فصل دوم

دینامیک

دینامیک

دینامیک شاخه‌ای از مکانیک و علوم مهندسی است که به بحث و مطالعه‌ی دلایل حرکت و به بیان دیگر به بررسی حرکت به کمک نیروها و قوانین مربوط می‌پردازد. این علم بر پایه‌ی قوانین نیوتون بنا نهاده شده است. همان‌طور که گفته شده مکانیک کلاسیک شامل دو بخش کلی سینماتیک و دینامیک است.

در فصل اول حرکت را بدون توجه به عامل به وجود آورده‌ی آن بررسی کردیم در این بخش عوامل ایجاد حرکت مورد توجه قرار می‌گیرد. هر ذره یا جسم همواره تحت تاثیر محیط اطراف خود است. برای مثال وقتی جسمی با جرم معین بر روی یک سطح افقی در حال لغزش است، محیط که همان سطح افقی است به صورت نیروی اصطکاک بر روی جسم اثر گذاشته و در مقابل حرکت آن مقاومت می‌کند. در واقع تأثیر محیط بر روی جسم با اعمال نیرو صورت می‌گیرد. بنابراین شناخت انواع نیروها و قوانین حاکم بر آن‌ها بسیار مهم است.

در فیزیک ۲ در فصل دینامیک به معرفی نیروها و قوانین نیوتون پرداخته شد. در فیزیک سال چهارم علاوه بر شناخت بیشتر نیروها و قوانین نیوتون به کاربردهای بیشتری از نیوتون می‌پردازیم.

معرفی قانون‌های نیوتون: نیوتون در کتاب اصول خود با اطلاع از نظرات دانشمندان قبل از خود موفق شد قانون‌های حرکت که امروز به قانون‌های نیوتون شهرت دارند را بیان کند.

قانون اول نیوتون

هر جسمی حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود را روی خط راست حفظ می‌کند. مگر آن‌که تحت تأثیر نیرو یا نیروهایی مجبور به تغییر آن حالت شود.

از قانون اول نیوتون نتیجه می‌شود که اجسام تمایل دارند وضعیت سکون و یا حرکت یکنواخت روی خط راست خود را حفظ کنند که به این تمایل اجسام **لختی** گفته می‌شود. به همین مناسبت قانون اول نیوتون را **قانون لختی** نیز می‌گویند.

مثال ۱) نقش کمربند ایمنی را به هنگام ترمز ناگهانی اتومبیل توضیح دهید. (ریاضی جبرانی - ۲ تیر ۹۲)

پاسخ: *هنگامی که اتومبیل در حال حرکت ناگهان ترمز می‌کند، سرنشین به جلو پرتاب می‌شود تا حرکت رو به جلوی خود را حفظ کند (قانون لختی نیوتون)، کمربند ایمنی مانع از پرتاب رو به جلوی سرنشین می‌شود.*

مثال ۲) در شرایط خلأ اگر به جسمی که با سرعت ثابت در مسیری مستقیم حرکت می‌کند، نیرویی وارد نشود: (آزمون کانون - ۹۱)

۱) جسم بعد از مدتی می‌ایستد.

۲) جهت حرکت جسم تغییر می‌کند ولی اندازه‌ی سرعت آن ثابت می‌ماند.

۳) اندازه‌ی سرعت جسم تغییر می‌کند ولی جهت آن ثابت می‌ماند.

۴) اندازه‌ی سرعت و حرکت جسم ثابت می‌ماند.

☑**پاسخ:** دقت کنید در صورت سوال اشاره شده، حرکت در شرایط خلأ صورت می‌گیرد. پس مقاومت هوا وجود ندارد، پس طبق قانون اول نیوتون برای جسمی که حرکت یکنواخت روی خط راست دارد اگر نیرویی به آن وارد نشود، حرکت یکنواخت را روی خط راست حفظ می‌کند. بنابراین اندازه‌ی سرعت و جهت آن بدون تغییر خواهد ماند.

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

قانون دوم نیوتون

نتیجه‌ی آشکار قانون اول نیوتون این است که، اگر به جسمی نیرو وارد شود (برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر نباشد) جسم دیگر ساکن نمی‌ماند و حرکتی شتاب‌دار خواهد داشت. قانون دوم نیوتون در واقع رابطه‌ی شتاب با نیرویی که به آن وارد می‌شود را بیان می‌کند که به صورت زیر است:

نیروی برآیند وارد بر جسم برابر است با: **حاصل ضرب جرم‌جسم در شتاب** آن که با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$\vec{F}=m\vec{a}\rightarrow\sum\vec{F}=m\vec{a}$$ برآیند

$\sum\vec{F}$ به معنای برآیند نیروهای وارد بر جسم است.

می‌توان با استفاده از رابطه‌ی بالا شتاب را تعریف کرد. اگر به جسم m نیروهایی وارد شود، شتابی به اندازه‌ی a می‌گیرد که با برآیند نیروهای وارد بر آن نسبت مستقیم و با جرم m نسبت معکوس دارد.

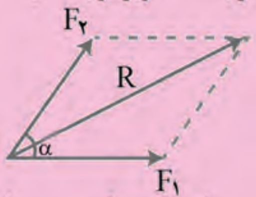
$$\vec{a}=\frac{\sum\vec{F}}{m}$$

جهت شتاب ایجاد شده با جهت نیروی برآیند وارد بر جسم یکسان است.

می‌دانیم نیرو کمیتی برداری است و دارای اندازه و جهت است. در استفاده از قانون دوم نیوتون باید توجه کرد که برآیند نیروهای وارد بر جسم را با استفاده از قوانین جمع برداری به دست آوریم و در روابط قرار دهیم. در به دست آوردن برآیند چند بردار به نکات زیر توجه کنید.

۱) به طور کلی برآیند دو بردار که با هم زاویه‌ی α می‌سازند با استفاده از قانون کسینوس‌ها به دست می‌آید.

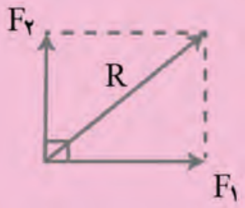
$$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\alpha}$$



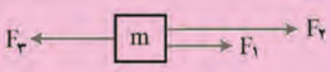
۲) به طور خاص اگر دو نیروی F_1, F_2 به یکدیگر عمود باشند، برآیند آن از قضیه‌ی فیثاغورث به دست خواهد آمد و یا در قانون کسینوس‌ها به جای $\alpha=90^\circ$ قرار می‌دهیم.

$$R=\sqrt{F_1^2+F_2^2}\quad,\quad\vec{R}=m.a$$

جهت شتاب با جهت برآیند نیروها، R یکسان است.



۳) اگر بردارها با یکدیگر هم‌راستا باشند برآیند آن‌ها با توجه به جهت مثبت فرض شده به صورت زیر به دست می‌آید.



$$\sum\vec{F}=m.\vec{a}$$

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=m\vec{a}\rightarrow F_1+F_2-F_3=ma$$

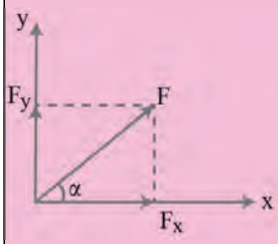
می‌توانیم با قرار دادن $\alpha=0$ برای به دست آوردن برآیند F_1, F_2 و $\alpha=180^\circ$ برای برآیند F_1, F_2, F_3 در قضیه‌ی کسینوس‌ها به نتیجه‌ی بالا رسید. جهت شتاب با جهت برآیند نیروها یکسان است. بنابراین اگر F_1+F_2 بزرگ‌تر از F_3 باشد برآیند نیروها به سمت حرکت (مثبت محور x) و در نتیجه جهت شتاب به سمت مثبت محور x می‌باشد.

۴) در استفاده از قانون کسینوس‌ها اگر اندازه‌ی دو بردار برابر باشند رابطه به صورت زیر در می‌آید.

$$R=\sqrt{F^2+F^2+2F.F\cos\alpha}=\sqrt{2F^2(1+\cos\alpha)}\xrightarrow{1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}}R=2F\cos\frac{\alpha}{2}$$

۵) در به دست آوردن برآیند چند بردار می‌توان از روش تجزیه‌ی بردارها نیز استفاده کرد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنیم نیروی F

به دو مؤلفه‌ی F_x , F_y تجزیه شده است می‌توان با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی این مقادیر را به دست آورد.



$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F\cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F\sin\alpha$$

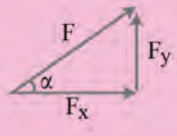
برای نمایش بردار F با استفاده از بردارهای یکه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{F} = \vec{F}_x i + \vec{F}_y j$$

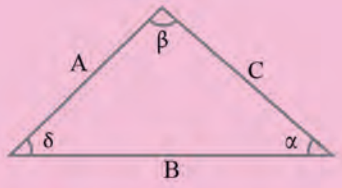
می‌توان گفت بردار $\vec{F}$ دارای یک مولفه در جهت محور x (i) به اندازه‌ی Fx و یک مؤلفه در جهت محور y (j) به اندازه‌یFy است. برای به دست آوردن اندازه‌ی یک بردار که به صورت بردارهای یکه بیان شده است از قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان استفاده کرد.

$$|F| = \sqrt{F_x^۲ + F_y^۲}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x}$$



۶) قضیه‌ی دیگری که در حل مسائل دینامیک کاربرد دارد، قضیه‌ی سینوس‌ها است. در یک مثلث نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویه‌ی مقابلش یکسان می‌باشد.



$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\delta}$$

حال اگر سه بردار نیرو تشکیل یک مثلث بدهند، (برآیند سه نیرو برابر صفر باشد) می‌توان از روابط فوق استفاده کرد.

مثال ۳) جسمی به جرم $۲Kg$ روی سطح افقی بدون اصطکاک تحت اثر دو نیروی متقاطع عمود بر هم که اندازه‌ی یکی از آن‌ها ۳ نیوتون است قرار دارد.

اگر شتاب جسم $۲/۵ \frac{m}{s^۲}$ باشد، اندازه‌ی نیروی دیگر چند نیوتون است؟ (سراسری ریاضی - ۷۳)

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ٤ ٤) ۵

پاسخ: *در صورت مساله شتاب داده شده است. با استفاده از قانون دوم نیوتون اندازه‌ی برآیند نیروهای وارد به جسم را به دست می‌آوریم.*

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{m=۲Kg \ ,a=۲/۵\frac{m}{s^۲}} \sum F = ۲\times۲/۵ \rightarrow \sum F = ۵N$$

بنابراین اندازه‌ی برآیند نیروها که شتاب $۲/۵ \frac{m}{s^۲}$ به جسم می‌دهد، $۵N$ می‌باشد. در صورت سوال اندازه‌ی یکی از نیروها را داده است. چون بردارها عمود بر یکدیگرند داریم:

$$F = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲} \rightarrow ۵ = \sqrt{۳^۲ + F_۲^۲} \rightarrow F_۲^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \rightarrow F_۲ = ۴N$$

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

مثال ٤) دو نیروی $F_۱ = ۲\vec{i} - ۵\vec{j}$, $F_۲$ به جسم $۱/۵Kg$ اثر می‌کنند و معادله‌ی شتاب حاصل در SI به صورت $\vec{a} = ۲\vec{i} - ۴\vec{j}$ می شود. $\vec{F}_۲$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۸۶)

۱) $\vec{i} + \vec{j}$ ۲) $\vec{i} - \vec{j}$ ۳) $۵\vec{i} - \vec{j}$ ٤) $۵\vec{i} + \vec{j}$

پاسخ: *با استفاده از قانون دوم نیوتون و برآیند برداری دو نیروی داده شده مساله را حل می‌کنیم:*

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \vec{F}_2 = F_{2,x}i + F_{2,y}j$$

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a} \to 2\vec{i} - 5\vec{j} + F_2xi + F_2yj = 1/5(2\vec{i} - 4\vec{j})$$

$$2\vec{i} + F_2xi - 5\vec{j} + F_2yj = 3\vec{i} - 6\vec{j} \to (2 + F_2x)\vec{i} + (-5 + F_2y)\vec{j} = 3\vec{i} - 6\vec{j}$$

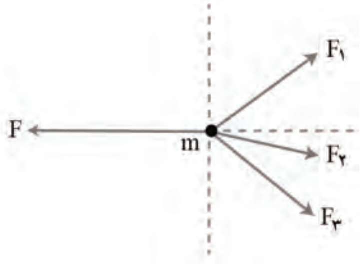
برای تساوی دو بردار با مؤلفه‌های $\vec{i}, \vec{j}$ کافی است مؤلفه‌های متناظر i, j هر کدام با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} 2 + F_2x = 3 \\ -5 + F_2y = -6 \end{cases} \to \begin{cases} F_2x = 1 \\ F_2y = -1 \end{cases} \to \vec{F}_2 = F_2x\vec{i} + F_2y\vec{j} = \vec{i} - \vec{j}$$

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

نکته: هرگاه تعدادی نیرو به یک جسم وارد شود و جسم ساکن (در حالت تعادل) باشد، اگر یکی از نیروها را حذف کنیم، باید برآیند بقیه‌ی نیروها هم‌اندازه و در خلاف جهت نیروی حذف شده باشد.

مثال ۵) به شکل زیر توجه کنید. $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ کدام است؟ (جرم m در تعادل است.)



پاسخ: *همان‌طور که مشاهده می‌شود، برآیند نیروهای $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ برابر $-\vec{F}$ می‌باشد.*

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F} = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -\vec{F}$$

مثال ۶) به یک جسم $2Kg$ هم‌زمان چهار نیرو به اندازه‌های ۲۰، ۱۵، ۱۰ و ۸ نیوتون وارد می‌شود و جسم در حالت تعادل قرار دارد. اگر فقط نیروی $15N$ حذف شود و دیگر نیروها با همان اندازه و جهت اثرگذار باشند، تغییر سرعت جسم بعد از ۲ ثانیه چند متر بر ثانیه خواهد شد؟

(سراسری خارج از کشور-تجربی - ۸۵)

۱) ۸	۲) ۱۰	۳) ۱۵	۴) ۲۰

پاسخ: *به صورت سؤال دقت کنید جهت نیروهای وارد شده به جسم مشخص نیست و فقط اندازه‌ی آن‌ها داده شده است. بنابراین با این اطلاعات مساله نمی‌توان برآیند نیروهای وارد بر جسم را مشخص کرد و باید از نکته‌ی گفته شده برای حل مساله استفاده کرد. وقتی جسمی در حالت تعادل قرار دارد یعنی بر آیند تمام نیروهای وارد بر جسم برابر صفر است. هنگامی که نیروی ۱۵ حذف شود برای به دست آوردن شتاب حاصل از برآیند سه نیروی ۲۰و۱۰و۸ نیوتونی در حالت جدید می‌توان از همان نیروی ۱۵ نیوتونی که با برآیند این سه نیرو برابر است استفاده کرد.*

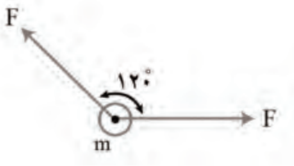
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow 15 = 2 \times a \to a = 7/5 \frac{m}{s^2}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \to \Delta v = a\Delta t \to \Delta v = 7/5 \times 2 = 15 \frac{m}{s}$$

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

مثال ۷) دو نیروی هم اندازه در حالی‌که با هم زاویه‌ی 120° می‌سازند، به یک جسم شتاب a می‌دهند. این دو نیرو در حالی‌که با هم زاویه‌ی 90° می‌سازند به همان جسم چه شتابی می‌دهند؟

۱) $\frac{3}{4}a$	۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}a$	۳) $a\sqrt{2}$	۴) $\frac{4}{3}a$



☑**پاسخ:** چون دو نیرو با هم برابراند با توجه به قانون کسینوس‌ها داریم:

حالتی که زاویه بین دو نیرو ۱۲۰ است

$$\sum \vec{F} = R = 2F\cos\frac{\alpha}{2} \rightarrow R = 2\times F\times \cos 60 \rightarrow R = F$$

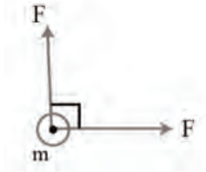
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} \quad (1)$$

در حالت عمود بر هم:

$$R = \sqrt{F^2 + F^2} \rightarrow \sqrt{2}F \rightarrow \sum F = ma' \rightarrow \sqrt{2}F = ma'$$

$$a' = \frac{\sqrt{2}F}{m} \quad (2)$$

$$(1)\ ,\ (2) \rightarrow a' = \sqrt{2}a$$



در حالت دوم نیز برآیند نیروها برابر با F می‌باشد می‌توان نتیجه گرفت در این حالت نیز شتابی با همان اندازه ایجاد خواهد شد.

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

قانون سوم نیوتون

هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم هم به جسم اول نیروی هم‌اندازه، هم‌راستا و در خلاف سوی آن وارد می‌کند. نیرویی که جسم اول وارد می‌کند **«کنش»** و نیرویی که جسم دوم وارد می‌کند **«واکنش»** نامیده می‌شود، این دو نیرو همواره هم‌اندازه، هم‌راستا و در سوی مخالف یکدیگر هستند (هر یک بر دیگری وارد می‌کند)

▼مثال ۸)

الف) چرا قایقران پارو می‌زند، قایق در آب حرکت می‌کند؟ (ریاضی – شهریور ۹۱)

ب) شخصی روی سطح افقی زمین راه می‌رود، چه نیرویی موجب حرکت او می‌شود؟ (ریاضی – شهریور ۹۰)

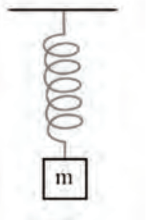
پ) چرا هنگام بلند کردن چمدان از سطح زمین دست شما به سمت پایین کشیده می‌شود؟ (ریاضی – شهریور ۹۰)

☑**پاسخ:** الف) هنگامی‌که قایقران به سوی عقب پارو می‌زند، به آب یک نیرویی به سمت عقب وارد می‌کند. براساس قانون سوم نیوتون واکنش این نیرو از طرف آب به پارو و در جهت مخالف وارد می‌شود و در نتیجه قایق حرکت می‌کند.

ب) نیرویی که عامل حرکت شخص بر روی سطح زمین می‌شود، واکنش نیروی اصطکاک ایستایی است که از طرف سطح به کف پای شخص وارد می‌شود.

پ) هنگام بلند کردن چمدان نیروی دست ما به چمدان به طرف بالا وارد می‌شود. واکنش این نیرو، نیرویی وزنی است که از طرف چمدان به سمت پایین به دست ما داره می‌شود.

▼مثال ۹) در شکل زیر واکنش هریک از نیروها به چه جسمی وارد می‌شود؟ (تجربی – خرداد ۹۴)



☑**پاسخ:**

ابتدا نیروهایی که بر جسم وارد می‌شود را رسم می‌کنیم. دو نیروی وزن و نیروی فنر به هم وارد شده است. واکنش نیروی وزن به کره‌ی زمین وارد می‌شود و واکنش نیروی کشسانی فنر، از طرف جسم به فنر وارد می‌شود.

▼مثال ۱۰) نیروی کنش و واکنش دو نیروی .... و .... هستند، سوی آن‌ها .... یک‌دیگر را خنثی .... (کانون ۹۱)

۱) هم‌اندازه، هم‌راستا، مخالف، می‌کنند. **۲) هم‌اندازه، هم‌نوع، موافق، نمی‌کنند.**

۳) نامساوی، هم‌راستا، موافق، نمی‌کنند. **۴) هم‌اندازه، هم‌راستا، مخالف، نمی‌کنند.**

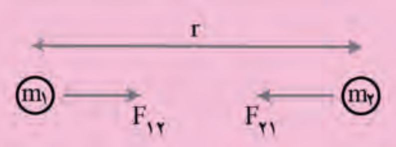
☑**پاسخ:** دو نیروی کنش و واکنش همواره هم‌اندازه، هم‌راستا و در سوی مخالف یک‌دیگر هستند. این دو نیرو هر کدام به یک‌جسم مجزا وارد می‌شوند. بنابراین برآیند گرفتن از آن‌ها بی معنی است و اثر یک‌دیگر را خنثی نمی‌کنند. از ویژگی‌های دیگر این دو نیرو این است که هم‌نوع هستند یعنی اگر یکی از جنس نیروی الکتریکی است دیگری نیز باید از جنس نیروی الکتریکی باشد و یا اگر یکی گرانشی است دیگری نیز باید گرانشی باشد.

معرفی نیروهای خاص:

نیروی گرانش

می‌دانیم نیروها می توانند تماسی یا غیر تماسی باشند یعنی برای اعمال برخی از نیروها نیاز به تماس دو جسم نیست. نیروی گرانش یکی از آن نیروها است. این نیرو عامل حرکت آب در رودخانه به طرف پایین، جزر و مد آب دریاها و حرکت ماه در مدار خود به دور زمین است. سیبی که نیوتون را به کشف بزرگ نزدیک کرد به علت نیروی گرانش از درخت افتاد. نیروی گرانش میان دو ذره با حاصل ضرب **جرم دو ذره** نسبت **مستقیم** و با **مجذور فاصله‌ی آن‌ها از یکدیگر** نسبت **وارون** دارد.

اگر جرم دو ذره m_1, m_2 و فاصله‌ی میان آن‌ها مطابق شکل زیر برابر r باشد، اندازه‌ی نیروی گرانشی میان دو ذره (F) که به صورت کنشی و واکنشی می‌باشد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = F$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G؛ شتاب گرانشی عمومی نام دارد که یکای آن در SI ، $\frac{N.m^2}{Kg^2}$ می‌باشد، یکای نیرو (نیوتون)N و یکای فاصله (متر) m است.

$$G = 6/67\times10^{-11}\ \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

مثال ۱۱) الف) نیروی گرانشی بین دو جسم به جرم‌های ۲ تن و ۳ تن که در فاصله‌ی ۱ متری از هم قرار دارند، چند نیوتون است؟

ب) نیروی گرانشی بین کره‌زمین با جرم تقریبی 6×10^{24} kg و کره‌ی ماه با جرم تقریبی 7×10^{22} kg که در فاصله‌ی تقریبی 40×10^{4} کیلومتری قرار دارد چند نیوتون است؟

پاسخ:

الف)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow f = 6/67\times10^{-11}\times\frac{2000\times3000}{1} = 40/02\times10^{-5}\,N$$

مشاهده می‌کنید جرم‌های ۲ و ۳ تنی نیروی بسیار ناچیزی را به یک‌دیگر وارد می‌کنند. به همین علت است که نیروی گرانشی که اجسام به ما وارد می‌کنند را حس نمی‌کنیم.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow f = 6/67\times10^{-11}\times\frac{6\times10^{24}\times7\times10^{22}}{(4\times10^{5}\times10^{3})^2} \rightarrow F = 1/75\times10^{20}\,N$$

ب)

ملاحظه می‌کنید نیروی جاذبه (گرانش) بین دو جرم آسمانی بسیار بزرگ است.

می‌دانیم نیروی گرانشی وارد به جسم به جرم m در نزدیکی زمین همان وزن جسم است.

$$\begin{cases} F = G\frac{M_e.m}{R_e^2} \\ W = mg \end{cases} \xrightarrow{W=F} G\frac{M_e.m}{R_e^2} = mg \rightarrow g = \frac{GM_e}{R_e^2}$$

اگر مقدار G, M_e, R_e را در رابطه‌ی بالا قرار دهیم، شتاب گرانشی زمین ۹/۸ به دست خواهد آمد.

مثال ۱۲) آیا شتاب گرانشی در تمام نقاط زمین یکسان است؟

پاسخ:

هرچه از سطح زمین فاصله بگیریم مانند وقتی که به قله ی کوهی بلند صعود می‌کنیم، اندازه‌ی Re افزایش یافته و شتاب گرانشی کاهش می‌یابد.

نکته: اگر شتاب گرانشی را از نزدیکی سطح زمین با g_0 و در ارتفاع h از سطح زمین با g_h نشان دهیم، نسبت شتاب در ارتفاع h نسبت به شتاب در سطح زمین از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

حالت اول: $g = G\frac{Me}{r^2} \xrightarrow[r=R_e]{g=g_0} g_0 = G\frac{Me}{R_e^2}$

حالت دوم: $g = G\frac{Me}{r^2} \xrightarrow[r=R_e+h]{g=g_h} g_h = G\frac{Me}{(R_e+h)^2}$

مقایسه‌ی دو حالت: $\frac{g_h}{g_0} = \left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2$

وزن جسم هم در ارتفاع h از سطح زمین با همین نسبت به دست می‌آید:

W_h = وزن جسم در ارتفاع h

W_0 = وزن جسم روی زمین

Re= شعاع زمین

$$W = mg \rightarrow \frac{W_h}{W_0} = \left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2$$

مثال ۱۳) در نقطه‌ای که فاصله‌اش تا سطح زمین n برابر شعاع زمین است شتاب گرانش، $\frac{1}{4}$ شتاب گرانش بر روی زمین است، n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ٤ (سراسری خارج تجربی- ۹۱)

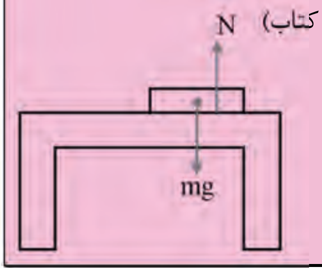
پاسخ:

$$\frac{g_h}{g_0} = \left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2 \xrightarrow[g_n=\frac{1}{4}g_0]{h=nR_e} \frac{\frac{1}{4}g_0}{g_0} = \left(\frac{R_e}{R_e+nR_e}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{(1+n)}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{n=1}$$

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

نیروی عمودی تکیه‌گاه:

فرض کنید کتابی روی یک میز قرار دارد. می‌دانیم نیروی گرانش از طرف زمین به کتاب وارد می‌شود (وزن کتاب) علت آن‌که کتاب در جای خود ثابت است و سقوط نمی‌کند نیرویی است که براساس قانون سوم نیوتون به صورت واکنش نیروی وزن از طرف سطح میز در جهت مخالف آن به کتاب وارد می‌شود. این نیرو، نیروی عمودی تکیه‌گاه نامیده می‌شود که باحرف N نمایش داده می‌شود.



مثال ١٤) روی یک ترازوی فنری بایستید و عددی را که در سه حالت زیر نیرو سنج نشان می‌دهد را با وزن خود مقایسه کنید.

الف) ساکن روی ترازو ایستاده‌اید.

ب) ضمن این که روی ترازو ایستاده‌اید، با دست میزی را که در کنارتان قرار دارد به سمت پایین فشار می‌دهید.

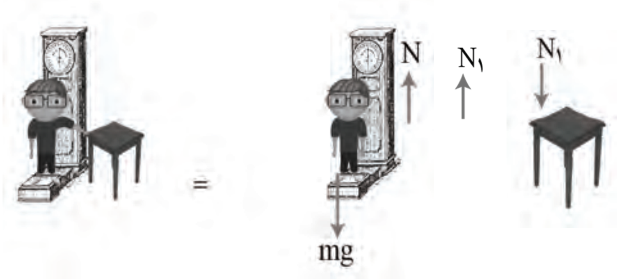
پ) با دست میز را به سمت بالا بکشید.

☑ **پاسخ:** هنگامی که شخص بر روی ترازو قرار گرفته است دو نیرو به آن وارد می‌شود یکی نیروی وزن است که از طرف زمین به شخص وارد می‌شود که به طرف پایین است و دیگری نیروی عمودی سطح است که از طرف ترازو به کف پای شخص وارد می‌کند.

الف) در این حالت وزن جسم با نیروی عمودی سطح برابر است.

$$\Sigma \vec{F}_{\text{برآیند}} = m\vec{a} \xrightarrow{a=0} N - mg = 0 \to N = mg$$

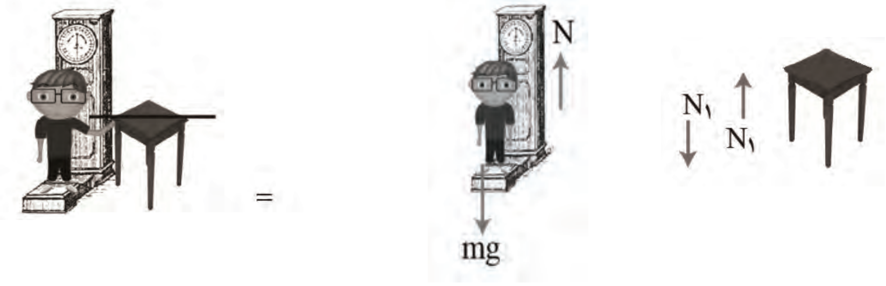
ب) هنگامی که شخص با دست به میز فشار می‌آورد در واقع نیروی N_1 را به سمت پایین به میز وارد می‌کند. واکنش این نیرو از طرف میز در جهت مخالف به دست شخص وارد می‌شود.



$$\Sigma \vec{F}_{\text{برآیند}} = m\vec{a} \longrightarrow N - mg + N_1 = 0 \to N = mg - N_1$$

ترازو عددی کم‌تر از وزن جسم را نشان می‌دهد.

پ)



$$\Sigma \vec{F}_{\text{برآیند}} = m\vec{a} \longrightarrow N - mg - N_1 = 0 \to N = mg + N_1$$

ترازو عددی بیش‌تر از وزن جسم را نشان می‌دهد.

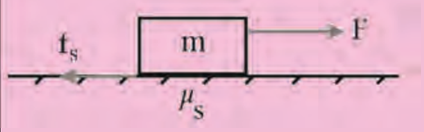
نیروی اصطکاک

وقتی که جسمی را روی یک سطح پرتاب می‌کنیم، پس از طی مسافتی متوقف می‌شود. علت متوقف شدن جسم نیروی اصطکاکی است که بین جسم و سطح زمین ایجاد می‌شود. در حرکت یک خودرو نیروی مقاوم هوا مقدار زیادی از انرژی سوخت را تلف می‌کند. اصطکاک بین دو جسم جامد، هنگامی ظاهر می‌شود که دو سطح بخواهند روی هم بلغزند این نیرو همیشه مضر نیست، راه رفتن روی زمین، گرفتن اجسام و یا حتی در دست گرفتن یک قلم، به خاطر نیروی اصطکاک می‌باشد.

اثری که اتم‌های سطحی دو جسم بر روی هم می‌گذارند ماهیت بنیادی این نیرو است.

جسمی که در شکل زیر نشان داده شده است را در نظر بگیرید. به جسم نیروی محرک F وارد می‌شود. اگر جسم قبل از آستانه‌ی حرکت باشد، نیروی اصطکاک ایجاد شده، اصطکاک ایستایی نامیده می‌شود. با افزایش نیروی محرک F مقدار اصطکاک ایستایی نیز افزایش می‌یابد و در این حالت در هر لحظه نیروی اصطکاک ایستایی وابسته به نیروی محرک F است. این حالت تا زمانی ادامه می‌یابد که جسم در آستانه‌ی حرکت قرار می‌گیرد، در این حالت بیش‌ترین نیروی اصطکاک ایستایی را خواهیم داشت که مقدار آن برابر است با:

$$f_{S\max} = \mu_S \times N$$



μ_S = ضریب اصطکاک ایستایی

N = نیروی عمودی سطح

هنگامی که جسم شروع به حرکت می‌کند، مقدار نیروی اصطکاک کاهش یافته و تقریباً مقداری ثابت می‌شود. این موضوع نشان می‌دهد نیروی اصطکاک جنبشی از بیشینه اصطکاک ایستایی (نیروی اصطکاک در آستانه‌ی حرکت) کمتر است و مقدار آن برابر است با:

$$f_K = \mu_K \times N$$

μ_K= ضریب اصطکاک جنبشی

$$\mu_S \times N > \mu_K \times N \rightarrow \mu_S > \mu_K$$

به طور خلاصه می‌توان گفت در حین اعمال نیروی محرک F سه حالت زیر ممکن است به وجود بیاید:

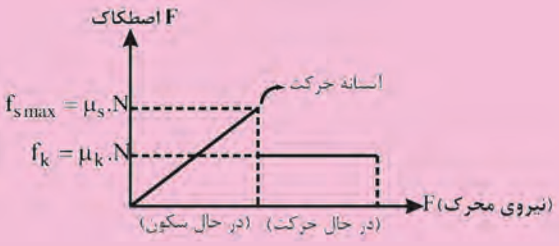
۱) نیروی محرک کمتر از بیشینه‌ی اصطکاک ایستایی است. در این حالت در هر لحظه نیروی اصطکاک ایستایی f_S برابر با نیروی محرک F است.

۲) نیروی محرک برابر با بیشینه‌ی اصطکاک ایستایی است. در این حالت نیروی اصطکاک ایستایی برابر با نیروی اصطکاک ایستایی در آستانه‌ی حرکت است.

$$f_S = f_{S,max} = \mu_S \times N$$

۳) نیروی محرک بیش‌تر از نیروی اصطکاک ایستایی در آستانه‌ی حرکت شود. در این حالت جسم حرکت کرده و نیروی اصطکاک جنبشی (f_K) که کمتر از $f_{S,max}$ است به جسم وارد می‌شود. $f_K = \mu_K \times N$

این موضوع را در نمودار زیر می‌توان بهتر بیان کرد همان‌طور که در نمودار مشخص است مرز بین حرکت و ایستایی نیروی اصطکاک در آستانه حرکت است.



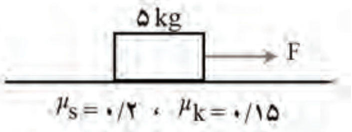
نکته: وقتی سطح‌های تماس را صیقلی کنیم، اصطکاک کاهش می‌یابد. هنگامی که سطح بیش از حد صیقلی شود، اصطکاک افزایش می‌یابد. علت این پدیده در نزدیک شدن اتمی دو سطح به یک‌دیگر و افزایش اثر ربایشی آن‌ها بر روی یک‌دیگر است.برای مثال دو سطح از جنس شیشه که روی هم قرار دارند را در نظر بگیرید. نیروی اصطکاک بین آن‌ها به شدت زیاد است و به سختی روی هم می‌لغزند.

نکته: در حل مسائل مربوط به اصطکاک ابتدا باید تشخیص دهیم جسم در کدام‌یک از حالت‌های گفته شده قرار دارد. برای این موضوع به دست آوردن نیروی اصطکاک در آستانه‌ی حرکت (f_{Smax}) و مقایسه‌ی آن با نیروی محرک امری لازم است. هنگامی که جسم در آستانه‌ی حرکت قرار نگرفته است نمی‌توانیم از رابطه‌ی $f_{Smax} = \mu_S \times N$ برای نیروی اصطکاک استفاده کرد.

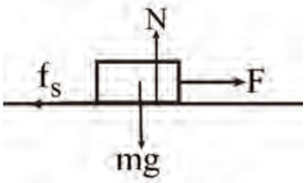
مثال ۱۵) مطابق شکل زیر، به جسمی به جرم $m = 5kg$ روی سطح افقی ساکن است و نیروی افقی و متغیر با زمان $F = 3t + 2$ نیوتون به آن وارد می‌شود. اگر $\mu_s = 0/2, \mu_k = 0/15$ باشد در لحظه‌ی $t = 2s$، اندازه‌ی نیروی اصطکاک بین جسم و سطح افقی چند نیوتون است؟ (کانون - ۹۱)

۱) ۱۰ ۲) ۸

۳) ۷/۵ ۴) ۶



پاسخ: ابتدا باید مشخص کنید هنگامی‌که نیروی حرکت F اعمال می‌شود جسم در چه وضعیتی از نظر حرکت قرار می‌گیرد. ابتدا نیروی اصطکاک بیشینه یا در آستانه‌ی حرکت را می‌یابیم.



$$\sum f_y = ma \xrightarrow{a=0} N - mg = 0 \rightarrow N = mg$$

$$f_{Smax} = \mu_S \times N = 0/2 \times 5 \times 10 = 10N$$

در لحظه‌ی $t = 2s$ نیروی محرک برابر است با:

$$F = 3t + 2 \xrightarrow{t=2s} F = 3(2) + 2 = 8N$$

نیروی محرک از نیروی اصطکاک در آستانه‌ی حرکت کم‌تر است. بنابراین جسم هنوز در آستانه‌ی حرکت قرار نگرفته و ساکن است. در این حالت نیروی اصطکاک برابر با نیروی محرک است.

