فصل اول : هندسه و استدلال

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید

گام اول: میزان **تسلط خود را** با رنگ مشخص کنید.

آبی: خیلی خوب

سبز: متوسط

قرمز: به این قسمت **مسلط نیستم**

گام‌های بعدی: **اگر در گام اول، به آن** مبحث مسلط نبودید **و دانش خود را** در حد رنگ قرمز **ارزیابی کردید، در** نوبت‌های بعدی **مطالعه و تمرین، در** صورتی که پیشرفت **کردید می‌توانید** خانه‌های سبز یا آبی **را رنگ کنید.**

هندسه و استدلال

- استدلال در هندسه
- زاویه (آبی / سبز / قرمز)
  - مقدمات زاویه
  - خطوط موازی و مورب
- مثلث (آبی / سبز / قرمز)
  - مثلث و زاویه در آن
  - مثلث‌های همنهشت
  - انواع مثلث
    - مثلث متساوی‌الساقین
    - مثلث قائم‌الزاویه
- از خم تا چند ضلعی (آبی / سبز / قرمز)
  - خم و انواع آن
  - چند ضلعی
  - متوازی الاضلاع
  - چهارضلعی‌های خاص

تعداد مثال های فصل	۷۴
تعداد سؤالات تشریحی	۳۲
تعداد تست ها	۴۲

فصل اول

هندسه و استدلال

استدلال در هندسه

به طور کلی **در هندسه، مسأله**ها را می‌توان به ۲ دسته‌ی عمده‌ی: «مسأله‌های ثابت کردنی» و «مسأله‌های یافتنی» تقسیم کرد. در مسأله‌های ثابت کردنی، **بخشهای اساسی عبارت است از** «فرض» و «حکم» و در مسأله‌های یافتنی، بخشهای اساسی **عبارت است از** «داده‌ها»، «شرط» و «مجهول».

هدف **یک مسأله ثابت کردنی، اثبات قطعی یک ادعا یا اثبات قطعی عدم صحت آن است و هدف** یک مسأله‌ی یافتنی، بدست آوردن چیزی است، **که همان مجهول مسأله است.**

در حالت **کلی برای حل کردن یک مسأله**‌ی هندسه (و به طور کلی مسأله‌ی ریاضی) چهار مرحله‌ی زیر پیشنهاد می‌شود:

۱. **فهمیدن مسأله (مجهول چیست؟ داده**ها کدام است؟ شرط چیست؟ ...)

۲. **طرح نقشه (یافتن ارتباط** میان داده‌ها و مجهول‌ها)

۳. **اجرای نقشه (این مرحله توسط استدلال**‌های درست انجام می‌شود.)

۴. **امتحان کردن جواب و نتیجه**‌ی بدست آمده

همانطور که در مرحله‌ی سوم (اجرای نقشه) ذکر شد، **باید برای رسیدن به نتیجه**‌ی مسأله، استدلال کنیم، یعنی با توجه به مطالبی که همه‌ی افراد **درستی آن را قبول دارند، درست بودن یک مطلب جدید را نشان دهیم. مسلّم و واضح است که لزوماً یک راه رسیدن به نتیجه وجود** ندارد **و می‌**تواند نوع **استدلال ما فرق کند. در کتاب هندسه** (۱) با دو **نوع استدلال آشنا خواهیم شد:**

استدلال استقرایی
استدلال استنتاجی

استدلال استقرایی

فرض کنید دانش آموزی **در جلسات اول درس هندسه، تازه با مفهوم زاویه آشنا شده و به دنبال مجموع زوایای یک مثلث می**‌گردد. این دانش آموز، **چند مثلث دلخواه رسم می**‌کند و با استفاده **از نقّاله،** شروع می‌کند به اندازه‌گیری زوایای مثلث و پس از چند بار اندازه گیری، به این **حدس** می‌رسد که «مجموع زوایای داخلی **هر مثلث برابر** 180° است». این دانش‌آموز، حدس خود را روی چند مثلث دیگر نیز امتحان می‌کند و **این حدس را به عنوان یک نتیجه گیری کلی قبول کرده و با معلم خود در میان می**‌گذارد.

به **استدلالی که این دانش**‌آموز برای رسیدن به نتیجه **گیری این حکم، طی کرده است** «استدلال استقرایی» گفته می‌شود.

در **واقع این دانش آموز، بر اساس یک سری مشاهدات محدود (!) به یک نتیجه**‌ی کلی رسیده است. دقت کنید که در این نوع استدلال، چیزی **اثبات نشده، بلکه فقط نتیجه**‌ای حدس زده **شده است.** این نوع **استدلال،** نمی‌تواند یک استدلال درست محسوب شود و صرفاً

می‌تواند مسیر ما را برای رسیدن به نتیجه‌ی مورد نظر و استفاده از استدلال‌های درست، هموارتر کند.

استدلال استنتاجی

در واقع اکثر اثبات‌ها و **استدلال ما در ریاضیات و هندسه، همین نوع استدلال است، زیرا** نتایج بدست آمده توسط استدلال استنتاجی همواره قابل قبول هستند. **در این نوع استدلال از احکام درست که قبلاً آنها را ثابت کرده**‌ایم، استفاده می‌کنیم.

تعریف نشده‌ها: در **استدلال استنتاجی، با واژه**‌ها و مفاهیمی سروکار داریم که **تعریف صریح و دقیقی از آن نداریم و برای** رهایی از آنها و رفع بن بست در تعاریف و **قضایا، آنها را به عنوان** «تعریف نشده» می‌پذیریم.

به عنوان مثال، **به تعریف** «مربع» دقت کنید:

مربع: «**مستطیلی که اضلاع آن با هم برابرند.**»

مستطیل: «متوازی الاضلاعی **که چهارزاویه‌ی برابر دارد.**»

متوازی الاضلاع: «چهارضلعی‌ای که ضلع‌های مقابل آن موازی‌اند.»

چهار ضلعی: «شکلی که چهار ضلع دارد.»

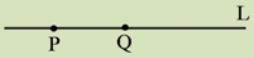
شکل؟

در واقع **برای مفاهیمی همچون:** «شکل»، «نقطه»، «خط راست» و ... ، **تعریف دقیقی نداریم و برای همگی صرفاً یک درک واضح از آنها** داریم. **این چنین مفاهیمی را** «مفاهیم اولیه» یا «تعریف نشده» می‌گوییم

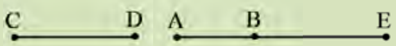
اصول: به گزاره‌های **واضحی که درستی آنها بدیهی بوده و بدون اثبات، آنها را می**‌پذیریم «اصول» می‌گوییم.

به عنوان مثال، **در هندسه مسطحه، پنج اصل (به نام اصول پنج گانه**ی اقلیدسی) **داریم که عبارتند از:**

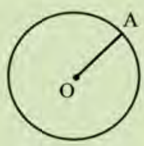
(اصل اول) به ازای **هر نقطه**ی P و هر نقطه‌ی Q که با P مساوی نباشد، **خط یکتایی مانند** L وجود دارد **که** بر P و Q **می**‌گذرد. (هر دو **نقطه**ی متمایز، یک خط راست **منحصر به فرد را مشخص می‌سازند.**)



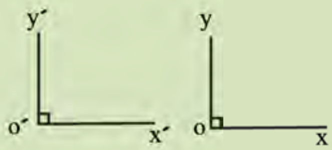
(اصل دوم) به ازای **هر پاره خط** AB و هر پاره خط CD، نقطه‌ی منحصر به فردی چون E وجود دارد، **چنانکه** B میان **A** و E واقع است و **پاره خط** CD با پاره خط BE قابل انطباق است. **(هر پاره خط** AB را می‌توان به اندازه‌ی پاره خط BE که **با پاره خط داده**‌شده‌ی CD قابل انطباق است، **امتداد داد.)**



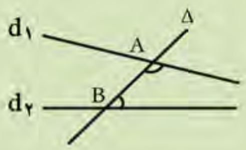
(اصل سوم) به ازای **هر نقطه**ی O و هر نقطه‌ی A که با O مساوی نباشد، **دایره**‌ای به مرکز O و به شعاع OA وجود دارد.



(اصل چهارم) همه‌ی **زاویه**‌های قائمه، با یکدیگر **قابل انطباقند.**



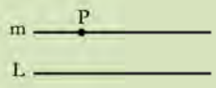
(اصل پنجم) اگر دو **خط به وسیله**‌ی موربی چنان قطع شوند که مجموع **اندازه**‌های زاویه‌ی درونی واقع **در یک طرف مورب کمتر از** 180° باشد، اگر این **دو خط را تا** بی نهایت امتداد **دهیم، آنگاه این دو خط همدیگر را در همان طرف مورب، قطع می**‌کنند.



توجه داشته باشید آقای پِلِی فِیر (playfair) در کتاب هندسه‌ی اقلیدسی خود **در سال** ۱۷۹۵ میلادی، اصل پنجم را به صورت اصل زیر آورده **که هم ارز آن است و اکثراً** شاید این اصل را به عنوان **اصل پنجم اقلیدس شنیده باشند.**

آورده که **هم ارز آن است و اکثراً** شاید این اصل را **به عنوان اصل** پنجم **اقلیدس شنیده باشند.**

(اصل توازی پلی فیر) به ازای هر خط L و هر نقطه‌ی P غیرواقع بر آن، **تنها** یک **خط مانند** m **وجود دارد چنانکه از** P می‌گذرد و با L موازی است.



قضیه: گزاره‌ای است **که درستی آن نیازمند اثبات و برهان است. هر قضیه شامل دو قسمت است:**

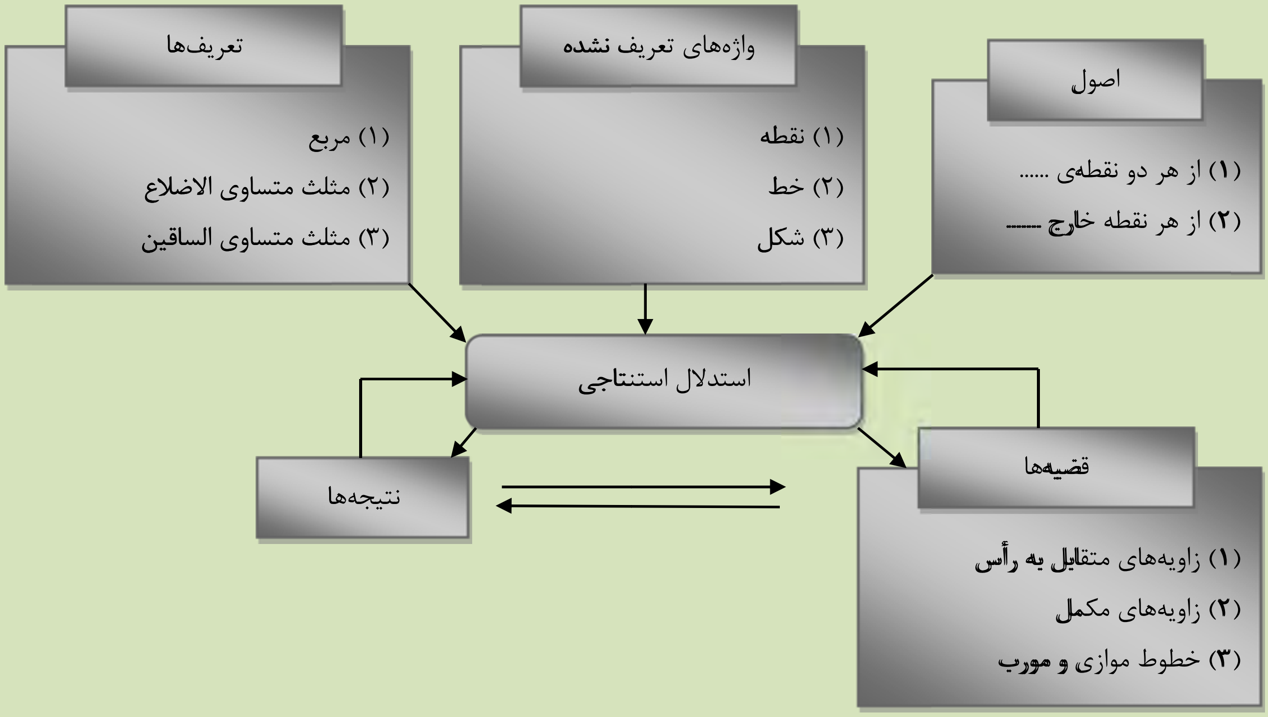
(قسمت اول) فرض قضیه: گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آنها **را قبول داریم.**

(قسمت دوم) حکم یا نتیجه‌ی قضیه: گزاره یا گزاره‌هایی است که درست بودن آنها **را می‌خواهیم** ثابت کنیم.

