10\,s)}]} 4 = \frac{x_2 - 8}{12-5} \rightarrow x_2 - 8 = 28 \rightarrow x_2 = 36\,m$$



۷۶- گزینه۳ چنین حرکتی امکان ندارد؛ به دو دلیل:

۱ در لحظه‌های t_1 و t_3، خطوط مماس بر نمودار، موازی با محور x (محور عمودی) می‌شوند؛ پس در این دو لحظه، شیب خط مماس بر نمودار ∞ می‌شود و این به معنی سرعت بی‌نهایت جسم است که مفهوم فیزیکی ندارد.

۲ در بازه‌ی زمانی $t_1 < t < t_3$، متحرک در هر لحظه در دو مکان قرار می‌گیرد! (مثلاً متحرک در لحظه‌ی t_2 در دو مکان متفاوت x_1 و x_2 قرار گرفته است.) مگه می‌شه؟! *(تو عالم ارواح شاید بشه؛ اما تو عالم مادی کی باورش می‌شه؟!)*

۷۷- گزینه۴ گزینه‌های نادرست را زیر ذره‌بین می‌بریم!

۱ این که اصلاً حرکت نمی‌کند!

۲ این هم که سرعتش بی‌نهایت است! (چرا؟)

۳ نقطه‌ی مینیمم این نمودار (نقطه‌ی تلاقی نمودار با محور زمان) کار را خراب کرده است! این نقطه یک نقطه‌ی بحرانی است که تابع مکان در آن نقطه مشتق ندارد.[1] بنابراین، تکلیف سرعت و وضعیت حرکتی متحرک در این نقطه، معلوم نیست.

۷۸- گزینه۲ مهم‌ترین نمودار در مبحث حرکت‌شناسی، نمودار سرعت ـ زمان است که بعضی از خواص آن را در درس‌نامه‌ی زیر شرح می‌دهیم!

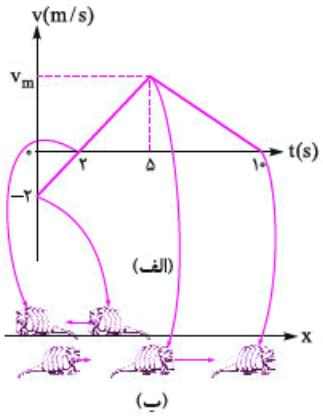
۱۶) مقدمه‌ای بر نمودار سرعت ـ زمان (v-t)

از روی نمودار سرعت ـ زمان یک جسم، می‌توان به موارد زیر پی‌برد:

۱ **سرعت لحظه‌ای:** به کمک نمودار $v-t$ یک متحرک، می‌توان اندازه و جهت بردار سرعت جسم را معین کرد.

نمونه شکل ۱۶، نمودار سرعت ـ زمان جانوری را نشان می‌دهد که روی محور x در حال حرکت است. از روی این نمودار، می‌فهمیم که جانور ...

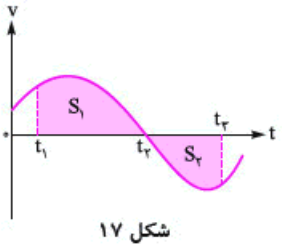
- سرعت اولیه‌اش $v_0 = -2\,m/s$ بوده است.
- تا لحظه‌ی $t=2\,s$، در خلاف جهت محور x حرکت کرده است.
- در لحظه‌ی $t=2\,s$، سرعتش صفر می‌شود و سپس تغییر علامت می‌دهد.
- در بازه‌ی زمانی $2\,s < t < 10\,s$، در جهت محور x حرکت می‌کند و در لحظه‌ی $t=10\,s$، دست از حرکت می‌کشد!
- در لحظه‌ی $t=5\,s$، به حداکثر سرعت خود (v_m) می‌رسد. با توجه به این‌که سرعت متحرک در بازه‌ی زمانی $0 \le t \le 5\,s$، در هر ثانیه $+1\,m/s$ تغییر می‌کند، $v_m = 3\,m/s$ است.



شکل ۱۶، الف) نمودار سرعت ـ زمان یک جانور. ب) نمایش حدودیِ مسیر حرکت جانور.