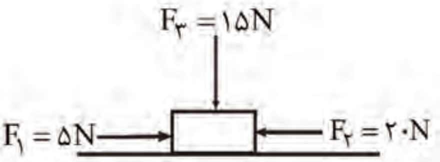
در راستای x $\sum f = ma \xrightarrow{a=0} f - fs = 0 \rightarrow f = fs$

$f_s = 8N$

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مثال ۱۶) قطعه چوبی به جرم $m = 3kg$ روی سطح افقی قرار دارد و نیروهایی مطابق شکل بر آن اثر می‌کند.

اگر $\mu_s = 0/4, \mu_k = 0/25$ باشد، نیروی اصطکاک چند نیوتون است؟



پاسخ: ابتدا دیاگرام نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم. نیروی اصطکاک را رسم نکردیم چون باید تشخیص دهیم جسم کدام طرف حرکت می‌کند.

برای به دست آوردن نیروی عمودی سطح قانون دوم نیوتون را در راستای قائم می نویسیم.

$$\sum \vec{f_y} = m\vec{a} \xrightarrow{a=0} N - F_3 - mg = ma \xrightarrow[m=3Kg]{F_3=15N} N - 15 - 3\times 10 = 0 \rightarrow N = 45N$$

برای تعیین حالت حرکت جسم نیروی بیشینه اصطکاک ایستایی را محاسبه می‌کنیم و نیروی محرک را با آن مقایسه می‌کنیم:

$$f_{Smax} = \mu_S \times N = 0/4 \times 45 = 18N$$

با توجه به شکل نیروی محرک خالص ۱۵ نیوتونی در خلاف محور x به جسم وارد می‌شود. بنابراین جسم در حالت سکون و قبل از آستانه‌ی حرکت قرار دارد. پس نیروی اصطکاک ایستایی به اندازه‌ی نیروی محرک خالص است که جسم وارد می‌شود.

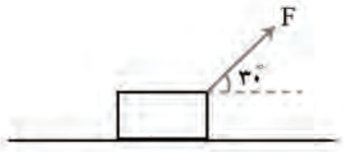
$$\sum \vec{f_x} = m\vec{a} \xrightarrow{a=0} f_S - F = 0 \rightarrow f_S = F = 15N$$

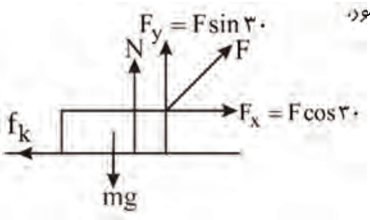
نکته: در بررسی حرکت جسم اگر نیروهای وارد بر جسم هم‌راستا نبودند هرکدام از نیروها را به دو مؤلفه‌ی افقی و قائم تجزیه می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم.

مثال ۱۷) در شکل مقابل نیروی ثابت F، جسمی به وزن ۱۵۰ نیوتون را روی سطح افقی با سرعت ثابت در مسیر مستقیم جابه‌جا می‌کند. اگر ضریب اصطکاک سطح با جسم $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، نیروی F چند نیوتون است؟ (سراسری - ریاضی ۷۷)

۱) ۵۰ ۲) ۷۵

۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۵





☑**پاسخ:** حرکت مستقیم و با سرعت ثابت است. چون هم در حال حرکت است به جسم اصطکاک جنبشی f_k وارد می‌شود.
چون جسم در راستای قائم شتاب ندارد:

برآیند نیروها در راستای قائم $\sum \vec{f_y} = m\vec{a} \xrightarrow{a=۰}$

$$N + F\sin ۳۰^\circ - mg = ۰ \rightarrow N = mg - F\sin ۳۰^\circ$$

حرکت جسم در راستای افق با سرعت ثابت است بنابراین حرکت یکنواخت بوده و در راستای افقی شتاب صفر است.

برآیند نیروها در راستای افقی $\sum \vec{f_x} = m\vec{a} \xrightarrow{a=۰} \sum \vec{f_x} = ۰$

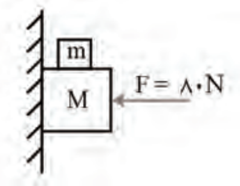
$$\rightarrow F\cos ۳۰^\circ - f_k = F\cos ۳۰^\circ - \mu_k \times N = ۰$$

$$\xrightarrow{N = mg - F\sin ۳۰^\circ} F\cos ۳۰^\circ - \mu k \times (mg - F\sin ۳۰^\circ) = ۰$$

$$F\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱۵۰ - \frac{F}{۲}) = ۰$$

$$F + \frac{F}{۲} = ۱۵۰ \rightarrow F = ۱۰۰N$$

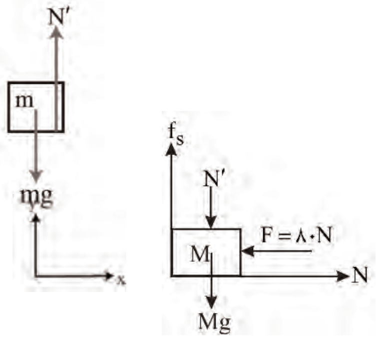
گزینه‌ی ۳ صحیح است.



▼**مثال ۱۸) در شکل مقابل $M = ۱Kg$ است و توسط نیروی افقی F به دیوار قائمی فشرده و ثابت نگه داشته شده است.**
جسمی به جرم m را روی جرم M قرار می‌دهیم. ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح جرم M و دیوار ۰/۲ است

الف) نیروهای وارد بر جرم M را رسم کنید.

ب) بیش‌ترین جرم m چقدر باشد تا جرم M در آستانه‌ی حرکت قرار گیرد؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



☑**پاسخ:** $\sum \vec{F_y} = ۰ \longrightarrow N' - mg = ۰ \rightarrow N' = mg$

الف)

F: نیرویی که از خارج اعمال می‌شود.

N: نیروی عمودی سطح است که دیوار به جرم M وارد می‌کند.

Mg: نیروی وزن جسم است.

f_s: اصطکاک ایستایی است که دیوار به جسم وارد می‌کند.

N': نیرویی که دو سطح m و M به یکدیگر وارد می‌کنند.

ب)هنگامی جرم M در آستانه‌ی حرکت قرار می‌گیرد که نیروی اصطکاک f_s برابر نیروی اصطکاک بیشینه ایستایی شود که مقدار آن با رابطه‌ی $f_{smax} = \mu_s.N$ محاسبه می‌شود.

قانون دوم نیوتون در راستای افقی: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \xrightarrow{a_x=۰} N - F = ۰ \rightarrow N = F = ۸۰N$

برآیند نیروهای وارد بر جسم در راستای قائم: $\sum \vec{F_y} = m\vec{a_y} \xrightarrow{a_y=۰} f_{Smax} - Mg - N' = ۰$

$$\mu_s.N - Mg - N' = ۰$$

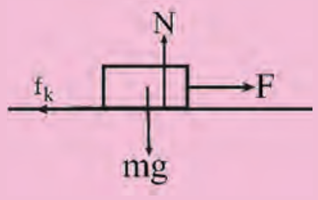
$$۰/۲ \times ۸۰ - ۱ \times ۱۰ - m \times ۱۰ = ۰$$

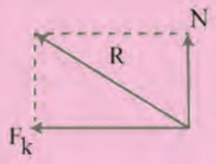
$$m = ۰/۶kg$$

در واقع اگر جرمی بیشتر از ۰/۶ کیلوگرم روی جرم M قرار دهیم. نیروی ۸۰ نیوتونی دیگر نمی‌تواند جسم را بر دیوار نگه دارد و جسم شروع به حرکت رو به پایین می‌کند.

نیروی سطح

در شکل مقابل علاوه بر این‌که سطح نیروی عمودی N را به جسم وارد می‌کند، نیروی اصطکاک را نیز به جسم وارد می‌کند. بنابراین برآیند

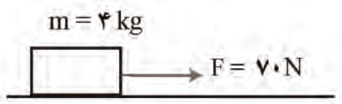




نیروهایی که به جسم وارد می‌شود نیرویی است که نیروی سطح نامیده می‌شود که با R نمایش داده می‌شود.

$$R=\sqrt{N^۲+f_k^۲}$$

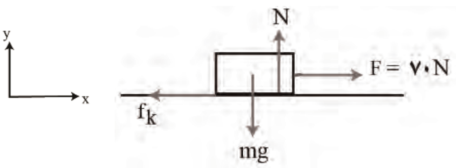
مثال ۱۹) در شکل زیر جسمی به جرم $۴Kg$ بر روی سطح افقی با نیروی افقی و ثابت $F=۷۰N$ کشیده می شود. اگر نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند. برابر با $۵۰N$ باشد، شتاب حرکت جسم چند $\frac{m}{s^۲}$ است؟ $(g=۱۰\frac{N}{Kg})$ (سراسری – ریاضی ۷۷)



۱) ۱۰ ۲) ۵

۳) ۲/۵ ۴) ۷/۵

پاسخ: نیروهایی که به جسم وارد می‌شود را رسم می‌کنیم. نیرویی که سطح به جسم وارد میکند برابر برآیند دو نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک است،داریم:



برآیند نیروها در راستای قائم $\sum \vec{F}_y=m\vec{a}\xrightarrow{a=۰}N-mg=۰\rightarrow N=mg$

$$R=\sqrt{N^۲+f_k^۲}\rightarrow ۵۰=\sqrt{(mg)^۲+f_k^۲}\rightarrow ۵۰=\sqrt{۱۶۰۰+f_k^۲}$$

$$\rightarrow f_k=۳۰N$$

برای به دست آوردن شتاب حرکت قانون دوم نیوتون را در راستای افقی می‌نویسیم:

برآیند نیروها در راستای افقی $\sum \vec{F}_x=m\vec{a}\xrightarrow{a\neq۰}F-f_k=ma\rightarrow ۷۰-۳۰=۴\times a\rightarrow a=۱۰\frac{m}{s^۲}$

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

نکته: جسمی را در نظر بگیرید که نیروی محرک F به آن وارد می شود برای محاسبه‌ی نیروی سطح باید توجه کرد که جسم در کدام یک از سه وضعیت ساکن، در آستانه‌ی حرکت و حرکت قرار دارد.

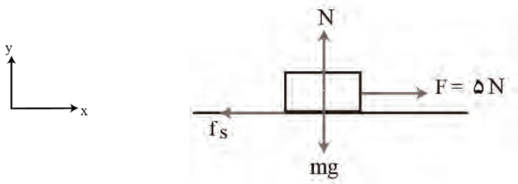
مثال ۲۰) جعبه‌ای به جرم $۳Kg$ بر سطح افقی ساکن است. توسط یک نیرو سنج نیروی افقی $F=۵N$ به آن وارد می‌شود. اگر $\mu_k=۰/۳,\mu_s=۰/۴$ باشد، اندازه‌ی نیروی سطح چند نیوتون است؟ $(g=۱۰\frac{N}{Kg})$ (کانون – ۹۳)

۱) ۱۳ ۲) ۳۷

۳) $۱۳\sqrt{۵}$ ۴) $۳۷\sqrt{۵}$

پاسخ:

ابتدا باید بررسی کنیم جسم در کدام وضعیت سکون، در آستانه‌ی حرکت و حرکت قرار دارد. برای این موضوع ابتدا اندازه‌ی $f_{Smax}=\mu_S\times N$ را محاسبه می‌کنیم.



در جهت y $\sum \vec{f}_y=m\vec{a}\xrightarrow{a=۰}N-mg=۰\rightarrow N=mg$

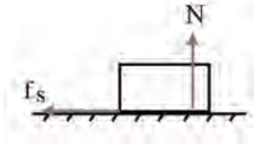
$$f_{Smax}=\mu_S\times N\rightarrow f_{Smax}=۰/۴\times۳\times۱۰=۱۲N$$

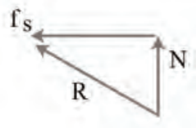
همان‌طور که مشاهده می‌کنید نیروی اصطکاک ایستایی در آستانه‌ی حرکت (f_{Smax}) بیشتر از نیروی محرک $F=5N$ می‌باشد. این نشان‌می‌دهد که نیروی ۵ نیوتونی نمی‌تواند جسم را در آستانه حرکت قرار دهد. در این حالت نیروی اصطکاکی که به جسم وارد می‌شود f_s است که مقدار آن با توجه به قانون دوم نیوتون برابر نیروی محرک است.

$$\sum\vec{F}=m\vec{a}\longrightarrow f-f_s=0\rightarrow f_s=5N$$

دقت کنید تا هنگامی که جسم در آستانه‌ی حرکت قرار نگرفته نمی‌توان از رابطه $\mu_S.N$ استفاده کرد.

بنابراین دو نیروی عمودی سطح N و اصطکاک ایستایی f_s از طرف سطح به جسم وارد می‌شود که برآیند این دو نیرو همان نیروی سطح می‌باشد.





$$R=\sqrt{f_s^2+N^2}=\sqrt{5^2+30^2}=\sqrt{925}=37\sqrt{5}$$

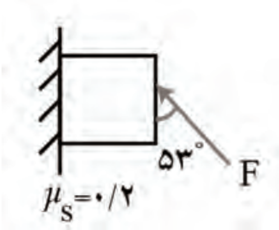
گزینه‌ی ۴ صحیح است.

توجه: اگر جسم در تست بالا در آستانه‌ی حرکت قرار داشت برای نیروی سطح داشتیم:

$$R=\sqrt{N^2+f^2_{Smax}}=\sqrt{N^2+\mu^2_S mg^2}=\sqrt{mg^2+\mu^2_S mg^2}=mg\sqrt{1+\mu_S^2}$$

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

مثال ۲۱) در جسم زیر به جسمی به وزن $20N$ که به دیوار قائم تکیه دارد، نیروی F وارد می‌شود. بیش‌ترین مقدار F هنگامی که جسم حالت سکون خود را حفظ کند، چند نیوتون است؟ ($\cos 53^\circ=0/6$)



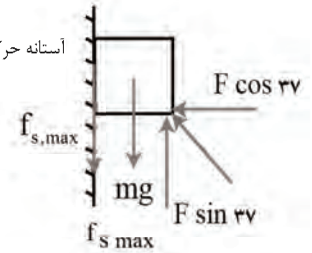
۱) $\frac{500}{19}$ ۲) $\frac{500}{11}$

۳) $\frac{200}{19}$ ۴) $\frac{200}{11}$

پاسخ:

اگر جسم بخواهد ساکن بماند دو حالت ممکن است برای آن اتفاق بیفتد. اگر نیروی F وارد شود و جسم در آستانه‌ی حرکت رو به پایین باشد، این حداقل مقدار نیرویی است که باید به جسم وارد شود تا ساکن بماند اما اگر جسم در آستانه‌ی حرکت رو به بالا قرار بگیرد این بیش‌ترین نیرویی است که به جسم باید وارد شود تا حالت سکون خود را حفظ کند دیاگرام نیروهای وارد به جسم را رسم می کنیم . وقتی جسم در آستانه ی حرکت رو به بالا قرار می‌گیرد جهت نیروی بیشینه‌ی اصطکاک ایستایی را باید رو به پایین در نظر بگیریم و هنگامی که جسم در آستانه ی حرکت رو به پایین قرار دارد جهت نیروی اصطکاک بیشینه ایستایی را باید رو به بالا در نظر گرفت. هر دو حالت را در شکل مشاهده می‌کنید.

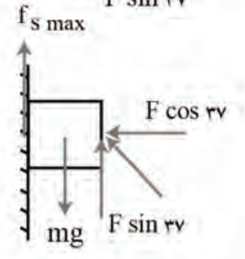
آستانه حرکت رو به بالا



در راستای قائم: $\sum\vec{F}_y=m\vec{a}_y\xrightarrow{a=0}F\sin37^\circ-mg-f_{s,max}=0$

$$F=\frac{mg+f_{s,max}}{\sin37^\circ}$$

آستانه حرکت رو به پایین



در راستای قائم: $\sum\vec{F}_y=m\vec{a}_y\xrightarrow{a=0}F\sin37^\circ-mg+f_{s,max}=0$

$$F=\frac{mg-f_{s,max}}{\sin37^\circ}$$

همان‌طور که از رابطه‌ی F برای دو حالت مشاهده می‌شود بیش‌ترین مقدار F برای ساکن ماندن جسم هنگامی است که جسم در آستانه‌ی حرکت رو به بالا قرار گیرد زیرا مولفه‌ی محرک نیروی F ($F\sin\alpha$) در خلاف جهت بیشینه اصطکاک ایستایی قرار می‌گیرد و به ناچار باید بر مقدار این نیرو نیز غلبه کند تا بتواند جسم را در موقعیت آستانه‌ی حرکت رو به بالا نگه دارد . بنابراین:

$f_{s\max} = \mu_s.N = \mu_s \times F\cos ۳۷^\circ = ۰/۲\times ۰/۸ = ۰/۱۶$

$F = \dfrac{۲۰ + ۰/۱۶\times F}{۰/۶} \to ۰/۶F - ۰/۱۶F = ۲۰ \to ۰/۴۴F = ۲۰ \to F = \dfrac{۲۰}{۰/۴۴} \to F = \dfrac{۵}{۰/۱۱} = \dfrac{۵۰۰}{۱۱}$

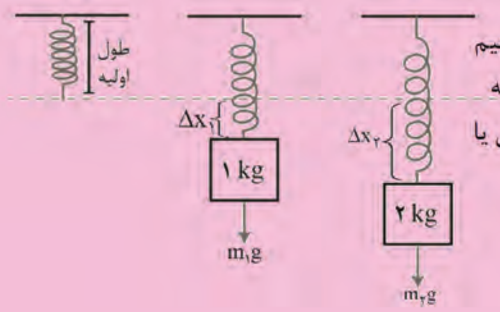
گزینه‌ی ۲ صحیح است.

نیروی فنر:

یک فنر را در نظر بگیرید نسبت به افزایش و کاهش طول خود مقاومت نشان می‌دهد. اگر یک سر فنری را به نقطه‌ای محکم کنید و سر دیگر آن را بکشید، طول فنر افزایش می‌یابد اگر نیروی وارد بر فنر را افزایش دهید طول فنر هم بیش‌تر می‌شود. آزمایش‌های متعدد نشان می‌دهد که تغییر طول فنر تقریباً با اندازه‌ی نیروی وارد بر آن متناسب است.

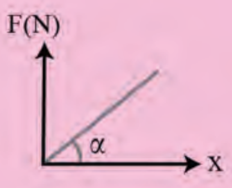
اگر اندازه‌ی نیروی وارد بر فنر را با نماد F_e و اندازه‌ی تغییر طول آن را با x نشان دهیم ، بین آن‌ها رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$F_e = kx$$



فنر نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید اگر وزن‌های مختلفی را به آن آویزان کنیم و تغییر طول فنر را یادداشت کنیم نسبت نیروی اعمالی (در این‌جا نیروی وزن است) به تغییر طول‌های به دست آمده برای هر وزنه مقداری ثابت است که به آن ضریب سختی یا ثابت فنر گفته می‌شود که واحد آن در SI برابر $\dfrac{N}{m}$ می‌باشد.

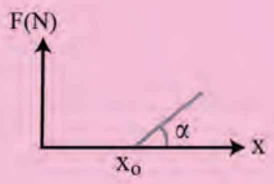
$$\frac{m_۱g}{\Delta x_۱} = \frac{m_۲g}{\Delta x_۲} = k$$



اگر فنر در حالت عادی خود قرار داشته باشد و نمودار نیرو بر حسب جابه‌جایی آن به شکل زیر می‌شود.

$$F = kx$$

$$\text{شیب خط} = k, \tan\alpha = k$$



اگر در فنر مقداری کشیدگی اولیه وجود داشته باشد نمودار نیرو بر حسب جابه‌جایی آن به شکل زیر است.

در این حالت برای رابطه تغییر طول فنر داریم:

$$F = k(x - x_۰)$$

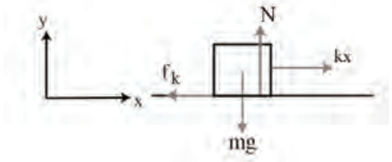
▼ مثال ۲۲) به وسیله‌ی فنری به ضریب ثابت $۸۰\dfrac{N}{m}$ وزنه‌ی ٤ کیلوگرمی را مطابق شکل، روی سطح افقی با شتاب $۱/۵\dfrac{m}{s^۲}$ می‌کشیم. اگر ضریب اصطکاک بین جسم و سطح ۰/۲۵، $g = ۱۰\dfrac{N}{Kg}$ باشد، افزایش طول فنر چند سانتی متر خواهد بود؟

۱) ۳۰　　۲) ۲۰

۳) ۱۲/۵　　٤) ۷/۵

☑ پاسخ:

قانون دوم نیوتون را در راستای قائم و افقی می‌نویسیم:



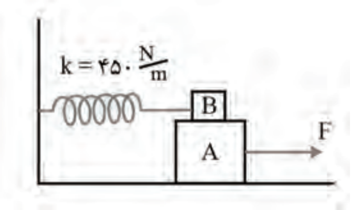
$$\sum F_y = ma \xrightarrow{a_y=۰} N - mg = ۰ \rightarrow N = mg$$

$$\sum F_x = ma \xrightarrow{a_x=۰} Kx - f_k = ma \rightarrow ۸۰ \times x - ۰/۲۵ \times ۴ \times ۱۰ = ۴ \times ۱/۵$$

$$\rightarrow x = ۰/۲m \rightarrow x = ۲۰cm$$

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

▼مثال ۲۳) در شکل رو به رو ضریب اصطکاک جنبشی همه‌ی سطح‌ها یکسان و برابر ۰/۲۵ است.



الف) نیروی افقی F چقدر باشد تا جسم A به طور یکنواخت حرکت کند؟

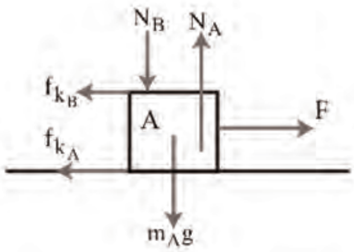
ب) چه نیرویی ازطرف A به B وارد می‌شود؟

ج) در این حالت فنر چند سانتی‌متر افزایش طول می‌یابد؟

(جرم A ۵کیلوگرم ، جرم B ۳ کیلوگرم)

☑پاسخ:

الف) طبق قانون دوم نیوتون برای این‌که جسم A به طور یکنواخت حرکت کند باید برآیند نیروهای وارد بر آن برابر صفر باشد تمامی نیروهای وارد بر جسم A و B را به طور هم‌زمان رسم می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را در راستاهای افقی و قائم برای دو جسم می‌نویسیم.



N_A: *واکنش نیرویی است که جسم A به سطح وارد می‌کند که از طرف سطح زمین به جسم وارد می‌شود.*

N_B: *واکنش نیروی عمودی سطحی است که جسم A به B وارد می‌کند.*

f_{KA}: *نیروی اصطکاکی است که از طرف سطح به جسم A وارد می‌شود.*

f_{KB}: *نیروی اصطکاکی است که از طرف جسم B به جسم A وارد می‌شود.*

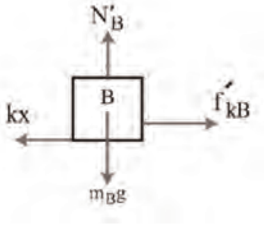
قانون دوم نیوتون را در راستای قائم برای جسم A می‌نویسیم:

$$\sum \vec{F_y} = m\vec{a_y} \xrightarrow{a_y=۰} N_A - m_A g - N_B = ۰ \rightarrow N_A = m_A g + N_B \quad (۱)$$

جسم در راستای قائم حرکت نداشته و شتابش صفر است.

قانون دوم نیوتون را در راستای قائم برای جسم B می‌نویسیم:

$$\sum \vec{F_y} = m\vec{a_y} \xrightarrow{a_y=۰} N_B - mg = ۰ \rightarrow N_B = mg \qquad (۲)$$



N'_B: *واکنش نیروی* N_B *است*

f'_{kB}: *واکنش نیروی اصطکاکی است که جسم B به جسم A وارد می‌کند.*

kx: *نیروی فنری است که در حال کشیده شدن قرار دارد.*

$$(۱),(۲) \rightarrow N_A = m_A g + m_B g = ۵ \times ۱۰ + ۳ \times ۱۰ = ۸۰N$$

قانون دوم نیوتون برای جسم A در راستای افقی:

$$\sum \vec{f_x} = m\vec{a} \longrightarrow F - f_{kB} - f_{kA} = ma \xrightarrow{a=۰} F = f_{kB} + f_{kA}$$

$$f_{kA} = \mu_K . N_A \rightarrow f_{kA} = ۰/۲۵ \times ۸۰ = ۲۰N$$

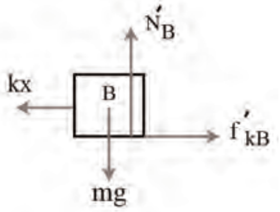
$$f_{kB} = \mu_K . N_B \rightarrow f_{kB} = ۰/۲۵ \times ۳۰ = ۷/۵N$$

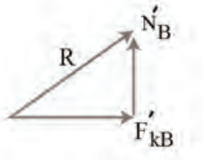
*بنابراین نیروی افقی لازم برای حرکت یکنواخت جرم **A** برابر است با :*

$$F = ۲۰ + ۷/۵ = ۲۷/۵N$$

*ب) از طرف جسم **A** به **B** دو نیروی اصطکاک* f'_{kB} *و نیروی* N'_B *وارد می‌شود.*

*بنابراین برآیند برداری این دو نیرو، نیرویی است که سطح **A** به **B** وارد می‌کند.*





$$R^{۲} = N_B'^{۲} + f_{kB}'^{۲}$$

$$R = \sqrt{N_B'^{۲} + f_{kB}'^{۲}} = \sqrt{۲۰^{۲} + ۷/۵^{۲}} = \sqrt{\frac{۱۸۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲}\sqrt{۷۳}$$

ج) هنگامی که جسم A بر روی سطح زمین حرکت یکنواخت دارد در جهت حرکت خود نیروی اصطکاک f'_{kB} را به جسم B وارد می‌کند. این نیرو می‌خواهد جسم B را به طرف راست حرکت دهد که نیروی کشسانی فنر نیروی مقاوم است و جلوی حرکت جسم B را به سمت راست می‌گیرد. در واقع جسم B مقداری به سمت راست حرکت کرده تا نیروی کشسانی فنر به اندازه‌ی نیروی f'_{kB} شود در این حالت جسم B به تعادل می رسد و حرکت نمی‌کند. بنابراین برای به دست آوردن تغییر طول فنر باید نیروی f'_{kB} را مساوی نیروی کشسانی فنر قرار داد. در واقع قانون دوم نیوتون را برای جسم B که به تعادل رسیده می‌نویسیم.

برای جسم B: $\sum f_x = ma_x \xrightarrow{a_x=۰} f'_{kB} - kx = ۰ \longrightarrow f'_{kB} = kx \rightarrow ۹ = ۴۵۰x \rightarrow x = ۰/۰۲m \rightarrow x = ۲cm$

تذکر: به نیروی عمودی سطح NA توجه کنید. این نیرو تنها حاصل از وزن جسم A نیست. در واقع سطح زمین عکس العمل مجموع وزن دو جسم A و B را به جسم A وارد می‌کند.

چگونگی استفاده از قانون‌های نیوتون در حرکت یک جسم:

به طور کلی در حل مسائل دینامیک مراحل ثابتی را طی می‌کنیم. در مسائل گذشته مشاهده کردید که در ابتدا یک شکل ساده‌ای از جسم و تکیه‌گاه آن رسم کرده و تمامی نیروهای وارد بر جسم را بر روی آن مشخص کردیم. با نوشتن معادله‌ی دوم نیوتون در راستاهای مختلف (قائم و افقی) شتاب حرکت در آن جهت را به دست می‌آوردیم.

برخی از مسائل دینامیک به صورت ترکیبی با مسائل حرکت می‌باشد. شتاب نقطه اتصال مسائل دینامیک و حرکت با یک‌دیگر است. در برخی مواقع شتاب حرکت را با استفاده از قانون‌های نیوتون به دست می‌آوریم و از معادلات حرکت جسم مجهولات مساله را محاسبه می‌کنیم. در برخی از موارد نیز با استفاده از معادلات حرکت جسم شتاب را به دست آورده و در قانون دوم نیوتون استفاده می‌کنیم. در حل مسائل مختلف دینامیک به طور خلاصه مراحل زیر را طی می‌کنیم.

شکل ساده‌ای از جسم و تکیه‌گاه آن به همراه تمامی نیروهایی که اجسام دیگر بر جسم وارد می‌کند رسم می‌کنیم.

(به شکلی که تمامی نیروهای وارده بر جسم را نشان می‌دهد دیاگرام آزاد جسم گفته می‌شود.)

در صورت نیاز نیروها را به دو راستای عمود بر هم تجزیه می‌کنیم، یکی از راستاها به موازات حرکت و دیگری عمود بر حرکت است.

در هر راستا یک جهت را جهت مثبت انتخاب می‌کنیم.(معمولاً جهت حرکت را جهت مثبت در نظر می‌گیریم.)

می‌توانیم قانون دوم نیوتون را در هر راستا و برای هر جسم یا مجموعه‌ای از اجسام جداگانه بنویسیم و معادله‌ها را حل کنیم.

هرگاه چند جسم به هم متصل باشند، در صورتی که شتاب‌های حرکت آن‌ها یکسان باشد مجموعه را می‌توانیم به عنوان یک دستگاه (با جرمی برابر مجموع جرم‌ها) در نظر بگیریم و قانون دوم را برای آن بنویسیم.

در زیر شکل‌های مختلفی از این مسائل را بررسی می کنیم.

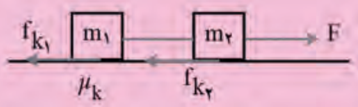
کاربرد قانون دوم نیوتون در راستای افقی :

چند جسم که با طناب به هم متصل‌اند:

همان‌طور که در بحث قبل نکاتی درباره‌ی حل مسائل دینامیک گفته شد، هنگامی‌که می‌خواهیم دینامیک حرکت چند جسم که به هم متصل هستند را بررسی کنیم در صورتی که شتاب حرکت آن‌ها یکسان باشد می‌توانیم قانون دوم نیوتون را برای مجموعه اجسام در نظر بگیریم.
شکل زیر را در نظر بگیرید. دو جسم با یک طناب به یک‌دیگر متصل شده‌اند و توسط نیروی F کشیده می‌شوند.

می‌توانیم قانون دوم نیوتون را برای کل مجموعه دو جرم m_1, m_2 بنویسیم و شتاب حرکت کل مجموعه را محاسبه نماییم.

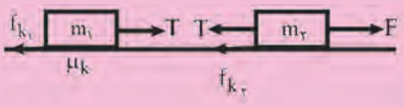
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F-(f_{k_1}+f_{k_2})=(m_1+m_2)a$$



حال اگر بخواهیم نیروی کشش طناب را محاسبه کنیم (وزن طناب ناچیز است) قانون دوم نیوتون را به صورت مجزا برای هر جسم در نظر بگیریم.

برای مجزا کردن جسم m_1 باید نیروی کشش طناب را در نظر بگیریم. فرض کنید طناب را می‌بریم و در دوسر بریده شده دو نیروی هم‌اندازه و مخالف جهت هم قرار می‌دهیم. (به این نیروها **نیروهای داخلی** گفته می‌شود.) این نیرو هنگامی به وجود می‌آید که بخشی ازمجموعه را جدا کنیم. در قسمت جداشده نیروهایی پدید می‌آیند که ماهیت داخلی دارند

برای درک داخلی بودن این نیروها برای مثال در مورد طناب اگر دو قسمت بریده شده را دوباره به هم بچسبانیم این دو نیروی مساوی و مخالف جهت با یکدیگر خنثی می‌شوند.



قانون دوم نیوتون را برای جرم‌های m_1 و m_2 می‌نویسیم:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}$$

m_1 برای جرم: $T-f_{k_1}=m_1a \rightarrow T=m_1a+f_{k_1}$

m_2 برای جرم: $F-T-f_{k_2}=m_2a \rightarrow T=F-f_{k_2}-m_2a$

از هر دو رابطه برای T یک مقدار به دست می‌آید که این نشان می‌دهد برای حل مسائل دینامیک باید دقت کنیم مسئله کدام جسم از مجموعه‌ی جرم ها را مورد سوال قرار داده که بتوانیم از محاسبات بی مورد پرهیز کنیم و قانون دوم نیوتون را فقط برای همان جسم مورد نظر بنویسیم.

مثال ۲۴) در شکل مقابل، سطح افقی و بدون اصطکاک است. با نیروی افقی F دو جسم $m_1=4Kg$ و $m_2=8Kg$ را با نخی به حرکت در می‌آوریم.

الف) شتاب حرکت را به دست آورید.

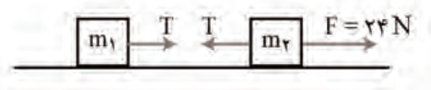
ب) نیروی کشش نخ را محاسبه کنید.(جرم نخ ناچیز است)

پاسخ:

الف) مجموعه دو جرم را به عنوان یک جرم در نظر گرفته و قانون دوم نیوتون را برای آن می‌نویسیم.

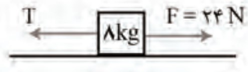
$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a} \rightarrow \vec{F}=(m_1+m_2)\vec{a} \rightarrow 24=(4+8)a \rightarrow a=2\frac{m}{s^2}$$

ب) شتاب حرکت هر کدام از جرم ها $2\frac{m}{s^2}$ است بنابراین می‌توانیم طناب را بریده فرض کرده و به جای آن نیروی داخلی T را در دو سر بریده شده قرار دهیم چون محاسبات مربوط به جرم m_1 کمتر است از معادلات مربوط به این جرم برای به دست آوردن نیروی طناب استفاده می‌کنیم.



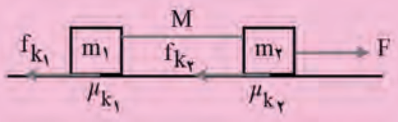
m_1 برای: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a} \rightarrow T=m_1\times a \rightarrow T=4\times 2=8N$

اگر از قانون دوم نیوتون برای جسم m_2 نیز استفاده کنیم به همان ۸ نیوتون برای کشش طناب خواهیم رسید.



$$\sum \vec{F}_x = m_2\vec{a} \rightarrow 24-T=8\times 2 \rightarrow T=24-16=8N$$

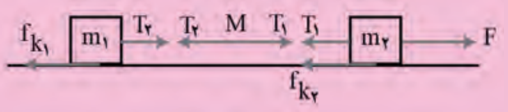
نکته: اگر طناب دارای جرم باشد باید جرم طناب را در محاسبات در نظر گرفت به شکل زیر توجه کنید دو جسم توسط نیروی F با شتاب ثابت a به سمت راست کشیده می‌شود.



$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}$$

$$F - f_{k_1} - f_{k_2} = (m_1 + m_2 + M)a$$

برای به دست آوردن کشش طناب نیروهای وارد بر هریک از اجزاء را به طور جداگانه در نظر می‌گیریم. طناب را از نقطه‌ی اتصال به جرم‌ها می‌بریم. قانون دوم نیوتون در راستای افقی را برای سه جسم، m_1, m_2 و طناب می‌نویسیم.