به **عنوان** مثال در قضیه‌ی «در هر مثلث **قائم الزاویه، مربع اندازه**ی وتر، **مساوی مجموع** مربع‌های اندازه‌های دو ضلع زاویه‌ی قائمه است.» که قضیه‌ی فیثاغورس نامیده **می‌شود**، فرض و حکم **قضیه به صورت زیر هستند:**

قضیه‌ی فیثاغورس:
(فرض قضیه) مثلث، **قائم الزاویه است.**
(حکم قضیه) **مربع اندازه**ی وتر برابر مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر است.

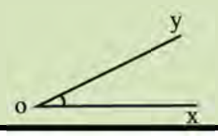
وقتی **در هندسه، از استدلال استنتاجی استفاده می**‌کنیم، در واقع **با استفاده از تعریف**ها، اصول، واژه‌های تعریف نشده و قضیه‌های درست، روندی **را طی می**‌کنیم **که ما را به نتیجه**‌ی مورد نظر می‌رساند.



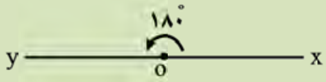
زاویه

مقدمات زاویه

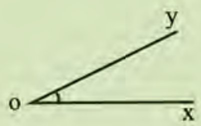
زاویه: شکلی است که **از دو نیم خط با مبدأ مشترک پدید می**‌آید. مبدأ مشترک، «رأس زاویه» و هر یک از دو نیم‌خط، «ضلع زاویه» نامیده می‌شود؛ **در شکل** بالا، زاویه $x\hat{o}y$ را به صورت‌های $x\hat{o}y$ یا $\angle xoy$ و یا $\hat{o}$ $(\angle o)$ نمایش می‌دهند.



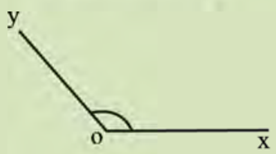
زاویه‌ی نیم صفحه: **زاویه**‌ای است که دو ضلع آن در یک امتداد باشند. **در واقع، زاویه**‌ی نیم صفحه برابر ۱۸۰ درجه است.



زاویه‌ی قائمه: نصف **زاویه**‌ی نیم صفحه است؛ **اندازه‌ی زاویه‌ی** قائمه ۹۰ درجه است.



زاویه‌ی حادّه (زاویه‌ی تند): زاویه‌ای است که از زاویه‌ی قائمه کوچکتر است. **اندازه زاویه**‌ی حادّه بین صفر و ۹۰ درجه است.



زاویه‌ی منفرجه (زاویه‌ی باز): زاویه‌ای است که بزرگتر از زاویه‌ی قائمه و **کوچکتر از زاویه‌ی** نیم صفحه است. **اندازه زاویه**‌ی منفرجه بین ۹۰° و ۱۸۰° است.

تعریف: (۱) دو زاویه‌ی α و β را «متمم» یکدیگر گویند هرگاه $\alpha + \beta = ۹۰^\circ$.

(۲) دو زاویه‌ی α و β را «مکمل» یکدیگر گویند هرگاه $\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ$.

▼ **مثال۱: اگر دو زاویه مکمل هم باشند و یکی n برابر دیگری باشد، اندازه‌ی هر یک را بدست آورید.** (پرتکرار، ۲ بار تکرار)

☑ **پاسخ**: زاویه‌های *فوق را* α و β *در نظر* می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases}\alpha + \beta = ۱۸۰^\circ \\ \alpha = n\beta\end{cases} \Rightarrow n\beta + \beta = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \beta = \frac{۱۸۰^\circ}{+۱}, \alpha = n\beta = \frac{۱۸۰^\circ n}{n+۱}$$

نکته: **می‌توانیم متمم و مکمل زاویه‌ی x را با $(۹۰^\circ - x)$ و $(۱۸۰^\circ - x)$ نشان دهیم.**

▼ **مثال۲: دو زاویه‌ی A و B متمم‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی A، برابر $\frac{۴}{۹}$ اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی B است. زاویه‌ی A چند درجه است؟**

(سراسری ریاضی - ۷۵)

۱) ۲۷ ۲) ۳۶ ۳) ۶۳ ۴) ۷۲

☑ **پاسخ**: با توجه به *فرض داریم*:

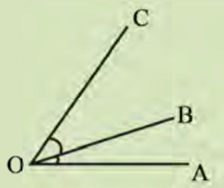
$$\begin{cases}\widehat{A} + \widehat{B} = ۹۰^\circ \\ \widehat{A} = \frac{۴}{۹}(۱۸۰^\circ - \widehat{B}) \Rightarrow \widehat{A} = ۸۰^\circ - \frac{۴}{۹}\widehat{B}\end{cases} \Rightarrow (۸۰^\circ - \frac{۴}{۹}\widehat{B}) + \widehat{B} = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۹}\widehat{B} = ۱۰^\circ \Rightarrow \widehat{B} = ۱۸^\circ \Rightarrow \widehat{A} = ۹۰^\circ - \widehat{B} = ۷۲^\circ$$

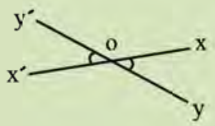
نکته: اگر **دو زاویه با هم برابر باشند، آنگاه هم متممشان و هم مکملشان با هم برابر است.**

گزینه (۴) صحیح است.

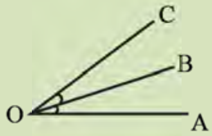
تعریف:



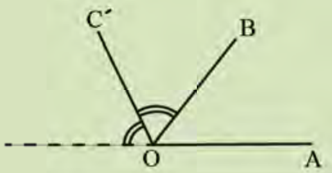
(۱) **دو زاویه‌ی مجاور:** دو زاویه‌ای هستند که در رأس و یک ضلع مشترکند و دو ضلع غیرمشترک آنها در دو طرف ضلع مشترکشان قرار دارد، مانند دو زاویه‌ی $A\hat{O}B$ و $B\hat{O}C$.



(۲) **دو زاویه‌ی متقابل به رأس:** دو زاویه‌ای هستند که رأس مشترک دارند و ضلعهای آنها دو به دو در امتداد یکدیگر و در دو جهت مختلف هستند، مانند زاویه‌های xoy و $x'oy'$.

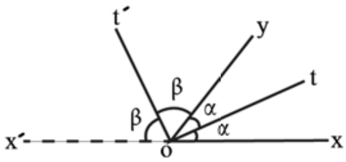


(۳) **نیمساز (داخلی) زاویه:** نیم‌خطی است که مبدأ آن رأس زاویه است و زاویه را به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم می‌کند، مانند نیم‌خط OB که نیمساز زاویه‌ی $A\hat{O}C$ است.



(۴) **نیمساز خارجی زاویه:** نیم‌خطی است که مبدأ آن رأس زاویه است و زاویه‌ای که از امتداد یکی از اضلاع زاویه پدید می‌آید را به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم می‌کند، مانند نیمخط OC' که نیمساز خارجی زاویه‌ی $A\hat{O}B$ است.

▼ **مثال۳:** نشان دهید که نیمساز داخلی هر زاویه بر نیمساز خارجی‌اش عمود است.



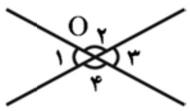
☑ **پاسخ:** مطابق شکل، ot و ot' نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی $x\hat{o}y$ هستند.

مطابق شکل، نیمساز ot زاویه‌ی $x\hat{o}y$ را به دو زاویه و نیمساز ot' زاویه‌ی $x'\hat{o}y$ (مکمل $x\hat{o}y$) را به دو زاویه‌ی β تقسیم کرده است. چون دو زاویه‌ی $x\hat{o}y$ و $x'\hat{o}y$ مکمل هم هستند، پس:

$$x\hat{o}y + x'\hat{o}y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} \alpha + \beta = ۹۰^\circ$$

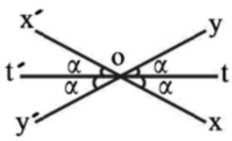
پس $t\hat{o}t' = \alpha + \beta = ۹۰^\circ$ ، یعنی نیمسازهای ot و ot' بر هم عمودند.

▼ **مثال۴:** نشان دهید که دو زاویه‌ی متقابل به رأس:



اولاً) با هم مساوی‌اند. **ثانیاً) نیمسازهای آنها بر یک خط راست واقع‌اند.**

☑ **پاسخ:** *برای اثبات قسمت اول، مطابق شکل ، دو زاویه‌ی $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ همچنین دو زاویه‌ی $\hat{O}_۲$ و $\hat{O}_۳$ مکمل‌اند، یعنی داریم:*



$$\begin{cases} \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ \ (\text{زاویه‌ی نیم صفحه}) \\ \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ = ۱۸۰^\circ \ (\text{زاویه‌ی نیم صفحه}) \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۳$$

و به طریق مشابه داریم $\hat{O}_۲ = \hat{O}_۴$.

برای اثبات قسمت دوم، مطابق شکل روبه رو، ot و ot' نیمسازهای دو زاویه‌ی متقابل به رأس $x\hat{o}y$ و $x'\hat{o}y'$ را رسم می‌کنیم. در قسمت اول نشان داریم که $x\hat{o}y = x'\hat{o}y'$ ، پس ot و ot' هر کدام از این دو زاویه‌ی متقابل به رأس را به دو زاویه‌ی مساوی α تقسیم می‌کنند. از آنجا که $y\hat{o}y'$ یک زاویه‌ی نیم صفحه است، پس داریم:

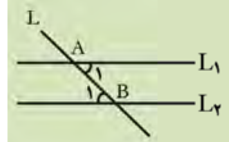
$$y\hat{o}y' = ۱۸۰^\circ \ (\text{نیم صفحه}) \Rightarrow ۲\alpha + x'\hat{o}y = ۱۸۰^\circ \quad (*)$$

برای زاویه‌ی $t\hat{o}t'$ داریم:

$t\hat{o}t' = \alpha + x'\hat{o}y + \alpha = ۲\alpha + x'\hat{o}y = ۱۸۰^\circ$

پس $t\hat{o}t'$ زاویه‌ی **نیم صفحه است، یعنی** ot و ot' در یک راستا قرار دارند.