۱- در این نقطه، مشتق‌های راست و چپ تابع مکان تعریف نشده‌اند؛ به همین دلیل، تابع $x-t$ در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۲ جابه‌جایی: مساحت بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در یک بازه‌ی زمانی، برابر جابه‌جایی متحرک در آن بازه‌ی زمانی است. به‌طور مثال در شکل ۱۷، جابه‌جایی در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_3، برابر با $\Delta x = S_1 + S_2$ است.



شکل ۱۷

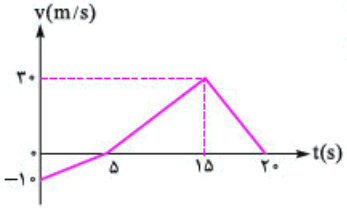
توجه توجه کنید که مساحت‌های بالای محور زمان، با علامت مثبت و مساحت‌های پایین محور زمان، با علامت منفی منظور می‌شوند (مثلاً در شکل ۱۷، $S_1 > 0$ و $S_2 < 0$ است).

⚠ صرفاً از روی نمودار سرعت ـ زمان یک متحرک، نمی‌توان مکان آن را تعیین کرد؛ بلکه فقط تغییر مکان متحرک، قابل تشخیص است.

۳ مسافت: مسافت طی‌شده توسط متحرک در یک بازه‌ی زمانی، برابر مجموع قدرمطلق مساحت‌های محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان، در آن بازه‌ی زمانی است؛ به‌طور مثال در شکل ۱۷، $d = |S_1| + |S_2| = S_1 + |S_2|$ است.

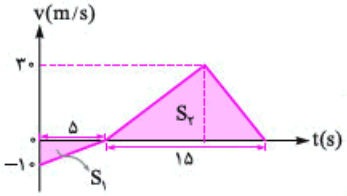
۴ سرعت متوسط: وقتی بتوانیم جابه‌جایی متحرک را حساب کنیم، سرعت متوسط آن را نیز می‌توانیم حساب کنیم. $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

مثال ۱ **نمودار سرعت ـ زمان متحرکی در مسیر مطابق شکل مقابل است. سرعت متوسط آن در مدت ۲۰ ثانیه، چند متر بر ثانیه است؟** *(سراسری ریاضی ـ ۸۳)*



۱) ۰/۵
۲) ۲/۵
۳) ۱۰
۴) ۱۵

پاسخ **گزینه‌ی «۳»**، جابه‌جایی متحرک تا لحظه‌ی $t = 5\,s$:



$$\Delta x_1 = S_1 = \frac{5 \times (-10)}{2} = -25\,m$$

جابه‌جایی متحرک از لحظه‌ی $t = 5\,s$ تا $t = 20\,s$:

$$\Delta x_2 = S_2 = \frac{15 \times 30}{2} = 225\,m$$

جابه‌جایی کل:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = -25 + 225 = 200\,m$$

و سرعت متوسط متحرک در مدت ۲۰s:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200}{20} \rightarrow \bar{v} = 10\,m/s$$

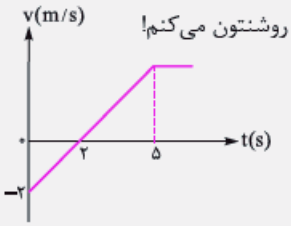
مثال ۲ **در مثال ۱، مسافت طی‌شده توسط متحرک در مدت ۲۰s چند متر است؟**

پاسخ باید بزرگی جابه‌جایی‌ها رو با هم جمع کنیم:

$$d = |\Delta x_1| + \Delta x_2 = 25 + 225 \rightarrow d = 250\,m$$

استراتژی تعیین مکان لحظه‌ای متحرک از روی نمودار سرعت ـ زمان

فرض کن مکان متحرکی در لحظه‌ی t_1، x_1 باشه. اگه بتونی مساحت بین نمودار $v-t$ متحرک و محور t رو در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2 (اسمشو بذاریم S) حساب کنی، به‌راحتی x_2 به‌دست می‌یاد. کافیه مقدار S رو به x_1 اضافه کنی. در مثال زیر، کاملاً روشنتون می‌کنم!