برای جسم m_1 $\rightarrow T_2 - f_{k_1} = m_1 a$

برای طناب $\rightarrow T_1 - T_2 = Ma$

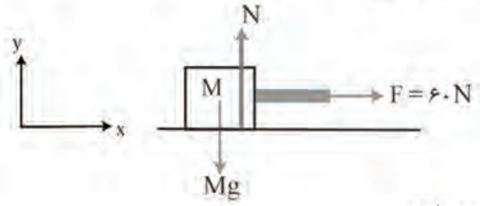
برای جسم m_2 $\rightarrow F - T_1 - f_{k_2} = m_2 a$

اگر جرم طناب ناچیز باشد نیروی کشش طناب در تمام نقاط آن یکسان خواهد بود.($T_1 = T_2$)

مثال ۲۵) **جسمی به جرم ۱۲Kg توسط طنابی به جرم ۳Kg با نیروی ۶۰ نیوتون روی سطح افقی و بدون اصطکاک کشیده می‌شود. کشش طناب را در نقطه‌ی B (وسط طناب) به دست آورید (M جرم جسم و m جرم طناب فرض شود.)**

پاسخ:

قانون دوم نیوتون را برای کل دستگاه (مجموع جرم طناب و جسم) می‌نویسیم و شتاب کل حرکت را به دست می‌آوریم.



حال اگر طناب را از نقطه‌ی B ببریم و قانون دوم نیوتون را به صورت مجزا برای دو سیستم جدید بنویسیم، داریم:

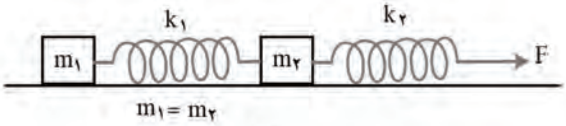
برای نصف طناب و جرم M : $\sum \vec{F}_x = m\vec{a} \rightarrow T_B = (M + \frac{m}{۲})a \rightarrow T_B = (۱۲ + ۱/۵) \times ۴ = ۵۴N$

می توانیم با نوشتن قانون دوم نیوتون برای نیمه‌ی دیگر مجموعه به همین نتیجه برای نیروی کشش طناب در B برسیم.

برای نصف طناب: $F - T = \frac{m}{۲} \times a \rightarrow ۶۰ - T = \frac{۳}{۲} \times ۴ \rightarrow T = ۵۴N$

مثال ۲۶) **در شکل زیر ضریب اصطکاک دو وزنه با سطح افقی برابر ۰/۱ است اگر دستگاه با نیروی افقی $\vec{F}$ ، شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ بگیرد و فنر $k_۲$ به اندازه‌ی ۵cm باز شود، فنر $k_۱$ چند سانتی‌متر باز خواهد شد؟ $(k_۲ = ۲۰۰\frac{N}{m}, k_۱ = ۴۰۰\frac{N}{m})$** (کانون - ۹۱)

۱) ۵ ۲) ۱۰
۳) ۲/۵ ۴) ۱/۲۵



پاسخ:

با اعمال نیروی F کل مجموع شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ به خود می‌گیرد. بنابراین تک تک اجزاء مجموعه نیز (جرم‌های $m_۱, m_۲$) شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ را به خود خواهند گرفت. ابتدا قانون دوم نیوتون را برای کل مجموعه می‌نویسیم.

در راستای افقی: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a} \rightarrow F - f_{k_1} - f_{k_2} = (m_1 + m_2)a$

$$F - \mu_{k_2} \times m_1 g - \mu_{k_2} \times m_2 g = (m_1 + m_2)a \xrightarrow{m_1 = m_2} F - 0/1 \times 10(2m) = 2m \times 2 \rightarrow F = 6m$$

توجه کنید نیروی فنر برابر همان نیروی F می‌باشد. قانون دوم نیوتون را برای جسم می‌نویسیم و به جای نیروی فنر، F را در نظر می‌گیریم.

در راستای افقی: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a} \rightarrow F_1 - f_{k_1} = m_1 a \rightarrow F_1 - \mu_{k_1} \times m_1 g = m_1 a \rightarrow F_1 - 0/1 \times m_1 \times 10 = 2m_1 \rightarrow F_1 = 3m_1 = 3m$

از دو رابطه‌ی به دست آمده می‌توانیم تغییر طول فنر را به دست آوریم.

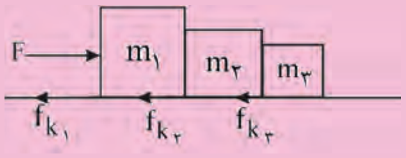
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{k_1 \Delta x_1}{k_2 \Delta x_2} \rightarrow \frac{3m}{6m} = \frac{400 \times \Delta x_1}{200 \times 0/5} \rightarrow \Delta x_1 = 1/25\text{cm}$$

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

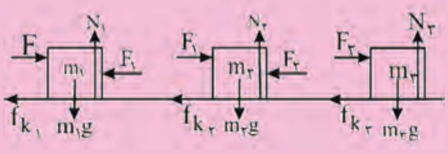
دو یا چند جسم که در تماس با یکدیگر باشند:

چند جسم را در نظر بگیرید که در تماس مستقیم با یکدیگر هستند و توسط نیروی F روی سطح افقی هل داده می‌شوند. مهم‌ترین نکته در این مسأله تماسی است که بین اجسام با یکدیگر وجود دارد. مانند حالت قبل کل مجموعه را به عنوان یک جرم در نظر گرفته و شتاب حرکت را به دست می‌آوریم.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F - (f_{k_1} + f_{k_2} + f_{k_3}) = (m_1 + m_2 + m_3)a$$



حال نیروهای وارد بر هر جسم را به صورت جداگانه در نظر بگیریم، (توجه کنید که در رسم نیروها بین دو جسم از قانون سوم نیوتون استفاده کنید).



F_1 و F_1' : نیروی کنش و واکنش‌اند که جسم m_1, m_2 به یکدیگر وارد می‌کنند.

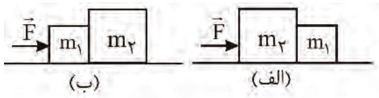
F_2 و F_2': نیروی کنش و واکنشی است که جسم m_2, m_3 به یکدیگر وارد می‌کنند.

می‌توانیم قانون دوم نیوتون را به صورت مجزا برای تک تک جرم‌های m_1، m_2 و m_3 بنویسیم و مسائل را حل کنیم. توجه کنید شتاب این اجسام با شتاب حرکت کل مجموعه برابر است.

نکته: نیروهای داخلی هنگامی یک مجموعه را به اجزای کوچک‌تر تبدیل می‌کنیم پدید می‌آید. اساس این نیروها بر پایه‌ی قانون سوم نیوتون است. می‌توانیم نیروهای وارد بر جسم را به سه دسته‌ی کلی نیروهای خارجی و محرک، نیروهای تکیه‌گاهی (از جنس نیروهای خارجی هستند) و نیروهای داخلی تقسیم کنیم. می‌توانیم تنها در سطح این کتاب به این نکته بسنده کنیم که نیروهای داخلی هنگامی نمایان می‌شوند که مجموع سیستم حرکتی را به سیستم‌های حرکتی کوچک‌تری تقسیم کنیم.

▼ **مثال ۲۷) دو جسم به جرم‌های $m_1 = 1\text{Kg}$, $m_2 = 2\text{Kg}$ مطابق شکل روی سطح افقی صافی قرار دارند. نیروی افقی $\vec{F}$ باعث می‌شود که دو جسم با شتاب $3\frac{m}{s^2}$ به حرکت در آیند. اندازه‌ی نیروی F و نیروی تماسی که دو جسم بر یکدیگر وارد می‌کنند را در هر یک از حالات الف و ب به دست آورید.**

(مسأله ۷ کتاب درسی فیزیک چهارم ریاضی)



☑ پاسخ:

تحلیل مسأله:

همان‌طور که در شکل مشخص است در حالت الف نیروی محرک به جرم m_2 و در حالت ب نیروی محرک به جرم m_1 وارد شده است. مسأله در واقع پاسخ این سؤال را هدف گرفته است که آیا اندازه‌ی نیروی داخلی بین m_1, m_2 به این‌که نیروی محرک به کدام جسم وارد شود ارتباط دارد؟

در هر دو شکل قانون دوم نیوتون را یک بار برابر کل مجموعه می‌نویسیم و بار دیگر برای جرمی که نیروی F مستقیم به آن وارد نمی‌شود.

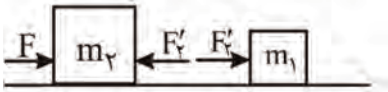
برای حالت ب:

نیروی اصطکاک صفر است و شتاب برای هر دو جسم یکسان است.

برای کل مجموعه: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F = (m_۱ + m_۲)a \quad (۱) = (۱+۲)\times ۳ = ۹$

برای جرم $m_۲$: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F'_۱ = m_۲ a \quad (۲)$

استفاده از رابطه‌ی (۱) در (۲): $F'_۱ = m_۲\left(\frac{F}{m_۱ + m_۲}\right) \Rightarrow F'_۱ = ۲\left(\frac{۹}{۱+۲}\right) = ۶N$



برای حالت الف:

برای کل مجموعه: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F = (m_۱ + m_۲)a \quad (۳) \Rightarrow F = (۱+۲)۳ = ۹N$

برای جرم $m_۱$: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F'_۲ = m_۱ a \quad (۴)$

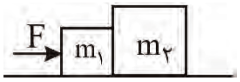
استفاده از رابطه‌ی (۳) در (۴): $F'_۲ = m_۱\left(\frac{F}{m_۲ + m_۱}\right) = ۱\left(\frac{۹}{۱+۲}\right)۳ = ۹N$

برای مقایسه‌ی دو حالت گفته شده می‌توانیم نیروهای داخلی بین دو جسم $m_۲, m_۱$ را با هم مقایسه کنیم.

$$\frac{F'_۲}{F'_۱} = \frac{m_۱\left(\frac{F}{m_۲ + m_۱}\right)}{m_۲\left(\frac{F}{m_۲ + m_۱}\right)} \rightarrow \frac{F'_۲}{F'_۱} = \frac{m_۱}{m_۲} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین نیروی داخلی F' در حالتی که نیروی محرک F به $m_۱$ یا $m_۲$ وارد شود، به نسبت جرم آن‌ها وابسته است.

مثال ۲۸) **مطابق شکل زیر نیروی F به جسم $m_۱$ وارد می شود و مجموعه با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی هر یک از دو جسم با سطح افقی برابر μ_k است. اگر در همین حالت که نیروی F وارد می شود، ضریب اصطکاک جنبشی هر یک از دو جسم با سطح افقی نصف شود، نیرویی که دو جسم به هم وارد می‌کنند، چند برابر می‌شود؟** (سراسری – ریاضی ۹۳)

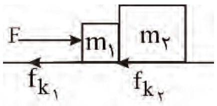


۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ:

قانون دوم نیوتون را یک‌بار برای کل مجموعه و بار دیگر برای جسم $m_۲$ به صورت مجزا به کار می‌بریم.

برای کل مجموعه با شتاب a:



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F - f_{k_۱} - f_{k_۲} = (m_۱ + m_۲)a$$

$$F = \mu_k m_۱ g + \mu_k m_۲ g + (m_۱ + m_۲)a \rightarrow F = \mu_k g(m_۱ + m_۲) + (m_۱ + m_۲)a \rightarrow F = (m_۱ + m_۲)(\mu_k g + a) \quad (۱)$$

برای جسم با شتاب a:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F' - f_{k_۲} = m_۲ a$$

$$F' = \mu_k m_۲ g + m_۲ a \longrightarrow F' = m_۲(\mu_k g + a)$$

اگر از رابطه‌ی به دست آمده در قسمت اول استفاده کنیم، داریم:

$$F' = m_۲(\mu_k g + a) \xrightarrow{\text{از رابطه‌ی (۱)}\ \mu_k g + a = \frac{F}{m_۱+m_۲}} F' = m_۲\left(\frac{F}{m_۱+m_۲}\right)$$

معادله‌ی به دست آمده برای F' نشان می‌دهد که اندازه‌ی این نیرو تنها به نیروی محرک F و جرم اجسام بستگی دارد و با تغییر ضریب اصطکاک جنبشی نیروی F' تغییر نخواهد کرد.

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

▼مثال ۲۹) در شکل مقابل برآیند نیروهای وارد بر جسم ۳ کیلوگرمی چند نیوتون است؟ (سطح افقی بدون اصطکاک است) (سراسری – ریاضی ۸۲)

۱) صفر ۲) ۹
۳) ۱۵ ۴) ۲۴

پاسخ:
ابتدا شتاب کل حرکت اجسام را (که این شتاب برابر شتاب تک تک اجسام می‌باشد) محاسبه می‌کنیم. با نوشتن قانون دوم نیوتون برای جرم ۳ کیلو گرمی برآیند نیروهای وارد بر آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \to F = (m_۱ + m_۲ + m_۳)a \to ۳۰ = (۲+۳+۵)a \to a = ۳\frac{m}{s^۲}$$: برای کل مجموعه

حال جسم ۳ کیلوگرمی را به طور مجزا در نظر گرفته و قانون دوم نیوتون را برای آن می‌نویسیم.

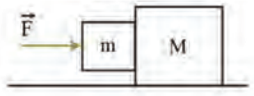
$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \to F_۱' - F_۲' = ma$$: برای جرم ۳ کیلوگرمی

توجه کنید چون شتاب حرکت مجموعه با شتاب حرکت جرم ۳ کیلوگرمی برابراست می‌توانیم برای محاسبه‌ی برآیند نیروهای وارد بر جسم براساس قانون دوم نیوتون سمت راست معادله را محاسبه کنیم:

$$\sum F = ma \to \sum F = ۳\times۳ = ۹N$$

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

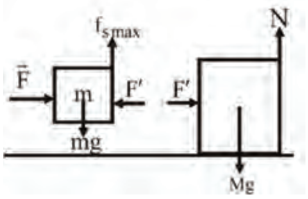
▼مثال ۳۰) در شکل مقابل دو جرم به یک‌دیگر تکیه دارند. ضریب اصطکاک ایستایی بین قطعه‌ها $\mu_s = ۰/۵$ است ولی سطح افقی بدون اصطکاک است. کم‌ترین مقدار نیروی افقی F چند نیوتون باشد تا از لغزیدن جرم m بر روی جرم M جلوگیری کند؟ $(m = ۱۰Kg, g = ۱۰\frac{m}{s^۲}, M = ۴۰Kg)$



(سراسری – ریاضی ۸۷)

۱) ۱۲۵ ۲) ۱۵۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۵۰

پاسخ: ابتدا نیروهای وارد شده به دو جسم M و m را به طور مجزا ترسیم می‌کنیم.
با توجه به شکل برای این‌که جرم m بر روی جرم M نلغزد و به طرف پایین حرکت نکند باید اصطکاک بین دو جسم M و m بزرگ‌تر و یا برابر نیروی وزن m باشد. برای این‌که کم‌ترین نیروی F را به دست آوریم باید جسم m را در آستانه‌ی حرکت رو به پایین در نظر بگیریم که در این‌صورت نیروی اصطکاک بین دو جسم M و m برابر نیروی بیشینه اصطکاک ایستایی است.



قانون دوم نیوتون را برای کل مجموعه و جسم M می‌نویسیم:

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \to F = (m+M)a \quad (۱)$$: برای کل مجموعه

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \to F' = Ma \quad (۲)$$: برای جرم‌ها یا جرم **M**

$$F = \left(\frac{m+M}{M}\right)F' \quad (۳)$$: استفاده از رابطه‌ی **(۲)** در **(۱)**

از شرط مسئله استفاده کرده و نیروی F' را محاسبه می‌کنیم و در رابطه‌ی (۳) قرار می‌دهیم.

توجه کنید در این مساله نیروی عمودی سطح مورد استفاده در رابطه‌ی $f_{Smax} = \mu_S.N$ همان نیروی F' است.

$F' = N \ , f_{Smax} = \mu_S . N \rightarrow f_{Smax} = \mu_S . F'$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow[a=0]{\text{نلغزیدن جرم } m} f_{Smax} - mg = 0 \rightarrow f_{Smax} = mg$$

قانون دوم نیوتون در راستای قائم برای جرم m :

$$\mu_S . F' = mg \rightarrow F' = \frac{mg}{\mu_S}$$

با قرار دادن F' در رابطه‌ی به دست آمده برای F داریم:

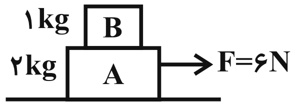
$$F = \left(\frac{m+M}{M}\right) F' \rightarrow F = \left(\frac{m+M}{M}\right)\frac{mg}{\mu_S} = \left(\frac{10+40}{40}\right)\frac{10 \times 10}{0/5} = 250N$$

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

در برخی مسائل دو جسم روی یکدیگر قرار دارند و نیرو به یکی از دو جسم وارد می‌شود با ذکر دو مثال به تشریح این‌گونه مسائل می‌پردازیم.
جسم بالایی بدون لغزیدن بر روی پایینی حرکت کند. (در آستانه حرکت نیز قرار نداشته باشد)

مثال ۳۱) در شکل روبه‌رو اگر در ضمن حرکت روی سطح افقی، وزنه‌ی B روی وزنه‌ی A نلغزد، نیروی اصطکاک بین دو وزنه چند نیوتن است؟

(سراسری تجربی ـ ۹۱)



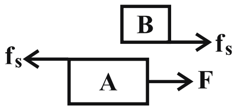
۱) صفر　　۲) ۲
۳) ۳　　۴) ٤

پاسخ:

اگر جسم B بر روی جسم A نلغزد مجموعه با شتاب یکسان حرکت خواهد کرد. قانون دوم نیوتون را برای کل مجموعه بدست می‌آوریم.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F = (m_B + m_A)a \Rightarrow 6 = 3a \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

حال قانون دوم نیوتون را برای جسم نوشته و نیروی اصطکاک ایستایی را بدست می‌آوریم.

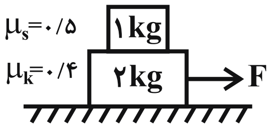


$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow f_s = m_B . a \Rightarrow f_s = 1 \times 2 = 2N$$

توجه کنید در این جا نیروی اصطکاک f_s باعث حرکت جسم B می‌شود!
جسم بالایی نسبت به جسم پایینی در آستانه حرکت قرار گیرد.

مثال ۳۲) در شکل زیر، حداکثر مقدار نیروی F چند نیوتون باشد تا دو بسته از هم جدا نشوند؟ (اصطکاک با سطح زمین قابل صرف‌نظر است)

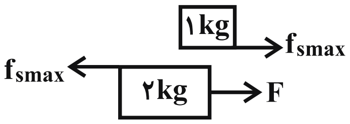
(سنجش ـ ۹۱)



۱) ۲۵　　۲) ۲۰
۳) ۱۰　　۴) ۱۵

پاسخ:

حداکثر مقدار نیروی F هنگامی ایجاد می‌شود که جسم بالایی در آستانه لغزیدن بر روی جسم پایین قرار گیرد و هر دو جسم با یک شتاب در حال حرکت باشند دراین حالت ابتدا قانون دوم نیوتون را برای جسم بالایی می‌نویسیم:



$$f_{smax} = \mu_s . N \xrightarrow{N=1\times g=10N} f_{smax} = 0/5 \times 10 = 5N$$

$$\sum F = ma \Rightarrow f_{smax} = m_1 a \Rightarrow 5 = 1a \Rightarrow a = 5\frac{m}{s^2}$$

حال هم می‌توانیم برابر به‌دست آوردن F قانون دوم نیوتون را برابر جسم پایینی و هم برای کل مجموعه بنویسیم:

$$\sum F = m_2 a \Rightarrow F - f_{smsx} = m_2 a \Rightarrow F - 5 = 2 \times 5 \Rightarrow F = 15N$$

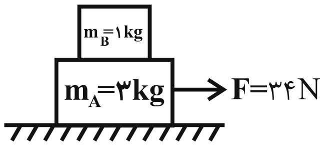
بنابراین گزینه «۴» صحیح می‌باشد. جسم بالایی نسبت به جسم پایینی بلغزد.

مثال ۳۳) مطابق شکل به جسم A نیروی افقی $F = 34N$ را وارد می‌کنیم. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین تمام سطح به ترتیب ۰/۵ و ۰/۲۵ است.

$(g = 10\frac{m}{s^2})$

نیروی اصطکاک بین دو جسم A و B چند نیوتون است؟

(خارج کشور ریاضی ـ ۸۶)

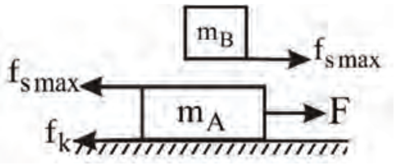


۱) ۲/۵　　۲) ۵
۳) ۱۰　　۴) ۷/۵

پاسخ:

صورت مسئله اطلاعاتی درباره نحوه‌ی حرکت مجموعه و لغزش جسم S روی A نداده است برای پی‌بردن به چگونگی حرکت اجسام ابتدا فرض می‌کنیم مجموعه با اعمال نیروی ۳۴ نیوتونی بطوری که جسم B در آستانه حرکت بر روی جسم A با یک شتاب یکسان حرکت می‌کند. در این حالت قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم.

$$f_{s\max} = \mu_s.N_B = \mu_s.m_B g$$



$$\sum F = m.a \Rightarrow f_{s\max} = m_B.a_۱ \Rightarrow \mu_s.m_B g = m_B a_۱ \Rightarrow a_۱ = ۰/۵ \times ۱۰ = ۵\frac{m}{s^۲}$$

در این حالت قانون دوم نیوتون را برای مجموعه دو جسم می‌نویسیم:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F - f_k = (m_B + m_A)a \xrightarrow{f_k = \mu_k.N} ۳۴ - ۰/۲۵ \times ۴ \times ۱۰ = ۴a \Rightarrow a = ۶\frac{m}{s^۲}$$

از مقایسه شتاب $a_۱$ با شتاب کل مجموعه $(a > a_۱)$ می‌توان نتیجه گرفت جسم B روی A می‌لغزد و فرض ابتدایی ما اشتباه است در این حالت اصطکاک بین دو جسم A و B از نوع اصطکاکی جنبشی می‌باشد:

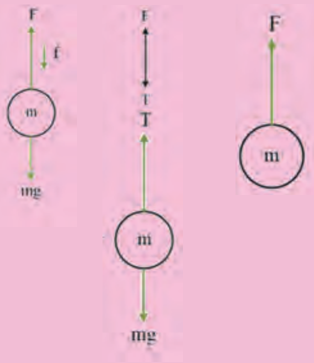
$$f_{k_B} = \mu_k.m_B \times g \Rightarrow f_{k_B} = ۰/۲۵ \times ۱ \times ۱۰ = ۲/۵N$$

گزینه‌ی صحیح است.

کاربرد قانون دوم نیوتون در راستای قائم

اساساً بررسی حرکت در راستای قائم تفاوتی با بررسی آن در راستای افقی (بخش قبل) ندارد. همان‌طور که در تشریح مراحل بررسی مسائل دینامیکی گفته شد با ترسیم درستی از نیروهای وارد شده به جسم یا اجسام و نوشتن قانون دوم نیوتون می‌توان تمام مسائل مربوط را حل کرد. تفاوت عمده‌ای که حرکت در راستای قائم با حرکت در راستای افقی دارد تأثیر نیروی وزن و همچنین مقاومت هوا است که در معادلات در راستای قائم باید در نظر گرفته شود. جسمی را در نظر بگیرید که به طنابی متصل شده و به طرف بالا کشیده می‌شود. می‌توانیم قانون دوم نیوتون را در راستای قائم برای این جسم بنویسیم.

فرض می‌کنیم نیروی مقاومت هوا مقداری ثابت و برابر f می‌باشد. جهت این نیرو مقابل جهت حرکت جسم است.



در راستای قائم: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$F - mg - f = ma \rightarrow F = mg + f + ma$$

اگر نیروی مقاومت هوا را در نظر نگیریم:

$$F - mg = ma \rightarrow F = ma + mg$$

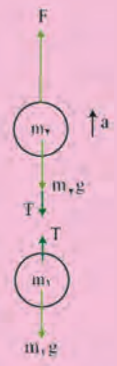
نیروی کشش طناب در این حالت برابر نیروی F است.

حال فرض کنید دو جسم $m_۱, m_۲$ مانند شکل با طناب به یکدیگر متصل شده‌اند، قانون دوم نیوتون را یک‌بار برای کل مجموعه و یک‌بار برای جرم $m_۱$ می‌نویسیم (مقاومت هوا را صفر در نظر بگیرید.)

$$F - m_۱g - m_۲g = (m_۱ + m_۲)a$$

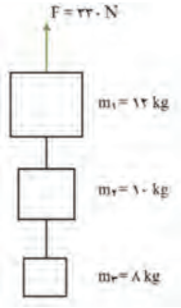
$$F = m_۱g + m_۲g + (m_۱ + m_۲)a = (m_۱ + m_۲)(a + g)$$

شتاب حرکت همه اجزاء یکسان است. برای به دست آوردن کشش طناب T، آن را بریده و نیروی داخلی مورد نظر را رسم می‌کنیم. قانون دوم نیوتون را برای $m_۱$ می‌نویسیم:



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow T - m_1g = m_1a$$
$$T = m_1a + m_1g = m_1(a+g)$$

مثال ۳۴) مطابق شکل مقابل سه جسم m_1, m_2, m_3 را توسط نخ سبک به هم وصل کرده و توسط نیرو قائم $F = 330N$ به طرف بالا می‌کشیم. شتاب حرکت و نیروی کشش نخ‌ها را حساب کنید. ($g = 10\frac{m}{s^2}$) (اردبیل – ۹۱)

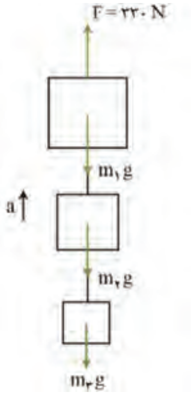


پاسخ:

برای به دست آوردن شتاب حرکت می‌توانیم قانون دوم نیوتون را برای کل اجسام بنویسیم:

در راستای قائم: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F - m_1g - m_2g - m_3g = (m_1 + m_2 + m_3)a$

$$\rightarrow 330 = 12\times10 + 10\times10 + 8\times10 + (12+10+8)a$$
$$\rightarrow 30a = 30 \rightarrow a = 1\frac{m}{s^2}$$

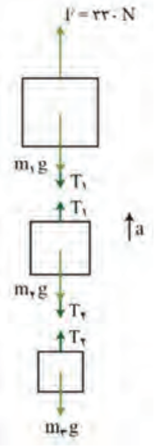


برای به دست‌آوردن کشش نخ می توانیم قانون دوم نیوتون را برای جسم های m_2, m_3 به طور مجزا در نظر بگیریم.

برای جسم m_3 داریم:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow T_2 - m_3g = m_3a$$
$$T_2 = m_3a + m_3g = 8\times1 + 8\times10 = 88N$$

برای جسم m_2 داریم:

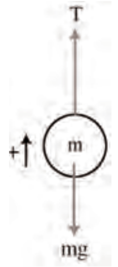


$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow T_1 - T_2 - m_2g = m_2a$$
$$T_1 = m_2a + T_2 + m_2g = 10\times1 + 88 + 10\times10 = 198N$$

نکته: در سوالاتی که اشاره به نوع حرکت جسم یعنی تند شوندگی و کندشوندگی دارد باید به علامت شتاب در معادلات توجه کرد. هنگامی که علامت شتاب و سرعت مخالف هم باشند حرکت کندشوند ($a.v<0$)و هنگامی که شتاب و سرعت هم علامت باشند حرکت تندشونده($a.v>0$)برای ساده شدن پی بردن به علامت شتاب در معادله می‌توانیم جهت حرکت را جهت مثبت در نظر بگیریم (در هر جهت که باشد) در این حالت چون علامت سرعت مثبت می شود می توانیم بگوییم هنگامی که حرکت تند شونده است که علامت شتاب را مثبت و هنگامی کند شونده است که علامت شتاب منفی باشد.

مثال ۳۵) شخصی توسط طنابی جسمی را در راستای قائم جابه جا می‌کند.در کدام یک از حالات زیر کشش نخ بیشترین است؟

۱)حرکت تند شونده و رو به بالا
۲) حرکت کند شونده و رو به بالا
۳) حرکت تند شونده و رو به پایین
٤)حرکت با سرعت ثابت

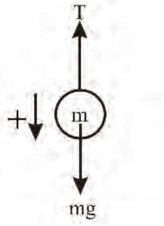


پاسخ: *جهت حرکت را جهت مثبت در نظر گرفته و حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم.(نیروی کشش همان نیروی T می‌باشد)*

الف) حرکت تندشونده و رو به بالا($a>0$)

$$\sum \vec{F}=m\vec{a} \rightarrow T-mg=ma \rightarrow T=mg+ma$$

نیروی کشش در این حالت به اندازه ma از وزن جسم بیشتر است.

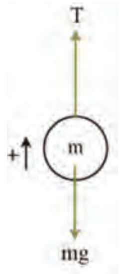


ب) حرکت تندشونده و رو به پایین($a<0$)

$$\sum \vec{F}=m\vec{a} \rightarrow mg-T=ma \rightarrow T=mg-ma$$

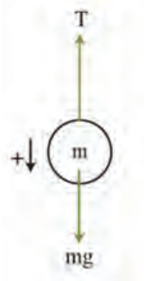
نیروی کشش در این حالت به اندازه ی ma از وزن جسم کمتر می باشد.

ج) حرکت کندشونده و رو به بالا ($a<0$)



$$\sum \vec{F}=m\vec{a} \rightarrow T-mg=m(-a) \rightarrow T=mg-ma \rightarrow T=m(g-a)$$

د) حرکت کندشونده و رو به پایین ($a<0$)



$$\sum \vec{F}=m\vec{a} \rightarrow T-mg=m(-a) \rightarrow mg-T=m(-a) \rightarrow T=mg+ma$$

گزینه‌ی ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۳۶) مطابق شکل یک زنجیر که از ۵ حلقه مشابه تشکیل شده و جرم هر حلقه ۲۰۰ گرم است، توسط نیروی F با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ و حرکت تندشونده رو به بالا کشیده می شود. اندازه‌ی نیروی F و اندازه‌ی نیرویی که دو حلقه‌ی ٤ و ۵ بر یک‌دیگر وارد می‌کنند به ترتیب هر کدام چند نیوتون است؟ $(g=۱۰\frac{N}{Kg})$

۱) ۱۰و۲

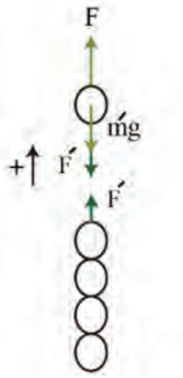
۲) ۱۲و۲/٤

۳) ۱۰و۸

٤) ۱۲و۹/۶

پاسخ:

اگر در نوشتن قانون دوم نیوتون جهت حرکت را جهت مثبت در نظر بگیریم چون حرکت تند شونده است علامت a مثبت در معادلات قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن قانون دوم نیوتون یک‌بار برای کل مجموعه نیروی f به دست خواهد آمد.



$$m=۵\times ۰/۲=۱Kg$$

$$\sum \vec{F}=m\vec{a}\rightarrow F-mg=ma\rightarrow F=۵\times ۰/۲\times ۲+۵\times ۰/۲\times ۱۰=۱۲N$$

در اتصال حلقه‌ی ۴ با ۵ زنجیر را جداکرده و نیروهای داخلی آن را در نظر می‌گیریم این نیرو همان نیرویی است که حلقه‌ی ۴ و ۵ بر اساس قانون سوم نیوتون به هم وارد می‌کنند. توجه کنید شتاب حرکت کل زنجیر با کدام حلقه برابر است؟

برای حلقه ۵ : $\sum \vec{F}=m\vec{a}\rightarrow F-F'-m'g=m'a\rightarrow F'=۱۲-۰/۲\times ۱۰-۰/۲\times ۲=۹/۶N$

گزینه‌ی ۴ صحیح می‌باشد.

بررسی حرکت آسانسور به عنوان یک حرکت در راستای قائم

به طور خلاصه می‌توان حرکت آسانسور را در پنج حالت مختلف بررسی کرد و نیروی کشش کابل آسانسور یا شتاب آن‌را محاسبه نمود.

الف) حرکت تندشونده و رو به بالا $(a>۰)$

$$T-mg=ma\rightarrow T=mg+ma$$

ب) حرکت تندشونده و رو به پایین $(a>۰)$

$$-T+mg=ma\rightarrow T=mg-ma$$

ج) حرکت کندشونده و رو به بالا $(a<۰)$

$$T-mg=-ma\rightarrow T=mg-ma$$

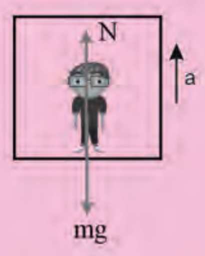
د) حرکت کندشونده و رو به پایین $(a<0)$

$$-T+mg=m(-a)\rightarrow T=mg+ma$$

ه) آسانسور ساکن و یا با سرعت ثابت حرکت می‌کند که در این حالت داریم:

$$\sum \vec{F}=m\vec{a}\xrightarrow{a=0}\sum f=0\rightarrow T-mg=0\rightarrow T=mg$$

اگر شخصی یا جسمی درون آسانسور بر روی یک نیرو سنج قرار گرفته باشد، در حالت‌های مختلف حرکت آسانسور نیروسنج اعداد مختلفی را نشان می‌دهد این همان سبکی و یا سنگینی است که هنگام حرکت آسانسور در برخی موارد احساس می‌کنیم. **عددی که ترازو نشان می‌دهد همان نیروی عمودی سطح است که وزن ظاهری شخص و یا جسم نامیده می‌شود.**



حالت‌های مختلف را مانند قسمت قبل بررسی می‌کنیم:

الف) حرکت تندشونده و رو به بالا $(a>0)$ $\quad N=mg+ma$

ب) حرکت تندشونده و رو به پایین $(a>0)$ $\quad N=mg-ma$

ج) حرکت کندشونده و رو به بالا $(a<0)$ $\quad N=mg-ma$

د) حرکت کندشونده و رو به پایین $(a<0)$ $\quad N=mg+ma$

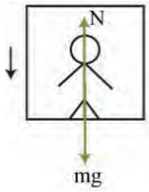
هـ) حرکت ساکن یا آسانسور ساکن $\quad N=mg$

▼مثال ۳۷) **شخصی به جرم 80Kg درون آسانسوری قرار دارد. در لحظه‌ای که آسانسور با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ تند شونده رو به پایین حرکت می‌کند، نیرویی که از طرف شخص به آسانسور وارد می‌شود، چند نیوتون است؟** $(g=10\frac{N}{Kg})$

۱) ۹۶۰ ۲) ۸۰۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۶۴۰

☑پاسخ:

عکس العمل نیروی N که در شکل نشان داده شده نیرویی است که شخص به آسانسور وارد می‌کند که همان وزن ظاهری شخص است. حرکت تندشونده و رو به پایین است. بنابراین جهت پایین را مثبت و علامت شتاب را نیز مثبت در نظر می‌گیریم.



$$\sum \vec{F}=m\vec{a}$$

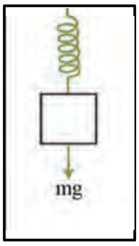
$$-N+mg=ma\rightarrow N=mg-ma=80\times10-80\times2=640N$$

بنابراین شخص نیروی کمتر از وزن واقعی خود به آسانسور وارد می‌کند و اگر یک نیرو سنج زیر پای شخص قرار داشت وزن او را ۶۴ کیلوگرم نشان می‌داد.

$$\left(g=10\frac{N}{Kg}\right)$$

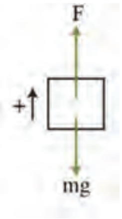
گزینه‌ی ۴ صحیح می‌باشد.