خطوط موازی و مورب



قضیه‌ی خط موازی و مورب: مطابق شکل، خط L ، دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را قطع کرده و زاویه‌های $\hat{A}_۱$ و $\hat{B}_۱$ را پدید آورده است:

۱- اگر $L_۱ || L_۲$ ، آنگاه $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$.

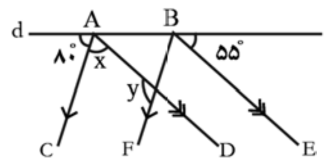
۲- اگر $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$ ، آنگاه $L_۱ || L_۲$.

نتیجه: در برخورد خط L با دو خط موازی $L_۱$ و $L_۲$:

(اولاً) **زوایای حادّه با هم و زوایای منفرجه نیز با هم برابرند.**

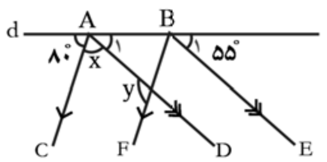
(ثانیاً) **هر زاویه‌ی حادّه، مکمل زاویه‌ی منفرجه است.**

در حالت خاص، **اگر خط** L بر دو خط $L_۱$ و $L_۲$ عمود باشد، هر ۸ زاویه قائمه هستند.



▼ **مثال۵: در شکل زیر اندازه‌ی زاویای x و y را بدست آورید.** (پر تکرار- ۶ بار تکرار)

☑ **پاسخ:** *مطابق شکل داریم:*



$$AD || BE \text{ و مورب } d \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = ۵۵^\circ$$

رأس **A** *روی خط* **d** *یک زاویه‌ی نیم صفحه بوجود آورده است، پس :*

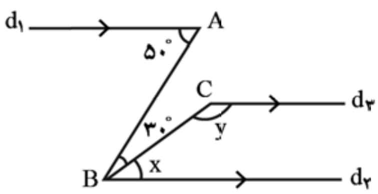
$$۸۰^\circ + x + \hat{\mathbf{A}}_۱ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}_۱ = ۵۵^\circ} x = ۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ - ۵۵^\circ = ۴۵^\circ$$

از طرفی خط مورب **AD** *دو خط موازی* **AC** *و* **BF** *را قطع کرده، پس طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب داریم:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \mathbf{y} = ۱۸۰^\circ\text{-}۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$$

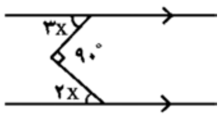
▼ **مثال۶: در شکل روبه‌رو**، اندازه‌ی زاویه‌های **x و y را بدست آورید.** (پرتکرار- ٤ بار تکرار)

☑ **پاسخ:** با توجه به **شکل داریم:**



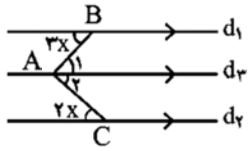
$$d_۱ || d_۲ \text{ و مورب } AB \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} ۵۰^\circ = ۳۰^\circ + x \Rightarrow x = ۲۰^\circ$$

$$d_۲ || d_۳ \text{ و مورب } BC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} x + y = ۱۸۰^\circ \Rightarrow y = ۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ = ۱۶۰^\circ$$



▼ **مثال۷: در شکل روبه‌رو**، اندازه‌ی **x را بدست آورید.** (پرتکرار- ۵ بار تکرار)

☑ **پاسخ:** *از رأس* **زاویه‌ی قائمه (نقطه‌ی A)** *خط* $d_۳$ *را موازی* $d_۱$ *و* $d_۲$ *رسم می‌کنیم.* داریم:



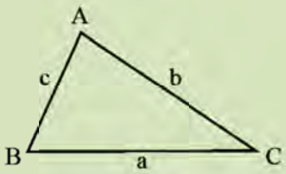
$$\begin{cases} d_1 || d_3 \ \text{و مورب } AB \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \widehat{A}_1 = ۳x \\ d_2 || d_3 \ \text{و مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \widehat{A}_2 = ۲x \end{cases}$$

چون $\widehat{A} = ۹۰^\circ$، پس:

$$\widehat{A} = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = ۳x + ۲x = ۹۰^\circ \Rightarrow x = \frac{۹۰^\circ}{۵} = ۱۸^\circ$$

مثلث

مثلث و زاویه در آن:



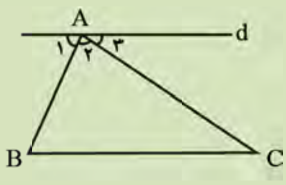
مثلث: اگر سه نقطه‌ی **غیرواقع بر یک خط راست را، دو به دو به هم وصل کنیم، شکل حاصل را** «مثلث» می‌نامند. هر **یک از این نقطه‌**ها، یک «رأس» مثلث و پاره خط **ایجاد شده بین هر دو نقطه، یک** «ضلع» مثلث است. **همچنین زاویه‌های ایجاد شده بین هر دو ضلع را** «زاویه‌های داخلی» مثلث می‌نامند.

در **مثلث** ABC (شکل **روبه**‌رو) سه ضلع AB، AC و BC و سه زاویه‌ی $\widehat{A}$، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ را «اجزای اصلی» مثلث می‌نامند.

از آنجا **که هر ضلع مثلث، مقابل یک رأس و یک زاویه از آن است، لذا اندازه**‌ی هر ضلع مثلث را با حرف کوچک رأس مقابلش نمایش می‌دهند؛ **یعنی اضلاع** BC، AC و AB را به ترتیب با a ، b و c نمایش می‌دهند.

قضیه: مجموع **زاویه‌های داخلی هر مثلث**، ۱۸۰° است.

اثبات: مطابق شکل، **از رأس** A در مثلث ABC، خط d را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. داریم:



$$\begin{cases} d || BC \ \text{و مورب } AB \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \widehat{A}_1 = \widehat{B} \\ d || BC \ \text{و مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \widehat{A}_3 = \widehat{C} \end{cases}$$

رأس A روی خط d یک زاویه‌ی نیم صفحه **تشکیل داده است، پس :**

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = ۱۸۰^\circ \ (\text{نیم صفحه}) \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ$$

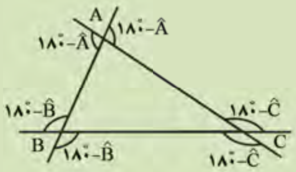
▼ **مثال۸: در یک مثلث، اندازه‌ی زاویه‌ی اول از زاویه‌ی دوم ۲۵ درجه بیشتر و اندازه‌ی زاویه‌ی سوم ۹ درجه کمتر از دو برابر زاویه‌ی دوم است. اندازه‌ی زوایای داخلی این مثلث را بدست‌آورید.**

☑ **پاسخ:** *مثلث را* $\overset{\Delta}{ABC}$ *در نظر می‌گیریم؛ طبق فرض داریم:*

$$\begin{cases} \widehat{A} = ۲۵^\circ + \widehat{B} \\ \widehat{C} = ۲\widehat{B} - ۹^\circ \end{cases} \xrightarrow{\widehat{A} + \widehat{} + \widehat{C} = ۱۸۰^\circ} (۲۵^\circ + \widehat{B}) + \widehat{B} + (۲\widehat{B} - ۹^\circ) = ۱۸۰^\circ$$

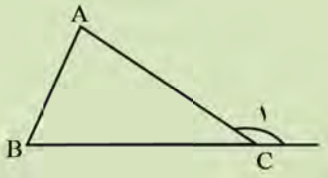
$$\Rightarrow ۴\widehat{B} = ۱۸۰^\circ - ۱۶^\circ = ۱۶۴^\circ \xrightarrow{\div ۴} \widehat{B} = ۴۱ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = ۲۵^\circ + ۴۱^\circ = ۶۶^\circ \\ \widehat{C} = ۲(۴۱^\circ) - ۹^\circ = ۷۳^\circ \end{cases}$$

زاویه‌ی خارجی مثلث: زاویه‌ی بین هر ضلع و امتداد ضلع دیگر از مثلث را یک «زاویه‌ی خارجی» مثلث می‌نامند.



قضیه: زاویه‌ی خارجی **نظیر هر رأس مثلث، برابر است با مجموع دو زاویه‌ی** داخلی غیرمجاور با آن.

اثبات: **مطابق شکل، در مثلث** ABC داریم:



$$\begin{cases} \hat{C}+\hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \text{ (زاویه نیم صفحه)} \\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۸۰^\circ \text{ (مجموع زوایای داخلی مثلث)} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = \hat{C}+\hat{C}_۱$$

$$\Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{A}+\hat{B}$$

▼**مثال۹**: زاویه‌های **داخلی** مثلثی متناسب با اعداد ۸، ۵ و ۲ است. اندازه‌ی کوچکترین زاویه‌ی خارجی این مثلث چند درجه است؟

(سراسری تجربی- ۸۰)

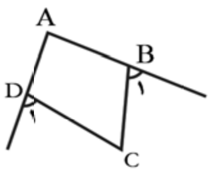
۱) ۷۲ ۲) ۸۲ ۳) ۸٤ ٤) ۹۶

☑**پاسخ**: با توجه به فرض، زاویه‌های مثلث را برابر ۸α ، ۵α و ۲α در نظر می‌گیریم. داریم:

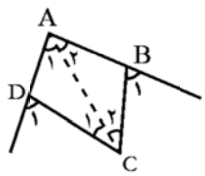
$$۸\alpha+۵\alpha+۲\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۵\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۱۲^\circ \Rightarrow \text{زوایای داخلی مثلث}: ۹۶^\circ, ۶۰^\circ, ۲۴^\circ$$

کوچکترین زاویه‌ی خارجی مثلث، متناظر با بزرگترین زاویه‌ی داخلی مثلث است، یعنی کوچکترین زاویه‌ی خارجی برابر است با $۱۸۰^\circ - ۹۶^\circ = ۸۴^\circ$.

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.



▼**مثال۱۰**: **در شکل روبرو** ثابت کنید: $\hat{B}_۱+\hat{D}_۱ = \hat{A}+\hat{C}$

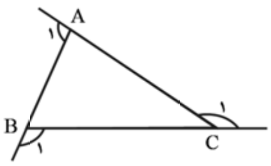


☑**پاسخ**: مطابق شکل، رأس A را به C وصل می‌کنیم؛ دو مثلث ACD و **ABC** پدید می‌آید. داریم:

$$\begin{cases} (ACD \text{ زاویه‌ی خارجی}) \ \hat{D}_۱ = \hat{A}_۱+\hat{C}_۱ \\ (ABC \text{ زاویه‌ی خارجی}) \ \hat{B}_۱ = \hat{A}_۲+\hat{C}_۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} \hat{D}_۱+\hat{B}_۱ = \underbrace{(\hat{A}_۱+\hat{A}_۲)}_{\hat{A}}+\underbrace{(\hat{C}_۱+\hat{C}_۲)}_{\hat{C}}$$

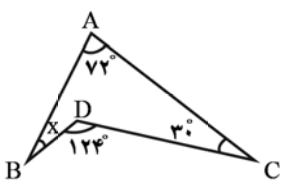
▼**مثال۱۱**: **ثابت کنید که در هر مثلث، مجموع زوایای خارجی برابر** ۳۶۰° است.