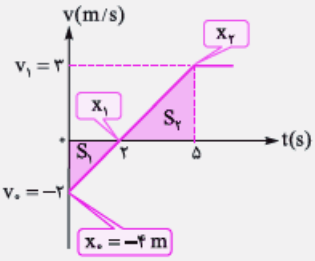


مثال ۳ **نمودار سرعت ـ زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل مقابل است. اگر متحرک در لحظه‌ی $t = 0$ از مکان $x = -4\,m$ عبور کرده باشد، مطلوب است:**

الف) مکان متحرک در لحظه‌های $t_1 = 2\,s$ و $t_2 = 5\,s$.

ب) متحرک در چه لحظه‌ای از مبدأ مکان عبور می‌کند؟

پاسخ سرعت متحرک در ۲ ثانیه‌ی اول $2\,m/s$ زیاد شده؛ یعنی هر ۱s، $1\,m/s$ به سرعت اضافه می‌شه و سرعت متحرک در مدت ۵s، به اندازه‌ی $5\,m/s$ زیاد می‌شه و از $v_0 = -2\,m/s$ به $v_1 = 3\,m/s$ می‌رسه.



(الف)

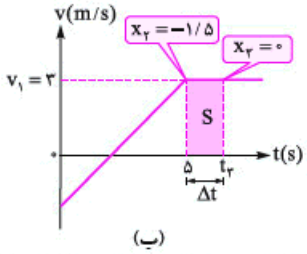
الف در شکل الف، مکان متحرک روی نمودار رو در لحظه‌های $t = 0$، $t = 2\,s$ و $t = 5\,s$، به‌ترتیب با x_0، x_1 و x_2 نشون دادم. بین x_0 و x_1 چی می‌بینی؟ مثلثی به مساحت S_1. اگه S_1 رو به x_0 اضافه کنی، x_1 به‌دست می‌یاد.

$$S_1 = \frac{-2 \times 2}{2} = -2\,m \rightarrow x_1 = x_0 + S_1 = -4 - 2 \rightarrow x_1 = -6\,m$$

حالا بین x_1 و x_2 چی می‌بینی؟ مثلثی به مساحت S_2؛ S_2 رو به x_1 اضافه کن تا x_2 معلوم شه.

$$S_2 = \frac{(5-2) \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4/5\,m \rightarrow x_2 = x_1 + S_2 = -6 + 4/5 \rightarrow x_2 = -1/5\,m$$

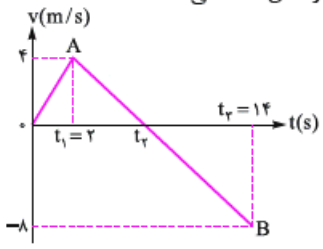
ب به شکل ب نگاه کنید. فرض کرده‌ایم که متحرک در لحظه‌ی t_3 از مبدأ مکان عبور می‌کند ($x_3=0$). در این صورت متحرک باید از لحظه‌ی $t=5s$ تا t_3، $1/5\,m$ جابه‌جا شده باشد. یعنی $S=1/5$ است.



$$x_2+S=x_3 \rightarrow -1/5+S=0 \rightarrow S=1/5\,m$$
$$S=v_1\Delta t \rightarrow 1/5=3\Delta t \rightarrow \Delta t=0/5\,s \rightarrow t_3-5=0/5 \rightarrow t_3=5/5\,s$$

قرمز نمودار تست ۷۸ گیتون نکنه!!! متحرک زمانی تغییر جهت می‌دهد که علامت سرعت آن تغییر کند. در لحظه‌ی t_4 سرعت متحرک، صفر شده و سپس تغییر علامت می‌دهد. (دقت کنید که در لحظه‌ی t_3 سرعت صفر می‌شود؛ ولی بعد از آن، متحرک در همان جهت اولیه، به حرکتش ادامه می‌دهد.)

۷۹- گزینه ۳



با توجه به تشابه مثلث‌های At_1t_2 و Bt_3t_2، داریم:

$$\frac{At_1}{Bt_3}=\frac{t_1t_2}{t_2t_3} \rightarrow \frac{4}{8}=\frac{t_2-t_1}{t_3-t_2} \rightarrow \frac{1}{2}=\frac{t_2-2}{14-t_2} \rightarrow 14-t_2=2t_2-4$$
$$\Rightarrow 3t_2=18 \rightarrow t_2=6\,s$$