▼مثال ۳۸) **جسمی به انتهای نیرو سنجی درون یک آسانسور آویزان است. تفاوت وزن ظاهری جسم وقتی آسانسور با شتاب $0/4\frac{m}{s^2}$ بالا می‌رود و هنگامی که با سرعت ثابت $2\frac{m}{s}$ پایین می‌آید برابر ۱ نیوتون است. جرم این جسم چند کیلوگرم است؟**



۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۵ ۴) ۰/۸

☑ **پاسخ:** نیروسنج وزن ظاهری جسم را نشان می‌دهد. قانون دوم نیوتون را برای حالت اول و دوم حرکت آسانسور نوشته و جرم را به دست می‌آوریم.آسانسور با شتاب $۰/۴\frac{m}{s^۲}$ بالا می‌رود.



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$F - mg = ma \rightarrow F = ma + mg$$

آسانسور با سرعت ثابت $۲\frac{m}{s}$ پایین می‌آید.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

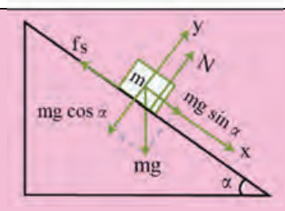
$$mg - F' = ma \xrightarrow{a=۰} F' = mg$$

$$F - F' = mg + ma - mg = ma$$

$$۱ = m \times ۰/۴ \rightarrow m = ۲/۵Kg$$

گزینه‌ی ۲ صحیح می‌باشد.

سطح شیب‌دار : همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد، قوانین نیوتون برای هر جسم ساکن و یا در حال حرکتی صادق می‌باشد، حرکت یک جسم روی سطح شیب‌دار نیز نمونه‌ی دیگری از کاربرد قوانین نیوتون می‌باشد که در ادامه به بررسی آن می‌پردازیم. برای درک بهتر این حرکت به جسم نشان داده شده در شکل که روی یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی در حال پایین آمدن است توجه کنید.



ابتدا یک دستگاه مختصات متصل به جسم در نظر می‌گیریم. محور x را در راستای سطح شیب دار و محور y را عمود بر آن در نظر گرفته که کار تجزیه‌ی نیروها ساده‌تر انجام شود (بهتر است جهت حرکت را جهت مثبت محور x در نظر بگیریم.) به جسم نیروی وزن و اصطکاک وارد می‌شود. وضعیت نیروها را در شکل مشاهده می‌کنید قانون دوم نیوتون را در دو راستای x و y می‌نویسیم. دقت کنید که نیروی وزن Mg در صفحه‌ی xy قرار دارد و برای آسان شدن استفاده از قانون دوم نیوتون آن را به مؤلفه‌های x وy روی این محورها تجزیه می‌کنیم تا همه نیروها یا در راستای x باشند یا در راستای y .

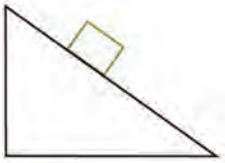
در راستای y: $\sum \vec{F}_y = m\vec{a} \xrightarrow{a=۰} N - mg\cos\alpha = ۰ \rightarrow N = mg\cos\alpha$

در راستای x: $\sum \vec{F}_x = m\vec{a} \longrightarrow mg\mathrm{Sin}\alpha - f_k = ma \rightarrow mg\mathrm{Sin}\alpha - \mu_k mg\mathrm{Cos}\alpha = ma$

$$a = g(\mathrm{Sin}\alpha - \mu_k \mathrm{Cos}\alpha)$$

ملاحظه می‌کنیم همان مراحلی که درباره‌ی حرکت اجسام به صورت افقی یا عمودی انجام دادیم در این‌جا نیز به کار برده می‌شود. در مسایل مختلف شکل‌های متفاوتی از سطح شیب‌دار مطرح می‌شود که برای حل آن‌ها انتخاب محور مختصات، تجزیه‌ی نیروها در راستای محورها، اعمال قانون دوم نیوتون و نوشتن معادلات آن در جهت محورهای انتخاب شده لازم می‌باشد.
شکل‌های مختلفی مانند جسم در حرکت رو به بالا و پایین، بدون اعمال نیروی محرک F، سطح شیب‌دار با اصطکاک و بدون اصطکاک، اعمال نیرو به جسم روی سطح شیب‌دار در راستایی غیر از راستای سطح شیب‌دار و بررسی حرکت رفت و برگشت یک جسم روی سطح شیب‌دار از آن جمله‌اند. در زیر به حل مسائلی گوناگون از این موارد می‌پردازیم که همه‌ی آن‌ها به راحتی با اعمال مراحل گفته شده قابل حل می‌باشند.

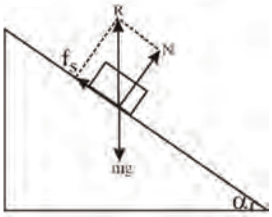
مثال ۳۹) مطابق شکل زیر جسمی بر روی سطح شیب‌داری به حال سکون قرار دارد. (ریاضی – دی ۹۰)



الف) نیروهای وارد بر این جسم را رسم کنید.

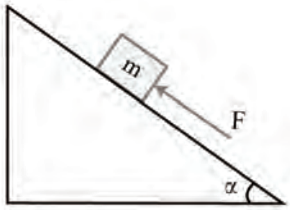
ب) واکنش هر یک از این نیروها به چه جسمی وارد می‌شود؟

پاسخ: *نیروهای وارد بر جسم را در شکل مشاهده می‌کنید. نیروی وزن mg از طرف زمین به جسم وارد می‌شود که، واکنش آن از طرف جسم به همان اندازه به مرکز زمین می‌باشد.*
نیروی R برآیند دو نیروی عمودی سطح و اصطکاک می‌باشد که از طرف سطح به جسم وارد می‌شود.
واکنش این نیرو به همان اندازه در دو جهت مخالف از رفت جسم به سطح شیب‌دار وارد می‌گردد.



نکته: در مسائل مطرح شده در دینامیک هنگامی که گفته می‌شود جسم در آستانه‌ی حرکت قرار دارد باید جهت آن نیز مشخص می‌شود. برای مثال هنگامی‌که گفته می‌شود جسم در آستانه‌ی حرکت به سمت پایین و یا به سمت بالای سطح شیب‌دار است، درست است که جسم در دو حالت ساکن است اما جهت در نظر گرفته شده برای نیروی اصطکاک در این دو حالت عکس یکدیگر می‌باشد.

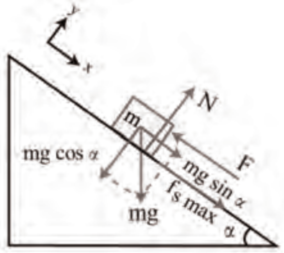
مثال ۴۰) در شکل مقابل، به وزنه‌ی m روی سطح شیب دار نیروی F وارد می‌شود و وزنه ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی بین وزنه و سطح را بر حسب α در دو حالت زیر محاسبه کنید. (اردبیل عارف- ۹۱)



الف) جسم در آستانه حرکت رو به بالا است. **ب)** جسم در آستانه حرکت رو به پایین است.

پاسخ:

الف) هنگامی که جسم در آستانه حرکت به سمت بالا است نیروی اصطکاک را به سمت پایین و برابر بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی $f_{smax} = \mu_s . N$ *در نظر می‌گیریم.*



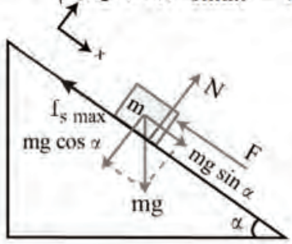
$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a} \xrightarrow{a=0} N - mgcos\alpha = 0 \rightarrow \quad N = mgcos\alpha$$ در راستای y

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow -F + mgsin\alpha + f_{smax} = 0$$ در راستای x

$$\mu_s . mgcos\alpha = F - mgsin\alpha$$

$$\mu_s = \frac{F - mgsin\alpha}{mgcos\alpha}$$

ب) هنگامی که جسم در آستانه حرکت به سمت پایین است نیروی اصطکاک را به سمت بالا و برابر بیشینه اصطکاک ایستایی $f_{smax} = \mu_s . N$ *در نظر می‌گیریم.*



$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y \rightarrow N - mgcos\alpha = 0$$ در راستای y

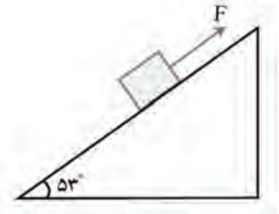
$$N = mgcos\alpha$$

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow mgsin\alpha - f_{smax} - F = 0$$ در راستای x

$$\mu_s . mgcos\alpha = mgsin\alpha - F$$

$$\mu_s = \frac{mgsin\alpha - F}{mgcos\alpha}$$

مثال ۴۱) مطابق شکل، جسمی به جرم ۲kg بر روی سطح شیبداری توسط نیروی F = ۲۵N به طرف بالای سطح کشیده می‌شود.



اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح ۰/۵ باشد.

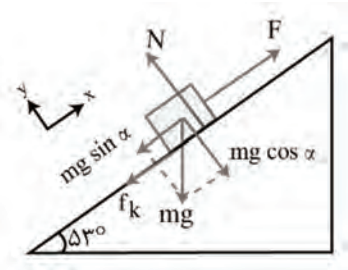
الف) بزرگی نیروی اصطکاک چند نیوتن است؟

ب) بزرگی شتاب حرکت جسم چند متر بر مجذور ثانیه است؟

ج) بزرگی نیروی F چقدر باشد تا جسم با سرعت ثابت بالا کشیده شود؟

$$(\sin ۵۳° = ۰/۸ \ , \ \cos ۵۳° = ۰/۶ \ , g = ۱۰ \frac{m}{s^۲})$$

پاسخ: الف) شکل ساده‌ای از نیروهایی که به جسم وارد می‌شود را رسم می‌کنیم و با نوشتن قانون دوم نیوتن در راستای محور x و y مجهولات مسئله را می‌یابیم.



ب) در راستای y: $\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y \xrightarrow{a_y=۰} N - mg\cos\alpha = ۰ \rightarrow N = mg\cos\alpha$

$f_k = \mu_\mu . N = ۰/۵ \times ۲ \times ۱۰ \times ۰/۶ = ۶N$

در راستای x: $\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow F - mg\sin\alpha - f_k = ma$

$۲۵ - ۲ \times ۱۰ \times ۰/۸ - ۶ = ۲ \times a \rightarrow a = ۱/۵ \frac{m}{s^۲}$

ج) برای اینکه جسم با سرعت ثابت به سمت بالا کشیده شود باید شتاب حرکت در راستای x صفر باشد. داریم:

در راستای x: $\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \xrightarrow{a=۰} F - mg\sin\alpha - f_k = ۰ \rightarrow F = ۲ \times ۱۰ \times ۰/۸ + ۶ = ۲۲N$

نکته: هنگامی که جسمی روی سطح شیب دار بدون اصطکاکی با زاویه α با شتاب ثابت رو به پایین می‌آید شتاب پایین آمدن جسم به جرم آن وابسته نیست و تنها به زاویه سطح شیب دار مربوط می‌شود.

$$mg\sin\alpha = ma \rightarrow a = g\sin\alpha$$

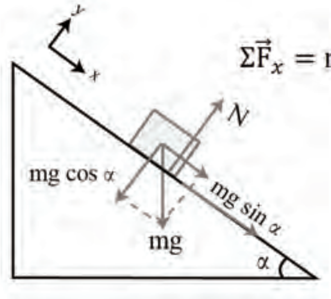
مثال ۴۲) جسمی به جرم ۱kg روی سطح شیب دار بدون اصطکاکی تحت اثر وزن خود با شتاب ثابت $۵ \frac{m}{s^۲}$ پایین می‌آید، زاویه‌ی سطح شیب‌دار چند رادیان است؟ $(g = ۱۰ \frac{m}{s^۲})$

(سراسری تجربی- ۷۴)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$

۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

پاسخ: قانون دوم نیوتن را برای این جسم در راستای x و y نشان داده شده در شکل می‌نویسیم:



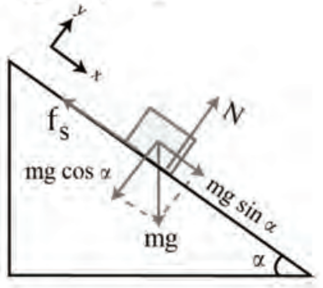
در راستای x: $\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow mg\sin\alpha = ma \rightarrow a = g\sin\alpha$

$۵ = ۱۰\sin\alpha \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۶}$

بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال ۴۳) جسمی بر روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه α می‌سازد ساکن است. نیروی اصطکاک بین جسم و سطح شیبدار الزاماً کدام است؟

(سراسری ریاضی- ۶۹)



۱) $mg\sin\alpha$ ۲) $\mu mg\cos\alpha$

۳) $\mu mg\sin\alpha$ ۴) $\mu mg\tan\alpha$

پاسخ: در صورت مسئله گفته شده که جسم ساکن است. یعنی هنوز در آستانه حرکت قرار نگرفته است تنها نیروی که ممکن است باعث حرکت جسم شود مؤلفه x نیروی وزن که همان $mgsin\alpha$ است که نقش نیروی محرک را دارد. بنابراین اگر جسم بخواهد حرکت کند به سمت پایین حرکت می‌کند. در این حالت می‌توانیم جهت نیروی اصطکاک را به سمت بالا در نظر بگیریم. قانون دوم نیوتون را در راستای x می‌نویسیم و نیروی اصطکاک ایستایی f_s را بدست می‌آوریم.

چون جسم ساکن است شتاب آن در این جهت صفر است.

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow mgsin\alpha - f_s = ma \xrightarrow{a=0} f_s = mgsin\alpha \quad \text{در راستای } x$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

اگر به اشتباه اندازه نیروی اصطکاک را با رابطه $f_{smax} = \mu_s . N$ محاسبه می‌کردیم به گزینه ۲ می‌رسیدیم که نادرست می‌باشد چون در مسئله اره نشده است که جسم در آستانه حرکت قرار دارد. بنابراین نیروی اصطکاک ایستایی برابر نیروی محرک در آن لحظه می‌باشد.

نکته: جسمی را تصور کنید که روی سطح شیب‌دار با اصطکاکی ساکن است، حتماً در ذهنتان می‌توانید تصور کنید که با زیاد شدن زاویه سطح شیب‌دار امکان این‌که جسم در آستانه حرکت قرار گرفته و در نهایت به سمت پایین حرکت کند بیشتر می‌شود. حال بیایید زاویه‌ی حدی که در آن جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد را به‌دست آوریم. برای این کار سه حالت در نظر میگیریم:

۱- قبل از این‌که جسم در آستانه حرکت قرار گیرد: در این حالت نیروی اصطکاک برابر نیروی محرکه است که در اینجا $mg\sin\alpha$ است.

$$mg\sin\alpha - f_s = 0 \rightarrow mg\sin\alpha = f_s$$

۲- زاویه زیاد می‌شود تا جسم در آستانه حرکت رو به پایین قرار می‌گیرد: در این حالت مقدار نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه می‌شود و مقدار آن برابر $\mu_s.N$ است.

$$mg\sin\alpha' = f_{smax} \rightarrow mg\sin\alpha' = \mu_s.mg\cos\alpha'$$
$$\mu_s = \tan\alpha'$$

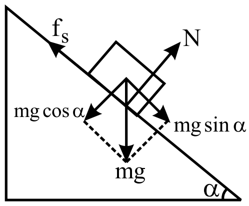
در واقع شرط این‌که جسم در آستانه حرکت رو به پایین قرار گیرد این است که $\mu_s = \tan\alpha$ شود و البته شرط نلغزیدن جسم در این حالت این است که $\tan\alpha \le \mu_s$ باشد و اگر $\tan\alpha > \mu_s$ شود جسم به پایین می‌لغزد.

۳- حال اگر زاویه α به حدی زیاد شود که جسم رو به پایین با سرعت ثابت شروع به حرکت کند: در این حالت ضریب اصطکاک جنبشی جسم برابر $\tan\alpha$ خواهد بود شد.

$$mg\sin\alpha'' - f_k = 0 \rightarrow mg\sin\alpha'' = \mu_k.mg\cos\alpha''$$
$$\mu_k = \tan\alpha''$$

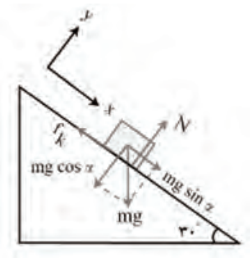
تذکر: می‌توانیم از این نکته برای به دست آوردن ضریب اصطکاک سطوح مختلف استفاده کنیم.

٤٤) در شکل زیر جسمی به وزن ۲۰N روی سطح شیبدار قرار دارد و با سرعت ثابت به پایین می‌لغزد. نیرویی که از طرف سطح بر جسم وارد می‌شود چند نیوتون است؟ (سراسری تجربی- ۸۰)



۱) ۱۰ ۲) ۱۳
۳) ۱۷ ٤) ۲۰

پاسخ: جسم با سرعت ثابت به پایین می‌لغزد بنابراین با توجه به قانون دوم نیوتون برآیند نیروهای وارد بر جسم برابر صفر است. نیروی سطح برآیند دو نیروی عمودی سطح (N) و نیروی اصطکاک جنبشی f_k می‌باشد.



$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow mg\sin\alpha - f_k = 0$$
$$f_k = mg\sin\alpha = 20 \times \sin 30$$
$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y \rightarrow N = mg\cos\alpha = 20 \times \cos 30$$

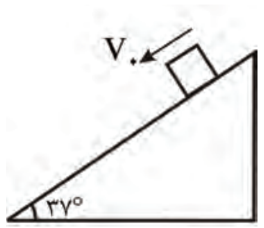
نیروی سطح R از برآیند دو نیروی N و f_k بدست می‌آید:

$$R = \sqrt{(20\sin 30)^2 + (20\cos 30)^2} = \sqrt{400(\sin 30^2 + \sin 30^2)} = 20N$$

توجه کنید تنها نیروی وزن جسم است که به سطح وارد می‌شود و عکس العمل آن برابر و در جهت مخالف از طرف سطح به جسم وارد می‌شود با در نظر گرفتن این نکته می‌توانیم بگوییم نیروی سطح همان نیروی وزن ۲۰N می‌باشد. و نیازی به محاسبات بالانمی‌باشد.

بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال ۴۵) در شکل مقابل، جسم با سرعت $2\frac{m}{s}$ از بالای سطح شیبدار، مماس با سطح به طرف پایین پرتاب می‌شود. چند ثانیه پس از پرتاب، جسم مسافت ۷/۵ متر را روی سطح شیبدار طی می‌کند.

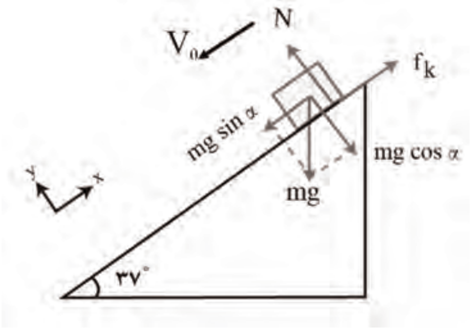


$(g = 10\frac{m}{s^2}, \mu_k = \frac{1}{4}, \sin 37° = 0/6)$ (سراسری ریاضی – ۹۰)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: مسئله ترکیبی از حرکت و دینامیک است. معمولاً شتاب نقطه اشتراک مسائل حرکت و دینامیک است. یعنی با بدست آوردن شتاب حرکت از قانون‌های دینامیک و استفاده از آن در مسائل حرکت‌شناسی می‌توانیم مسئله را حل کنیم. در این مسئله نیز با نوشتن قانون دوم نیوتون برابر جسم شتاب را بدست آورده و به کمک معادله جابه‌جایی – زمان، تست را حل می‌کنیم.

(جهت حرکت را جهت مثبت در نظر می‌گیریم)



$$\Sigma F_y = ma_y \xrightarrow{a_y=0} N = mg\cos\alpha$$
$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow mg\sin\alpha - f_k = ma$$
$$mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha = ma \rightarrow a = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$
$$a = 10(\sin 37 - 0/25 \times \cos 37) \rightarrow a = 4\frac{m}{s^2}$$

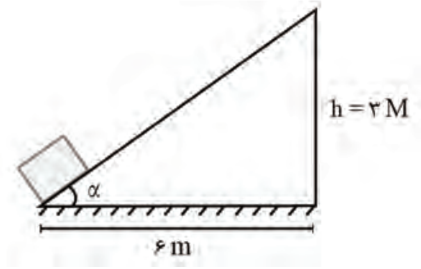
توجه کنید رابطه بدست آمده برای شتاب مستقل از جرم است.

حال از رابطه جابه‌جایی– زمان، زمان لازم را محاسبه می‌کنیم:

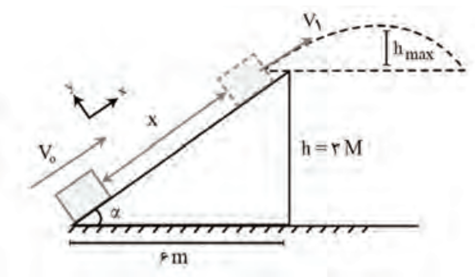
$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \rightarrow 7/5 = \frac{1}{2} \times 4 \times t^2 + 2t$$
$$t = 1/5s$$

مثال ۴۶) مطابق شکل، جسمی با سرعت اولیه‌ی $12\frac{m}{s}$ از پایین سطح شیبدار و مماس با آن به طرف بالای سطح پرتاب می‌شود. جسم حداکثر به ارتفاع چند سانتی‌متر از سطح زمین می‌رسد؟ $(\mu_k = 0/5, g = 10\frac{m}{s^2})$

(سراسری خارج کشور- ۹۰)



۱) ۳۲٤
۲) ۳٤۸
۳) ٤٤٤
٤) ۵۲٤



☑ **پاسخ:** این سوال ترکیبی از مباحث حرکت شناسی و دینامیک است. ابتدا شتاب حرکت را بدست آورده و با استفاده از رابطه مستقل از زمان سرعت جسم را در انتهای سطح شیبدار بدست می‌آوریم (آیا جسم به انتها خواهد رسید؟) این سرعت اولیه یک حرکت پرتابی از ارتفاع ۳ متری سطح زمین است که با استفاده از رابطه ارتفاع اوج در حرکت پرتابی می‌توان حداکثر ارتفاع جسم را از سطح زمین بدست آورد.

$$x = \sqrt{۳^۲ + ۶^۲} = ۳\sqrt{۵}\ m , \cos\alpha = \frac{۲}{\sqrt{۵}} , \sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

شتاب حرکت را بدست می‌آوریم:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow -mg\sin\alpha - \mu_k mg\cos\alpha = ma \rightarrow a = -g(\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha)$$

$$a = -۱۰(\frac{۱}{\sqrt{۵}} + ۰/۵ \times \frac{۲}{\sqrt{۵}}) = -\frac{۲۰}{\sqrt{۵}}$$

با استفاده از رابطه مستقل از زمان می‌توانیم سرعت در لحظه پرتاب جسم از سطح شیبدار را محاسبه کنیم:

$$V_۱^۲ - V_۰^۲ = ۲ax \rightarrow V_۱^۲ - ۱۲^۲ = -۲ \times \frac{۲۰}{\sqrt{۵}} \times ۳ \times \sqrt{۵} \rightarrow V_۱^۲ = ۲۴\frac{m}{s}$$

بیشترین ارتفاع پرتابه را بدست می‌آوریم:

$$h_{max} = \frac{V_۱^۲ \sin^۲\alpha}{۲g} \rightarrow h_{max} = \frac{۲۴ \times (\frac{۱}{\sqrt{۵}})^۲}{۲۰} = ۰/۲۴\ m$$

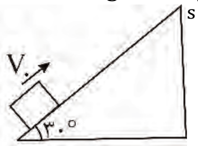
بنابراین حداکثر ارتفاع از سطح زمین:

$$h_{کل} = ۳ + ۰/۲۴ = ۳/۲۴\ m \rightarrow h_{کل} = ۳۲۴\ cm$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

▼ **مثال ۴۷) در شکل زیر، وزنه را با سرعت اولیه‌ی $V_۰$ از پایین سطح شیبدار، مماس با سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. وزنه تا ارتفاعی بالا رفته دوباره به نقطه پرتاب برمی‌گردد. اگر نیروی اصطکاک جنبشی برابر با ۰/۲ وزن جسم باشد، زمان بالا رفتن جسم چند برابر زمان پایین آمدن آن است؟** $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

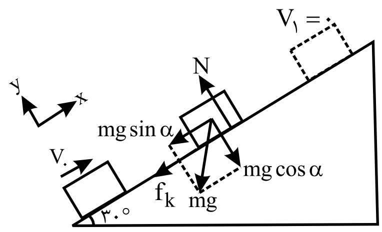
(سراسری ریاضی-۹۲)



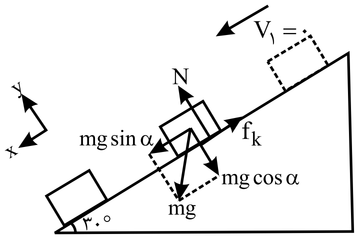
۱) $\sqrt{\frac{۷}{۳}}$ ۲) $\sqrt{\frac{۳}{۷}}$

۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

☑ **پاسخ:** این مسئله نیز ترکیبی از دینامیک و حرکت شناسی است. شتاب حرکت را در مسیر رفت و برگشت با استفاده از قانون دوم نیوتون محاسبه می‌کنیم و با استفاده از رابطه جابه‌جایی زمان در مسیر رفت و برگشت نسبت زمان‌ها را به دست می‌آوریم. چون جسم در انتهای مسیر می‌ایستد و برمی‌گردد سرعت جسم در انتهای مسیر صفر است.



(مسیر رفت)



(مسیر برگشت)

مسیر رفت $\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow -mg\sin\alpha - f_k = ma_۱ \rightarrow ma_۱ = -(mg\sin\alpha + f_k)$

مسیر برگشت $\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow -f_k + mg\sin\alpha = ma_۲ \rightarrow ma_۲ = mg\sin\alpha - f_k$

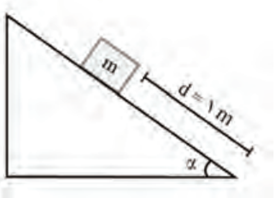
جابه‌جایی متحرک در مسیر رفت و برگشت از رابطه $\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲$ بدست می‌آید. با توجه به اینکه جابه‌جایی در دو مسیر یکسان است می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}a_۱ t_۱^۲ \\ \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}a_۲ t_۲^۲ \end{cases} \xrightarrow{\Delta x_۱ = \Delta x_۲} a_۱ t_۱^۲ = a_۲ t_۲^۲ \rightarrow \left|\frac{a_۱}{a_۲}\right| = \frac{t_۲^۲}{t_۱^۲}$$

$$\left|\frac{a_1}{a_2}\right| = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 \xrightarrow{f_k = 0/2mg} \frac{mg\sin\alpha - 0/2mg}{mg\sin\alpha + 0/2mg} = \frac{3}{7} \rightarrow \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

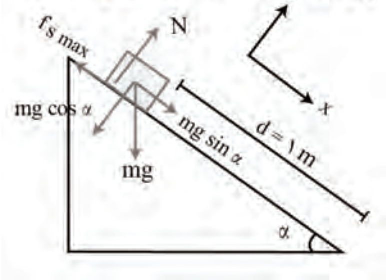
بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۴۸) در شکل زیر زاویه‌ی سطح شیبدار با افق متغیر است. اگر به تدریج زاویه‌ی سطح شیبدار را زیاد کنیم، جسم تحت زاویه‌ی 37° شروع به حرکت می‌کند و تحت همین زاویه، در مدت زمان 1s طول سطح را طی کرده و به پایین سطح می‌رسد. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ $(\sin 37^\circ = 0/6 , g = 10\frac{m}{s^2})$



۱) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
۳) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$
٤) $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}$

پاسخ: همان‌طور که در سوال گفته شده است هنگامی که زاویه سطح شیبدار به 37° می‌رسد جسم در آستانه حرکت قرار می‌گیرد. در این حالت اصطکاک ایستایی جسم بیشینه شده و مقدار آن از رابطه $f_{s,max} = \mu_s . N$ بدست می‌آید. با نوشتن قانون دوم نیوتون برای جسم در آستانه حرکت و در نظر گرفتن نکته گفته شده ضریب اصطکاک ایستایی جسم را بدست می‌آوریم.



جسم در آستانه حرکت $\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \xrightarrow{a_x = 0} mg\sin\alpha - f_{smax} = 0$

$$mg\sin\alpha = \mu_s . mg\cos\alpha \rightarrow \mu_s = \tan\alpha \rightarrow \mu_s = \tan 37 = \frac{3}{4}$$

از رابطه جابه‌جایی- زمان داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \rightarrow 1 = \frac{1}{2}a \times 1^2 + 0 \rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$

با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جسم در حال حرکت با شتاب ثابت به سمت پایین می‌توان نوشت:

حرکت به پایین $\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow mg\sin\alpha - f_k = ma \rightarrow mg\sin\alpha - \mu_k \times mg\cos\alpha = ma$

$$10 \times \sin 37 - \mu_k \times 10 \times \cos 37 = 2 \rightarrow \mu_k = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

در برخی مسائل به جسم روی سطح شیبدار نیروی محرک خارجی وارد می‌شود. به مثال های زیر توجه کنید.

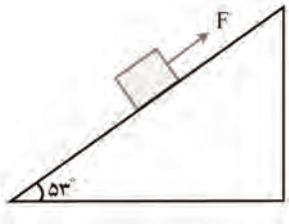
مثال ۴۹) مطابق شکل، جسمی به جرم 2kg بر روی سطح شیبدار تو سط نیروی $F = 25N$ به طرف بالای سطح کشیده می شود اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح ۰/۵ باشد

الف) بزرگی نیروی اصطکاک چند نیوتون است؟

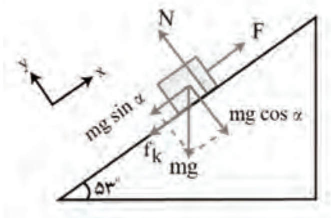
ب)بزرگی شتاب حرکت جسم چقدر است؟

ج) بزرگی نیروی F چقدر باشد تا جسم با سرعت ثابت بالا کشیده شود؟

$(\sin 53^\circ = 0/8 \ , \ \cos 53^\circ = 0/6 \ , g = 10\frac{m}{s^2})$



پاسخ: الف) قانون دوم نیوتون را برای جسم می‌نویسیم و نیروی اصطکاک و شتاب را بدست می‌آوریم.



$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y \xrightarrow{a_y = 0} N - mg\cos\alpha = 0 \rightarrow N = mg\cos\alpha$$

$$f_k = \mu_k . N \rightarrow f_k = \mu_k \times mg\cos\alpha = 0/5 \times 2 \times 10 \times 0/6 = 6N$$

ب) $\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow F - mg\sin\alpha - f_k = ma$

$$25 - 2 \times 10 \times 0/8 - 6 = 2 \times a$$

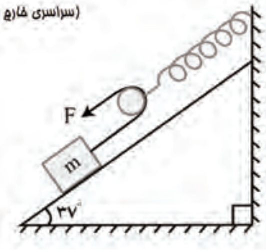
$$a = \frac{3}{2}\frac{m}{s^2}$$

ج) در این حالت باید شتاب حرکت را صفر در نظر گرفت:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a} \rightarrow F - mg\sin\alpha - f_k = ۰$$
$$F = ۱۶ + ۶ = ۲۲N$$

▼مثال ۵۰) در شکل زیر، جرم نخ، قرقره و فنر ناچیز است و ضریب اصطکاک جنبشی بین وزنه‌ی $m = ٤kg$ با سطح شیبدار ۰/۲۵ می‌باشد. اگر وزنه‌ی m با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ به سمت بالا کشیده شود، نیروی کشسانی فنر چند نیوتون است؟

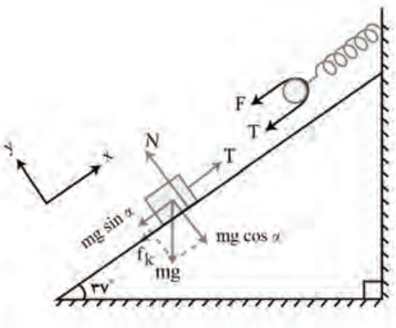
(سراسری خارج تجربی- ۹۲)



$$(g = ۱۰\frac{m}{s^۲} \quad , \sin۳۷° = ۰/۶)$$

۱) ۸۰
۲) ۷۲
۳) ٤۰
٤) ۳۲

☑پاسخ: قانون دوم نیوتون را برای جسم m می‌نویسیم برای این منظور طناب را می‌بریم و نیروی داخلی کشش طناب را در نظر می‌گیریم:



$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow T - f_k - mg\sin\alpha = ma$$
$$T - \mu_k mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma$$
$$T - ۰/۲۵ \times ۴ \times ۱۰ \times ۰/۸ - ۴ \times ۱۰ \times ۰/۶ = ۴ \times ۲$$
$$T = ۴۰N$$

با توجه به اینکه کشش طناب (با جرم ناچیز) در سرتاسر آن یکسان است $T = F$ می‌باشد.

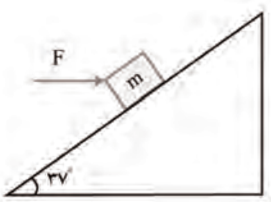
حال قانون دوم نیوتون را برای قرقره در حال تعادل می‌نویسیم:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{a=۰} F_۱ - F - T = ۰ \rightarrow F_۱ - ۴۰ - ۴۰ = ۰ \rightarrow F_۱ = ۸۰N$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

▼مثال ۵۱) در شکل مقابل، در لحظه‌ای که نیروی افقی ۱۰۰ نیوتونی به جسم اثر می‌کند و جهت حرکت جسم به سمت بالا است، اندازه‌ی شتاب چند متر بر مجذور ثانیه و جهت شتاب به کدام جهت است؟

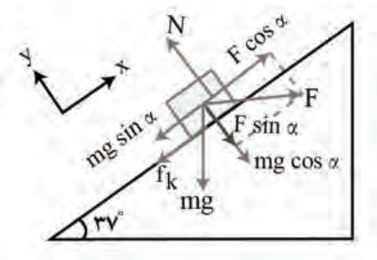
(سراسری تجربی- ۸۷)



$$(\sin۳۷° = ۰/۶ , g = ۱۰\frac{m}{s^۲} , \mu_k = ۰/۲ , m = ۱۰kg)$$

۱) ۰/۸، پایین
۲) ۰/۸، بالا
۳) ۳/۲، پایین
٤) ۳/۲، بالا

☑پاسخ: با تجزیه نیروی F به دو مؤلفه موازی سطح شیبدار و عمود بر آن استفاده از قانون دوم نیوتون و بدست آوردن برآیند نیروها آسانتر می‌شود.