☑**پاسخ**: مطابق شکل با امتداد اضلاع ABC (در یک جهت) داریم:



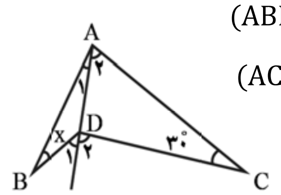
$$\begin{rcases} (\text{زاویه‌ی خارجی})\hat{A}_۱ = \hat{B}+\hat{C} \\ (\text{زاویه‌ی خارجی})\hat{B}_۱ = \hat{A}+\hat{C} \\ (\text{زاویه‌ی خارجی})\hat{C}_۱ = \hat{A}+\hat{B} \end{rcases} \xrightarrow{\text{مجموع}} \hat{A}_۱+\hat{B}_۱+\hat{C}_۱ = ۲(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}) = ۲\times۱۸۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

▼**مثال۱۲**: در شکل روبه‌رو، مقدار x چند درجه است؟



۱) ۱۸ ۲) ۲۰
۳) ۲۲ ٤) ۲٤

☑**پاسخ**: مطابق شکل، رأس A را به D وصل کرده و امتداد می‌دهیم:

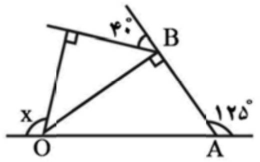


$$\left.\begin{aligned}\hat{D}_۱ &= \hat{A}_۱ + x \quad (\text{زاویه‌ی خارجی } ABD)\\ \hat{D}_۲ &= \hat{A}_۲ + \hat{C} \quad (\text{زاویه‌ی خارجی } ACD)\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} \hat{D}_۱ + \hat{D}_۲ = \underbrace{(\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲)}_{\hat{A}} + x + \hat{C}$$

$$\Rightarrow ۱۲۴^\circ = ۷۲^\circ + x + ۳۰^\circ \Rightarrow x = ۲۲^\circ$$

گزینه (۳) صحیح است.

▼ **مثال۱۳: در شکل مقابل** $\hat{A} = ۱۲۵^\circ$ **و** $\hat{B} = ۴۰^\circ$، **زاویه‌ی x چند درجه است؟** (سراسری تجربی -۸۷)

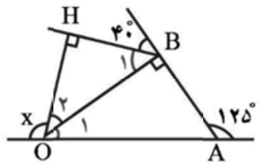


۱) **۱۰۵**

۲) **۱۱۰**

۳) **۱۱۵**

۴) **۱۲۵**



☑ **پاسخ: مطابق شکل، زاویه‌ی** ۱۲۵° زاویه‌ی **خارجی مثلث OAB** است، پس:

$$۱۲۵^\circ = \hat{O}_۱ + ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۳۵^\circ$$

از طرفی برای زاویه‌ی نیم صفحه‌ی رأس B داریم:

$$۹۰^\circ + \hat{B}_۱ + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \quad \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۵۰^\circ$$

در مثلث OHB **داریم:**

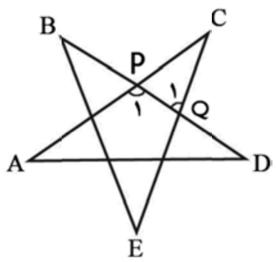
$$\hat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ + \hat{B}_۱) = ۱۸۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۴۰^\circ$$

و در آخر برای زاویه‌ی نیم صفحه‌ی رأس O داریم:

$$x + \hat{O}_۲ + \hat{O}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۸۰^\circ - (۴۰^\circ + ۳۵^\circ) = ۱۰۵^\circ$$

گزینه (۱) صحیح است.

▼ **مثال۱۴: در شکل روبه‌رو، مجموع زوایای A، B، C، D و E کدام است؟** (سراسری تجربی-۷۴)



۱) **۱۸۰°**

۲) **۲۷۰°**

۳) **کمتر از** ۱۸۰°

۴) **بین** ۱۸۰° و **۲۷۰°**

☑ **پاسخ:** در مثلث **APD داریم:**

$$\hat{A} + \hat{D} + \hat{P}_۱ = ۱۸۰^\circ \quad (۱)$$

زاویه‌ی $P_۱$ زاویه‌ی **خارجی مثلث** CPQ **است، پس :**

$$\hat{P}_۱ = \hat{C} + \hat{Q}_۱ \quad (۲)$$

از طرفی زاویه‌ی $Q_۱$ زاویه‌ی خارجی مثلث **BQE است، پس:**

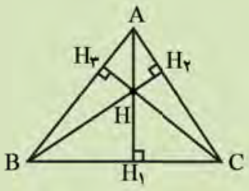
$$\hat{Q}_۱ = \hat{B} + \hat{E} \quad (۳)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \text{ و } (۳) \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} + \hat{C} + \hat{B} + \hat{E} = ۱۸۰^\circ$$

گزینه (۱) صحیح است.

اجزای فرعی مثلث:

در قسمت قبل، **اضلاع و زاویه**‌های یک مثلث را به عنوان **اجزای اصلی مثلث معرفی کردیم. در این قسمت، به معرفی اجزای فرعی مثلث از** جمله «ارتفاع‌ها»، «**میانه‌ها**»، «نیمسازها» و «عمود منصف‌های اضلاع» می‌پردازیم.



۱.ارتفاع مثلث: هر ارتفاع مثلث، **پاره خطی است که یک سر آن یک رأس مثلث و سر دیگر آن، پای** عمودی است که از آن **رأس بر ضلع مقابل به آن رأس فرود می**‌آید، مانند ارتفاع AH_1 در مثلث روبه‌رو:

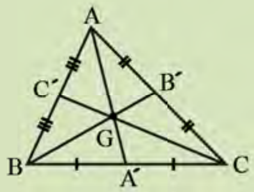
تذکر:

(۱) هر مثلث، سه ارتفاع دارد؛ AH_1، BH_2 و CH_3 که هر سه در نقطه‌ای مانند H به نام «مرکز ارتفاعی» مثلث همرسند.

(۲) اندازه‌ی ارتفاع‌های AH_1، BH_2 و CH_3 را به ترتیب با h_a، h_b و h_c نشان می‌دهند.

(۳) چنانچه مثلث دارای زاویه‌ی منفرجه باشد، آنگاه مرکز ارتفاعی مثلث در خارج مثلث می‌افتد.

(۴) چنانچه مثلث دارای زاویه‌ی قائمه باشد، آنگاه مرکز ارتفاعی مثلث، همان رأس قائمه است.

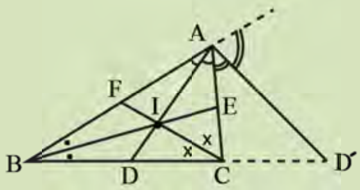


۲.میانه‌ی مثلث: پاره‌خط‌هایی که هر رأس مثلث را **به وسط ضلع روبه**‌رو به آن رأس وصل می‌کنند، میانه‌های (اضلاع) مثلث **نامیده می**‌شوند.

تذکر:

(۱) اندازه‌ی میانه‌های AA'، BB' و CC' از مثلث ABC را با m_a، m_b و m_c نشان می‌دهند.

(۲) ثابت می‌شود که سه میانه‌ی هر مثلث در نقطه‌ی G به نام «مرکز ثقل» مثلث همرسند و این نقطه، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می کند.



۳. نیمساز زاویه‌های مثلث: پاره‌خط‌هایی هستند که هر زاویه‌ی مثلث را نصف می‌کنند و به رأس **زاویه و نقطه‌ای از ضلع روبه**‌رو به آن محدودند؛ **مانند پاره خط**‌های AD، AD′، BE و CF در مثلث ABC:

تذکر:

(۱) **هر مثلث، سه نیمساز داخلی (AD، BE و CF)** و سه نیمساز خارجی (AD، BE و CF) دارد.

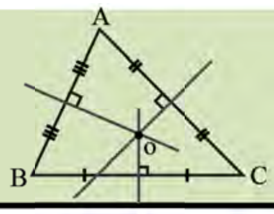
(۲) اندازه‌ی **نیمسازهای داخلی** AD، BE و CF از مثلث ABC را با d_a، d_b و d_c نشان می‌دهند.

(۳) **اندازه نیمسازهای خارجی** AD ، BE و CF از مثلث ABC را با d' ، d' و d' نشان می‌دهند.

(۴) ثابت می**شود که سه نیمساز داخلی هر مثلث در نقطه**‌ی I به نام «مرکز دایره‌ی محاطی» مثلث همرسند.

(۵) ثابت می‌**شود که نقطه‌ی همرسی نیمسازهای داخلی مثلث، از سه ضلع آن مثلث به یک فاصله است.**

(۶) **همچنین ثابت می‌شود که در هر مثلث دو نیمساز خارجی به همراه نیمساز داخلی زاویه**‌ی سوم همرسند.



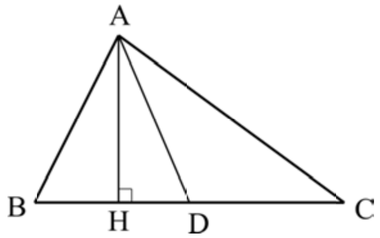
۴. عمود منصف اضلاع مثلث: خطی است که از **وسط یک ضلع مثلث می**‌گذرد و بر آن عمود است.

تذکر:

(۱) **هر مثلث، سه عمود منصف دارد که ثابت می‌شود در نقطه‌ی O به نام «مرکز دایره‌ی محیطی» مثلث همرسند.**

(۲) **ثابت می‌شود که نقطه‌ی همرسی عمود منصف‌ها، از سه رأس مثلث به یک فاصله است.**

▼ **مثال۱۵: ثابت کنید در هر مثلث، اندازه‌ی زاویه‌ای که بین نیمساز و ارتفاع نظیر یک زاویه پدید می‌آید برابر است با نصف قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی دیگر.** (پرتکرار- ۸ بار تکرار)



پاسخ:

فرض	نیمساز $\hat{A}$:AD ، ارتفاع: AH
حکم	$H\hat{A}D = \frac{\lvert \hat{B} - \hat{C} \rvert}{۲}$

با توجه به شکل داریم:

$$H\hat{A}D = H\hat{A}C - D\hat{A}C \quad (*)$$

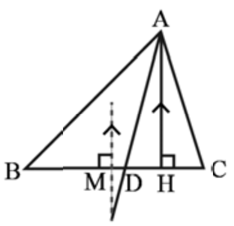
از طرفی: $\begin{cases} H\hat{A}C = ۹۰^\circ - \hat{C} \quad (\text{در مثلث } HAC) \\ D\hat{A}C = \frac{\hat{A}}{۲} \quad (\text{نیمساز } \hat{A} \text{ } AD) \end{cases} \xrightarrow{(*)} H\hat{A}D = (۹۰^\circ - \hat{C}) - \frac{\hat{A}}{۲} \quad (**)$

همانطور که می‌دانید $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ ، پس $\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ$ ؛ لذا به عنوان یک ایده‌ی خوب، همواره به خاطر داشته باشید که می‌توانید هرکجا که لازم بود به جای ۹۰°، عبارت $\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲}$ را جایگزاری کنید، در نتیجه:

$$(**) \Rightarrow H\hat{A}D = \frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} - \hat{C} - \frac{\hat{A}}{۲} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲} \xrightarrow{\text{در حالت کلی}} \frac{\lvert \hat{B} - \hat{C} \rvert}{۲}$$

▼ **مثال۱۶: اگر در مثلث ABC، $\hat{A} = ۵۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$، آنگاه زاویه‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع BC چقدر است؟** (آزاد-۷۸)

۱) ۱۵° ۲) ۷۵° ۳) ۵° ٤) ٤۵°



پاسخ: زاویه‌ی $\hat{C}$ **برابر می‌شود با:** $\hat{C} = ۱۸۰^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$

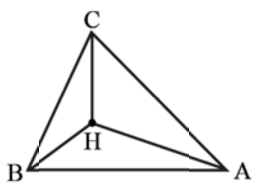
مطابق شکل، عمود منصف ضلع BC موازی ارتفاع AH است، پس کافیست زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز خارج شده از رأس A **را بدست آوریم که طبق** مثال قبل برابر می‌شود با:

$$H\hat{A}D = \frac{\lvert \hat{B} - \hat{C} \rvert}{۲} = \frac{\lvert ۶۰^\circ - ۷۰^\circ \rvert}{۲} = ۵^\circ$$

گزینه (۳) صحیح است.