سرعت متحرک در بازه‌ی زمانی t_2 تا t_3، منفی است؛ یعنی متحرک در این بازه‌ی زمانی (Δt)، در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند:

$$\Delta t=t_3-t_2=14-6 \rightarrow \Delta t=8\,s$$

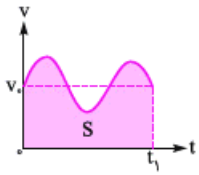
۸۰- گزینه ۲ مساحت محصور بین نمودار A با محور زمان، بزرگ‌تر از مساحت محصور بین نمودار B با محور زمان (در بازه‌ی زمانی t_1 تا t_2) است. پس:

$$S_A>S_B \rightarrow \Delta x_A>\Delta x_B \rightarrow \frac{\Delta x_A}{\Delta t}>\frac{\Delta x_B}{\Delta t} \rightarrow \bar{v}_A>\bar{v}_B$$

۸۱- گزینه ۳ در این صورت، مکان‌های دو متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 برابر می‌شود؛ در نتیجه:

$$\Delta x_A=\Delta x_B \rightarrow \bar{v}_A=\bar{v}_B$$

۸۲- گزینه ۱ با توجه به شکل روبه‌رو، مساحت زیر نمودار $v-t$ متحرک، از مساحت مستطیل نشان‌داده‌شده با خط‌چین، بزرگ‌تر است؛ در نتیجه:



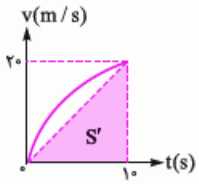
$$S>v_0t_1 \rightarrow \Delta x>v_0t_1 \rightarrow \bar{v}t_1>v_0t_1 \rightarrow \bar{v}>v_0$$

۸۳- گزینه ۲ مساحت مثلث ایجادشده بین نمودار و محور زمان، بیانگر جابه‌جایی متحرک است:

$$\Delta x=\frac{10t_1}{2}=5t_1$$
$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{5t_1}{t_1} \rightarrow \bar{v}=5\,m/s$$

فکرشو می‌کردی این‌قدر راحت، بشه سرعت متوسط رو حساب کرد؟!

۸۴- گزینه ۳ یه‌ذره باید خلاقیت به خرج بدیم! مساحت طوسی‌رنگ در شکل مقابل (S′)، برابر است با:



$$S'=\frac{20\times10}{2}=100\,m$$

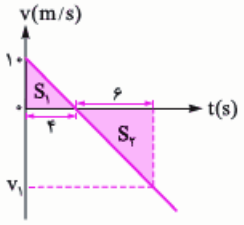
مساحت محصور بین منحنی و محور زمان (S)، از مقدار بالا بیشتر است:

$$(\Delta x=S)>S' \rightarrow \Delta x>100\,m$$
$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{10} \xrightarrow{(\Delta x>100\,m)} \bar{v}>(\frac{100}{10}=10)\,m/s$$

سرعت متحرک در بازه‌ی زمانی $0\le t<10s$، همواره از $20\,m/s$ کوچک‌تر است؛ پس قطعاً $\bar{v}<20\,m/s$ است و:

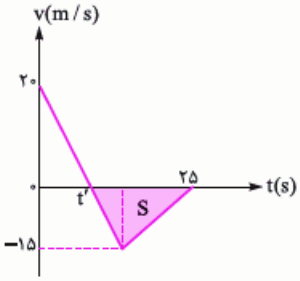
$$10\,m/s<\bar{v}<20\,m/s$$

۸۵- گزینه ۲ ابتدا با توجه به تشابه مثلث‌های مشخص‌شده در شکل مقابل، سرعت متحرک رو در لحظه‌ی $t=10s$ حساب می‌کنیم:



$$\frac{|v_1|}{10}=\frac{6}{4} \rightarrow |v_1|=15\,m/s \xrightarrow{(v_1<0)} v_1=-15\,m/s$$
$$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2=S_1+S_2=\frac{10\times4}{2}+\frac{(-15)\times6}{2}=20-45=-25$$
$$\Delta x=x-x_0 \rightarrow x-2=-25 \rightarrow x=-23\,m$$

۸۶- گزینه ۳ می‌توان بدون محاسبه‌ی t هم به جواب رسید! مطابق شکل روبه‌رو، متحرک به مدت Δt ثانیه، در سوی مخالف محور x جابه‌جا می‌شود. بزرگی جابه‌جایی متحرک در این مدت، برابر است با:

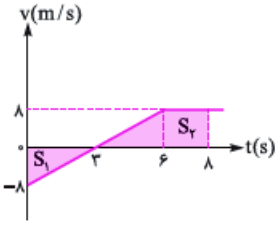


$$|\Delta x|=|S|=\frac{15\times\Delta t}{2}$$

و بزرگی سرعت متوسط آن:

$$|\bar{v}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{\frac{15\times\Delta t}{2}}{\Delta t}=\frac{15}{2} \rightarrow |\bar{v}|=7/5\,m/s$$

۸۷- گزینه ۱ ابتدا با محاسبه‌ی مساحت محصور بین نمودار و محور زمان، جابه‌جایی متحرک را حساب می‌کنیم.



$$\Delta x = S_1 + S_2 = \frac{-8\times 3}{2} + [\frac{(8-3)+(8-6)}{2}\times 8] = -12+28 = 16\,m$$

جابه‌جایی تقسیم بر زمانِ جابه‌جایی؛ حاصلش می‌شود جواب نهایی!

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{16}{8} \rightarrow \bar{v} = 2\,m/s$$

نیزباش برای محاسبه‌ی جابه‌جایی، کافی است مساحت مستطیل ایجادشده بین لحظه‌های $t = 6\,s$ تا $t = 8\,s$ را حساب کنیم. (چرا؟)

۸۸- گزینه ۴ کافی است قدرمطلق مساحت‌ها را با هم جمع کنیم.

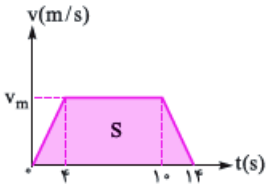
$$d = |S_1| + S_2 = 12+28 \rightarrow d = 40\,m$$

۸۹- گزینه ۱ ریاضی‌دان‌های گرامی! مساحت ذوزنقه را حساب کنند؛ فقط از جای‌گذاری t برحسب ساعت، غافل نشوند!

$$\Delta x = [(\frac{6+4}{2})\times\frac{1}{60}]\times 120 = \frac{1}{12}\times 120 \rightarrow \Delta x = 10\,km \qquad (1\,min = \frac{1}{60}\,h)$$

۹۰- گزینه ۲ جابه‌جایی متحرک را در مدت ۱۴s با Δx و در ۴ ثانیه‌ی اول با $\Delta x'$ نشان می‌دهیم.

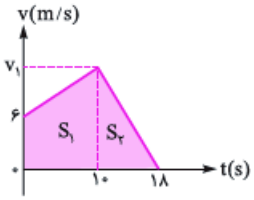
با توجه به شکل روبه‌رو، داریم:



$$\Delta x = S \rightarrow 120 = \frac{14+(10-4)}{2}\times v_m \rightarrow v_m = 12\,m/s$$

$$\Delta x' = (\frac{v_m}{2})t = (\frac{12}{2})\times 4 \rightarrow \Delta x' = 24\,m$$

۹۱- گزینه ۲

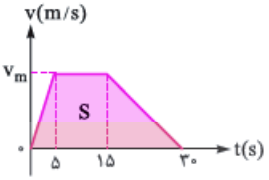


$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{20}{3} = \frac{\Delta x}{18} \rightarrow \Delta x = 120\,m$$

$$\Delta x = S_1 + S_2 = (\frac{v_1+6}{2})\times 10 + \frac{v_1\times(18-10)}{2} = 5v_1 + 30 + 4v_1$$

$$\Delta x = 120\,m \rightarrow 9v_1 + 30 = 120 \rightarrow 9v_1 = 90 \rightarrow v_1 = 10\,m/s$$

۹۲- گزینه ۴

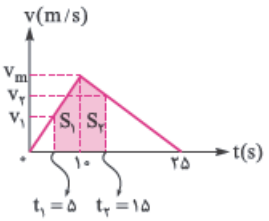


$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow 12 = \frac{\Delta x}{30} \rightarrow \Delta x = 360\,m$$

$$\Delta x = S = [\frac{30+(15-5)}{2}]\times v_m \rightarrow 20v_m = 360 \rightarrow v_m = 18\,m/s$$