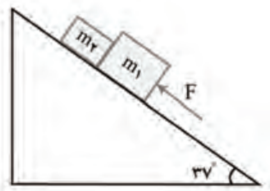


$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{a}_y \xrightarrow{a_y = ۰} N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha = ۰ \rightarrow N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha$$
$$f_k = \mu_k . N \rightarrow f_k = ۰/۲ \times (۱۰ \times ۱۰ \times ۰/۸ + ۱۰۰ \times ۰/۶) = ۲۸N$$
$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow F\cos\alpha - mg\sin\alpha - f_k = ma$$
$$۱۰۰ \times ۰/۸ - ۱۰ \times ۱۰ \times ۰/۶ - ۲۸ = ۱۰a$$
$$a = -۰/۸ \frac{m}{s^۲}$$

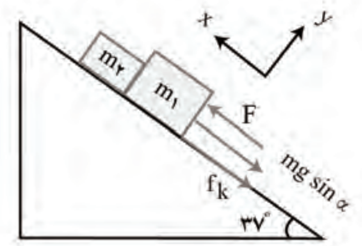
علامت منفی بدست آمده برای شتاب نشان می‌دهد جهت شتاب خلاف جهت حرکت و رو به پایین می‌باشد. چون جهت حرکت را مثبت در نظر گرفتیم حرکت کند شونده است. بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۵۲) در شکل مقابل F موازی سطح شیب‌دار است، شتاب اجسام و نیرویی را که دو جسم در سطح تماس بر هم وارد می‌کنند به دست آورید؟ (فرزانگان- ۹۱)

$$m_1 = 6kg \ , m_2 = 4kg \ , \mu_k = 0/25 \ , F = 100N$$



پاسخ: نیروی F همزمان به دو جسم m_1 و m_2 در راستای سطح شیبدار شتاب ثابتی می‌دهد می‌توان با در نظر گرفتن دو جسم m_1 و m_2 به عنوان یک جسم با جرم $m_1 + m_2$ و نوشتن قانون دوم نیوتون برای آنها شتاب حرکت مجموعه را بدست آورد.



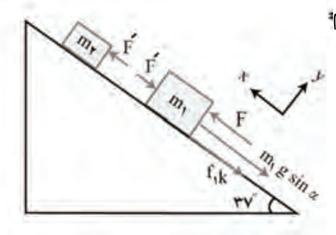
$$m = m_1 + m_2$$

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow F - f_k - mg\sin\alpha = ma$$

$$F - \mu_k mg\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma$$

$$100 - 0/25\times10\times0/8 - 10\times10\times0/6 = 10\times a \rightarrow a = 2\ \frac{m}{s^2}$$

برای بدست آوردن نیرویی که دو جسم در سطح تماس به یکدیگر وارد می‌کنند قانون دوم نیوتون را برای جسم m_1 می‌نویسیم:



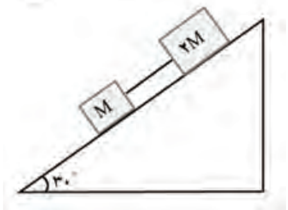
$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow F - m_1 g\sin\alpha - f_{k_1} - F' = m_1 a$$

$$F - m_1 g\sin\alpha - \mu_k m_1 g\cos\alpha - F' = m_1 a$$

$$100 - 6\times10\times0/6 - 0/25\times6\times0/8 - F' = 6\times2$$

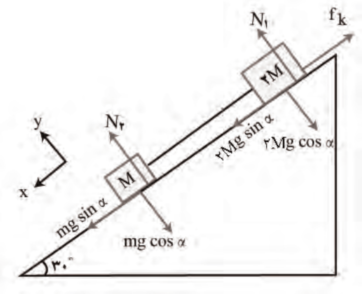
$$F' = 40N$$

مثال ۵۳) در شکل دو جسم به جرمهای M و ۲M به وسیله‌ی ریسمان سبکی به هم متصل و بر روی سطح شیبدار با سرعت ثابت به پایین می‌لغزند، ضریب اصطکاک جرم ۲M با سطح μ و نیروی اصطکاک بین جرم M با سطح ناچیز است. μ برابر با کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۷۶)



۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
٤) $\frac{1}{5}$

پاسخ: همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد در سیستم‌های چند جسمی به شرطی که مجموعه با یک شتاب حرکت کند (نیروی کشش T صفر و طناب شل نشود) می‌توان قانون دوم نیوتون را برای کل مجموعه و همین طور برای تک تک اجزاء آن به صورت جداگانه در نظر گرفت.در این تست چون مجموعه با سرعت ثابت پایین می‌آید شتاب حرکت صفر می‌باشد. قانون دوم نیوتون را برای کل مجموعه می‌نویسیم:

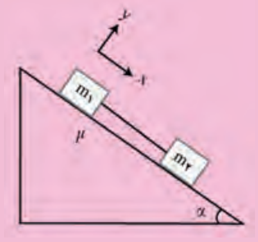


$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_x \xrightarrow{a_x=0} -f_k + 2Mg\sin\alpha + Mg\sin\alpha = 0$$

$$f_k = \mu_k . N_1 \rightarrow f_k = 2\mu_k Mg\cos\alpha \rightarrow -2\mu_k Mg\cos\alpha - 2Mg\sin\alpha - Mg\sin\alpha = 0$$

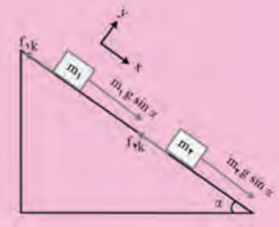
گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

نکته: دو جسم را در نظر بگیرید که با طنابی به یکدیگر متصل شده و روی سطح شیبداری در حال حرکت با شتاب ثابت به سمت پایین است. ابتدا با در نظر گرفتن مجموعه دو جرم شتاب کل را محاسبه می‌کنیم.



$$\text{مجموعه}\quad \Sigma F_x = ma_x \rightarrow (m_۱ + m_۲)g\sin\alpha - \mu_k(m_۱ + m_۲)g\cos\alpha = (m_۱ + m_۲)a$$
$$a = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$

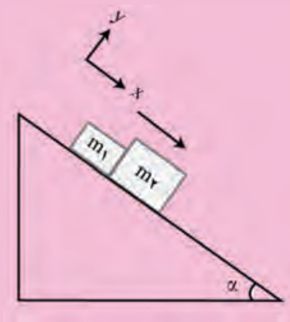
فرض کنید طناب وجود ندارد و شتاب حرکت دو جسم را به صورت مجزا بدست می‌آوریم.

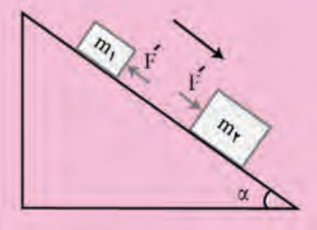


$$m_۱ \text{ برای جسم } \Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow m_۱ g\sin\alpha - f_{۱k} = m_۱ a$$
$$m_۱ g\sin\alpha - \mu_k m_۱ g\cos\alpha = m_۱ a$$
$$a = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$

$$m_۲ \text{ برای جسم } \Sigma \vec{F}_x = m\vec{a}_x \rightarrow m_۲ g\sin\alpha - f_{۲k} = m_۲ a$$
$$m_۲ g\sin\alpha - \mu_k m_۲ g\cos\alpha = m_۲ a$$
$$a = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$

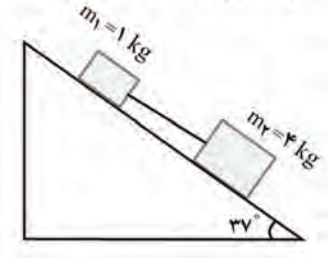
ملاحظه می‌کنید که شتاب بدست آمده در سه حالت به جرم بستگی ندارد و با یکدیگر برابر است. البته این وضعیت در شرایط اصطکاکی یکسان برای جرم $m_۱$ و $m_۲$ اتفاق می‌افتد. از این موضوع می‌توان نتیجه گرفت هر دو جسمی (یا بیشتر) روی سطوح شیبداری با هر جرمی رو به پایین بدون حضور نیروی محرک حرکت کنند شتاب یکسان داشته و فاصله بین آنها ثابت باقی می‌ماند. بنابراین می‌توان گفت نیروی کشش طناب همواره در این حالت صفر خواهد شد. این موضوع را می‌توان با رها کردن دو جسم که بوسیله طنابی به هم متصلند در هوا شبیه سازی کرد. هر دو جسم با شتاب g پایین می‌آیند و طناب نیروی کشش خود را از دست می‌دهد.
توجه کنید این موضوع برای دو جسم که به هم تکیه داده‌اند و روی سطح شیب‌داری بدون حضور نیروی محرک رو به پایین در حرکتند نیز صادق است. با این تفاوت که در این‌جا نیرویی که دو جسم به یکدیگر وارد می‌کنند برابر صفر می‌شود.





$F' = ۰$

مثال ۵۴) در شکل مقابل، ضریب اصطکاک جنبشی هر یک از دو جسم با سطح $\frac{۱}{۴}$ است. نیروی کشش نخ بین دو وزنه چند نیوتون است؟ (از جرم نخ صرفنظر کنید.) $(\sin ۳۷^\circ \simeq ۰/۶ \,,\, g \simeq ۱۰ \frac{m}{s^۲})$ (کانون- ۸۹)

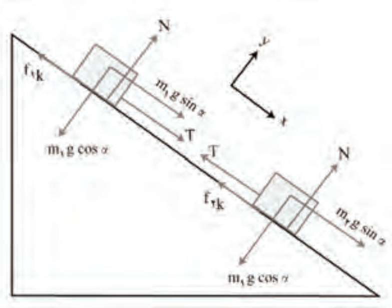


۱) صفر
۲) ۸
۳) ۳۲
۴) وزنه‌ی $m_۱$ به $m_۲$ می‌رسد و نخ جمع می‌شود.

پاسخ: همان‌طور که در نکته بالا اشاره شد دو جسم با شتاب یکسان به پایین حرکت می‌کنند بنابراین طناب نیروی کشش خود را از دست داده و $T = ۰$ می‌شود.

مجموعه $a = a_{m_۱} = a_{m_۲} = g(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha) = ۱۰(۰/۶ - ۰/۲۵ \times ۰/۸) = ۴\ \frac{m}{s^۲}$

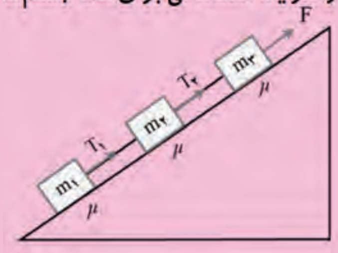
این موضوع را می‌توان با در نظر گرفتن قانون دوم نیوتون برای جسم $m_۱$ و $m_۲$ به طور مجزا ثابت کرد.

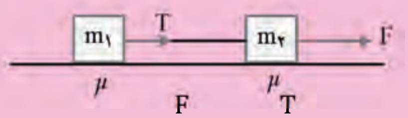


برای جسم $m_۱$: $m_۱ g\sin\alpha + T - f_{۱k} = m_۱ a$

$$m_۱ g\sin\alpha + T - \mu_k m_۱ g\cos\alpha = m_۱ a$$
$$۱۰ \times ۰/۶ + T - ۰/۲۵ \times ۱ \times ۱۰ \times ۰/۸ = ۴$$
$$T = ۰$$

نکته: در حرکت دو یا چند جسم روی یک سطح (شیب دار یا افقی) که با نخ به یکدیگر متصل شده‌اند و شرایط اصطکاکی برای همه جسم‌ها یکسان است رابطه زیر برقرار است:

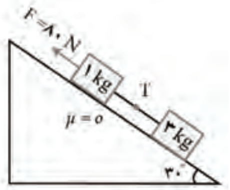




$$\frac{F}{m_۱ + m_۲ + m_۳} = \frac{T_۲}{m_۱ + m_۲} = \frac{T_۱}{m_۱} \quad , \quad \frac{F}{m_۱ + m_۲} = \frac{T}{m_۱}$$

توجه کنید اجسام باید روی یک سطح قرار داشته باشند

مثال ۵۵) در شکل مقابل T چند نیوتون است؟ $(g = ۱۰\ \frac{m}{s^۲})$ (سراسری ریاضی- ۷۲)



۱) ۷۵ ۲) ۶۵
۳) ۶۰ ۴) ۴۵

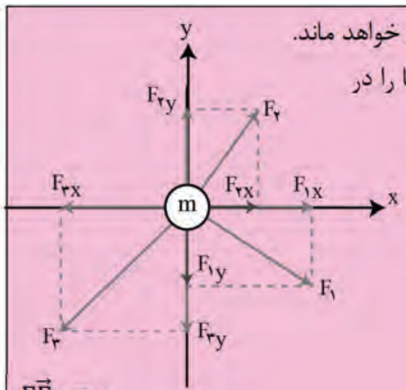
پاسخ: با توجه به نکته گفته شده می‌توان مسئله را حل کرد:

$$\frac{F}{m_۱ + m_۲} = \frac{T}{m_۱} \to \frac{۸۰}{۱ + ۳} = \frac{T}{۳} \to T = ۶۰N$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

تعادل اجسام

جسمی در تعادل است که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد. بنابراین جسم در این حالت ساکن خواهد ماند. البته ممکن است نیروهای وارد بر جسم در صفحه به آن وارد شود که در آن صورت می‌توان نیروها را در راستای x و y تجزیه کرد و شرط تعادل را برای جسم این‌گونه نوشت:



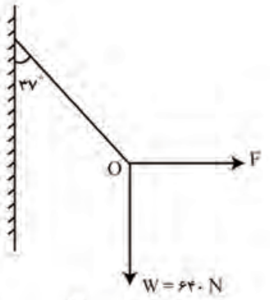
$$\Sigma \vec{F}_x = ۰$$
$$\Sigma \vec{F}_y = ۰$$

بنابراین در تعادل بودن جسم اعمال هر دو شرط گفته شده لازم است.

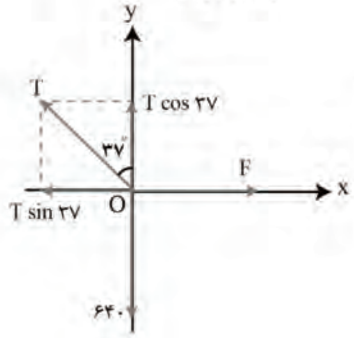
تذکر: البته شرط سومی برای تعادل اجسام وجود دارد که در سطح این کتاب نیست.

▼مثال ۵۶) در شکل مقابل، نیروی افقی F چند نیوتون باشد تا برآیند نیروهای وارد بر نقطه‌ی O صفر شود؟

$(\sin ۳۷° = ۰/۸ \ , \ \cos ۵۳° = ۰/۶)$ (ریاضی - شهریور ۹۰)



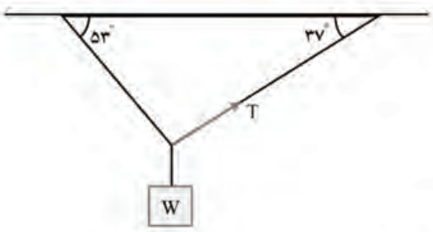
پاسخ: شرط تعادل را برای نقطه O می‌نویسیم:



$$\Sigma F_x = ۰ \rightarrow F - T\sin ۳۷ = ۰ \rightarrow F = T\sin ۳۷$$
$$\Sigma F_y = ۰ \rightarrow T\cos ۳۷ - ۶۴۰ = ۰$$
$$T = \frac{۶۴۰}{۰/۸} = ۸۰۰\,N$$
$$F = ۸۰۰ \times ۰/۶ = ۴۸۰\,N$$

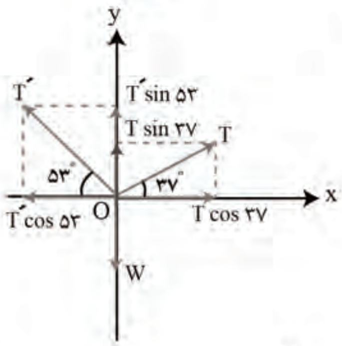
▼مثال ۵۷) در شکل مقابل جرم نخ‌ها ناچیز است اگر $T = ۶N$ باشد W چند نیوتون است؟

$(\cos ۳۷° = ۰/۸)$ (سراسری ریاضی-۸۹)



۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۴

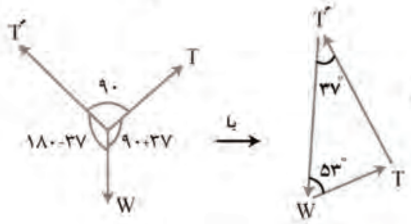
پاسخ: نخ‌ها را بریده و به جای آن نیروی کشش نخ را قرار می‌دهیم. شرایط تعادل را در نقطه اتصال می‌نویسیم:



$$\Sigma F_x = ۰ \rightarrow T'\cos ۵۳ - T\cos ۳۷ = ۰$$
$$T' \times ۰/۶ - ۶ \times ۰/۸ = ۰$$
$$T' = ۸N$$
$$\Sigma F_y = ۰ \rightarrow T'\sin ۵۳ + T\sin ۳۷ = w$$
$$w = ۸ \times ۰/۸ + ۶ \times ۰/۶ = ۱۰\,N$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

روش دوم: می‌توانیم از قانون سینوس‌ها استفاده کنیم و به سرعت به جواب مسئله برسیم:

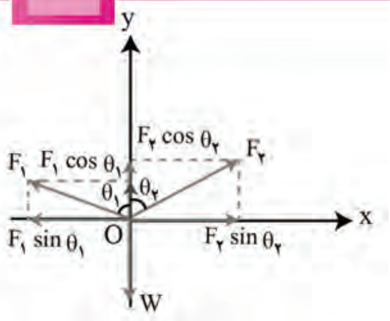


$$\frac{w}{\sin ۹۰} = \frac{T}{\sin ۳۷} = \frac{T'}{\sin ۵۳} \rightarrow w = \frac{۶}{۰/۶} = ۱۰\,N$$
$$w = ۱۰\,N$$

▼مثال ۵۸) طنابی بین دو دیوار موازی در یک تراز بسته شده است و یک بند باز، در ست در وسط طناب قرار دارد و بزرگی نیروی کشش طناب در جلو و پشت شخص به ترتیب F_1 و F_2 است. اگر شخص، به تدریج به سمت دیوار مقابل خود حرکت کند:

۱) F_2 از F_1 کوچکتر می‌شود.
۲) F_2 از F_1 بزرگتر می‌شود.
۳) F_2 و F_1 برابر خواهند ماند ولی هر دو افزایش می‌یابند.
۴) F_2 و F_1 برابر خواهند ماند ولی هر دو کاهش می‌یابند.

پاسخ: شرایط تعادل را در یک حالت در نظر می‌گیریم:



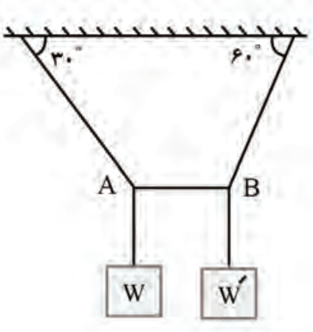
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_2 \sin\theta_2 = F_1 \sin\theta_1$$

با توجه به رابطه بدست آمده برای F_1 و F_2 با رفتن شخص به سمت دیوار زاویه θ_2 کوچکتر و θ_1 بزرگتر می‌شود بنابراین برای اینکه رابطه بالا برقرار بماند باید $F_2 > F_1$ گردد.

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۵۹) در شکل زیر، اگر دو وزنه‌ی W و ´W در حال تعادل باشند نسبت $\frac{w}{w'}$ کدام است؟ (نخ AB افقی است و از جرم نخ‌ها صرف‌نظر می‌شود و $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$)

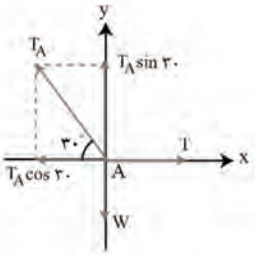
(آزمون کانون ۸۷ - ۱۷ خرداد)



۱) ۳
۲) $\frac{1}{3}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: نخ‌ها را از دیوار جدا کرده و همین طور نخ AB را می‌بریم و دیاگرام نیرو را برای دو مجموعه A و B رسم می‌کنیم.

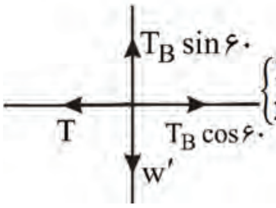
شرایط تعادل را برای نقاط A و B به طور جداگانه می‌نویسیم:



برای نقطه A

$$\begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = 0 \rightarrow T - T_A \cos 30 = 0 \rightarrow T = T_A \cos 30 \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 \rightarrow T_A \sin 30 - w = 0 \rightarrow T_A \sin 30 = w \end{cases}$$

$$w = T \tan 30$$



برای نقطه B

$$\begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = 0 \rightarrow T_B \cos 60 - T = 0 \rightarrow T = T_B \cos 60 \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 \rightarrow T_B \sin 60 - w' = 0 \rightarrow T_B \sin 60 = w' \end{cases}$$

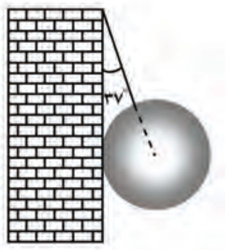
$$w' = T \tan 60$$

$$\frac{w}{w'} = \frac{T \tan 30}{T \tan 60} \rightarrow \frac{w}{w'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

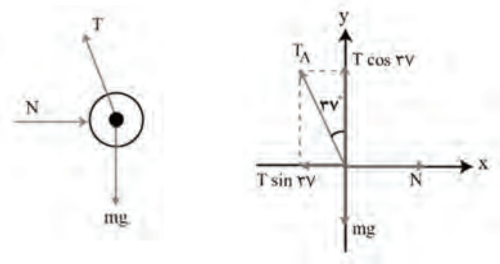
بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۶۰) در شکل زیر، نیرویی که دیوار قائم در نقطه‌ی تکیه‌گاه بر کره وارد می‌کند، ۳۰ نیوتون است. جرم کره چند کیلوگرم است؟ (اصطکاک ناچیز، $\sin 37^\circ = 0/6$ و $g = 10 \frac{m}{s^2}$ است.)

(سراسری خارج از کشور تجربی- ۸۸)



۱) ۲
۲) ۳
۳) ٤
٤) ۵



☑ **پاسخ:** شکل ساده از نیروهای وارد بر جسم رسم می‌کنیم و شرایط تعادل را اعمال می‌کنیم:

T : نیروی کشش طناب

N : نیرویی که تکیه‌گاه به کره وارد می‌کند

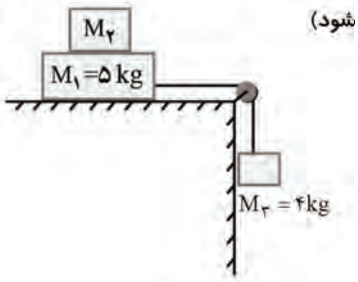
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow N - T\sin 37 = 0 \rightarrow N = T\sin 37$$

$$30 = T \times 0.6 \rightarrow T = 50$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T\cos 37 - mg = 0 \rightarrow m = \frac{50 \times 0.8}{10} = 4$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

▼ **مثال ۶۱)** **در شکل روبه‌رو، ضریب اصطکاک ایستایی بین میز و وزنه‌ی M_1 برابر ۰/۵ است. کم‌ترین جرم وزنه‌ی M_2 چند کیلوگرم باشد، تا با آویختن وزنه‌ی M_3، سیستم به حرکت درنیاید؟ ($g = 10\ \frac{m}{s^2}$ و از جرم و اصطکاک نخ و قرقره صرف‌نظر شود)** (سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۱)



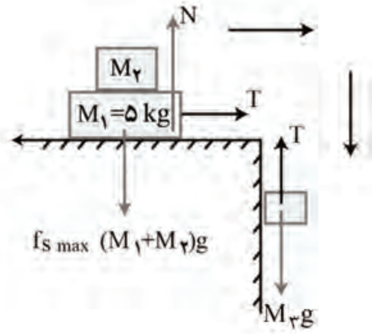
۱) ۲/۵

۲) ۳

۳) ۵

۴) ۸

☑ **پاسخ:** جرم M_1 توسط نیروی وزن M_3 کشیده می‌شود. کمترین مقدار M_2 برای حرکت نکردن سیستم هنگامی اتفاق می‌افتد که سیستم در آستانه حرکت قرار گیرد بنابراین هنگامی که اصطکاک ایستایی بین سطح و جرم M_1 را اصطکاک در آستانه حرکت قرار دهیم و از رابطه $f_{s,max} = \mu_s . N$ استفاده کنیم می‌توانیم کمترین جرم M_2 را محاسبه کنیم (جهت حرکت را جهت مثبت در نظر می‌گیریم)



$$\Sigma F = ma$$

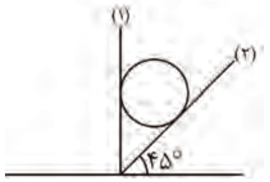
برای M_3: $\Sigma F = 0 \rightarrow M_3 g - T = 0 \rightarrow M_3 g = T$

$$T = 40N$$

برای M_1 و M_2: $\Sigma F = ma \xrightarrow{a=0} T - f_{smax} = 0 \rightarrow T = \mu_s.(M_1 + M_2)g$

$$40 = 0.5\,(M_1 + 5)10 \rightarrow M_1 = 3kg$$

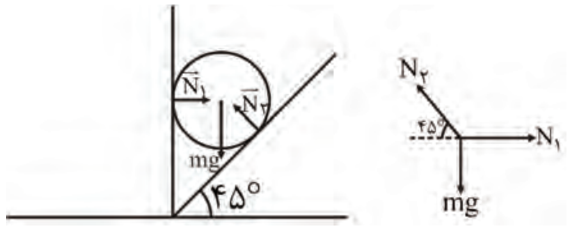
▼ **مثال ۶۲)** **مطابق شکل یک کره‌ی فلزی به وزن ۲۰N به درون ناوه‌ای با دیواره‌های صیقلی قرار دارد. اندازه‌ی نیرویی که این کره فلزی به دیواره اولی (۱) وارد می‌کند چند نیوتن است؟**



۱) ۱۰ ۲) ۲۰

۳) $10\sqrt{3}$ ۴) $20\sqrt{2}$

☑ **پاسخ:** جسم در تعادل است نیروهای وارد بر جسم را از یک نقطه رسم می‌کنیم و رابطه سینوس را برای آن به کار می‌بریم:



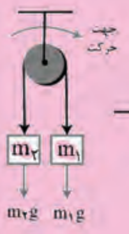
$$\frac{N_1}{\sin(90+45)} = \frac{mg}{\sin(90+45)} \rightarrow N_1 = mg \rightarrow N_1 = 20N$$

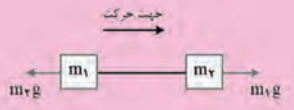
بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

قرقره و ماشین آتوود

به سیستم‌های نخ و قرقره هنگامی که قرقره ثابت است و نخ در اطراف آن قرار دارد در حالی که دو جرم به انتهای این نخ متصل باشد ماشین آتوود گفته می‌شود. در شکل یک دستگاه آتوود را مشاهده می‌کنید با فرض اینکه جرم m_1 بزرگتر از جرم m_2 است وزنه m_1 با شتاب ثابت به پایین می‌آید وزنه m_2 با همان شتاب بالا می‌رود.

توجه کنید در اینجا برای تعیین علامت بردار نیروها و استفاده از قانون دوم نیوتون بهتر است جهت حرکت را جهت مثبت فرض کنیم. برای انجام صحیح مسائل اتوود و به طور کلی قرقره ابتدا نیروهای وارد بر دستگاه را رسم می‌کنیم سپس فرض می‌کنیم قرقره وجود ندارد و تمام اجزاء در یک راستا قرار دارند آن گاه با توجه به جهت حرکت دستگاه برآیند نیروها را محاسبه می‌کنیم:

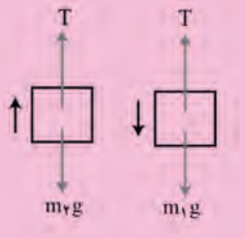




$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow m_1g - m_2g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

برای بدست آوردن کشش نخ می‌توانیم قانون دوم نیوتون را برای جسم m_1 و m_2 به طور مجزا بنویسیم:



$$\begin{cases} T - m_2g = m_2a \\ m_1g - T = m_1a \end{cases} \rightarrow T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} \times g$$

توجه: واضح است که شتاب حرکت کل دستگاه با تک تک جرم‌ها یکسان است.

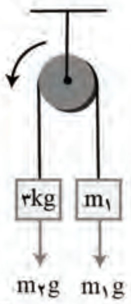
مثال ۶۳) در شکل زیر، دستگاه از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. اگر وزنه‌ی ۳ کیلوگرمی در مدت ۲ ثانیه، ٤ متر به طرف پایین حرکت کند، جرم m_1 چند کیلوگرم است؟ ($g = 10\frac{m}{s^2}$ و اصطکاک و جرم قرقره ناچیز است.)

(سراسری خارج از کشور تجربی- ۸۶)

۱) ۱ ۲) ۱/۵
۳) ۲ ٤) ۲/۵

پاسخ: *این مسئله ترکیبی از مفاهیم حرکت شناسی و دینامیک است. ابتدا شتاب حرکت دستگاه را از رابطه مکان زمان پیدا می‌کنیم:*

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_\circ t \xrightarrow{\Delta x = 4m,\ t = 2s,\ V_\circ = 0} 4 = \frac{1}{2}a(2)^2 \rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}$$



جهت حرکت را جهت مثبت در نظر می‌گیریم و قانون دوم نیوتون را به کار می‌بریم:

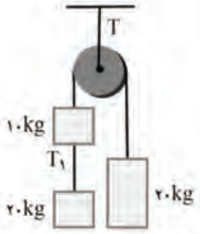
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow m_2g - m_1g = (m_1 + m_2)a$$

$$3 \times 10 - 10m_1 = (m_1 + 3) \times 2 \rightarrow m_1 = 2kg$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۶۴) در شکل روبه‌رو، اگر جرم نخ و قرقره و اصطکاک ناچیز باشد، نیروهای کشش $\frac{T}{T_1}$ چقدر است؟ (سراسری ریاضی-۹۲)

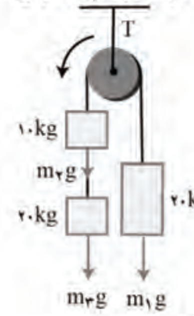
$(g = ۱۰ \frac{m}{s^۲})$



۱) ۱/۵ ۲) ۲

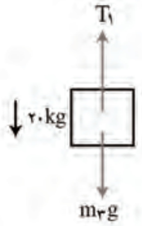
۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: چون جرم نخ ناچیز و برآیند جرم‌های سمت چپ دستگاه بیشتر از سمت راست دستگاه است جهت حرکت به سمت چپ می‌باشد. جهت حرکت را مثبت فرض کرده و قانون دوم نیوتون را برای آن می‌نویسیم:



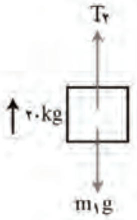
$$\Sigma F = ma \rightarrow m_۳g + m_۲g - m_۱g = (m_۱ + m_۲ + m_۳)a$$
$$۲۰ \times ۱۰ + ۱۰ \times ۱۰ - ۲۰ \times ۱۰ = (۲۰ + ۱۰ + ۲۰)a$$
$$a = ۲ \frac{m}{s^۲}$$

می‌توانیم قانون دوم نیوتون را برای جسم‌های $m_۱$ و $m_۲$ و $m_۳$ به طور جداگانه بنویسیم. (می‌دانیم در بریدن نخ جهت رسم نیروهای داخلی آن اگر جرم نخ ناچیز باشد جای بریدن نخ اهمیتی ندارد.)



$$m_۳g - T_۱ = m_۳a \rightarrow ۲۰ \times ۱۰ - T_۱ = ۲۰ \times ۲ \rightarrow T_۱ = ۱۶۰N$$

برای بدست آوردن T هم می‌توانیم از برآیند نیروهای وارد بر جرم $m_۲$ استفاده کنیم هم جرم $m_۱$. چون برای $m_۱$ ساده‌تر است قانون دوم نیوتون را برای جرم $m_۱$ می‌نویسیم:



$$T_۲ - m_۱g = m_۱a \rightarrow T_۲ - ۲۰ \times ۱۰ = ۲۰ \times ۲ \rightarrow T_۲ = ۲۴۰N$$

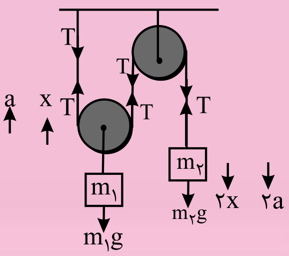
می‌توانیم برآیند نیروها را برای قرقره ثابت در نظر بگیریم و نیروی کشش T را بدست آوریم:

$$\Sigma F = ma \xrightarrow{a=۰} T - T_۲ - T_۲ = ۰ \rightarrow T = ۲T_۲ = ۴۸۰N$$
$$\frac{T}{T_۱} = \frac{۴۸۰}{۱۶۰} = ۳$$

نکته: دستگاه نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید. این سیستم ترکیبی از یک قرقره ثابت و یک قرقره متحرک است. همان‌طور که در شکل مشخص است برای اینکه قرقره متحرک به اندازه x به طرف بالا جابه‌جا شود جسم $m_۲$ باید به اندازه ۲x پایین بیاید. بنابراین شتاب بالا رفتن قرقره متحرک نصف شتاب پایین آمدن جسم $m_۲$ است. جرم نخ ناچیز است بنابراین نیروی کشش نخ در طول نخ متصل به $m_۲$ یکسان و برابر T است. جسم $m_۲$ و قرقره متحرک را جدا کرده و با در نظر گرفتن جهت حرکت به عنوان جهت مثبت قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم:

برای $m_۲$: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow m_۲g - T = m_۲ \times ۲a$

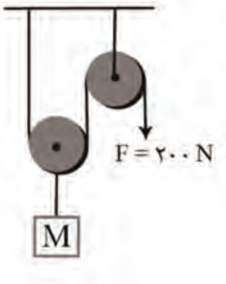
برای قرقره متحرک: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow ۲T - m_۱g = m_۱a$



توجه: در مسائلی که جهت حرکت مشخص نیست (وزنه m_2 بالا می‌رود یا پایین) در ابتدا یک جهت را به طور دلخواه فرض می‌کنیم و مسئله را حل می‌کنیم. اگر شتاب بدست آمده منفی شد مشخص است که جهت حرکت را اشتباه فرض کرده بودیم.

مثال ۶۵) در شکل مقابل وزنه‌ی M با حرکت تند شونده که شتاب آن $12\frac{m}{s^2}$ است، به طرف بالا حرکت می‌کند. جرم وزنه چند کیلوگرم است؟ (از جرم نخ و قرقره‌ها و صرفنظر شود و $g = 10\frac{m}{s^2}$)

(سراسری خارج از کشور ریاضی- ۹۰)



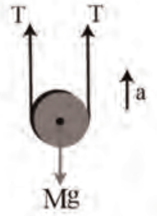
۱) $\frac{50}{3}$

۲) $\frac{100}{3}$

۳) ۵۰

۴) ۱۰۰

پاسخ: جسم M با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ به سمت بالا در حرکت است. می‌توانیم قرقره متحرک را از سیستم جدا کرده و قانون دوم نیوتون برای آن بنویسیم. نیروی کشش نخ در سرتاسر آن برابر F که همان ۲۰۰ نیوتون می‌باشد.

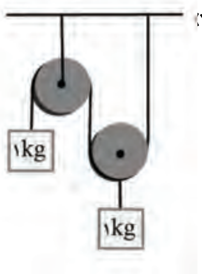


$$2T - Mg = Ma \rightarrow 2 \times 200 - M \times 10 = M \times 2 \rightarrow M = \frac{100}{3}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۶۶) اگر در شکل مقابل جرم نخ و قرقره و نیروی اصطکاک ناچیز باشد، نیروی کشش نخ چند نیوتون است؟ ($g = 10$ N/kg)

(سراسری ریاضی- ۷۷)



۱) ۲۰

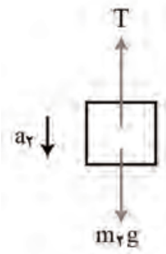
۲) ۱۰

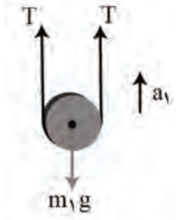
۳) ۶

۴) ۳

پاسخ: چون جرم نخ ناچیز است نیروی کشش آن در کل نخ متصل به جرم سمت چپ یکسان و برابر T است. چون جهت حرکت را نمی‌دانیم یک جهت را به طور فرضی جهت حرکت در نظر گرفته و در محاسبات این جهت را مثبت در نظر می‌گیریم. اگر علامت شتاب بدست آمده منفی شد مشخص می‌شود جهت حرکت را اشتباه فرض کرده‌ایم. فرض می‌کنیم جرم سمت چپ پایین می‌آید و این جهت را جهت مثبت در نظر می‌گیریم.