▼ **مثال۱۷: در مثلث ABC که در آن $\hat{A} = ٤۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و H محل تلاقی سه ارتفاع است،**

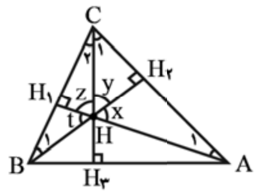
زاویه‌ی $A\hat{H}C$ چند برابر زاویه‌ی $B\hat{H}C$ است؟ (آزاد -۸۸)



۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۶}{۷}$ ٤) $\frac{۷}{۵}$

☑**پاسخ:** **مطابق شکل، ارتفاع** AH_1، BH_2 و CH_3 را رسم می‌کنیم. **با نامگذاری** زاویه‌های روی شکل داریم:



$$\begin{cases} CHH_2: y+\hat{C}_1=90^\circ \\ ACH_3: \hat{C}_1+\hat{A}=90^\circ \end{cases} \Rightarrow y=\hat{A}$$

$$\begin{cases} AHH_2: x+\hat{A}_1=90^\circ \\ ACH_1: \hat{A}_1+\hat{C}=90^\circ \end{cases} \Rightarrow x=\hat{C}$$

برای زاویه‌ی نیم صفحه‌ی $A\hat{H}H_1$ داریم:

$$A\hat{H}H_1=x+y+z=180^\circ \Rightarrow \hat{C}+\hat{A}+z=180^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{A}+\hat{B}+\hat{}=180^\circ} z=\hat{B}$$

همچنین دو زاویه‌ی x **و** t متقابل به رأس‌اند، پس $t=x=\hat{C}$.

در این مثلث، چون $\hat{A}=40^\circ$، $\hat{B}=60^\circ$، پس $\hat{C}=80^\circ$ و در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} A\hat{H}C=x+y=\hat{C}+\hat{A}=80^\circ+40^\circ=120^\circ \\ B\hat{H}C=t+z=\hat{C}+\hat{B}=80^\circ+60^\circ=140^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{A\hat{H}C}{B\hat{H}C}=\frac{120^\circ}{140^\circ}=\frac{6}{7}$$

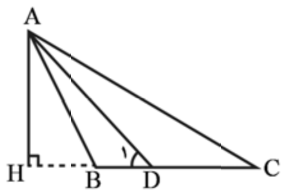
گزینه (۳) صحیح است.

▼**مثال۱۸:** **اگر در مثلثی** $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$، **آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و ضلع BC برابر است با:** (سراسری تجربی- ۵۱)

۱) 15° **۲)** 30°

۳) 45° **۴)** 60°

☑**پاسخ:** در مثال۱۵، **ثابت کردیم که زاویه‌ی بین نیمساز داخلی** $\hat{A}$ و ارتفاع AH برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل دو زاویه‌ی $\hat{B}$ و $\hat{C}$، پس مطابق شکل داریم:



$$H\hat{A}D=\frac{|\hat{B}-\hat{C}|}{2}=\frac{90^\circ}{2}=45^\circ$$

پس در مثلث HAD داریم:

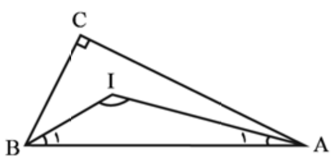
$$90^\circ+H\hat{A}D+\hat{D}_1=180^\circ \Rightarrow \hat{D}_1=180^\circ-135^\circ=45^\circ$$

گزینه (۳) صحیح است.

▼**مثال۱۹:** **در مثلث قائم الزاویه با زوایای** $\hat{A}=20^\circ$ و $\hat{C}=90^\circ$، **زاویه‌ی بین نیمسازهای زاویه‌های A و B کدام است؟** (آزاد – ۸۶)

۱) 10° **۲)** 35° **۳)** 110° **۴)** 135°

☑**پاسخ:** **مطابق شکل، نقطه‌ی برخورد نیمسازهای** $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را I در نظر می‌گیریم.



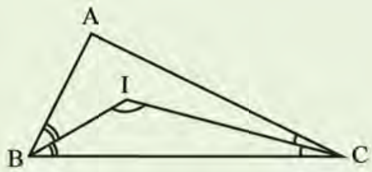
در مثلث ABI داریم:

$$\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{I}=180^\circ$$

$$\Longrightarrow \frac{20^\circ}{2}+\frac{70^\circ}{2}+\hat{I}=180^\circ \Longrightarrow \hat{I}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$$

گزینه (۴) **صحیح است.**

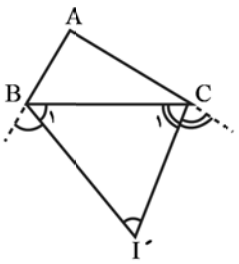
نکته: **زاویه‌ی منفرجه‌ی بین نیمسازهای داخلی زوایای B و C در مثلث ABC برابر است با:**



$$B\hat{I}C=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$$

▼ **مثال۲۰**: ثابت **کنید در مثلث** ABC، **زاویه‌ی حاده‌ی بین دو نیمساز خارجی زوایای** $\hat{B}$ **و** $\hat{C}$ **برابر است با:** $۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$ (پرتکرار - ۳ بار تکرار)

☑ **پاسخ**: ***مطابق شکل، نیمسازهای خارجی زوایای*** $\hat{B}$ *و* $\hat{C}$ *در نقطه‌ی* I' *متقاطع‌اند، داریم:*

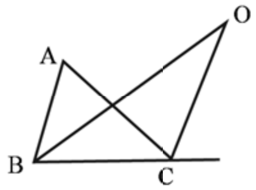


$$\begin{cases} \hat{B}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{B}{۲} \\ \hat{C}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{C}{۲} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{I'BC}: \hat{I'} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱) = ۱۸۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} - \frac{\hat{C}}{۲}) = \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

توجه کنید که باز هم از رابطه‌ی *مهم* $\frac{A}{۲} + \frac{B}{۲} + \frac{C}{۲} = ۹۰^\circ$ *استفاده کردیم.*

▼ **مثال۲۱**: **در شکل زیر، اگر** $\hat{A} = ۶۰^\circ$ **و BO و CO نیمساز باشند، آنگاه:** (آزاد -۷۶)



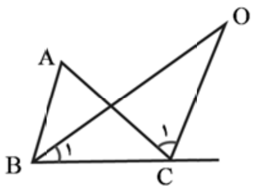
۱) $\hat{O} = ۴۵^\circ$

۲) $\hat{O} = ۶۰^\circ$

۳) $\hat{O} = ۳۰^\circ$

۴) هیچکدام

☑ **پاسخ**: داریم:



$$\begin{cases} (\hat{B}\ \text{نیمساز داخلی}: BO) \rightarrow \hat{B}_۱ = \frac{\hat{B}}{۲} \\ (\hat{C}\ \text{نیمساز خارجی}: CO) \rightarrow \hat{C}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{}{۲} \end{cases}$$

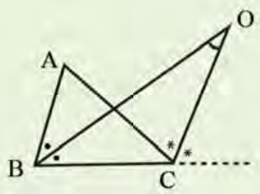
$$\overset{\Delta}{BOC}: \hat{O} = ۱۸۰^\circ - (\hat{B}_۱ + \hat{C} + \hat{C}_۱) = ۱۸۰^\circ - (\frac{\hat{B}}{۲} + \hat{C} + ۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲}) = ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} - \frac{\hat{C}}{۲}$$

چون $\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = ۹۰^\circ$ ، پس: $\hat{O} = \frac{\hat{A}}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$

گزینه (۳) صحیح است.

نکته: **زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز داخلی** $\hat{B}$ **و نیمساز خارجی** $\hat{C}$

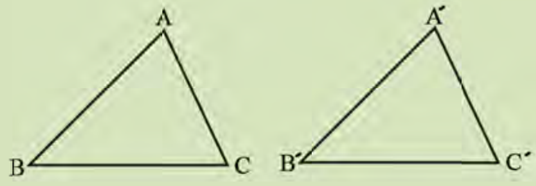
برابر است با نصف زاویه سوم ،یعنی : $\hat{O} = \frac{\hat{A}}{۲}$



مثلث‌های همنهشت:

دو مثلث **را که بتوان به طور کامل بر هم منطبق کرد، دو مثلث** «همنهشت» می‌نامیم. به عنوان مثال، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به طور کامل می‌توان بر هم منطبق کرد، **پس همنهشت بوده و تمامی اجزای اصلی آن (اضلاع** و زوایای متناظر) با هم برابر است.

$$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C' \\ \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$



توجه: در دو مثلث همنهشت:
(۱) دو زاویه‌ی متناظر، دو زاویه‌ی روبه‌رو به دو ضلع برابر هستند.
(۲) دو ضلع متناظر، دو ضلع روبه‌رو به دو زاویه‌ی برابر هستند.

نکته: از **همنهشتی دو مثلث نتیجه می‌شود که علاوه بر تساوی اجزای اصلی آنها، تمامی اجزای فرعی متناظر دو مثلث نیز با هم برابرند، یعنی در دو مثلث همنهشت، نیمسازهای متناظر، ارتفاع**های متناظر، میانه‌های متناظر، ... همگی با هم **برابر هستند.**

حالت‌های اصلی همنهشتی دو مثلث:

برای این که دو مثلث **را بر هم منطبق کنیم، سه حالت اصلی برای همنهشتی آن دو مثلث وجود دارد که عبارتند از:**

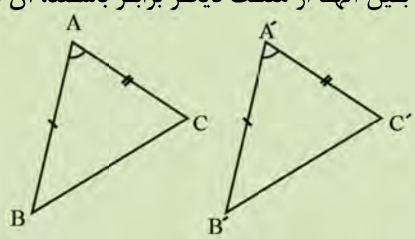
الف) **حالت (ض‌زض): تساوی دو ضلع و زاویه**ی بین آنها

ب) **حالت (زض‌ز)**: تساوی دو زاویه و **ضلع بین آنها**

ج) **حالت (ض‌ض‌ض)**: تساوی سه ضلع

الف) **حالت (ض‌زض): هرگاه دو ضلع و زاویه**ی بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث همنهشت‌اند، یعنی:

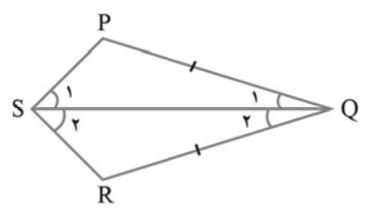
$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \hat{A} = \hat{A}' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$



▼ **مثال۲۲: در چهار ضلعی PQRS، PQ=QR و قطر QS زاویه‌ی $\hat{Q}$ را نصف می‌کند. ثابت کنید قطر QS زاویه‌ی $\hat{S}$ را نیز نصف می‌کند.**

(پرتکرار- ۳ بار تکرار)

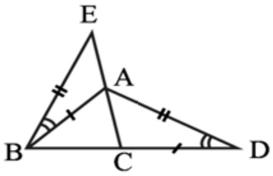
پاسخ: *مطابق شکل و با توجه به فرض داریم:*



$$\begin{cases} PQ = QR \\ QS \ (\text{ضلع مشترک}) \\ \hat{Q}_1 = \hat{Q}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{PQS} \cong \overset{\Delta}{RQS}$$

*از همنهشتی دو مثلث **PQS** و RQS نتیجه می‌شود که دو زاویه‌ی $\hat{S}_1$ و $\hat{S}_2$ در آن دو مثلث نیز با هم برابر هستند، یعنی قطر QS زاویه‌ی $\hat{S}$ را نصف می‌کند.*

▼ **مثال۲۳: با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه گیری لزوماً درست است؟**

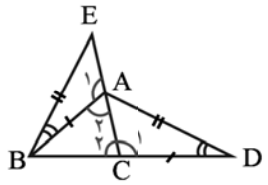


(سراسری تجربی خارج از کشور- ۸۵)

۱) **AB=AC**　　　　۲) AB=BC

۳) AE=BC　　　　۴) BC=AC

☑ **پاسخ:** با توجه به شکل داریم:



$$\begin{cases} AB = CD \\ BE = AD \\ A\widehat{B}E = \widehat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{CDA}$$

از همنهشتی دو مثلث **ABE** و CDA نتیجه می‌شود که:

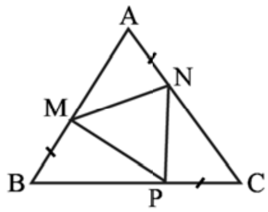
$$\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \xrightarrow{\text{تساوی زوایای مکمل}} \widehat{A}_2 = \widehat{C}_2$$

پس مثلث ABC در رأس B متساوی الساقین است، یعنی AB=BC.