۹۳- گزینه ۳ سرعت متحرک در لحظه‌های $t_1 = 5\,s$ و $t_2 = 15\,s$ را برحسب بیشینه‌ی سرعت (v_m) تعیین می‌کنیم. t_1 وسط $t_0 = 0$ و $t = 10\,s$ است و v_1 هم وسط $v_0 = 0$ و v_m است:

$$v_1 = \frac{v_m}{2}$$



از لحظه‌ی $t = 10\,s$ تا $t = 25\,s$ (به مدت ۱۵s)، سرعت متحرک به اندازه‌ی v_m کاهش می‌یابد؛ پس در بازه‌ی زمانی $t = 10\,s$ تا $t_2 = 15\,s$ (به مدت ۵s)، سرعت متحرک به اندازه‌ی $\frac{v_m}{3}$ کم می‌شود و به $\frac{2v_m}{3}$ می‌رسد:

$$v_2 = v_m - \frac{v_m}{3} = \frac{2v_m}{3}$$

جابه‌جایی متحرک در بازه‌ی زمانی ۰ تا $t = 10\,s$، برابر مساحت مثلثی است که قاعده‌ی آن ۱۰s و ارتفاع آن v_m است:

$$\Delta x = \frac{10\times v_m}{2} = 5v_m$$

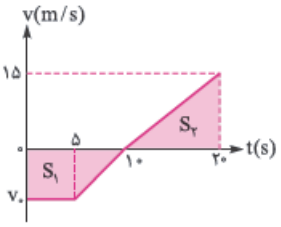
جابه‌جایی متحرک در بازه‌ی زمانی $t_1 = 5\,s$ تا $t_2 = 15\,s$، برابر مجموع مساحت‌های S_1 و S_2 است:

$$\Delta x' = S_1 + S_2$$

$$\Delta x' = (\frac{v_1+v_m}{2})\times(10-t_1) + (\frac{v_2+v_m}{2})\times(t_2-10) = (\frac{\frac{v_m}{2}+v_m}{2})\times(10-5) + (\frac{\frac{2v_m}{3}+v_m}{2})\times(15-10)$$

$$\Rightarrow \Delta x' = \frac{15}{4}v_m + \frac{25}{6}v_m = (\frac{45+50}{12})v_m = \frac{95}{12}v_m \rightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{\frac{95}{12}v_m}{5v_m} \rightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{19}{12}$$

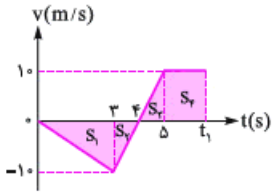
۹۴- گزینه ۳ باید سطح محصور بین نمودار و محور زمان، در بالا و پایین محور هم‌اندازه باشند.



$$\Delta x = S_1 + S_2 = 0 \rightarrow S_2 = -S_1 \quad (I)$$

$$\begin{cases} S_1 = (\frac{10+5}{2})\times v_0 = \frac{15}{2}v_0 \\ S_2 = \frac{15\times 10}{2} = 75\,m \end{cases} \xrightarrow{(I)} 75 = \frac{-15}{2}v_0 \rightarrow v_0 = -10\,m/s$$

۹۵- گزینه ۲ در شکل مقابل، مثلث‌هایی که مساحت‌های آن‌ها با S_2 و S_3 مشخص شده، مساویند.



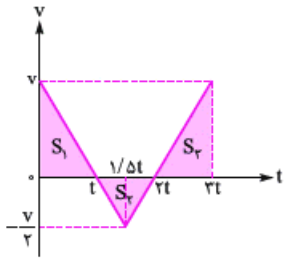
بنابراین:

$$\Delta x = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$S_2 + S_3 = 0 \rightarrow \Delta x = S_1 + S_4 \rightarrow x - x_0 = \frac{(-10)\times 3}{2} + 10\times(t_1 - 5)$$

$$0 - (-2) = -15 + 10t_1 - 50 \rightarrow 2 = 10t_1 - 65 \rightarrow 10t_1 = 67 \rightarrow t_1 = 6/7\,s$$

۹۶- گزینه ۲ با توجه به تقارن موجود در شکل، آن را به‌صورت زیر کامل کرده‌ایم:

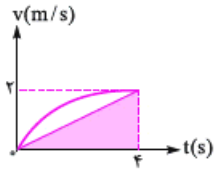


$$\Delta x = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\Delta x = \frac{vt}{2} + \left(\frac{-\frac{v}{2}t}{2}\right) + \frac{vt}{2} = \frac{3}{4}vt$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{3}{4}vt}{3t} \rightarrow \bar{v} = \frac{1}{4}v$$

۹۷- گزینه ۱ جابه‌جایی متحرکی بزرگ‌تر است که مساحت محصور بین نمودار و محور زمان آن بزرگ‌تر باشد.