قانون دوم نیوتون را برای قرقره متحرک و جسم سمت چپ می‌نویسیم:





$$m_2 g - T = m_2 a_2$$
$$2T - m_1 g = m_1 a_1$$

می‌دانیم به ازای جابه‌جایی x جسم سمت چپ (به سمت پایین)، قرقره متحرک به اندازه $\frac{x}{2}$ بالا می‌رود بنابراین شتاب قرقره متحرک نصف شتاب جرم سمت چپ است.

$$a_1 = \frac{1}{2}a_2 \rightarrow \begin{cases} m_2 g - T = m_2 a_2 \\ 2T - m_1 g = m_1 \times \frac{1}{2}a_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10 - T = a_2 \\ 2T - 10 = \frac{1}{2}a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} T = 6N \\ a_2 = 2\frac{m}{s^2}, a_1 = 4\frac{m}{s^2} \end{cases}$$

اگر علامت شتاب منفی می‌شد اندازه بدست آمده برای آن صحیح بود ولی جهت حرکت را باید تغییر می‌دادیم.

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

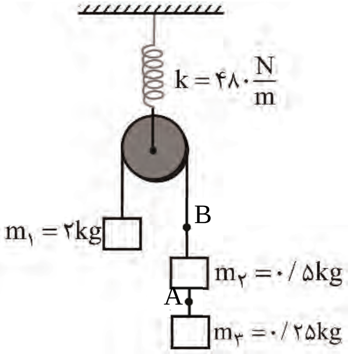
مثال ۶۷ مطابق شکل، مطلوب است: (دبیل- نمونه دولتی الزهرا- ۸۹ (۶ بار)

الف) شتاب حرکت وزنه‌ها

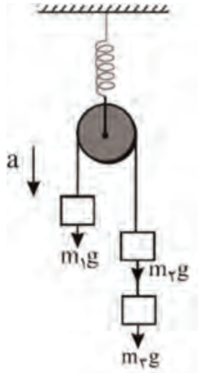
ب) نیروی کشش ریسمان در نقاط B ،A

پ) اندازه‌ی تغییر طول فنر بر حسب سانتی‌متر

(از اصطکاک و جرم قرقره صرفنظر شود و $g = 10\frac{m}{s^2}$)



پاسخ: الف) جرم وزنه m_1 از مجموع دو جرم m_2 و m_3 بزرگتر است. چون اصطکاک و جرم قرقره صرفنظر شده است بنابراین جرم m_1 پایین آمده و دو جرم دیگر به سمت بالا حرکت می‌کند. جهت حرکت را جهت مثبت در نظر گرفته و قانون دوم نیوتون را برای مجموعه می‌نویسیم:

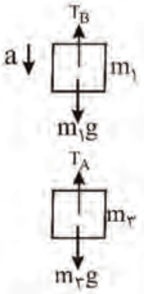


$$\Sigma F = ma \rightarrow m_1g - m_2g - m_3g = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$2 \times 10 - 0/5\times 10 - 0/25 \times 10 = (2 + 0/5 + 0/25)\times a$$

$$a = \frac{12/5}{2/75} \simeq 4/5\ \frac{m}{s^2}$$

ب) برای بدست آوردن نیروی کشش نخ T_A و T_B می‌توانیم جسم m_1 و m_3 را به طور مجزا در نظر گرفته و قانون دوم نیوتون را برای آن بنویسیم:



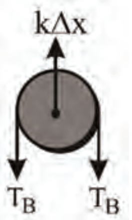
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow m_1g - T_B = m_1a \rightarrow T_B = 2 \times 10 - 2 \times 4/5 = 11N$$

$$T_B = 11N$$

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow T_A - m_3g = m_3a \rightarrow T_A = 0/25 \times 10 + 0/25 \times 4/5 = 3/625$$

$$T_A = 3/625$$

پ) برای بدست آوردن تغییر طول فنر نیروهای وارد بر قرقره که در حال تعادل قرار دارد را رسم می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را به کار می‌بریم.



$$\Sigma F = ma \xrightarrow{a=0} k\Delta x = 2\,T_B \rightarrow 480 \times \Delta x = 2\times 11 \rightarrow \Delta x = 0/045$$

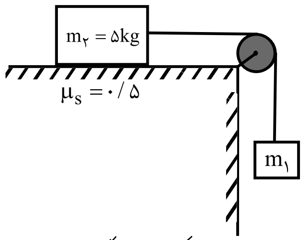
$$\Delta x = 4/5\ cm$$

استفاده از قانون دوم نیوتون در سطوح ترکیبی

برخی مسائل دینامیک شامل حرکت جسم در دو یا چند سطح می‌باشد. این سطوح می‌تواند سطوح عمود بر هم و یا افقی و شیبدار باشند. همان طور که در مسائل گذشته نیز گفته شد اگر جهت حرکت مشخص بود این جهت را جهت مثبت در نظر می‌گیریم. قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم و مجهولات مسئله را بدست می‌آوریم. در مسائل چند جرمی باید به داده‌های مسئله توجه کنیم و قانون دوم نیوتون را برای جسمی بنویسیم که سریع‌تر ما را به مجهولات مسئله برساند.

در این‌گونه مسائل در صورتی که جهت حرکت مشخص نبود یک جهت را به صورت فرضی جهت حرکت در نظر گرفته و قانون دوم نیوتون را در این صورت می‌نویسیم اگر شتاب بدست آمده علامت مثبت داشته باشد جهت در نظر گرفته شده صحیح بوده در غیر این صورت فرض جهت حرکت اشتباه بوده است. البته محاسبات از نظر اندازه بدست آمده صحیح می‌باشد.

مثال ۶۸) در شکل مقابل دستگاه ساکن است. جرم جسم m_1 چه قدر باشد تا دستگاه در آستانه‌ی حرکت قرار گیرد؟ $(g = 10 \frac{m}{s^2})$ (ارومیه- دبیرستان زهرا (س)- ۹۱)



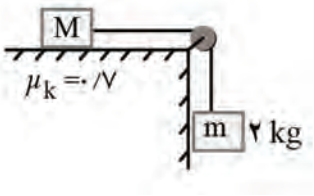
پاسخ: نیروهای وارد بر هر دو جرم در شکل نشان داده شده است. جهت فلش جهت حرکت را نشان می‌دهد. برای اینکه جسم m_2 در آستانه حرکت قرار گیرد باید نیروی اصطکاک ایستایی سطح با جرم m_2 ماکزیمم شود. $(f_s = f_{smax} = \mu_s . N)$

$$\Sigma F = ma \xrightarrow{a=0, f_{smax}=\mu_s . N} m_1 g - f_k = 0$$

$$m_1 g - \mu_s \times m_2 g = 0 \rightarrow 10 m_1 - 0/5 \times 5 \times 10 = 0$$

$$m_1 = 2/5 \text{ kg}$$

مثال ۶۹) در شکل مقابل وزنه‌ی ۲ کیلوگرمی در ابتدا رو به پایین و وزنه‌ی M با سرعت اولیه‌ی ۱ m/s به سمت راست حرکت می‌کند. پس از پیمودن مسافت ۱/۵m و قبل از اینکه وزنه‌ی m به زمین برسد، وزنه‌ها می‌ایستند، جرم وزنه‌ی M چند کیلوگرم است؟ (از جرم نخ و قرقره و اصطکاک قرقره صرفنظر شود و g =۱۰ m/s۲ است.) (سراسری ریاضی-۹۱)



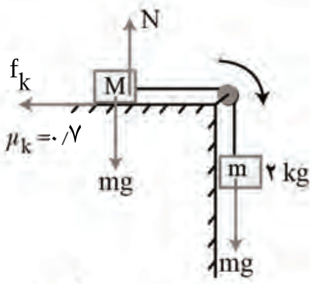
۱) ۲/۶

۲) ۲/۹

۳) ۳/۱

۴) ۳/٤

پاسخ: سوال ترکیبی از مفاهیم حرکت و دینامیک است. می‌توان از رابطه مستقل از زمان شتاب حرکت اجسام را بدست آورده و با نوشتن قانون دوم نیوتون برای مجموعه مسئله را حل کنیم.



$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[\Delta x=1/5m]{V=0, V_0=1\frac{m}{s}} 0 - 1 = 2 \times a \times 1/5$$

$$a = -\frac{1}{3}$$

جهت حرکت درست انتخاب شده است چون برای ایجاد حرکت جسم M چاره‌ای جز حرکت به سمت راست ندارد اما علامت منفی بدست آمده نشان می‌دهد حرکت کندشونده می‌باشد.

با مشخص بودن جهت حرکت قانون دوم نیوتون را برای مجموعه نشان داده شده در شکل می‌نویسیم جهت حرکت را جهت مثبت در نظر می‌گیریم:

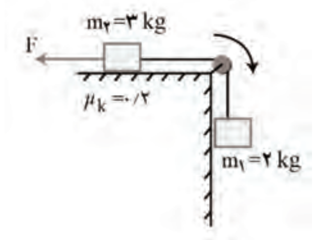
$$\Sigma F = ma \rightarrow mg - f_k = (m + M)a$$

$$mg - \mu_k Mg = (m + M)a$$

$$2\times10 - 0/7\times M\times10 = (2+M)\times(-\frac{1}{3}) \rightarrow M = 3/1$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۷۰) در شکل روبه‌رو سیستم از حال سکون رها شده و جسم m_1 با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ در حال پایین آمدن است. اگر نیروی F را نصف کنیم، m_1 با شتاب چند متر بر مربع ثانیه پایین می‌آید؟ (از جرم نخ و اصطکاک نخ و قرقره صرفنظر شود، $g = 10 \frac{m}{s^2}$) (سراسری خارج از کشور ریاضی- ۹۲)



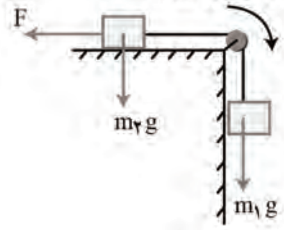
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۲/٤

۴) ۳/۶

☑ **پاسخ:** جهت حرکت را جهت مثبت در نظر گرفته و قانون دوم نیوتون را برای کل مجموعه نوشته و نیروی F را در این حالت بدست می‌آوریم:



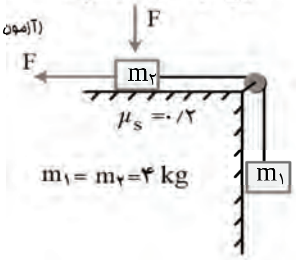
$$\Sigma F = ma \rightarrow -F - f_k + m_۱ g = (m_۱ + m_۲)a$$
$$-F - \mu_k \times m_۲ g + m_۱ g = (m_۱ + m_۲)a$$
$$-F - ۰/۲ \times ۳ \times ۱۰ + ۲ \times ۱۰ = (۲+۳)۲$$
$$F = ۴N$$

جهت حرکت تغییر نکرده بنابراین در حالت جدید به جای نیروی F نیروی ۲ نیوتونی قرار می‌دهیم و شتاب را در این حالت بدست می‌آوریم:

$$-F - f_k + m_۱ g = (m_۱ + m_۲)a$$
$$-۲ - ۰/۲ \times ۳ \times ۱۰ + ۲ \times ۱۰ = (۲+۳)a \rightarrow a = ۲/۴ \frac{m}{s}$$

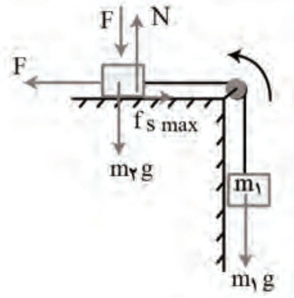
▼ **مثال ۷۱) در شکل زیر، دو نیروی هم اندازه‌ی F به طور عمود بر هم بر جسم $m_۲$ وارد می‌شوند. اگر جرم دو جسم یکسان و برابر با ٤ کیلوگرم باشد، نیروی F چند نیوتون باشد تا جسم $m_۱$ در آستانه‌ی حرکت به طرف بالا باشد؟ (g =۱۰N/kg) و از جرم قرقره، نخ‌ها و اصطکاک بین آنها صرفنظر شود.)**

(آزمون کانون- ۹۱)



۱) ٤۰
۲) ٤۸
۳) ۶۰
٤) ۸۰

☑ **پاسخ:** برای اینکه جسم $m_۱$ در آستانه حرکت به طرف بالا قرار گیرد می‌بایست نیروی اصطکاک ایستایی بین جسم $m_۲$ و سطح بیشینه شود $(f_s = f_{smax} = \mu_s . N)$ بنابراین قانون دوم نیوتون را برای کل مجموعه نوشته و شرط مورد نظر را اعمال می‌کنیم. جهت مثبت را همان جهت حرکت به سمت بالا در نظر می‌گیریم برای بدست آوردن نیروی عمودی سطح N می‌توانیم قانون دوم نیوتون را برای جرم $m_۲$ در راستای قائم بنویسیم:



در راستای قائم برای جسم $m_۲$: $\Sigma F_y = ma \xrightarrow{a=۰} N - F - m_۲ g = ۰ \rightarrow N = F + m_۲ g$

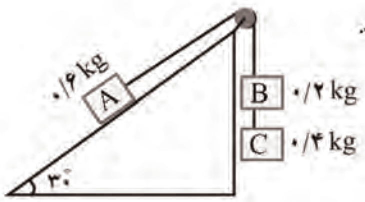
برای کل مجموعه: $\Sigma F = ma \xrightarrow{a=۰} F - f_k - m_۱ g = ۰$

$$F - \mu_s . (F + m_۲ g) - m_۱ g = ۰$$
$$F - ۰/۲F - ۰/۲ \times ۴ \times ۱۰ - ۴ \times ۱۰ = ۰$$
$$۰/۸F = ۴۸ \rightarrow F = ۶۰N$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

▼ **مثال ۷۲) در شکل مقابل جرم نخ و قرقره ناچیز است و ضریب اصطکاک بین وزنه‌ی A و سطح شیبدار $\frac{\sqrt{۳}}{۵}$ است. نیروی کشش نخ بین وزنه‌های B و C چند نیوتون است؟ (g =۱۰N/kg)**

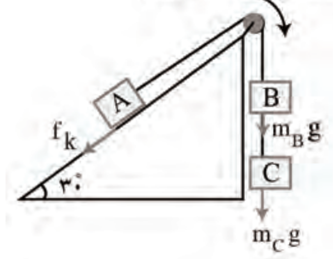
(آزاد (ریاضی- ۷۸)



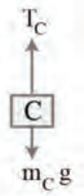
۱) ۱/۶
۲) ۱/۸
۳) ۳/۶
۴) ۳/۲

☑ **پاسخ:** ابتدا فرض کنید جهت حرکت مانند شکل است در نهایت اگر شتاب بدست آمده منفی شد جهت حرکت را اشتباه فرض کردیم. قانون دوم نیوتون را با در نظر گرفتن جهت حرکت به عنوان جهت مثبت به کار می‌بریم:

$$f_k = \mu_k \times m_A g\cos۳۰ = ۱/۸N$$
$$\Sigma F = ma \rightarrow m_C g + m_B g - m_A g\sin۳۰ = (m_A + m_B + m_C)a$$
$$a = \frac{۰/۴ \times ۱۰ + ۰/۲ \times ۱۰ - ۰/۶ \times ۱۰ - ۱/۸}{۰/۴ + ۰/۲ + ۰/۶} = ۱ \frac{m}{s^۲}$$



چون مسئله نیروی کشش نخ بین وزنه‌های B و C را می‌خواهد، جسم C را مورد توجه قرار می‌دهیم و قانون دوم نیوتون را برای جسم C می‌نویسیم:

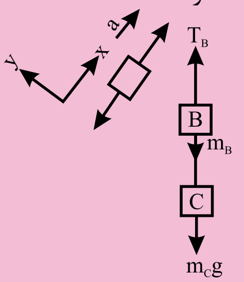


$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow m_C g - T_C = m_C \times a$$
$$۰/۴\times۱۰ - T = ۰/۴\times۱ \rightarrow T = ۳/۶N$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

توجه: می‌توانیم برای بدست آوردن شتاب از دو معادله نوشته شده نیوتون برای دو جسم B و C و جسم A استفاده کرد.

$$\begin{cases} T_B - m_A g\sin ۳۰ = m_A a \\ m_C g + m_B g - T_B = (m_B + m_C)a \end{cases}$$



اگر دو رابطه بالا را با هم جمع کنیم به همان رابطه قبل برای مجموعه دستگاه می‌رسیم.

تکانه

حاصل‌ضرب جرم جسم در سرعت حرکت جسم را تکانه یا اندازه حرکت گویند که با رابطه زیر نشان داده می‌شود.

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

P : اندازه حرکت

m: جرم جسم

v: سرعت

سرعت یک کمیت برداری و جرم یک کمیت عددی است بنابراین حاصل ضرب آنها که نشانگر اندازه حرکت است یک کمیت برداری می‌باشد که جهت آن هم جهت با بردار سرعت جسم است. یکای اندازه حرکت در SI $\frac{\text{کیلوگرم} \times \text{متر}}{\text{ثانیه}}$ یا ثانیه × نیوتون است.

مثال۶۹) جمله‌ی زیر را با کلمه یا عبارت مناسب کامل کنید:

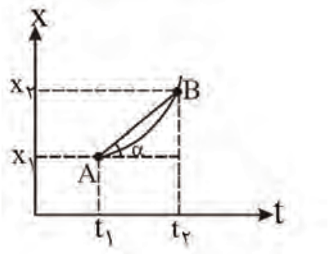
یک خودروی سواری و یک کامیون با سرعت یکسانی در حرکتند تکانه‌ی کامیون .... تکانه خودرو است. (مشهد-نمونه دولتی-۹۱)

پاسخ: بیشتر؛ اندازه تکانه با جرم و سرعت حرکت جسم رابطه دارد. به دلیل اینکه جرم کامیون بیشتر از سواری است تکانه کامیون بیشتر از تکانه خودرو می‌باشد.

اندازه حرکت متوسط و لحظه‌ای: اگر در رابطه اندازه حرکت سرعت متوسط قرار دهیم حاصل اندازه حرکت متوسط خواهد شد.

$$\vec{P} = m\vec{v} \rightarrow \vec{P} = m\frac{\overrightarrow{\Delta x}}{\Delta t} \qquad \text{در بازه زمانی } \Delta t$$

با توجه به اینکه شیب نمودار مکان زمان در بازه زمانی Δt بین دو نقطه A و B برابر سرعت متوسط می‌باشد اگر شیب را در جرم جسم ضرب کنیم اندازه حرکت متوسط بدست خواهد آمد.



$$\tan\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \vec{\bar{v}}$$
$$\vec{\bar{P}} = m\vec{\bar{v}} \rightarrow \vec{\bar{P}} = m \times \tan\alpha$$

اگر بازه زمانی Δt بسیار کوتاه شود و سرعت استفاده شده در رابطه اندازه حرکت سرعت لحظه‌ای باشد اندازه حرکت لحظه‌ای بدست خواهد آمد.

$$P = mV \rightarrow \lim_{\Delta t \to ۰} m\frac{\Delta x}{\Delta t} = m\boxed{\frac{dx}{dt}} \rightarrow v$$

نکته: همان‌طور که می‌دانیم اگر از تابع مکان- زمان حرکت یک متحرک مشتق بگیریم و حاصل را در جرم جسم ضرب کنیم، تابع «اندازه حرکت- زمان» بدست می‌آید.

مثال ۷۳) معادله مکان متحرکی به جرم ۲۰۰g که در صفحه‌ی xoy حرکت می‌کند در SI به صورت $x = ۶t+۳$ و $y = -۳t^{۲}-۲t+۵$ است اندازه‌ی تکانه‌ی آن در لحظه‌ی $t = ۱s$ چند کیلوگرم متر بر ثانیه است؟ (سراسری خارج تجربی- ۸۹)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

پاسخ: *در رابطه $P = mV$ سرعت کل ذره باید در نظر گرفته شود. با توجه به اینکه حرکت جسم در صفحه xoy است و رابطه x بر حسب زمان و y بر حسب زمان داده شده است می‌توان از مشتق گرفتن از این دو رابطه مؤلفه‌های x و y بردار سرعت را بدست آورد و اندازه بردار برآیند سرعت را محاسبه کرد. چون در سؤال اندازه تکانه را می‌خواهد با ضرب اندازه سرعت جسم در لحظه خواسته شده در جرم آن اندازه تکانه بدست می‌آید.*

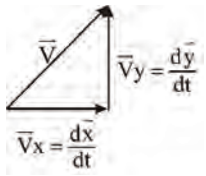
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(۶t+۳)}{dt} = ۶$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(-۳t^{۲}-۲t+۵)}{dt} = -۶t-۲$$

$$\vec{V} = v_x i + v_y j = ۶i-(۶t+۲)j \xrightarrow{t=۱s} v = ۶i-۸j$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^{۲}+v_y^{۲}} = \sqrt{۳۶+۶۴} = ۱۰\,\frac{m}{s}$$

$$P = mv \xrightarrow{m=۰/۲kg} P = ۰/۲ \times ۱۰ = ۲\,\frac{kg.m}{s}$$



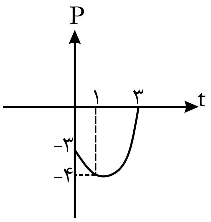
بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۷۴) معادله تکانه- زمان ذره‌ای که بر محور x حرکت می‌کند در SI به صورت $P = t^{۲}-۲t-۳$ است نوع حرکت از لحظه‌ی $t = ۰$ تا $t = ۳s$ کدام است؟ (سراسری خارج ریاضی- ۸۷)

۱) همواره کند شونده ۲) همواره تندشونده

۳) ابتدا کند شونده و سپس تند شونده ۴) ابتدا تندشونده و سپس کندشونده

پاسخ: *حاصل‌ضرب جرم در سرعت جسم برابر تکانه جسم است. چون جرم کمیتی عددی است می‌توانیم با بررسی تغییرات تکانه با زمان، تغییرات سرعت با زمان را نتیجه بگیریم. برای این کار نمودار تکانه- زمان را رسم می‌کنیم.*



$$t = ۱ \rightarrow P_{max} = -۴$$
$$t = ۳ \rightarrow P = ۰$$

همان طور که می‌دانید حرکتی در یک بازه زمانی کندشونده است که در این بازه اندازه سرعت حرکت همواره کاهش یابد و حرکتی تندشونده است که اندازه سرعت آن در این بازه زمانی همواره افزایش یابد همان‌طور که گفته شد تغییرات سرعت مشابه تغییرات تکانه است که نمودار آن در شکل مشاهده می‌شود. با تحلیل این نمودار می‌توان به بررسی نوع حرکت پی برد.

در بازه زمانی $۰ < t < ۱$ ثانیه اندازه سرعت ذره در حال افزایش است بنابراین حرکت ابتدا تندشونده است در بازه زمانی $۱ < t < ۳$ ثانیه اندازه سرعت کاهش می‌یابد بنابراین می‌توان گفت در این بازه حرکت کندشونده می‌شود.

بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال ۷۵) معادله‌ی بردار تکانه‌ی یک جسم ۴۰۰ گرمی به صورت $\vec{P} = ۶t\vec{i} + ۴t^{۲}\vec{j}$ است (در SI) در لحظه‌ی $t = ۲s$ اندازه‌ی سرعت جسم چند متر بر ثانیه است؟ (سراسری ریاضی-۸۶)

۱) ۴۰ ۲) ۵۰ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

☑**پاسخ:** می‌توان با توجه به رابطه $\vec{P}=m\vec{v}$ بردار سرعت را بدست آورد و با استفاده از آن اندازه سرعت را در لحظه $t=۲s$ محاسبه کرد:

$$\vec{v}=\frac{\vec{P}}{m}\to\vec{P}=۶t\vec{i}+۴t^۲\vec{j}\xrightarrow{m=۰/۴kg\,,\,t=۲s}\vec{v}=۳۰\vec{i}+۴۰\vec{j}\to|v|=\sqrt{۳۰^۲+۴۰^۲}=۵۰\frac{m}{s}$$

$$|v|=۵۰\frac{m}{s}$$

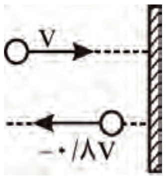
بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

تغییرات اندازه حرکت: حاصلضرب جرم جسم در تغییرات سرعت جسم را تغییرات تکانه می‌گویند با توجه به رابطه گفته شده برای تکانه اگر به جای سرعت (v) تغییرات آن را قرار دهیم تغییرات تکانه بدست می‌آید.
توجه کنید چون سرعت کمیتی برداری است می‌تواند اندازه و یا جهت آن تغییر کند. این مسئله را می‌توان در برخورد اجسام و تغییر اندازه و جهت سرعت آنها مشاهده کرد. $\Delta\vec{P}=m\Delta\vec{v}$

مثال ۷۶) توپی به جرم m را به طور افقی با سرعت v به یک دیوار می‌زنیم. توپ با سرعت ۰/۸v از دیوار برمی‌گردد. تغییر اندازه حرکت توپ چند برابر mv است؟ (سراسری ریاضی- ۶۹)

۰/۱(۱ ۰/۲(۲ ۰/۹(۳ ۱/۸(٤

☑**پاسخ:** همان‌طور که در صورت مسئله گفته شده است با برخورد توپ به دیوار هم جهت سرعت و هم اندازه آن تغییر می‌کند.



$$v_۱=v,\ v_۲=-۰/۸v$$

$$\Delta\vec{P}=m\Delta\vec{v}$$

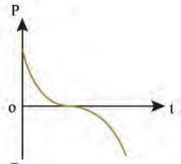
$$\Delta\vec{P}=m(v_۲-v_۱)=m(۰/۸v-v)$$
$$=-۱/۸mv$$
$$|\Delta\vec{P}|=۱/۸mv$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

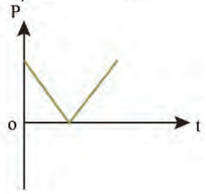
اگر تغییر جهت سرعت را در نظر نمی‌گرفتیم به گزینه ۲ می‌رسیدیم!

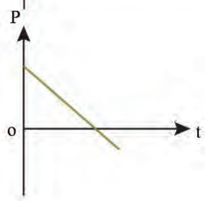
نکته: در مسائلی که نمودار تکانه با زمان متحرکی مورد بحث قرار گرفته است با رسم نمودار سرعت- زمان آن متحرک به حل مسئله می‌پردازیم. در واقع نمودار P-T خواص مشابه نمودار V-T خواهد داشت. (برای درک بهتر فرض کنید جرم متحرک ۱ کیلوگرم می‌باشد آنگاه تغییرات سرعت با تغییرات تکانه جسم برابر می‌شود)

مثال ۷۷) گلوله‌ای در راستای قائم رو به بالا پرتاب می‌شود. اگر مقاومت هوا ناچیز باشد، کدام نمودار تغییر تکانه‌ی جسم را درست نشان می‌دهد؟ (سراسری تجربی-۸۹)

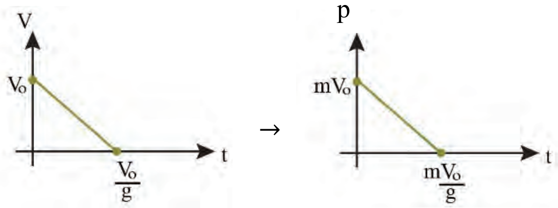
۱)


۲)

۳)


۴)


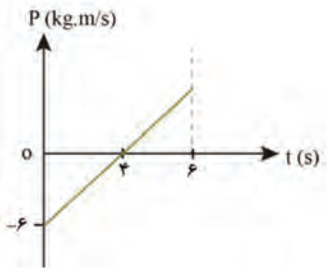
☑**پاسخ:** ازنمودار تغییرات سرعت با زمان در حرکت پرتابی در راستای قائم رو به بالا استفاده می‌کنیم. همان طور که می‌دانید رابطه سرعت با زمان در حرکت پرتابی در راستای قائم $V=gt+V_۰$ می‌باشد که نمودار آن یک خط با شیب منفی می‌باشد که در شکل مشاهده می‌کنید.



بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال ۷۷) شکل زیر، نمودار تکانه – زمان جسمی است که بر روی خط راست حرکت می‌کند. کدام یک از گزینه‌های زیر درباره‌ی این جسم نادرست است؟

(آزمون کانون-۹۱)



۱) تکانه‌ی جسم در لحظه‌ی $t = ۶s$ به ۳ واحد SI می‌رسد.

۲) در لحظه‌ی $t = ٤s$، جهت حرکت جسم عوض می‌شود.

۳) اندازه‌ی متوسط برایند نیروهای وارد بر جسم، ثابت و برابر $۱/۵N$ است.

٤) حرکت جسم پیوسته تندشونده است.

پاسخ:

$$P = \frac{۳}{۲}t - ۶ \xrightarrow{t=۶s} P = \frac{۳}{۲}(۶) - ۶ = ۳\frac{kg.m}{s}$$

با توجه به نکات گفته شده می‌توان نمودار سرعت زمان جسم را مشابه همین نمودار در نظر گرفت با توجه به اینکه در $t = ۴s$ سرعت متحرک صفر می‌شود می‌توان نتیجه گرفت متحرک جهت حرکت خود را عوض کرده است بنابراین این گزینه هم صحیح می‌باشد. بین لحظه ۴ $> t >$ ۰ ثانیه اندازه سرعت جسم در حال کاهش است بنابراین حرکت کندشونده است و از لحظه ۶ $> t >$ ۴ ثانیه اندازه سرعت در حال افزایش است بنابراین در این بازه زمانی حرکت تندشونده است بنابراین گزینه ۴ نادرست است. صحیح بودن گزینه ۳ با مطالبی که در ادامه گفته می‌شود قابل اثبات است.

رابطه بین تکانه و انرژی جنبشی

اگر رابطه انرژی جنبشی و تکانه را با هم ترکیب کنیم به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} k = \frac{۱}{۲}mv^۲ \\ P = mV \end{cases} \xrightarrow{v=\frac{P}{m}} k = \frac{۱}{۲}m(\frac{P}{m})^۲ \rightarrow k = \frac{P^۲}{۲m} \text{ یا } k = \frac{PV}{۲}$$

مثال ۷۹) دو گلوله A و B تکانه‌ی یکسانی دارند. اگر جرم گلوله‌ی B، سه برابر جرم گلوله‌ی A باشد و انرژی جنبشی گلوله‌ی A برابر ۱۸J باشد، انرژی جنبشی گلوله B چند ژول است؟

(سراسری خارج کشور تجربی- ۹۰)

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ٤) ٤۸

پاسخ: *از رابطه $k = \frac{p^۲}{۲m}$ می‌توان در حالت مقایسه‌ی استفاده کرد.*

$$\begin{cases} k_A = \frac{P_A^۲}{۲m_A} \\ k_B = \frac{P_B^۲}{۲m_B} \end{cases} \rightarrow \frac{k_A}{k_B} = \frac{\frac{P_A^۲}{۲m_A}}{\frac{P_B^۲}{۲m_B}} \xrightarrow{P_A=P_B, m_B=۳m_A} \frac{k_A}{k_B} = \frac{\frac{P_A^۲}{۲m_A}}{\frac{P_A^۲}{۶m_A}} \rightarrow \frac{k_A}{k_B} = ۳$$

$$\frac{۱۸}{k_B} = ۳ \rightarrow k_B = ۶j$$

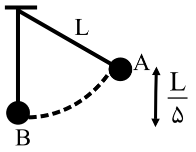
گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۸۰) گلوله‌ی آونگی به جرم M از ریسمانی به طول L آویزان است. گلوله روی مسیر دایره‌ای به یک طرف کشیده می‌شود تا به ارتفاع $\frac{L}{۵}$ بالاتر از وضعیت تعادل برسد. اگر گلوله از آن حالت رها شود، تکانه‌اش در هنگام عبور از پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر چقدر است؟ (کمیت‌ها در SI هستند g شتاب گرانش است و از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.)

(سراسری ریاضی- ۹۰)

۱) $\frac{۸}{۵}M.Lg$ ۲) $\frac{۲}{۵}M.Lg$ ۳) $\sqrt{\frac{۲}{۵}M^۲.Lg}$ ٤) $\sqrt{\frac{۸}{۵}M^۲.Lg}$

پاسخ: ابتدا سرعت گلوله را با استفاده از قانون پایستگی انرژی در هنگام عبور از پایین‌ترین نقطه مسیر محاسبه می‌کنیم.



$$E_A = E_B \longrightarrow mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$g \times \frac{L}{5} = \frac{1}{2}v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2}{5}gL}$$

حال با استفاده از رابطه P=mv تکانه گلوله را در نقطه B محاسبه می‌کنیم

$$P = mv \rightarrow P = M\sqrt{\frac{2}{5}gL} \rightarrow P = \sqrt{\frac{2}{5}M^2gL}$$

رابطه تکانه با نیرو

با استفاده از قانون دوم نیوتون ارتباط بین تکانه و نیرو را بدست می‌آوریم

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

اگر در رابطه نیوتون به جای شتاب $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ قرار دهیم داریم:

$$\Sigma\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta\vec{P}=m\Delta\vec{V}} \Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

این رابطه در واقع صورت دیگری از قانون دوم نیوتون است که بیان می‌کند آهنگ تغییرات تکانه برابر برآیند نیروهای وارد بر جسم است. با این موضوع به طور مستقیم به رابطه نیرو و سرعت می‌پردازد.

فرض کنید جسمی در مدت زمان t ثانیه سرعتش از v_1 به v_2 تغییر کند می‌توان نیروی متوسطی (لحظه‌ای) که به جسم در این مدت وارد می‌شود را از رابطه بالا محاسبه کرد.

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \rightarrow \vec{F} = \frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{m(v_2 - v_1)}{t} \quad , \vec{F} = m\frac{dv}{dt}$$

▼ مثال ۸۱) **درستی یا نادرستی جمله‌ی زیر را مشخص کنید.** (سراسری ریاضی- دی ۹۰)

هرگاه برآیند نیروهای وارد بر جسمی صفر باشد، تکانه‌ی آن برابر مقدار ثابتی است.

پاسخ:

هنگامی که برآیند نیروهای وارد بر جسمی ثابت است با توجه به رابطه $\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ داریم:

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = 0 \rightarrow \Delta\vec{p} = 0 \text{ یا } \Sigma\vec{F} = \frac{dp}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال}} p = \int\frac{dp}{dt} = \mathbf{c} \text{ (عدد ثابت)}$$

که نشان می‌دهد تغییرات اندازه حرکت آن صفر بوده و مقداری ثابت است.

▼ مثال ۸۲) **از یک لوله‌ی آتش نشانی آب با آهنگ ۵ kg/s با سرعت ۵m/s به صورت افقی به دیوار برخورد می‌کند. نیروی متوسط وارد بر دیوار توسط آب را حساب کنید.(از برگشت آب از روی دیوار چشم پوشی کنید).** (مشهد- دبیرستان آرمینه محلی نژاد- ۹۱)

پاسخ:

از رابطه $\vec{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ می‌توان نیروی متوسط را محاسبه کرد فرض می‌کنیم سرعت آب در برخورد با دیوار صفر می‌شود.