گزینه (۲) صحیح است.

▼ **مثال۲۴: در شکل زیر مثلث ABC متساوی الاضلاع است.** ثابت کنید.

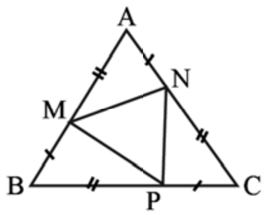
مثلث MNP نیز متساوی الاضلاع می‌باشد.　　(پرتکرار- ۳ بار تکرار)



☑ **پاسخ:** با توجه به شکل، چون مثلث ABC متساوی الاضلاع است **(AB=AC=BC)** و

AN=BM=CP، پس: **AM=BP=CN**

در نتیجه سه مثلث **AMN**، BMP و CNP به حالت (ض‌زض) با هم همنهشتند و داریم:

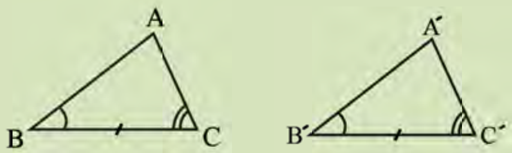


$$\overset{\Delta}{AMN} \cong \overset{\Delta}{BMP} \cong \overset{\Delta}{CNP} \Rightarrow MN = MP = NP$$

یعنی مثلث MNP **متساوی الاضلاع است.**

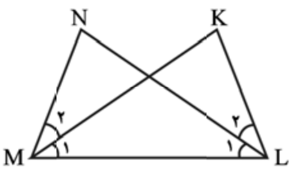
ب) **حالت (زض‌ز)**: هرگاه **دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه** و ضلع بین آنها از مثلثی دیگر **برابر باشند**، آن دو مثلث همنهشت‌اند، **یعنی:**

$$\begin{cases} \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \\ BC = B' \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$



توجه: وقتی دو زاویه‌ی $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ از مثلث ABC با دو زاویه‌ی $\widehat{B}'$ و $\widehat{C}'$ برابر است، نتیجه می‌شود که زاویه‌ی سوم آنها نیز با هم برابر است، یعنی $\widehat{A} = \widehat{A}'$؛ در نتیجه، لازم نیست که ضلع مفروض حتماً بین دو زاویه‌ی متناظر باشد!

▼ **مثال۲۵: در شکل مقابل $\widehat{L}_1 = \widehat{M}_1$ و $\widehat{L}_2 = \widehat{M}_2$، ثابت کنید: KL=NM**　(پرتکرار-۲ بار تکرار)



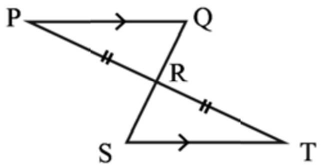
☑ **پاسخ: توجه داشته باشید که** $\underbrace{\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2}_{\widehat{M}} = \underbrace{\widehat{L}_1 + \widehat{L}_2}_{\widehat{L}}$ ، پس:

$$\begin{cases} \widehat{L} = \widehat{M} \\ \widehat{M}_1 = \widehat{L}_1 \\ ML \ (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{NML} \cong \overset{\Delta}{KLM}$$

در دو مثلث همنهشت **NML** و KLM، داریم KL=NM.

▼ **مثال۲۶: اگر PQ||ST و نقطه‌ی R وسط PT باشد، ثابت کنید نقطه‌ی R وسط QS نیز است.**

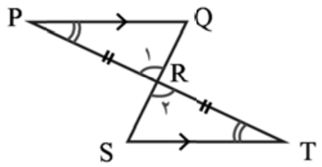
(پرتکرار - ۲ بار تکرار)



☑ **پاسخ:** *مطابق شکل، **PQ** موازی ST و خط PT مورب است، پس طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که:*

$\hat{P} = \hat{T}$

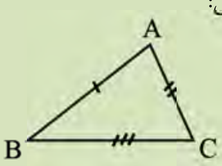
داریم:



$$\begin{cases} \hat{R}_1 = \hat{R}_2 \quad (\text{متقابل به رأس}) \\ \hat{P} = \hat{T} \\ PR = RT \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{PQR} \cong \overset{\Delta}{TSR}$$

در دو مثلث همنهشت **PQR** و TSR، دو ضلع QR و SR *با هم برابر هستند، یعنی* R وسط QS است.

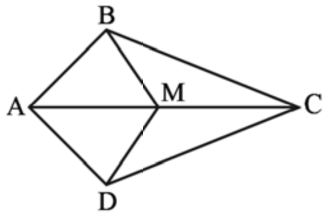
ج) **حالت (ض‌ض‌ض):** هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، **آن دو مثلث همنهشت**‌اند، یعنی:



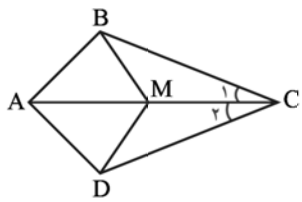
$$\begin{cases} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

▼ **مثال۲۷: در شکل زیر، BC=DC و AB=AD می‌باشد.**

ثابت کنید: BM=MD (پرتکرار - ۲ بار تکرار)



☑ **پاسخ:** *مطابق شکل و فرض سوال داریم:*



$$\begin{cases} AB = AD \\ BC = DC \\ AC (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC}$$

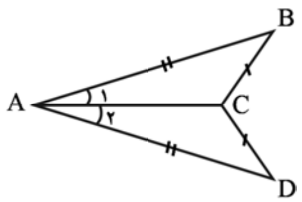
در دو مثلث همنهشت **ABC** و ADC، داریم $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$، پس:

$$\begin{cases} BC = DC \\ \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \\ MC (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{BMC} \cong \overset{\Delta}{DMC}$$

در دو مثلث همنهشت **BMC** و DMC داریم BM=MD .

▼ **مثال۲۸: در شکل مقابل ثابت کنید:** $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (پرتکرار - ۲ بار تکرار)

☑ **پاسخ:** *با توجه به شکل داریم:*

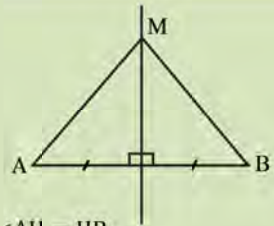


$$\begin{cases} AB = AD \\ BC = DC \\ AC (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC}$$

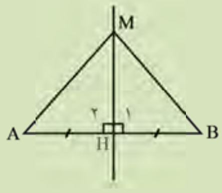
در دو مثلث همنهشت ABC و **ADC** داریم $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

قضیه: (خاصیت عمودمنصف یک پاره‌خط): هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، **از دو سر آن پاره** خط، فاصله‌ی یکسانی **دارد، یعنی اگر** M نقطه‌ای دلخواه روی عمود منصف **پاره خط** AB باشد، آنگاه:

MA=MB



اثبات: مطابق شکل **داریم**:



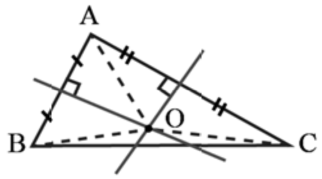
$$\begin{cases} AH = HB \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \\ MH(\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}$$

در دو **مثلث همنهشت** AMH و **BMH** داریم **MA=MB**.

تمرین: نشان دهید که هر نقطه که فاصله‌ی یکسانی از دو سر پاره خط AB دارد، روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

▼ **مثال۲۹: ثابت کنید که عمود منصف‌های اضلاع مثلث ABC در یک نقطه متقاطع‌اند(همرسند).**

☑ **پاسخ**: *مطابق شکل، فرض می‌کنیم که عمود منصف‌های دو ضلع AB و AC در نقطه‌ی O متقاطع باشند، داریم:*

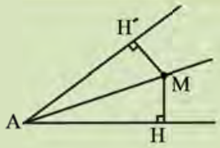


$$\begin{cases} O \rightarrow OA=OB \text{ روی عمود منصف AB قرار دارد.} \\ O \rightarrow OA=OC \text{ روی عمود منصف AC قرار دارد.} \end{cases} \Rightarrow OB = OC$$

از **OB=OC** نتیجه *می‌گیریم که* O *از دو سر ضلع* BC *به یک فاصله است، یعنی* O *روی عمود منصف* BC *قرار دارد و به بیان دیگر، سه عمود منصف اضلاع* AB، AC و BC *در نقطه‌ی* O *همرسند.*

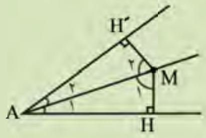
توجه: *نقطه‌ی O **که از سه رأس** A، B و C **به یک فاصله است، مرکز دایره‌ی محیطی مثلث** ABC می‌باشد.*

قضیه (خاصیت نیمساز یک زاویه): هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه، فاصله‌ی یکسانی دارد، **یعنی اگر** M نقطه‌ای دلخواه روی نیمساز $\widehat{A}$ باشد، آنگاه: $MH = MH'$



اثبات: مطابق شکل $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ و $\widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ$، پس دو زاویه‌ی $\widehat{M}_1$ و $\widehat{M}_2$

در دو مثلث AMH و AMH' با هم برابر است و داریم:



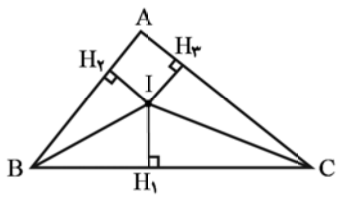
$$\begin{cases} \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \\ AM\ (\text{ضلع مشترک}) \\ \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{AMH'}$$

در دو **مثلث همنهشت** AMH و AMH' داریم $MH = MH'$.

تمرین: نشان دهید که هر نقطه که فاصله‌ی یکسانی از دو ضلع زاویه‌ی $\widehat{A}$ دارد، روی نیمساز $\widehat{A}$ قرار دارد.

▼ **مثال۳۰: ثابت کنید نیمسازهای داخلی مثلث** ABC در یک نقطه متقاطع‌اند (همرسند).