۱ چون معادله‌ی منحنی رسم‌شده را نداریم، قادر به محاسبه‌ی مساحت زیر آن (S) نیستیم؛ اما می‌توانیم با اعتماد به نفس کامل، اعلام کنیم که مساحت آن از مساحت مثلث خاکستری‌رنگ در شکل مقابل (S_Δ)، بیشتر است!

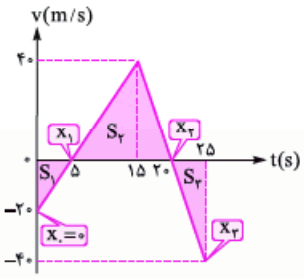
$$S_\Delta = \frac{4\times 2}{2} = 4 \xrightarrow{(S>S_\Delta)} \Delta x > 4\,m$$

۲ مساحت‌های به‌دام‌افتاده بین نمودار و محور t، در بالا و پایین آن هم‌اندازه و قرینه‌اند؛ پس این متحرک در نهایت، به زادگاه خود برگشته و جابه‌جایی‌اش صفر است!

۳ مساحت مثلثی که در این گزینه می‌بینید، ۴ واحد است ($\Delta x = 4\,m$).

۴ مساحت مثلث پایینی را از مثلث بالایی کم کنید. جوابش هرچی باشه، مطمئنم از ۴ واحد، بیشتر نیست ($\Delta x < 4\,m$)!

۹۸- گزینه ۲ در شکل مقابل، با استفاده از تشابه‌های ساده‌ی هندسی، لحظه‌هایی را که سرعت متحرک صفر و بیشینه می‌شود، مشخص کرده‌ایم. در ۵ ثانیه‌ی اول، سرعت متحرک منفی است و در لحظه‌ی $t = 5\,s$ در مکان x_1 قرار می‌گیرد:



$$x_1 = x_0 + S_1 = 0 + \frac{(-20)\times 5}{2} = -50\,m$$

متحرک در لحظه‌ی $t = 5\,s$ تغییر جهت می‌دهد و تا لحظه‌ی $t = 20\,s$ در جهت محور x جابه‌جا می‌شود. مکان متحرک در پایان این بازه‌ی زمانی، برابر است با:

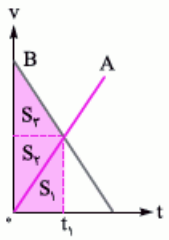
$$x_2 = x_1 + S_2 = -50 + \frac{(20-5)\times 40}{2} = -50 + 300 = 250\,m$$

لحظه‌ی $t = 20\,s$ مُصادف است با دومین تغییر جهت متحرک. از این لحظه تا لحظه‌ی $t = 25\,s$، متحرک در خلاف جهت محور x جابه‌جا می‌شود و در پایان این بازه‌ی زمانی، در مکان x_3 واقع می‌شود:

$$x_3 = x_2 + S_3 = 250 + \frac{(25-20)\times(-40)}{2} = 250 - 100 = 150\,m$$

پس بیشترین فاصله‌ای که متحرک در بازه‌ی زمانی $t = 0$ تا $t = 25\,s$ از مبدأ مکان پیدا می‌کند، برابر $x_2 = 250\,m$ است.

۹۹- گزینه ۴ سرعت دو اتومبیل در لحظه‌ی t_1، برابر می‌شود. جابه‌جایی اتومبیل A تا این لحظه، برابر است با:



$$\Delta x_A = S_1$$

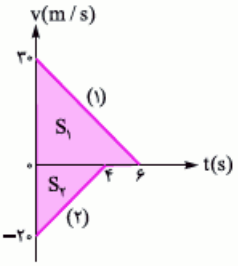
و جابه‌جایی اتومبیل B در همین مدت:

$$\Delta x_B = S_1 + S_2 + S_3$$

S_1 و S_2 بی‌تردید، برابرند؛ از طرفی، چون شیب نمودارها یکسان است $S_2 = S_3$ است؛ پس:

$$\Delta x_B = 3S_1 = 3\Delta x_A \rightarrow x_B - 0 = 3\times(x_A - 0) \rightarrow x_B = 3x_A = 3\times 20 \rightarrow x_B = 60\,m$$