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{m}{\Delta t}=5} \vec{F} = 5(v_2 - v_1) = 5(0 - 5) = -25N$$

$$|\vec{F}| = 25N$$

▼ مثال ۸۳) **اتومبیلی به جرم ٤ تن با سرعت ۲۰m/s روی سطح افقی در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. این اتومبیل در اثر ترمز با شتاب ثابت در مدت 4s متوقف می‌شود نیروی ترمز چند نیوتون است؟** (فیزیک پیش- فصل ۲- فعالیت ۲-۴) (سراسری تجربی-۸۱)

۱) ۲۰۰۰۰ ۲) ۱۰۰۰۰ ۳) ۸۰۰۰ ٤) ٤۰۰۰

پاسخ: از رابطه نیرو و اندازه حرکت استفاده می‌کنیم:

$$v_1 = 20\,\frac{m}{s},\ m = 4\times1000=4000\,kg,\ v_2 = 0$$

$$\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t} \rightarrow \bar{F} = \frac{m(v_2 - v_1)}{t} \xrightarrow{\Delta t=4s} \bar{F} = \frac{4000(0 - 20)}{4} = -20000N$$

علامت منفی نشان می‌دهد نیرو وارد شده به اتومبیل در خلاف حرکت آن بوده است. بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۸٤) سرعت گلوله‌ای به جرم ۰/۲kg تحت اثر نیروی ثابتی، از $\vec{v}_1 = 10\vec{i}-8\vec{j}$ به $\vec{v}_2 = 6\vec{i}-5\vec{j}$ می‌رسد (در SI). اگر زمان تأثیر نیرو برابر با ۰/۱ ثانیه باشد، بزرگی نیرو چند نیوتون است؟ (سراسری ریاضی- ۹۲)

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ٤) ۲۰

پاسخ: از رابطه نیرو با تغییرات تکانه برای حل مسئله استفاده می‌کنیم.

$$\vec{v}_1 = 10\vec{i} - 8\vec{j},\ \vec{v}_2 = 6\vec{i} - 5\vec{j}$$

$$\vec{\bar{F}} = \frac{\overrightarrow{\Delta P}}{\Delta t} \rightarrow \vec{\bar{F}} = \frac{m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t=0/1s} \vec{\bar{F}} = \frac{0/2(6\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{i} + 8\vec{j})}{0/1} = -8\vec{i}+6\vec{j}$$

$$\vec{\bar{F}} = -8\vec{i}+6\vec{j} \rightarrow |\bar{F}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10N \rightarrow |\bar{F}| = 10N$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نکته: شیب نمودار تکانه – زمان در بازه‌ی زمانی Δt متوسط برآیند نیروهای وارد بر جسم در این بازه است.

$$Tan\alpha = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

شیب نمودار تکانه- زمان در هر لحظه برابر برآیند نیروهای وارد بر جسم در آن لحظه است.

$$Tan\alpha = \frac{dP}{dt}$$

در واقع اگر از تابع تکانه- زمان نسبت به زمان مشتق بگیریم تابع برآیند نیروهای وارد بر جسم بر حسب زمان بدست می‌آید.

$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{dP}}{dt}$$

مثال ۸۵) معادله‌ی تکانه‌ی جسمی به جرم ۵kg، در SI به صورت $P=t^3 - 5t - 20$ است. شتاب حرکت جسم در لحظه‌ی $t = 5s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟ (سراسری خارج از کشور ریاضی- ۹۲)

۱) ۲۶ ۲) ۱٤ ۳) -۹ ٤) ۷

پاسخ: شیب نمودار تکانه- زمان در هر لحظه برابر برآیند نیروهای وارد بر جسم در آن لحظه است. بنابراین با مشتق گیری از تابع تکانه بر حسب زمان می‌توانیم برآیند نیروی وارد بر جسم را در لحظه $t = 5s$ بدست آوریم:

$$P=t^3 - 5t - 20 \xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} \frac{dP}{dt} = 3t^2 - 5 \xrightarrow{\frac{dP}{dt}=F} F = 3t^2 - 5 \xrightarrow{t=5s} F = 3(5)^2 - 5 = 70N$$

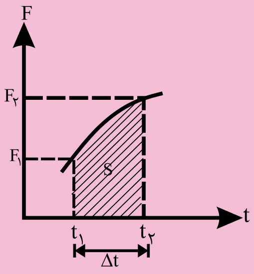
حال با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توانیم شتاب حرکت را بدست آوریم:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \xrightarrow{m=5kg} 70 = 5 \times a \rightarrow a = \frac{70}{5} = 14\,\frac{m}{s^2}$$

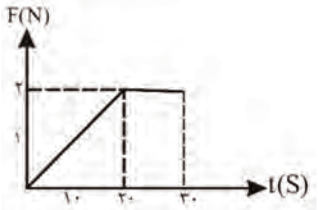
بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

نکته: اگر شکل زیر نمودار نیرو زمان متحرکی باشد، سطح زیر نمودار در بازه زمانی Δt بیان‌گر تغییرات تکانه (اندازه حرکت جسم) در این بازه است.

$S = \Delta P$



مثال ۸۶) جسمی به جرم ۳kg از حال سکون تحت تأثیر نیرویی که تغییرات آن با زمان به شکل زیر است، به حرکت درمی‌آید. اندازه حرکت آن در لحظه‌ی $t = 20s$ چند kg m/s است؟



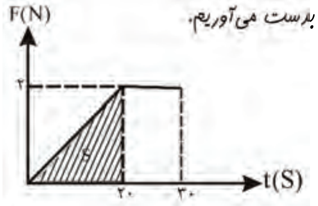
۱) ۲۰

۲) ۳۰

۳) ۴۰

۴) ۶۰

پاسخ: سطح زیر نمودار نیرو زمان در بازه زمانی Δt برابر تغییرات تکانه جسم در آن بازه می‌باشد. در لحظه $t = 0$ اندازه تکانه جسم برابر صفر است (جسم از حال سکون به حرکت درآمده است) بنابراین سطح زیر نمودار را برای ۲۰ ثانیه حرکت در نظر گرفته و تغییرات اندازه حرکت را در این بازه بدست می‌آوریم.

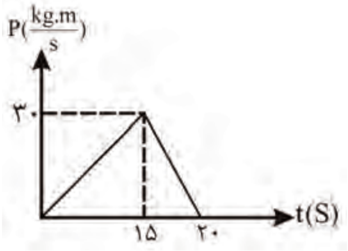


$$S = \Delta p = p_2 - p_1$$

$$S = \frac{1}{2} \times 20 \times 2 = 20 \rightarrow 20 = p_2 - p_1 \xrightarrow{p_1 = 0} p_2 = 20\ \frac{kgm}{s}$$

بنابراین تکانه جسم در لحظه $t = 20s$ برابر $20\ \frac{kgm}{s}$ می‌باشد. گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۸۷) نمودار شکل مقابل، اندازه تکانه‌ی جسمی به جرم ۲kg را که در مسیری مستقیم و افقی حرکت می‌کند بر حسب زمان نشان می‌دهد. اگر نیروی ثابت افقی $\vec{F}$ در ۱۵ ثانیه‌ی ابتدای حرکت به جسم وارد و سپس قطع شده باشد، اندازه‌ی نیروی F چند نیوتون بوده است؟



۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: با توجه به رابطه $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ شیب نمودار تکانه بر حسب زمان در هر لحظه اندازه برایند نیروهای وارد بر جسم در آن لحظه است. در بازه زمانی ۰ تا ۱۵ ثانیه می‌توان نوشت:

$$F_1 = \frac{3000}{1500} = 2N$$

بنابراین چون شیب نمودار در این بازه ثابت است برآیند نیروهای وارد بر جسم در این بازه زمانی ثابت و برابر 2N است.

برای بازه زمانی ۱۵ تا ۲۰ ثانیه می‌توان نوشت:

$$F_2 = \frac{0 - 30}{20 - 15} = -6N$$

چون در لحظه $t = 15s$ نیروی محرک F قطع می‌شود تنها نیروی اصطکاک جنبشی که در خلاف حرکت جسم وارد می‌شود بر جسم اثر می‌کند که اندازه آن $f_k = 6N$ می‌باشد.

می‌توانیم با داشتن نیروی اصطکاک جنبشی سطح قانون دوم نیوتون را در بازه زمانی ۰ تا ۱۵ ثانیه بنویسیم:

$$F - f_k = 2N \xrightarrow{f_k = 6N} F - 6 = 2 \rightarrow F = 8N$$

گزینه ۴ صحیح است.

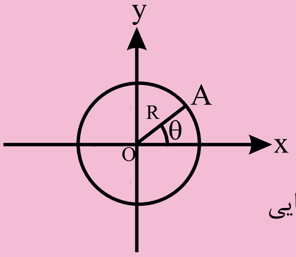
حرکت دایره‌ای

در اطراف ما کاربردهای زیادی از حرکت دایره‌ای مشاهده می‌شود. حرکت لباس در ماشین لباسشویی، غنی سازی اورانیوم در سانتریفوژها، حرکت سیارات به دور خورشید، نمونه‌ای از این نوع حرکت هستند. مفاهیم سینتیکی و دینامیکی درباره این نوع حرکت قابل بررسی می‌باشد. ابتدا به تعریف برخی از این مفاهیم می‌پردازیم.

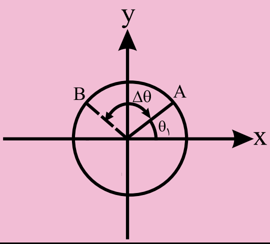
مفاهیم سینتیکی حرکت دایره‌ای: جابه‌جایی و مکان زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای، دوره، بسامد، حرکت دایره‌ای یکنواخت و شتاب مرکزگرا مفاهیمی هستند که در حرکت دایره‌ای مطرح می‌شوند. در زیر به بررسی این مفاهیم می‌پردازیم:

۱)مکان و جابه‌جایی زاویه‌ای: می‌توان یک نقطه در صفحه مختصات را روی یک دایره با شعاع R و زاویه θ نسبت به محور x نمایش داد. این نقطه مکان زاویه‌ای گفته می‌شود.

در یک حرکت زاویه‌ای θ در حال تغییر با زمان است $(\theta=f(t))$



حال اگر ذره‌ی که در مکان زاویه‌ای A قرار دارد بعد از گذشت t ثانیه‌ی در مکان زاویه‌ی B قرار گیرد جابه‌جایی زاویه‌ی آن برابر $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ خواهد شد.



$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

سرعت زاویه‌ای متوسط و لحظه‌ای

نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای جسم به بازه زمانی این جابه‌جایی سرعت زاویه‌ای متوسط گفته می‌شود که با $\bar{\omega}$ نشان داده می‌شود.

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$\bar{\omega}$: سرعت زاویه‌ای متوسط بر حسب $\frac{rad}{s}$

$\Delta\theta$: جابه‌جایی زاویه‌ای (rad)

Δt : بازه زمانی جابه‌جایی زاویه‌ای (s)

اگر بازه زمانی Δt بسیار کوچک شود و به صفر میل کند سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای بدست خواهد آمد که به اختصار سرعت زاویه‌ای گفته می‌شود.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \to \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

بنابراین می‌توان با مشتق گرفتن از معادله مکان زاویه‌ای با زمان سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای را بدست آوریم.

مثال ۸۸) مکان زاویه‌ای ذره‌ای که روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، با رابطه‌ی $\theta = t^2 + 2t$ بیان شده است (t بر حسب ثانیه و θ بر حسب رادیان است). (ریاضی- دی ۸۷)

الف) سرعت زاویه‌ای متوسط این ذره را بین لحظه‌های $t_1 = 1s$ و $t_2 = 3s$ به دست آورید.

ب)سرعت زاویه‌ای این ذره در لحظه‌ی $t = 2s$ چقدر است؟

پاسخ: *الف) برای بدست آوردن سرعت زاویه‌ای متوسط می‌توانیم مکان زاویه‌ای متحرک را در زمان‌های t_1 و t_2 بدست آوریم و جابه‌جایی زاویه‌ای متحرک را محاسبه کنیم . با توجه به رابطه سرعت زاویه‌ای متوسط داریم:*

$\theta = t^2 + 2t$

$t_1 = 1s \rightarrow \theta_1 = 3rad$

$t_2 = 3s \rightarrow \theta_2 = 15rad$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \rightarrow \bar{\omega} = \frac{15 - 3}{3 - 1} = 6\frac{rad}{s}$$

ب)برای بدست آوردن سرعت زاویه‌ای در لحظه $t = 2s$ می‌توانیم با مشتق گرفتن از رابطه مکان زاویه‌ای با زمان سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای را بدست آوریم.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \omega = \frac{d(t^2 + 2t)}{dt} \rightarrow \omega = 2t + 2 \xrightarrow{t=2s} \omega = 2(2) + 2 = 6\frac{rad}{s}$$

$$\omega = 6\frac{rad}{s}$$

دوره: بازه زمانی که در آن یک متحرک روی یک مسیر دایره‌ای یک دور کامل را طی می‌کند دوره (T) نامیده می‌شود. یا به معنی دیگر به مدت زمانی که طول می‌کشد تا متحرک روی مسیر دایره 2π رادیان را طی کند دوره می‌گویند که یکای آن در SI، ثانیه است.

بسامد: تعداد دورهای کاملی که متحرک در یک ثانیه می‌تواند طی کند را بسامد یا فرکانس می‌گویند که با حرف f نمایش داده می‌شود و یکای آن s^{-1} است.

اگر فرض کنیم متحرکی در یک حرکت دایره‌ای n دور را در مدت زمان t ثانیه طی می‌کند برای بدست آوردن بسامد حرکت از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$f = \frac{n}{t}$$

می‌توان گفت بسامد یا فرکانس معکوس دوره می‌باشد.

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{یا} \quad T = \frac{1}{f}$$

از تناسب زیر می‌توان بهتر به مفاهیم دوره و بسامد پی برد.

T(ثانیه)   ۱(ثانیه)

۱ دور x(دور)

$$\rightarrow x = \frac{1 \times 1}{T} \xrightarrow{x=f} f = \frac{1}{T}$$

با استفاده از تعریف دوره می‌توانیم رابطه سرعت زاویه‌ای ω را با دوره و بسامد بدست آوریم. با توجه به تعریف دوره، جابه‌جایی زاویه‌ای در مدت یک دوره برابر 2π می‌باشد بنابراین می‌توان نوشت:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{d\theta=2\pi,\ dt=T} \omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T=\frac{1}{f}} \omega = 2\pi f$$

مثال ۸۹) **سرعت زاویه‌ای متوسط عقربه‌ی دقیقه شمار ساعت چند رادیان بر ثانیه است؟** (سراسری ریاضی- ۷۳)

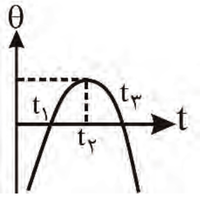
۱) $\frac{\pi}{30}$ ۲) $\frac{\pi}{60}$ ۳) $\frac{\pi}{3600}$ ۴) $\frac{\pi}{1800}$

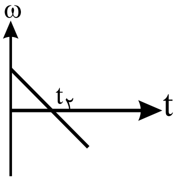
پاسخ: سرعت زاویه‌ای متوسط نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای متحرک به مدت زمان این جابه‌جایی است در این سوال اگر عقربه ساعت یک دور کامل بزند (2π) مدت زمان این جابه‌جایی ۱ ساعت که معادل ۳۶۰۰ ثانیه خواهد شد:

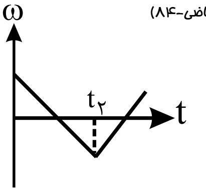
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{3600} = \frac{\pi}{1800}$$

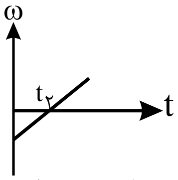
بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

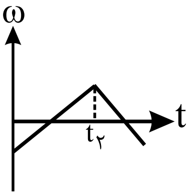
▼ **مثال ۹۰)** شکل روبه‌رو نمودار مکان زاویه‌ای یک متحرک روی مسیر دایره‌ای شکل نسبت به زمان است. نمودار سرعت زاویه‌ای متحرک نسبت به زمان کدام است؟ (سراسری ریاضی-۸۴)



۱)


۲)


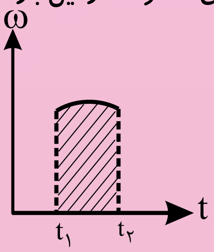
۳)


۴)


☑ **پاسخ:** همان طور که گفته شد مکان زاویه‌ای با زمان تغییر می‌کند. می‌دانیم مشتق مکان زاویه‌ای نسبت به زمان برابر سرعت زاویه‌ای می‌باشد. با توجه به نمودار تا لحظه‌ی t_2 شیب نمودار مثبت (سرعت زاویه ای) و در حال کم شدن است و در لحظه t_2 مقدار آن برابر صفر می‌شود. (خط مماس بر منحنی مکان زاویه‌ای- زمان افقی می‌شود) بعد از لحظه‌ی t_2 شیب نمودار منفی و در حال زیاد شدن می‌باشد. بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نکته: مساحت زیر نمودار سرعت زاویه‌ای با زمان $(\omega - t)$ در بازه زمانی Δt برابر جابه‌جایی زاویه‌ی متحرک در این بازه زمانی است.

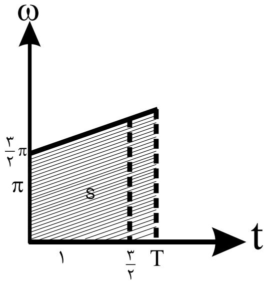
$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow d\theta = \omega dt \rightarrow \Delta\theta = S$$



▼ **مثال ۹۱)** گلوله‌ای در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند و سرعت زاویه‌ای آن در SI به صورت $\omega = \pi t + \frac{۳}{۲}\pi$ است. پس از لحظه $t = ۰$، چند ثانیه طول می‌کشد تا گلوله یک دور کامل طی کند؟ (سراسری تجربی-۹۴)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۲

☑ **پاسخ:** می‌دانیم مساحت زیر نمودار $\omega - t$ در بازه زمانی Δt برابر جابه‌جایی زاویه در آن بازه است. ابتدا نمودار تغییرات ω را با زمان رسم می‌کنیم. سوال دوره (T) را می‌خواهد، جابه‌جایی در یک دوره برابر ۲π است بنابراین داریم:



$$S = \Delta\theta = ۲\pi \rightarrow \frac{(\pi T + \frac{۳}{۲}\pi + \frac{۳\pi}{۲}) \times T}{۲} = ۲\pi$$

$$\pi T^۲ + ۳\pi T = ۴\pi \rightarrow T^۲ + ۳T - ۴ = ۰$$

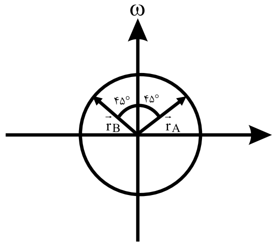
$$\begin{cases} T = ۱ & \text{ق ق} \\ T = -۴ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

▼ **مثال ۹۲)** متحرکی در یک مسیر دایره‌ای به مرکز مبدا مکان، از نقطه‌ی A با بردار مکان $\vec{r}_A = ۲\vec{i} + ۲\vec{j}$ به نقطه‌ی B با بردار مکان $\vec{r}_B = -۲\vec{i} + ۲\vec{j}$ رفته است. اگر زمان حرکت ۲ ثانیه باشد کم‌ترین سرعت زاویه‌ای متوسط این متحرک چند $\frac{rad}{s}$ است؟ (آزمایش سنجش-۹۰)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{٤}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۳\pi}{٤}$

پاسخ: ابتدا موقعیت بردار مکان نقطه A و B را رسم می‌کنیم چون در سوال به جهت متحرک اشاره نشده است بنابراین برای اینکه سرعت زاویه‌ای متوسط $(\bar{\omega})$ کمترین باشد باید جابه‌جایی زاویه‌ای کمترین مقدار باشد به همین دلیل حرکت متحرک را پادساعت‌گرد فرض می‌کنیم



$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \to \bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{rad}{s}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

حرکت دایره‌ای یکنواخت

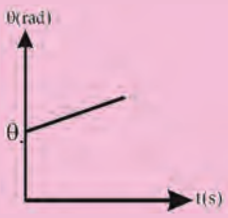
هرگاه در یک حرکت دایره‌ای اندازه‌ی سرعت زاویه‌ای جسم ثابت بماند (ω یک عدد ثابت باشد) حرکت جسم یک حرکت دایره‌ای یکنواخت خواهد بود. که در این حرکت سرعت زاویه‌ای متوسط برابر با سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای می‌شود.

اگر فرض کنیم t_0 مبدا زمان است:

$$\bar{\omega} = \omega$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \xrightarrow{\bar{\omega}=\omega} \omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \xrightarrow{t_0 = 0} \omega = \frac{\theta - \theta_0}{t} \to \theta = \omega t + \theta_0$$

رابطه بدست آمده تابع مکان زاویه‌ای- زمان در حرکت دایره‌ای یکنواخت است. نمودار این تابع را در زیر مشاهده می‌کنید.



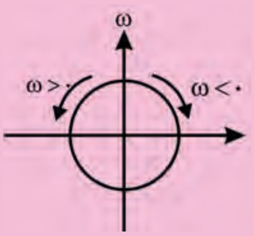
گفته شد اگر از جابه‌جایی زاویه‌ای نسبت به زمان مشتق گرفته شود سرعت زاویه‌ای بدست خواهد آمد

بنابراین با مشتق گیری از تابع جابه‌جایی زاویه‌ای در حرکت دایره‌ای یکنواخت به یک عدد ثابت خواهیم رسید.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\omega t + \theta_0)}{dt} = \omega$$

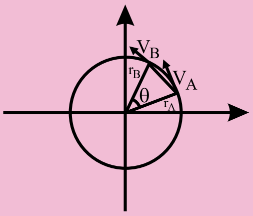
در نمودار نشان داده شده برای جابه‌جایی زاویه‌ای در حرکت دایره‌ای یکنواخت مشخص است که شیب خط که همان سرعت زاویه‌ای است عددی ثابت است. در واقع درباره این حرکت می‌توان گفت نسبت تغییرات جابه‌جایی زاویه‌ای با زمان همواره یکسان است.

نکته: اگر شیب خط که نمایانگر سرعت زاویه‌ای ω است مثبت باشد (مانند نمودار صفحه قبل) $\omega > 0$ است این بدین معنی است که متحرک در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (پادساعتگرد) حرکت می‌کند و اگر شیب نمودار منفی باشد $\omega < 0$ جهت حرکت متحرک در جهت عقربه‌های ساعت است



سرعت خطی در حرکت دایره‌ای و رابطه آن با سرعت زاویه‌ای:

همان طور که در شکل مقابل مشاهده می‌شود سرعت خطی همواره مماس بر مسیر حرکت است.
می‌دانیم سرعت خطی یک جسم برابر نسبت جابه‌جایی آن به بازه زمانی این جابه‌جایی است.



$s = r\theta$

$\theta = \frac{s}{r} \rightarrow$

$v = \frac{dr}{dt} \rightarrow v = \frac{d(r\theta)}{dt} \xrightarrow{\text{ثابت } r} v = r\frac{d\theta}{dt} \xrightarrow{\frac{d\theta}{dt}=\omega} v = r\omega$

s: مسافت طی شده از A تا B

$\vec{\Delta r}$: جابه‌جایی متحرک از A تا B

توجه: در یک حرکت دایره‌ای همواره مسافتی که جسم طی می‌کند از جابه‌جایی آن بیش‌تر است $(|\Delta r| < s)$

توجه: می‌دانیم سرعت یک کمیت برداری است. بنابراین تغییرات سرعت می‌تواند ناشی از تغییر در اندازه و یا جهت سرعت باشد. در حرکت دایره‌ای یکنواخت همواره جهت سرعت در حال تغییر است و نکته گفته شده تنها درباره اندازه سرعت خطی است که در حرکت دایره‌ای یکنواخت ثابت است صدق می‌کند.

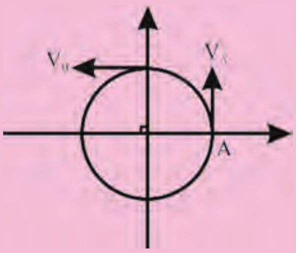
نکته: در حرکت دایره‌ای یکنواخت سرعت زاویه‌ای ω مقداری ثابت است و چون در حرکت دایره‌ای شعاع حرکت ثابت است اندازه سرعت خطی $(v = r\omega)$ مقداری ثابت خواهد بود.

حرکت دایره‌ای یکنواخت → $|v| = r\omega$ → مقداری ثابت

شتاب در حرکت دایره‌ای یکنواخت

همان طور که می‌دانیم شتاب، تغییرات سرعت نسبت به زمان می‌باشد. به شکل زیر توجه کنید. متحرکی در یک حرکت دایره‌ای یکنواخت از نقطه A به نقطه B حرکت کرده است. تغییرات سرعت می‌تواند در اندازه و یا در جهت آن باشد چون حرکت دایره‌ای یکنواخت فرض شده است اندازه سرعت ثابت و تغییر نمی‌کند. اما عامل ایجاد شتاب در حرکت متحرک تغییرات جهت سرعت است. در زیر بردار $\vec{\Delta v}$ را از قوانین تفاضل دو بردار بدست می‌آوریم.

$\vec{\Delta v} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

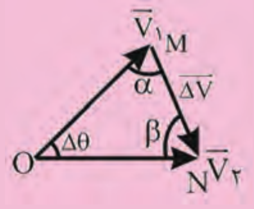


$\vec{\Delta V} = \sqrt{v_A^۲ + v_B^۲ - ۲v_Av_B\cos۹۰} = \sqrt{۲}|v_A| = \sqrt{۲}|v_B|$

$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{۲}|v_A|}{t}$

جهت شتاب با جهت تغییرات سرعت یکسان است. به بردارهای $\vec{v}_۱$ و $\vec{v}_۲$ و $\vec{\Delta v}$ در شکل توجه کنید. اگر نقاط اتصال این بردارها را راس‌های یک مثلث در نظر بگیریم (OMN) چون حرکت دایره‌ای یکنواخت است طول اضلاع OM و ON با هم برابرند. $(|v_A| = |v_B| = v)$

بنابراین زاویه $\alpha = \beta$ است. داریم:

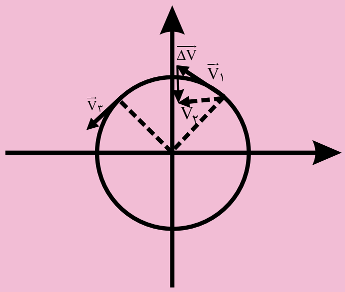


$$\alpha + \beta + \Delta\theta = \pi \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta}{2}$$

حال اگر تغییرات جابه‌جایی زاویه‌ای را در مدت زمان بسیار کوتاه $\Delta t \rightarrow 0$ در نظر بگیریم:

$$\alpha = \lim_{\Delta\theta \to 0} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$\alpha = 90°$ نشان می‌دهد همواره جهت $\overrightarrow{\Delta v}$ عمود بر بردار $\vec{v}_1$ خواهد بود بنابراین می‌توان نتیجه گرفت جهت شتاب حرکت دایره‌ای یکنواخت همواره به طرف مرکز و در راستای شعاع دایره است به این شتاب، شتاب مرکزگرا گویند. می‌توان نشان داد که شتاب حرکت دایره‌ای یکنواخت از رابطه زیر بدست می‌آید:

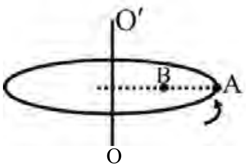


$$a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega$$

مثال ۹۳) در شکل، یک صفحه‌ی افقی (دیسک) با بسامد ثابتی حول محور OO' می‌چرخد. با استدلال برای دو نقطه‌ی A و B

الف) سرعت‌های زاویه‌ای را مقایسه کنید. (ریاضی- جبرانی اول اسفند- ۸۹ (۴ بار))

ب)سرعت‌های خطی را مقایسه کنید.



پاسخ:

الف) چون بسامد حرکت دایره‌ای حول محور OO' مقدار ثابتی است با توجه به رابطه $T = \frac{1}{f}$ دوره حرکت نیز مقدار ثابتی خواهد بود. بنابر رابطه $\omega = \frac{2\pi}{T}$ سرعت‌های زاویه‌ای نقاط A و B نیز یکسان خواهد شد.

ب) با توجه به رابطه $v = r\omega$ داریم:

$$\left.\begin{aligned} v_A &= r_A\omega_A \\ v_B &= r_B\omega_B \end{aligned}\right\} \xrightarrow{r_A > r_B,\ \omega_A = \omega_B} v_A > v_B$$

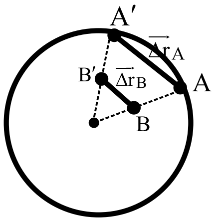
بنابراین سرعت خطی نقطه A بیشتر از نقطه B است.

برای درک بهتر به مقطع دایره‌ای زیر که حول نقطه O دوران می‌کند توجه کنید.

بعد از گذشت زمان dt نقطه A به A' و نقطه B به B' می‌رود.

با توجه به شکل در گذشت زمان یکسان جابه‌جایی نقطه A بیشتر از نقطه B است. $|\overrightarrow{\Delta r}_A| > |\overrightarrow{\Delta r}_B|$

بنابراین با توجه به رابطه $\vec{v} = \frac{\vec{dr}}{dt}$ سرعت خطی نقطه A بیشتر از نقطه B خواهد شد.



مثال ۹۴) پره‌ی یک هلیکوپتر با سرعت ۹۰ دور در دقیقه می‌چرخد. اگر قطر دایره‌ای که لبه‌ی پره طی می‌کند، ٤ متر باشد، سرعت لبه‌ی پره چند متر بر ثانیه است؟

(فیزیک پیش- فصل ۲- ریاضی تمرین ۱۱- تمرین تجربی ۸) (سراسری خارج از کشور تجربی- ۹۲)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ٤) ۱۲

پاسخ: با توجه به اینکه سوال بسامد حرکت دایره‌ای را مقدار ثابت $۹۰ \frac{دور}{دقیقه}$ داده است حرکت مورد نظر حرکت دایره‌ای یکنواخت است.

$$f = ۹۰ \frac{دور}{دقیقه} \to f = \frac{۹۰}{۶۰} = ۱/۵ \frac{دور}{ثانیه}, \omega = ۲\pi f \to \omega = ۲\pi \times ۱/۵ = ۳\pi \frac{rad}{s}$$

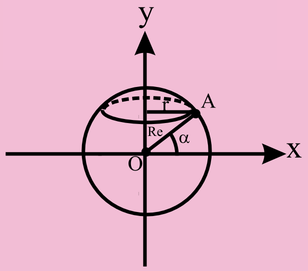
$$v = r\omega \to v = \frac{۴}{۲} \times ۳\pi = ۶\pi \frac{m}{s}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

نکته: حرکت وضعی زمین (حرکت زمین حول محور خود) را در نظر بگیرید. در طول ۲۴ ساعت تمام نقاط زمین یک دور کامل می‌زند. $(T = ۲۴h)$ بنابراین سرعت زاویه‌ای حرکت وضعی زمین مقدار ثابتی است $(\omega = \frac{۲\pi}{T})$.

اگر نقطه A در عرض جغرافیایی α واقع بر سطح زمین در فاصله‌ی عمودی r تا محور چرخش قرار داشته باشد می‌توانیم سرعت خطی حرکت نقطه A را این‌گونه بدست آوریم:

در واقع نقطه A روی دایره‌ای به شعاع r حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد.



$$V = r\omega$$
$$r = R_e \cos\alpha$$
$$V = R_e \cos\alpha . \omega$$

مثال ۹۵) در حرکت وضعی زمین به دور محور خود، سرعت خطی نقطه‌ای در مدار جغرافیایی ۶۰ درجه‌ی شمالی چند برابر سرعت خطی نقطه‌ای واقع در مدار جغرافیایی ۳۰ درجه‌ی شمالی است؟ (سراسری ریاضی- ۸۵)

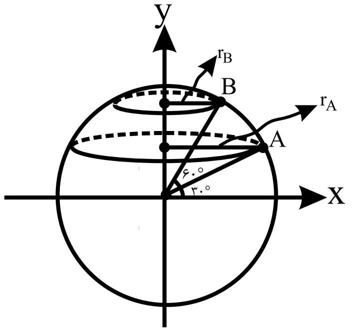
۱) ۲ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: با توجه به نکته گفته شده سرعت خطی نقاط را محاسبه می‌کنیم.

$$v_A = r_A\omega \to v_A = R_e \cos۶۰ \times \omega$$

$$v_B = r_B\omega \to v_B = R_e \cos۳۰ \times \omega$$

$$\to \frac{v_A}{v_B} = \frac{R_e \cos۶۰\,\omega}{R_e \cos۳۰\,\omega}$$



$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

بنابراین گزینه صحیح ۴ می‌باشد.

مثال ۹۶) در حرکت دایره‌ای یکنواخت اگر شعاع مسیر دایره‌ای ۲ برابر شود، بزرگی سرعت خطی، بزرگی شتاب و دوره‌ی حرکت چند برابر می‌شود؟ تجربی- مرداد-۹۱ (۷ بار)

پاسخ:

دوره حرکت مدت زمانی است که جسم در مسیر دایره‌ای یک دور کامل می‌زند و به شعاع مسیر بستگی ندارد چون حرکت دایره‌ای یکنواخت است سرعت زاویه‌ای **ω** ثابت است. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} v_1 = r_1\omega_1 \\ v_2 = r_2\omega_2 \end{cases} \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{r_2\omega_2}{r_1\omega_1} \xrightarrow{r_2=2r_1,\omega_1=\omega_2} \frac{v_2}{v_1} = 2$$

$$\begin{cases} a_1 = r_1\omega^2 \\ a_2 = r_2\omega^2 \end{cases} \rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{r_2\omega_2^2}{r_1\omega_1^2} \xrightarrow{r_2=2r_1,\omega_1=\omega_2} \frac{a_2}{a_1} = 2$$

مثال ۹۷) ذره‌ای در هر دقیقه ۶ بار مسیری به شکل دایره به محیط ۱۲ متر را به طور یکنواخت طی می‌کند. اندازه‌ی شتاب مرکزگرای ذره چند متر بر مجذور ثانیه است؟ $(\pi = 3)$ (سراسری خارج از کشور تجربی- ۸۸)

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $\frac{18}{5}$ ۳) $\frac{18}{25}$ ٤) $\frac{25}{6}$

پاسخ: *ابتدا بسامد حرکت (تعداد دور در ثانیه) و با استفاده از آن سرعت زاویه‌ای را بدست می‌آوریم:*

$$f = \frac{n}{t} \xrightarrow{T=\frac{1}{f}} T = \frac{t}{n} = \frac{60}{6} = 10s \rightarrow T=10s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{10} = 0/6\ \frac{rad}{s}$$

$$P = 2\pi r \rightarrow 12=2\times3\times r \rightarrow r = 2m \text{(محیط دایره)}$$

$$a = r\omega^2 \rightarrow a = 2\times(0/6)^2 = 0/72\ \frac{m}{s^2} = \frac{72}{100} = \frac{18}{25}\frac{m}{s^2}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۹۸) از داخل پرانتز گزینه‌ی درست را انتخاب کنید. (کرمان- دوازده فروردین- ۹۱)

الف) در حرکت دایره‌ای شتاب مرکزگرا به دلیل تغییر (بزرگی سرعت- جهت سرعت) به وجود می‌آید. (ارومیه- فرزانگان- ۹۱)

ب) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بردار سرعت در هر لحظه (مماس- عمود) بر مسیر دایره‌ای و بردار شتاب (مماس- عمود) بر شعاع مسیر است.

پ) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بردار سرعت در هر لحظه (مماس- عمود) بر بردار شتاب است.

پاسخ: *الف) شتاب تغییرات سرعت در واحد زمان است. در حرکت دایره‌ای بزرگی سرعت تغییر نمی‌کند و عامل ایجاد شتاب تغییر در جهت سرعت است.*

ب) در حرکت دایره‌ای همواره بردار سرعت در هر لحظه مماس بر مسیر حرکت است و بردار شتاب در جهت شعاع دایره به سمت مرکز می‌باشد.