☑ **پاسخ**: *مطابق شکل، فرض می‌کنیم که نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی* $\widehat{B}$ *و* $\widehat{C}$ *در نقطه‌ی* I *متقاطع باشند، داریم:*



$$\begin{cases} I \rightarrow IH_1 = IH_2 \text{ روی نیمساز } \widehat{B} \text{ قرار دارد.} \\ I \rightarrow IH_1 = IH_3 \text{ روی نیمساز } \widehat{C} \text{ قرار دارد.} \end{cases} \Rightarrow IH_2 = IH_3$$

از $IH_3 = IH_2$ ***نتیجه می‌گیریم که*** I ***از دو ضلع زاویه‌ی*** $\widehat{A}$ ***به یک فاصله است، یعنی*** I *روی نیمساز* $\widehat{A}$ *قرار دارد و به بیان دیگر، سه نیمساز داخلی زوایای* $\widehat{A}$ ، $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ ***در نقطه‌ی*** I *همرسند.*

توجه: *نقطه‌ی I* ***که از سه ضلع AB، AC و BC به یک فاصله است، مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC*** *می‌باشد.*

انواع مثلث

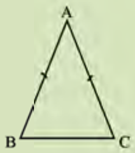
مثلث‌ها را می‌توان هم **از نظر ضلع و هم از نظر زاویه تقسیم بندی کرد.**

تقسیم بندی مثلث‌ها **از نظر ضلع:**۱- مختلف الاضلاع۲ - متساوی الساقین ۳- متساوی الاضلاع.

۱. **مختلف الاضلاع**: مثلثی که سه ضلع (دو به دو) **نابرابر داشته باشد، مختلف الاضلاع نامیده می‌**شود.

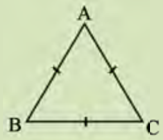
۲. **متساوی الساقین**: مثلثی که دو ضلع برابر داشته **باشد، متساوی الساقین نامیده می‌**شود.

به عنوان مثال، **در شکل روبه**رو AB = AC و مثلث ABC متساوی‌الساقین است. **به هر کدام از دو ضلع برابر** (AC, AB) «ساق»، به رأس مشترک **بین دو ساق** (رأس A) **«**رأس» و به ضلع روبه‌روی رأس (ضلع BC) «قاعده» مثلث گفته می‌شود.



۳. **متساوی الاضلاع : مثلثی که سه ضلعش با هم برابر است، متساوی الاضلاع نامیده می‌**شود.

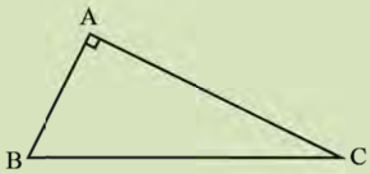
توجه : مثلث **متساوی الاضلاع، متساوی الساقین نیز هست!**



تقسیم‌بندی مثلث‌ها **ازنظر زاویه :** ۱- قائم الزاویه ۲- حاده الزاویه ۳- منفرجه الزاویه.

۱- **قائم الزاویه:** مثلثی **که زاویه‌**ی قائمه دارد، **قائم الزاویه نامیده می‌**شود. **به عنوان مثال،**

در **شکل روبه**رو $\widehat{A}=90^\circ$ و مثلث ABC قائم الزاویه است. **به ضلع روبه‌**روی زاویه‌ی قائمه **(ضلع**BC) **«وتر»** و به هر یک **از اضلاع دیگر (AB, AC) «ضلع قائمه»** گفته می‌شود.



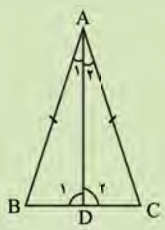
۲- **حاده الزاویه : مثلثی که همه‌**ی زاویه‌های آن حاده است، حاده الزاویه نامیده می‌شود.

۳- **منفرجه الزاویه :** مثلثی که یکی از زوایای آن منفرجه **است، منفرجه الزاویه نامیده می‌**شود.

مثلث متساوی الساقین :

قضیه : در هر مثلث **متساوی الساقین، زاویه**های روبه‌رو به ساق‌ها با هم مساوی‌اند.

اثبات : مطابق شکل، **تیمساز زاویه‌ی رأس** A را رسم می‌کنیم، داریم :



$$\begin{cases}\widehat{A}_1=\widehat{A}_2\\ AB=AC\\ AD(\text{ضلع مشترک})\end{cases}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ACD}$$

در **دو مثلث** همنهشتABD و ACD، داریم $\widehat{B}=\widehat{C}$.

نتیجه : تساوی اجزای **متناظر دو مثلث** همنهشتABD و ACD نتیجه می‌دهد که $\widehat{D}_1=\widehat{D}_2=90^\circ$ و BD = DC، یعنی «در مثلث متساوی الساقین، **نیمساز زاویه رأس، ارتفاع و میانه نیز هست.»**

قضیه : مثلثی که هر یک از بندهای زیر در آن برقرار باشد، **متساوی الساقین است.**

الف) **دو زاویه‌ی** برابر **داشته باشد.**

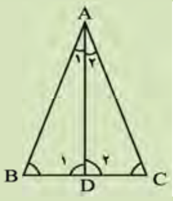
ب) **نیمساز و ارتفاع نظیر یک رأس بر هم منطبق باشند.**

د) ارتفاع و میانه‌ی نظیر یک رأس **بر هم منطبق باشند.**

ارتفاع و میانه‌ی نظیر **یک ضلع بر هم منطبق باشند.**

اثبات : تنها مورد (الف) **را ثابت می‌کنیم** و بقیه‌ی موارد **را به عنوان تمرین رها می‌کنیم.**

نیمساز **زاویه‌ی** رأس **A** را رسم می‌کنیم، **داریم** :

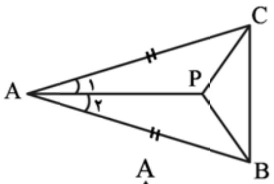


$$\begin{cases}\widehat{A}_1=\widehat{A}_2\\ \widehat{B}=\widehat{C}\end{cases}\xrightarrow[\text{ACD, ABD}]{\text{جمع زوایا در دو مثلث}}\widehat{D}_1=\widehat{D}_2=90^\circ$$

$$\begin{cases}\widehat{D}_1=\widehat{D}_2\\ \widehat{A}_1=\widehat{A}_2\\ AD(\text{ضلع مشترک})\end{cases}\xrightarrow{\text{زضز}}\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ACD}$$

در **دو مثلث** همنهشت ABD و ACD داریم AB = AC.

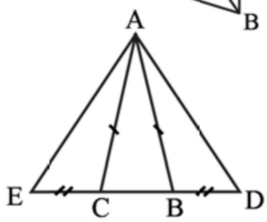
▼ **مثال ۳۱: درشکل زیر نشان دهید مثلث PBC متساوی‌الساقین است.** (پر تکرار - ۲ بار تکرار)



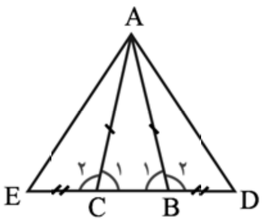
☑ **پاسخ:** *مطابق شکل داریم:*

$$\begin{cases}AB=AC\\ \widehat{A}_1=\widehat{A}_2\\ AP(\text{ضلع مشترک})\end{cases}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{APB}\cong\overset{\Delta}{APC}$$

*در **دو مثلث** همنهشت **APB** و APC داریم PB = PC، یعنی مثلث PBC در رأس P متساوی الساقین است.*



▼ **مثال ۳۲: با توجه به شکل ثابت کنید : AD = AE** (پر تکرار - ۲ بار تکرار)



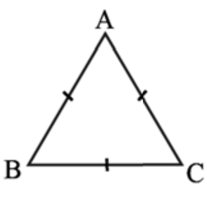
☑ **پاسخ:** *چون مثلث **ABC** متساوی الساقین است **(AB = AC)**، پس $\widehat{B}_1=\widehat{C}_1$ و در نتیجه $\widehat{B}_2=\widehat{C}_2$ است، داریم :*

$$\begin{cases}AB=AC\\ \widehat{B}_2=\widehat{C}_2\\ BD=CE\end{cases}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ACE}$$

*در **دو مثلث** همنهشت **ABD** و ACE داریم AD = AE، یعنی مثلث ADE در رأس A متساوی الساقین است.*

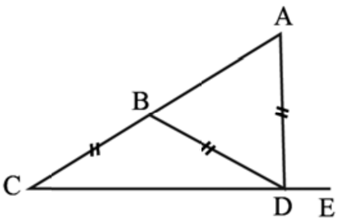
▼ **مثال ۳۳: ثابت کنید تمام زوایای یک مثلث متساوی الاضلاع برابر °۶۰ هستند.**

☑ **پاسخ:** *ابتدا نشان می‌دهیم که تمام زوایای مثلث متساوی الاضلاع با هم برابرند :*



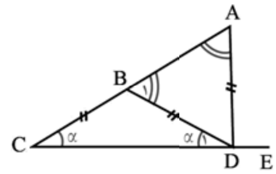
$$\begin{cases}AB=AC\Rightarrow\widehat{C}=\widehat{B}\\ AB=BC\Rightarrow\widehat{C}=\widehat{A}\end{cases}\Rightarrow\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$$

از طرفی مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است، پس : $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\frac{1}{3}(\underbrace{\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}}_{180^\circ})=60^\circ$



▼ **مثال ۳۴: با توجه به شکل توضیح دهید که چرا $A\hat{D}E = 3\,A\hat{C}E$.** (پر تکرار- ۲ بار تکرار)

☑ **پاسخ:** مطابق شکل، **در مثلث متساوی الساقین CBD فرض می‌کنیم** که $\hat{C} = \hat{D}_1 = \alpha$ داریم :



$$(\overset{\Delta}{CBD}\ \text{زاویه خارجی})\ \hat{B}_1 = \hat{C} + \hat{D}_1 = 2\alpha$$

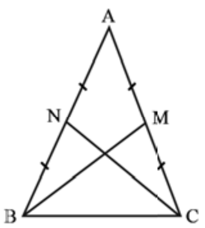
$$(\text{متساوی الساقین})\ \overset{\Delta}{ABD}: AD = DB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_1 = 2\alpha$$

در مثلث ACD، **زاویه‌ی** $\widehat{ADE}$ زاویه‌ی خارجی است، پس :

$$A\hat{D}E = \hat{A} + \hat{C} = 2\alpha + \alpha = 3\alpha = 3A\hat{C}E$$

▼ **مثال ۳۵: ثابت کنید میانه‌های نظیر ساق‌های یک مثلث متساوی الساقین با هم برابرند.** (پر تکرار- ۳ بار تکرار)

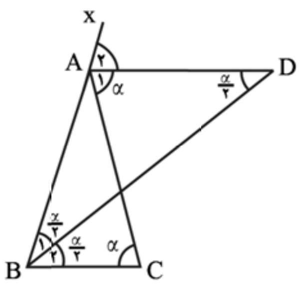
☑ **پاسخ:** مطابق شکل، **میانه‌های** BM و CN ساق‌های مثلث متساوی الساقین **ABC (AB = AC)** را نصف کرده‌اند. داریم :



$$\begin{cases} BN = CM\ (\text{نصف ساق}) \\ \hat{B} = \hat{C} \\ BC(\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{BNC} \cong \overset{\Delta}{BMC}$$

در دو مثلث همنهشت BNC و BMC داریم BM = CN، یعنی میانه‌های نظیر ساق‌ها با هم برابرند.