۱۰۰- گزینه ۲ با توجه به شکل، جابه‌جایی قطارها را حساب می‌کنیم:



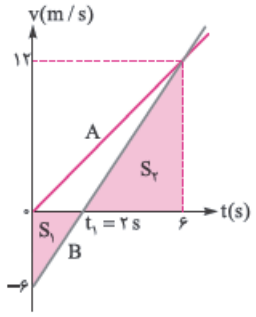
$$\Delta x_1 = S_1 = \frac{30\times 6}{2} = \frac{180}{2} = 90\,m$$

$$\Delta x_2 = S_2 = \frac{-20\times 4}{2} = \frac{-80}{2} = -40\,m$$

یعنی قطار اول ۹۰ m در جهت محور x و قطار دوم ۴۰ m در خلاف جهت محور x، جابه‌جا می‌شوند. پس، دو قطار ۱۳۰ m به هم نزدیک می‌شوند و در فاصله‌ی ۷۰ متری از هم، متوقف می‌شوند:

$$d = 200 - 130 \rightarrow d = 70\,m$$

۱۰۱- گزینه۱ در لحظه‌ی t_1، سرعت متحرک B صفر شده است. t_1 رو می‌تونی از تشابه مثلث‌ها یا با استفاده از مفهوم شیب ثابت خط، به‌دست بیاری! من این‌جوری حساب می‌کنم: توی ذهنم بلند بلند می‌گم: سرعت B در ۶s، از $-6\,m/s$ به $12\,m/s$ رسیده؛ یعنی $18\,m/s$ زیاد شده؛ پس در ۲s، $6\,m/s$ تغییر می‌کنه و از $-6\,m/s$ به صفر می‌رسه:



زمان (s)	تغییر سرعت (m/s)
۶	۱۸
$t_1=2$	۶

مساحت زیر نمودار A، جابه‌جایی A رو نشون می‌ده:

$$\Delta x_A=\frac{12\times 6}{2}=36\,m$$

و جابه‌جایی B:

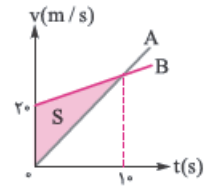
$$\Delta x_B=S_1+S_2=\frac{-6\times 2}{2}+\frac{12\times(6-2)}{2}=-6+24=18\,m$$

پس A به اندازه‌ی ۱۸ m بیشتر از B جابه‌جا شده است:

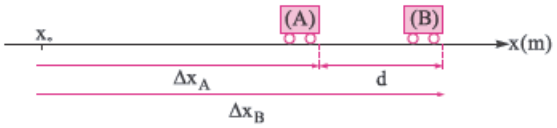
$$d=\Delta x_A-\Delta x_B=36-18\ \rightarrow\ d=18\,m$$

۱۰۲- گزینه۲ تا لحظه‌ی $t=10s$، سرعت متحرک B بیشتر از سرعت متحرک A است. پس در بازه‌ی زمانی $0\le t\le 10s$، فاصله‌ی B از A بیشتر و بیشتر می‌شود. (از لحظه‌ی $t=10s$ به بعد، سرعت A بیشتر از B می‌شود و A به B نزدیک و پس از سبقت از B، دوباره از آن دور می‌شود.) با این حساب، در ۱۰ ثانیه‌ی اول حرکت، فاصله‌ی دو متحرک در لحظه‌ی $t=10s$، به بیشترین مقدار ممکن می‌رسد. فاصله‌ی دو متحرک در این لحظه، برابر تفاضل جابه‌جایی‌های آن‌هاست (شکل پایین):

$$d=\Delta x_B-\Delta x_A$$



مساحت بین نمودار A و محور زمان را از مساحت بین نمودار B و محور زمان کم کنید. به مساحت مثلثی می‌رسید که در شکل بالا، خاکستری شده است. مساحت این مثلث (S) رو راحت می‌تونیم حساب کنیم:



$$d=S=\frac{20\times 10}{2}\ \rightarrow\ d=100\,m$$