پ) در حرکت دایره‌ای یکنواخت، چون سرعت زاویه‌ای ثابت است اندازه بردار سرعت ثابت و در هر لحظه این بردار عمود بر بردار شتاب جسم است.

دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت

با توجه به قانون دوم نیوتون جهت شتاب با جهت نیرو یکسان است. بنابراین چون جهت شتاب حرکت دایره‌ای یکنواخت به سمت مرکز دایره می‌باشد برآیند نیروهای وارد بر جسم در حرکت دایره‌ای یکنواخت باید در راستای شعاع و به طرف مرکز دایره باشد که بزرگی آن با توجه به قانون دوم نیوتون به صورت زیر می‌باشد:

$$F = ma \xrightarrow{a=r\omega^2} F = mr\omega^2$$

$$\omega = \frac{v}{r} \rightarrow F = m\frac{v^2}{r} \quad \text{یا} \quad F = m\omega v$$

نیروی مرکزگرا همان نیرویی است که اجازه نمی‌دهد جسمی که روی یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند به بیرون پرتاب شود. نیروی کشش نخ به جسم که در حال دوران است، نیروی اصطکاک که باعث ماندگاری حرکت اتومبیل روی یک پیچ است، نیروی عمودی سطح که لباس‌ها در ماشین لباسشویی را در مسیر دایره‌ای نگه می‌دارد همه نیروی مرکزگرا هستند که متحرک را در مسیر دایره‌ای نگه می‌دارند. مراحل بررسی دینامیک حرکت دایره‌ای همان مراحل کلی قبلی است:

۱. ابتدا شکل ساده‌ای از نیروهای وارد شده به جسم رسم می‌کنیم.
۲. نیروها را به دو راستای عمود بر هم یکی در راستای عمود بر شعاع دایره و دیگری در راستای شعاع دایره تجزیه می‌کنیم.
۳. نیروی مرکزگرا همان برآیند نیروهایی است که در راستای شعاع به سمت مرکز دایره اعمال می‌شود.

در راستای شعاع $\Sigma F = m\frac{v^2}{r}$

نکته: $m\frac{v^2}{r} =$ **برآیند نیروهای وارد بر جسم به سمت خارج مرکز – برآیند نیروهای وارد بر جسم به سمت مرکز = برآیند نیروهای وارد بر جسم در راستای شعاع**

مثال ۹۹) **الف) نیروی مرکزگرا در حرکت الکترون به دور هسته چه نیرویی است؟** (تجربی- شهریور ۹۱)
ب) چه نیرویی موجب حرکت دایره‌ای ماهواره به دور زمین می‌شود؟ این نیرو چگونه تأمین می‌شود؟ (ریاضی- شهریور ۹۱)
ج) در حرکت لباس‌هایی که در ماشین لباس‌شویی می‌چرخند، چه نیرویی نیروی مرکزگرا است؟ (ریاضی- دی ۹۰) (۱۰ بار)

پاسخ: الف) نیروی مرکزگرا در حرکت الکترون نیروی الکتریسیته است که هسته (بار مثبت) به الکترون به سمت هسته وارد می‌کند و اجازه نمی‌دهد الکترون از مدار خود خارج شود.
ب) نیروی گرانشی که از طرف زمین به ماهواره وارد می‌شود (نیروی وزن ماهواره)
ج) نیروی عمودی سطح N که محفظه‌ی لباسشویی به لباس‌ها وارد می‌کند، نیروی مرکزگرا محسوب می‌گردد.

مثال ۱۰۰) **جسمی به جرم ۵kg حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد و در هر ۱۰ ثانیه یک دور می‌چرخد. اگر شعاع مسیر ۵ متر باشد، نیروی مرکزگرای آن چند نیوتون است؟** $(\pi^2 = ۱۰)$ (سراسری خارج از کشور تجربی- ۸۵)

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۵۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ: مدت زمانی که جسم در حرکت دایره‌ای یک دور می‌زند را دوره گویند بنابراین $T = ۱۰s$ می‌شود.

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \xrightarrow{T=۱۰} \omega = \frac{۲\pi}{۱۰} = \frac{\pi}{۵}$$

$$F = mr\omega^2 \xrightarrow{r=۵m,\ \omega=\frac{\pi}{۵}} F = ۵ \times ۵ \times (\frac{\pi}{۵})^2 = ۵ \times ۵ \times \frac{\pi^2}{۲۵} = ۱۰N$$

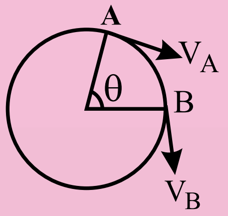
بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

نکته: با توجه به تعریف تکانه تغییرات تکانه در حرکت دایره‌ای یکنواخت را می‌توان با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد. فرض کنید جسمی روی یک مسیر دایره‌ای یکنواخت از نقطه A به نقطه B حرکت می‌کند. برای به دست آوردن تغییرات اندازه حرکت این جسم می‌توان نوشت:

$$|v_A| = |v_B| \rightarrow \Delta v = ۲v\sin\frac{\theta}{۲}$$

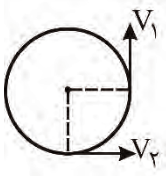
$$\vec{P} = m\vec{v}$$

$$\Delta P = m\Delta v \rightarrow \Delta P = m \times ۲v\sin\frac{\theta}{۲}$$



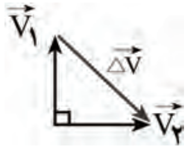
مثال ۱۰۱) ذره‌ای به جرم m روی محیط دایره‌ای، حرکت یکنواخت با سرعت V دارد. اندازه‌ی تغییر تکانه‌ی ذره در مدتی که $\frac{3}{4}$ محیط را طی می‌کند کدام است؟

۱) $2mv$ ۲) $\sqrt{2}mv$ ۳) $2\sqrt{2}mv$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}mv$



پاسخ: هنگامی که ذره $\frac{3}{4}$ محیط را طی می‌کند به حالت نشان داده شده در شکل می‌رسیم؛

برای بدست آوردن تغییر اندازه حرکت ذره باید تغییرات سرعت متحرک را بدست آوریم از تفریق برداری برای کمیت استفاده می‌کنیم برای این موضوع دو بردار از یک نقطه رسم می‌کنیم.



حرکت دایره‌ای یکنواخت $|v_1|=|v_2|=v \to \Delta v = 2v\sin\frac{\alpha}{2} \to \Delta v = 2v\sin 45^\circ = \sqrt{2}v$

$\Delta P = m\Delta v \to \Delta P = \sqrt{2}mv$

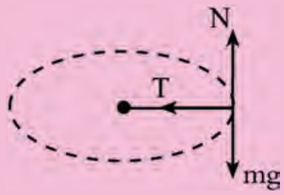
بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

کاربردهای حرکت دایره‌ای

در محیط اطراف ما بیشتر حرکت‌ها به صورت دایره‌ای انجام می‌شود. حرکت یک اتومبیل روی یک پیچ دایره‌ای، حرکت ماهواره‌ای و ... اهمیت بررسی این نوع حرکت را نشان می‌دهد. در زیر کاربردهای حرکت دایره‌ای را بررسی می‌کنیم.

کاربرد حرکت دایره‌ای در صفحه افقی:

فرض کنید گلوله‌ای به جرم به انتهای نخی (جرم نخ قابل صرف نظر است) بسته شده و در صفحه افقی روی یک سطح افقی بدون اصطکاکی می‌چرخانیم.



در راستای قائم $F = ma \xrightarrow{a=0} N - mg = 0 \to N = mg$

در راستای شعاع $\sum F = ma \xrightarrow{a=r\omega^2} T = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r}$

مثال ۱۰۲) جسمی به جرم ۱۰۰ گرم روی یک سطح افقی بدون اصطکاکی به نخی به طول ۲۰cm بسته شده و حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد، اگر بسامد چرخش جسم $\frac{2}{\pi}$ هرتز باشد، بزرگی نیروی کشش نخ چند نیوتون است؟ (ریاضی- شهریور-۹۰-۱۰ بار)

پاسخ: *ابتدا سرعت زاویه جسم (ω) را بدست می‌آوریم.*

$$f = \frac{2}{\pi}Hz \to \omega = 2\pi f = 2\pi \times \frac{2}{\pi} = 4\frac{rad}{s}$$

نیروی مرکزگرای جسم همان نیروی کشش نخ است:

$$T = mr\omega^2 \to T = 0/1 \times 0/2 \times (4)^2 = 0/32N$$

نکته: در حرکت دایره‌ای نیروهای مختلفی می‌توانند نقش نیروی مرکز گرا را داشته باشند (مانند کشش نخ در مثال قبلی) برای مثال وقتی اتومبیلی روی سطح افقی در یک مسیر دایره‌ای در حال دور زدن است تمایل دارد که به سمت بیرون پرتاب شود. در اینجا نیروی اصطکاک وارد بر چرخ‌های اتومبیل است که از پرتاب آن جلوگیری می‌کند و در واقع نقش نیروی مرکز گرا را دارد.

مثال ۱۰۳) اگر ضریب اصطکاک لاستیک اتومبیلی با سطح جاده ۰/۸ باشد، بیش‌ترین سرعتی که اتومبیل می‌تواند پیچی افقی به شعاع ۱۰۰ متر را بدون لغزش طی کند بر حسب متر بر ثانیه چقدر است؟ $(g=9/8\frac{N}{kg})$

۱) ۲۸ ۲) ۱۸ ۳) ۳۲ ۴) ۸۰

پاسخ: *با توجه به اینکه در این تست نیروی اصطکاک همان نیروی مرکزگرای وارد بر اتومبیل است می‌توان نوشت:*

$$m\frac{v^2}{r}=\mu mg \rightarrow v=\sqrt{\mu rg}=\sqrt{0/8\times 100\times 9/8}=28\frac{m}{s}$$

توجه: نیروی میدان مغناطیسی نیز می‌تواند به عنوان نیروی مرکزگرا عمل کند به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۰۴) ذره‌ای به جرم ۰/۰۱ گرم و بار الکتریکی ۵۰ میکروکولن با سرعت $2\frac{m}{s}$ عمود بر خطوط میدان مغناطیسی یکنواخت پرتاب می‌شود. اگر این میدان مغناطیسی ۰/۴ تسلا باشد، شعاع انحنای مسیر حرکت این ذره‌ی باردار چند متر است؟ (آزمایش سنجش-۸۵)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: *هنگامی که ذره باردار وارد میدان مغناطیسی یکنواخت می‌شود نیرویی که از طرف میدان به آن ذره وارد می‌شود عمود بر مسیر حرکت ذره است بنابراین این نیرو به عنوان نیروی مرکزگرا عمل کرده و تنها جهت حرکت ذره را تغییر می‌دهد. بنابراین می‌توان نوشت:*

$$F=qvB\sin\alpha \xrightarrow{\alpha=90^\circ} F=qvB$$

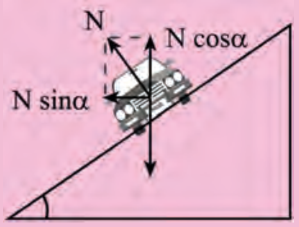
$$qvB=m\frac{v^2}{r}\rightarrow r=\frac{mv}{qB}\Rightarrow r=\frac{1\times 10^{-5}\times 2}{50\times 10^{-6}\times 4\times 10^{-1}}=1m$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

شیب عرض جاده

در مثالی که اصطکاک به عنوان نیروی مرکزگرای عمل می‌کرد مشاهده کردیم که این نیروی به چرخ‌های اتومبیل وارد شده و آن را در مسیر حرکت دایره‌ای نگه می‌دارد. در ساخت جاده‌ها برای اینکه بتوانیم از احتمال پرت شدن اتومبیل به بیرون جلوگیری کنیم جاده را با یک شیب عرض می‌سازند تا مؤلفه‌ای در جهت مرکز از طرف سطح بوجود آید تا اتومبیل راحت‌تر در مسیر دایره‌ای خود حرکت کند.

همان طور که در شکل مشاهده می‌شود نیروی سطح N به دو مؤلفه عمودی و افقی تجزیه شده است که مؤلفه افقی $N\sin\alpha$ نقش نیروی مرکزگرا را دارد.



$$\sum F_y=0\rightarrow mg=N\cos\alpha$$

$$\sum F_x=0\rightarrow N\sin\alpha=m\frac{v^2}{r}\xrightarrow{\text{N را حذف می‌کنیم}}\tan\alpha=\frac{v^2}{rg}$$

توجه کنید نیروی مرکزگرای $N\sin\alpha$ به سرعت حرکت جسم وابسته نیست و با افزایش سرعت جسم تنها شعاع حرکت جسم بزرگتر می‌شود.

مثال ۱۰۵) برای این که خودرویی بتواند در پیچ جاده‌ای به شعاع ۱۲۰ متر در شرایطی که اصطکاک ناچیز است با سرعت ثابت $54\frac{km}{h}$ حرکت کند، کمینه شیب عرضی جاده چند درجه باید باشد؟ $(g=10\frac{N}{kg})$ (ویژه‌ی رشته ریاضی) (فیزیک پیش ریاضی- فصل ۲- تمرین ۱۲) (آزمون کانون- ۹۰)

۱) $\tan^{-1}(\frac{3}{16})$ ۲) $\tan^{-1}(\frac{16}{3})$ ۳) $\sin^{-1}(\frac{3}{16})$ ۴) $\sin^{-1}(\frac{16}{3})$

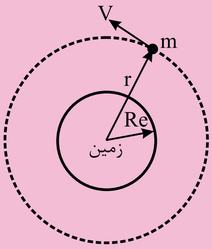
پاسخ: در حرکت دایره‌ای با شیب عرضی داریم:

$$\tan\alpha = \frac{v^2}{rg} \rightarrow \tan\alpha = \frac{(15)^2}{120\times 10} = \frac{3}{16} \rightarrow \text{Arctan}\frac{3}{16} = \alpha$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

ماهواره

وقتی ماهواره‌ها در مدار زمین قرار می‌گیرند مانند جرمی عمل می‌کنند که دارای حرکت دایره‌ای هستند. هنگامی که ماهواره با سرعت مشخصی در جو زمین قرار می‌گیرد، تمایل دارد حرکتی روی خط راست انجام دهد اما وجود زمین باعث وارد شدن نیروی گرانشی به ماهواره می‌شود. این نیرو ماهواره را در مسیر دایره‌ای به دور زمین می‌چرخاند. فرض کنید ماهواره‌ای به جرم **m** به دور زمین (در شعاع **r**) در حال چرخیدن است اگر جرم زمین را M_e و شعاع آن را R_e در نظر بگیریم از قانون دوم نیوتون می‌توانیم بنویسیم



$$\Sigma F = ma \rightarrow G\frac{M_e . m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

از رابطه $g_\circ = \frac{GM_e}{R_e^2}$ می‌توانیم به جای GM_e معادل آن یعنی $g_\circ R_e^2$ را قرار دهیم:

$$v = \sqrt{\frac{g_\circ R_e^2}{r}} \rightarrow v = R_e\sqrt{\frac{g_\circ}{r}}$$

اگر به جای زمین سیاره دیگری بود در روابط شعاع و جرم آن سیاره را قرار داده و رابطه آن را بدست می‌آوریم.

دوره ماهواره (T)

چون سرعت ماهواره ثابت است مقدار جابه‌جایی آن از رابطه $x = vt$ بدست می‌آید. اگر جابه‌جایی ماهواره را در یک دوره در نظر بگیریم می‌توان نوشت:

$$x = vt \xrightarrow[t=T]{x=2\pi r} 2\pi r = vT \rightarrow v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$R_e\sqrt{\frac{g_\circ}{r}} = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\frac{r^3}{g_\circ}} \xrightarrow{g_\circ = G\frac{M_e}{R_e^2}} T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_e}}$$

نکته: از رابطه بدست آمده برای دوره می‌توان نتیجه گرفت که دوره یک ماهواره به جرم آن بستگی نداشته و به جرم سیاره‌ای که دور آن می‌چرخد بستگی دارد.

مثال ۱۰۶) **فاصله ماهواره‌ی A تا سطح زمین به اندازه‌ی شعاع زمین است و این فاصله برای ماهواره‌ی B به اندازه‌ی ۲ برابر شعاع زمین است. اندازه سرعت خطی ماهواره A چند برابر سرعت خطی ماهواره‌ی B است.**

۱) 2
۲) $\sqrt{2}$
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

☑**پاسخ:**

$$V = R_e\sqrt{\frac{g}{r}} \rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \sqrt{\frac{۳}{۲}}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

نکته: فرض کنید دو ماهواره در مدارهای با شعاع $r_۱$ و $r_۲$ به دور یک سیاره (زمین) در حرکت است. در حالت مقایسه‌ای دوره و سرعت این دو ماهواره می‌توان نوشت:

$$V_۱ = R_e\sqrt{\frac{g_۰}{r_۱}},\quad V_۲ = R_e\sqrt{\frac{g_۰}{r_۲}} \rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \sqrt{\frac{r_۱}{r_۲}}$$

$$T_۱ = ۲\pi\sqrt{\frac{r_۱^۳}{GM_e}},\quad T_۲ = ۲\pi\sqrt{\frac{r_۲^۳}{GM_e}} \rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{r_۲^۳}{r_۱^۳}}$$

▼ **مثال ۱۰۷) فاصله‌ی ماهواره A از سطح زمین به اندازه‌ی شعاع زمین و فاصله ماهواره‌ی B تا سطح زمین ۷ برابر شعاع زمین است. دوره‌ی گردش ماهواره‌ی B چند برابر دوره‌ی گردش ماهواره‌ی A است؟** (سراسری تجربی-۹۱)

۱) ۲ ۲) ٤ ۳) ۸ ٤) ۱۶

☑**پاسخ:** دوره تناوب ماهواره از رابطه‌ی $T = \frac{۲\pi}{R_e}\sqrt{\frac{r^۳}{g}}$ به دست می‌آید که در این رابطه R_e شعاع زمین و r فاصله‌ی ماهواره تا مرکز زمین می‌باشد. اگر فاصله‌ی ماهواره تا سطح زمین h باشد، داریم:

$r = h + R_e$ و نسبت دوره‌ی دو ماهواره به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{T_B}{T_A} = \sqrt{\frac{r_B^۳}{r_A^۳}} \xrightarrow[r_B = h_B + R_e = ۷R_e + R_e = ۸R_e]{r_A = h_A + R_e = R_e + R_e = ۲R_e} \frac{T_B}{T_A} = \sqrt{\frac{(۸R_e)^۳}{(۲R_e)^۳}} = ۸$$

نکته: اجسام داخل ماهواره (فضانورد) همیشه در حال بی‌وزنی هستند زیرا ماهواره همیشه در حالتی مانند سقوط بر روی زمین قرار دارد.

▼ **مثال ۱۰۸) در ماهواره‌ای که فاصله‌اش تا سطح زمین دو برابر شعاع زمین است، جسمی به جرم 9kg را روی باسکولی قرار داده‌اند، باسکول چه عددی را نشان می‌دهد؟** (سراسری ریاضی-۷۰)

۱) صفر ۲) ۱۰ ۳) ٥٤ ٤) ۹۰

☑**پاسخ:** با توجه به نکته گفته شده اجسام درون ماهواره دچار بی‌وزنی می‌شوند، بنابراین عددی که باسکول نمایش می‌دهد برابر صفر است.

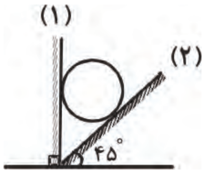
بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

آزمون

۱- جسمی تحت تأثیر نیروهای $\vec{F}_1 = -15\vec{i} + 8\vec{j}$ و $\vec{F}_2 = -21\vec{i} + 19\vec{j}$ و $\vec{F}_3 = 16\vec{i} - 12\vec{j}$ قرار گرفته و شتاب $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ را پیدا کرده است. جرم جسم چند کیلوگرم است؟ (همه‌ی اندازه‌ها در SI است.) (کانون -۹۲)

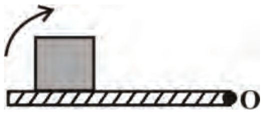
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۴/۲۵ ۴) ۳/۷۵

۲- یک کره‌ی فلزی به وزن ۲۰N درون ناوه‌ای با دیواره‌های صیقلی قرار دارد. بزرگی نیرویی که کره‌ی فلزی به دیواره‌ی (۱) ناوه وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ (کانون -۹۲)



۱) ۱۰ ۲) ۲۰
۳) $10\sqrt{2}$ ۴) $20\sqrt{2}$

۳- مطابق شکل زیر، یک قطعه چوب روی الواری قرار دارد. اگر سر الوار را به تدریج حول نقطه‌ی O بالا آوریم، تا زمانی‌که قطعه چوب روی الوار ثابت است، اندازه‌ی نیروی اصطکاک بین قطعه چوب و الوار و اندازه‌ی نیرویی که سطح الوار به قطعه چوب وارد می‌کند، به‌ترتیب از راست به چپ چگونه تغییر می‌کنند؟ (کانون -۹۳)

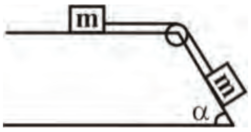


۱) افزایش می‌یابد، ثابت می‌ماند.
۲) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد.
۳) افزایش می‌یابد، افزایش می‌یابد.
۴) ثابت می‌ماند، افزایش می‌یابد.

۴- زاویه‌ی سطح شیب‌داری با سطح افق قابل تغییر است. در حالتی‌که زاویه‌ی سطح شیب‌دار برابر با $45°$ است جسمی را روی آن قرار می‌دهیم و جسم با سرعت ثابت به پایین سُر می‌خورد. اگر زاویه‌ی سطح شیب‌دار را $53°$ کنیم، جسم با چه شتابی بر حسب متر بر مجذور ثانیه به پایین سطح می‌لغزد؟ $(\sin 53° = 0/8 , g = 10\frac{N}{kg})$ (کانون -۹۲)

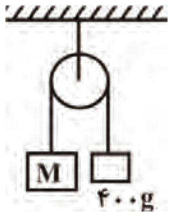
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵- در شکل مقابل، وزنه‌ها از حال سکون رها شده و پس از ۲s هر یک به اندازه‌ی ۵m جابه‌جا می‌شوند. α چند درجه است؟ ($g = 10\frac{N}{kg}$ و از اصطکاک بین تمامی سطوح، جرم نخ و قرقره صرف‌نظر می‌شود.) (کانون -۹۳)



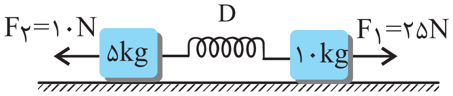
۱) ۳۰ ۲) ۴۵
۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۶- در شکل زیر $M > ۰/۴kg$ و مجموعه ابتدا ساکن است. اگر بعد از رها کردن مجموعه، نیروی کشش طناب متصل به سقف برابر با $۹/۶N$ شود، اندازه‌ی جابه‌جایی هر وزنه در ثانیه‌ی دوم حرکت چند متر است؟ ($g = ۱۰\frac{N}{kg}$ و از کلیه‌ی اصطکاک‌ها و جرم قرقره و طناب‌ها صرف‌نظر شود.) (کانون -۹۲)



۱) ۱
۲) ۳
۳) ۴
۴) بستگی به جرم M دارد.

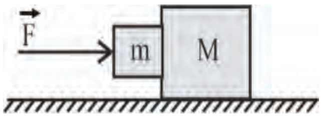
۷- مطابق شکل زیر، فنر D به دو وزنه که روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارند، متصل است و دو نیروی افقی به دو وزنه اعمال می‌شود. اندازه‌ی نیروی کشش فنر چند نیوتون است؟ (جرم فنر ناچیز است.) (کانون -۹۳)



۱) ۱۰
۲) ۱۲/۵
۳) ۲۵
۴) ۱۵

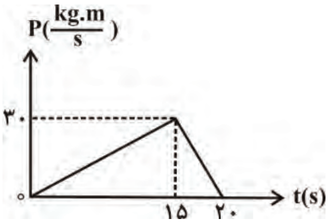
۸- در شکل زیر دو جرم به یکدیگر تکیه دارند و ضریب اصطکاک ایستایی بین آن‌ها برابر با $\mu_s = ۰/۴$ و سطح افقی بدون اصطکاک است. حداقل اندازه‌ی نیروی افقی $\vec{F}$ چند نیوتون باشد تا از لغزش جرم m بر روی جرم M جلوگیری کند؟ (کانون -۹۴)

$(M = ۲۰kg$ و $m = ۴kg$ ، $g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$



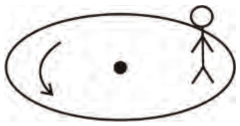
۱) ۸۰
۲) ۲۴۰
۳) ۱۲۰
۴) ۲۶۰

۹- نمودار شکل زیر، اندازه‌ی تکانه‌ی جسمی به جرم $۲kg$ را که در مسیری مستقیم و افقی حرکت می‌کند برحسب زمان نشان می‌دهد. اگر نیروی ثابت افقی $\vec{F}$ در ۱۵ ثانیه‌ی ابتدای حرکت به جسم وارد و سپس قطع شده باشد، اندازه‌ی نیروی $\vec{F}$ چند نیوتون بوده است؟ (کانون -۹۳)



۱) ۲
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

۱۰- مطابق شکل زیر، فردی به جرم m بر روی لبه‌ی صفحه‌ی افقی دواری ایستاده است، به‌طوری‌که فاصله‌اش تا مرکز صفحه برابر با $5m$ است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی برابر با ۰/۵ باشد، بیشینه سرعت خطی این صفحه چند متر بر ثانیه می‌تواند باشد تا شخص بر روی آن نلغزد؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$ (کانون -۹۲)



۱) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$
۲) ۵
۳) $۵\sqrt{۲}$
۴) ۱۰

پاسخنامه

۱- گزینه‌ی «۲»

ابتدا برایند نیروهای وارد بر جسم و بزرگی آن را حساب می‌کنیم:

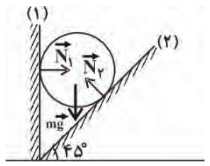
$$\vec{F}=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲+\vec{F}_۳$$
$$=(-۱۵\vec{i}+۸\vec{j})+(-۲۱\vec{i}+۱۹\vec{j})+(۱۶\vec{i}-۱۲\vec{j})$$
$$F=\sqrt{۴۰۰+۲۲۵}\Rightarrow F=۲۵N\Rightarrow \vec{F}=-۲۰\vec{i}+۱۵\vec{j}\Rightarrow$$

اکنون بزرگی شتاب را به‌دست می‌آوریم و سپس با استفاده از قانون دوم نیوتون، جرم m را حساب می‌کنیم.

$$\vec{a}=-۴\vec{i}+۳\vec{j}\Rightarrow a=\sqrt{۱۶+۹}\Rightarrow a=۵\frac{m}{s^۲}$$
$$F=ma\Rightarrow ۲۵=m\times ۵\Rightarrow m=۵kg$$

۲- گزینه‌ی «۲»

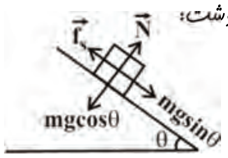
نیروهای وارد بر کره‌ی فلزی را از یک نقطه رسم می‌کنیم و رابطه‌ی سینوس‌ها را برای آن به کار می‌بریم. داریم:



$$\frac{N_۱}{\sin(۹۰^\circ+۴۵^\circ)}=\frac{mg}{\sin(۹۰^\circ+۴۵^\circ)}$$
$$\Rightarrow N_۱=mg\Rightarrow N_۱=۲۰N$$

۳- گزینه‌ی «۱»

طبق قانون اول نیوتون، تا زمانی‌که جسم روی سطح شیب‌دار ثابت است، برایند نیروهای وارد بر آن برابر با صفر است، بنابراین در راستاهای سطح شیب‌دار و عمود بر سطح شیب‌دار می‌توان نوشت:



$$f_s=mg\sin\theta$$
$$N=mg\cos\theta$$

بنابراین با افزایش زاویه، بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی افزایش می‌یابد.

از طرف دیگر، بر جسم تنها دو نیروی وزن $(m\vec{g})$ و سطح $(\vec{R})$ وارد می‌شوند که چون جسم ساکن است، اندازه‌ی این دو نیرو یکسان است.

بنابراین تا زمانی‌که جسم ساکن است، اندازه‌ی نیروی سطح همواره ثابت و برابر با وزن جسم است.

$$R=mg$$

نکته: دقت کنید اندازه‌ی نیروی $\vec{R}$ را به‌صورت دیگری نیز می‌توانستیم به‌دست آوریم. نیروی سطح از دو مؤلفه‌ی $\vec{N}$ و $\vec{f}_s$ که عمود بر هم هستند، تشکیل شده است، بنابراین داریم:

$$R=\sqrt{N^۲+f_s^۲}=\sqrt{(mg\cos\theta)^۲+(mg\sin\theta)^۲}\Rightarrow R=mg$$

۴- گزینه‌ی «۲»

در حالت اول، جسم با سرعت ثابت روی سطح شیب‌دار حرکت می‌کند، بنابراین برایند نیروهای وارد بر آن برابر با صفر است و می‌توان نوشت:

$$\sum F_x=0\Rightarrow mg\sin\alpha_۱=\mu_k mg\cos\alpha_۱$$
$$\Rightarrow \mu_k=\tan\alpha_۱=\tan ۴۵^\circ\Rightarrow \mu_k=۱$$

در حالت دوم، شتاب حرکت مجموعه برابر است با:

$$a=g(\sin\alpha_۲-\mu_k\cos\alpha_۲)$$
$$\Rightarrow a=۱۰\times(\sin ۵۳^\circ-۱\times\cos ۵۳^\circ)\Rightarrow a=۲\frac{m}{s^۲}$$

۵- گزینه‌ی «۱»

عامل حرکت مجموعه، وزن جرم m روی سطح شیب‌دار می‌باشد، بنابراین شتاب حرکت ثابت است و مقدار آن برابر است با:

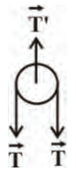
$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_0t\xrightarrow[t=۲s\ ,\ v_0=0]{\Delta x=۵m}۵=\frac{۱}{۲}a(۲)^۲$$
$$\Rightarrow a=۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

با توجه به این‌که از اصطکاک بین کلیه‌ی سطوح صرف‌نظر شده است، اگر قانون دوم نیوتون را در راستای حرکت مجموعه بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\sum F=(\sum m)a\Rightarrow mg\sin\alpha=(m+m)a$$
$$\Rightarrow g\sin\alpha=۲a\xrightarrow[g=۱۰\frac{m}{s^۲}]{a=۲/۵\frac{m}{s^۲}}۱۰\sin\alpha=۵$$
$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

۶- گزینه‌ی «۲»

قرقره ساکن است و چون از جرم آن صرف‌نظر شده است، می‌توان نوشت:

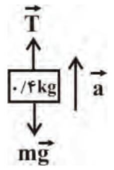


$$\sum F = ۰ \Rightarrow T' = ۲T \Rightarrow ۹/۶ = ۲T \Rightarrow T = ۴/۸N$$

چون $M > ۰/۴kg$ است، بعد از رها کردن مجموعه، وزنه‌ی ۰/۴ کیلوگرمی بالا می‌رود. اگر قانون دوم نیوتون را برای آن بنویسیم، داریم:

$$\sum F_y = ma \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow ۴/۸ - ۰/۴\times ۱۰ = ۰/۴a$$

$$\Rightarrow a = ۲\frac{m}{s^۲}$$

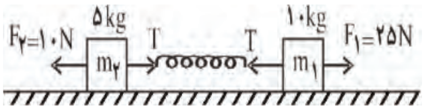


بنابراین جابه‌جایی در ثانیه‌ی دوم حرکت با شتاب ثابت در مسیر مستقیم هر وزنه، برابر است با:

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}a(۲n-۱)+v_0 \xrightarrow[v_0=0\ ,\ a=۲\frac{m}{s^۲}]{n=۲}$$

$$\Delta y = \frac{۱}{۲}\times ۲\times(۲\times ۲-۱)+۰ \Rightarrow \Delta y = ۳m$$

۷- گزینه‌ی «۴»



نیروی کشش فنر را T در نظر می‌گیریم. قانون دوم نیوتون را یک‌بار برای کل دستگاه و یک‌بار برای جسم $m_۲$ می‌نویسیم:

$$\Sigma F = \Sigma m\times a \Rightarrow \begin{cases} F_۱ - F_۲ = (m_۱+m_۲)a = ۱۵a \\ T - F_۲ = m_۲a \end{cases}$$

$$\xrightarrow[F_۲=۱۰N,\ m_۲=۵kg]{F_۱=۲۵N,\ m_۱=۱۰kg} \begin{cases} ۲۵-۱۰=۱۵a \\ T-۱۰=۵a \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۵}{T-۱۰}=۳$$

$$\Rightarrow T = ۱۵N$$

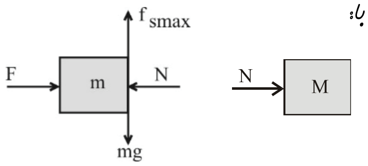
۸- گزینه‌ی «۳»

برای این‌که جرم m بر روی جرم M نلغزد، باید $f_{s\max} \ge mg$ باشد. حداقل مقدار نیروی $\vec{F}$ زمانی به‌دست می‌آید که $f_{s\max} = mg$ باشد، بنابراین با توجه به شکل زیر داریم:

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow f_{s\max} = mg \xrightarrow{f_{s\max}=\mu_s N} \mu_s N = mg$$

$$\xrightarrow{\mu_s=۰/۴} ۰/۴N = ۴\times ۱۰ \Rightarrow N = ۱۰۰N$$

واکنش نیروی $\vec{N}$ به جسم M وارد شده و به آن شتاب می‌دهد، اندازه‌ی شتاب این جسم برابر است با:



$$N = Ma \xrightarrow{M=۲۰kg} ۱۰۰ = ۲۰a \Rightarrow a = ۵\frac{m}{s^۲}$$

چون جرم m بر روی جرم M نمی‌لغزد، هر دو با شتاب یکسان حرکت می‌کنند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$F = (m+M)a = (۴+۲۰)\times ۵ \Rightarrow F = ۱۲۰N$$

۹- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار تکانه برحسب زمان در هر لحظه، اندازه‌ی برایند نیروی وارد بر جسم در آن لحظه را نشان می‌دهد ($\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$). بنابراین مطابق نمودار سؤال، از لحظه‌ی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۱۵s$، برایند نیروهای وارد بر جسم ثابت و برابر با $F_۱ = \frac{۳۰-۰}{۱۵-۰} = ۲N$ و از لحظه‌ی $t_۲ = ۱۵s$ تا لحظه‌ی $t_۳ = ۲۰s$ برایند نیروهای وارد بر جسم ثابت و برابر با $F_۲ = \frac{۰-۳۰}{۲۰-۱۵} = -۶N$ بوده است. چون از لحظه‌ی $t = ۱۵s$ به بعد نیروی $\vec{F}$ قطع شده است، بنابراین در راستای افق فقط نیروی اصطکاک جنبشی بر جسم اثر می‌کند که اندازه‌ی آن برابر با $f_k = ۶N$ است. بنابراین در بین لحظه‌های $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۱۵s$ می‌توان نوشت:

$$F - f_k = ۲ \xrightarrow{f_k=۶N} F - ۶ = ۲ \Rightarrow F = ۸N$$

۱۰- گزینه‌ی «۲»

برای این‌که شخص بر روی صفحه‌ی دوار نلغزد، باید همراه با آن دوران کند. نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دورانی شخص توسط نیروی اصطکاک ایستایی تأمین می‌شود. بنابراین برای حداکثر اندازه‌ی سرعت خطی دوران صفحه، داریم:

$$f_{s\max} = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow \mu_s mg = m\frac{v^۲}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_s rg}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{۰/۵\times ۵\times ۱۰} \Rightarrow v = ۵\frac{m}{s}$$