▼ **مثال ۳۶: در مثلث متساوی الساقین ABC (AB = AC)، نیمساز خارجی زاویه‌ی A و نیمساز داخلی زاویه‌ی B در نقطه‌ی D متقاطع‌اند. طول پاره خط AD برابر کدام جزء مثلث است؟** (سراسری تجربی- ۷۴)



۱) AC ۲) طول نیمساز داخلی زاویه‌ی B

۳) BC ۴) ارتفاع وارد بر قاعده

☑ **پاسخ:** ابتدا نشان می‌دهیم که نیمساز خارجی زاویه‌ی رأس A موازی قاعده BC است. چون مثلث ABC متساوی الساقین است پس فرض می‌کنیم $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$، در نتیجه :

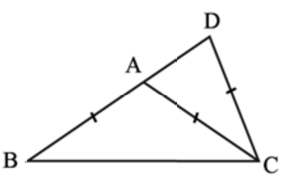
$$(\overset{\Delta}{ABC}\ \text{زاویه‌ی خارجی})\ C\hat{A}X = \hat{B} + \hat{C} = 2\alpha \xrightarrow{\text{نیمساز}: AD} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \alpha$$

چون $\hat{C} = \hat{A}_1 = \alpha$ و AC خط مورب است، پس طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که $AD \parallel BC$.

مطابق شکل، BD **نیمساز** $\hat{B}$ است، پس $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\alpha}{2}$ ؛ **از طرفی** $AD \parallel BC$ و خط BD مورب است، پس طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که $\hat{D} = \hat{B}_2 = \frac{\alpha}{2}$.

مثلث ABD **متساوی الساقین است، چون** $\hat{B}_1 = \hat{D} = \frac{\alpha}{2}$، پس طول ساق‌های AD و AB با هم برابر است. در نتیجه طول پاره خط AD با طول ساق‌های **مثلث متساوی الساقین** ABC برابر است، یعنی گزینه (۱) صحیح است.

▼ **مثال ۳۷: در مثلث متساوی الساقین ABC (AB = AC)، ساق BA را از نقطه‌ی B به اندازه‌ی قاعده‌ی BC تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم.**



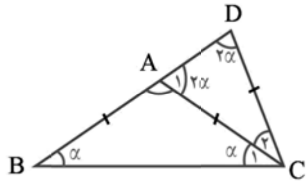
اگر CA = CD **باشد زاویه‌ی** A چند درجه است؟

(سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۴)

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۵

۳) ۱۰۸ ۴) ۱۱۲

☑**پاسخ:** مطابق شکل **در مثلث متساوی الساقین** ABC فرض می‌کنیم $\hat{B} = \hat{C}_1 = \alpha$؛ **داریم :**



$$(\overset{\Delta}{ABC} \text{ زاویه‌ی خارجی}) \hat{A}_1 = \hat{B} + \hat{C}_1 = ۲\alpha \xrightarrow{CD=CA} \hat{D} = \hat{A}_1 = ۲\alpha$$

همچنین مثلث **BCD (BC = BD) متساوی الساقین است، پس:**

$$\hat{C}_۲ + \hat{C}_۱ = \hat{D} = ۲\alpha \xrightarrow{\hat{C}_۱=\alpha} \hat{C}_۲ = \alpha$$

جمع زوایای داخلی مثلث ACD را می‌نویسیم :

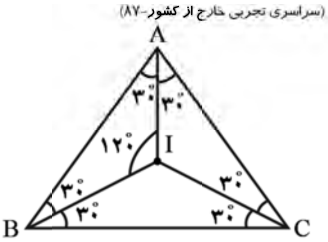
$$\hat{A}_۱ + \hat{C}_۲ + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha + \alpha + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{۱۸۰^\circ}{۵} = ۳۶^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \text{ زاویه ی رأس A در } : \hat{A} = ۱۸۰^\circ - ۲\alpha = ۱۸۰^\circ - ۷۲^\circ = ۱۰۸^\circ$$

گزینه (۳) صحیح است.

▼**مثال۳۸ : یک مثلث متساوی الاضلاع به سه مثلث همنهشت تقسیم شده است. زاویه‌های هر مثلث همنهشت کدام است؟**

(سراسری تجربی خارج از کشور-۸۷)



۱) ۶۰°، ۶۰° و ۶۰° ۲) ۳۰°، ۷۰° و ۸۰°

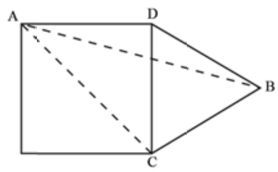
۳) ۳۰°، ۶۰° و ۹۰° ٤) ۳۰°، ۳۰° و ۱۲۰°

☑**پاسخ:** **منظور سؤال شکل روبه‌روست، که در آن نیمسازهای** $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ **در نقطه‌ی** I همدیگر را قطع کرده‌اند. هر یک **از مثلث‌های به وجود آمده، متساوی الساقین با دو زاویه‌ی** ۳۰° و یک زاویه‌ی منفرجه‌ی ۱۲۰° هستند.

گزینه (۴) صحیح است.

▼**مثال۳۹ : در شکل زیر،** بر روی **ضلع مربع مفروض، مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است.**

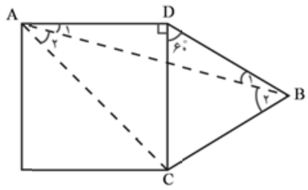
در مثلث ABC **بزرگترین زاویه، چند برابر کوچکترین زاویه‌ی آن است؟** (سراسری تجربی خارج از کشور - ۸۸)



۱) ۳ ۲) $\frac{۷}{۲}$

۳) ٤ ٤) $\frac{۹}{۲}$

☑**پاسخ:** مثلث BCD **متساوی الاضلاع است، یعنی تمام اضلاع آن با هم برابر و مساوی ضلع مربع است.** داریم :



$$(\text{متساوی الساقین}) \overset{\Delta}{ADB} : AD = DB \xrightarrow{A\hat{D}B = ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

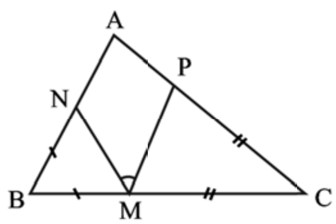
$$(\text{قائم الزاویه متساوی الساقین}) \overset{\Delta}{ADC} : D\hat{A}C = D\hat{C}A = \frac{۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ$$

$$\begin{cases} \hat{B}_۲ = \hat{B} - \hat{B}_۱ = ۶۰^\circ - ۱۵^\circ = ۴۵^\circ \\ \hat{A}_۲ = D\hat{A}C - \hat{A}_۱ = ۴۵^\circ - ۱۵^\circ = ۳۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\overset{\Delta}{ABC}} A\hat{C}B = ۱۸۰^\circ - \underbrace{(\hat{A}_۲ + \hat{B}_۲)}_{۷۵^\circ} = ۱۰۵^\circ$$

پس $A\hat{C}B = ۱۰۵^\circ$ **بزرگترین و** $\hat{A}_۲ = ۳۰^\circ$ کوچکترین زاویه‌ی مثلث ABC **هستند و نسبت آنها برابر است با :** $\frac{۱۰۵^\circ}{۳۰^\circ} = \frac{۷}{۲}$

گزینه (۲) صحیح است.

▼**مثال۴۰ :** در مثلث **ABC** مثلث‌های **کناری متساوی الساقین‌اند؛ ثابت کنید زاویه‌ی** $P\hat{M}N$ **برابر است با** $۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$.

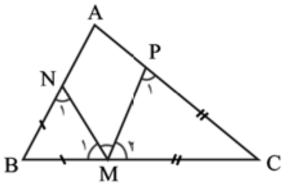


☑**پاسخ:** مطابق شکل داریم:

$$\left(\text{متساوی الساقین}\right)\ \overset{\Delta}{BMN}: \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$$

$$\left(\text{متساوی الساقین}\right)\ \overset{\Delta}{CMP}: \widehat{M}_2 = \widehat{P}_1 = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{C}}{2}$$

نقطه‌ی M روی ضلع **BC** یک زاویه‌ی نیم صفحه پدید آورده است، پس :

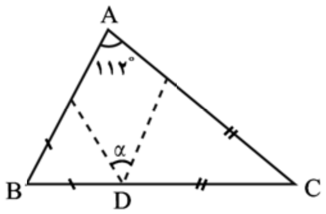


$$P\widehat{M}N = 180^\circ - \left(\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2\right) = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{\widehat{B}}{2} - \frac{\widehat{C}}{2}\right) = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2}$$

اگر از رابطه‌ی $\frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 90^\circ$ کمک بگیریم، نتیجه می‌شود که: $P\widehat{M}N = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$

▼ **مثال ۴۱:** **در شکل مقابل، $\widehat{A}=112^\circ$ و دو مثلث کناری متساوی الساقین‌اند. زاویه‌ی α چند درجه است؟**

(سراسری تجربی - ۸۵)



۱) **۳۲**　　۲) ۳٤

۳) **۳۶**　　٤) ۳۸

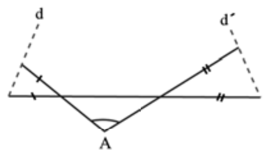
☑**پاسخ:** با توجه به **مثال** قبل نتیجه می‌شود که :

$$\alpha = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{112^\circ}{2} = 90^\circ - 56^\circ = 34^\circ$$

گزینه (۲) صحیح است.

▼ **مثال ٤۲:** **در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی الساقین‌اند و زاویه‌ی $\widehat{A}=100^\circ$ دو خط d و d´ با زاویه‌ی چند درجه متقاطع‌اند؟**

(سراسری ریاضی - ۸۸)

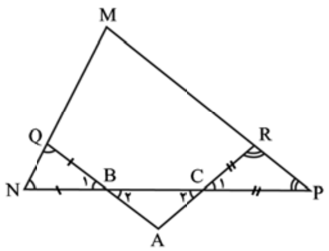


۱) **۲۰**　　۲) ٤۰

۳) **٤۵**　　٤) ۵۰

☑**پاسخ:** مطابق شکل، فرض می‌کنیم d و d´ در M متقاطع باشند. با توجه به نامگذاری‌های نقاط روی شکل

داریم :



$$\left(\text{متساوی الساقین}\right)\ \overset{\Delta}{BQN}: \widehat{N} = \widehat{Q} \Rightarrow \widehat{B}_1 = 180^\circ - 2\widehat{N}$$

$$\left(\text{متساوی الساقین}\right)\ \overset{\Delta}{CRP}: \widehat{P} = \widehat{R} \Rightarrow \widehat{C}_1 = 180^\circ - 2\widehat{P}$$

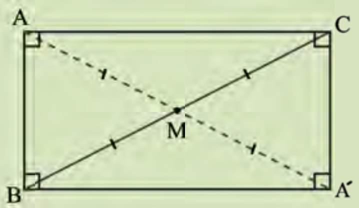
$$\overset{\Delta}{ABC}: \begin{cases} \hat{A} = 100^\circ \\ \hat{B}_2 = \hat{B}_1 = 180^\circ - 2\widehat{N} \xrightarrow{\text{جمع زوایا}} 100^\circ + 180^\circ - 2\widehat{N} + 180^\circ - 2\widehat{P} = 180^\circ \\ \hat{C}_2 = \hat{C}_1 = 180^\circ - 2\widehat{P} \qquad \Rightarrow 2\left(\widehat{N} + \widehat{P}\right) = 280^\circ \Rightarrow \widehat{N} + \widehat{P} = 140^\circ \end{cases}$$

در مثلث **MNP** زاویه‌ی **M** برابر است با :

$$\widehat{M} = 180^\circ - \left(\widehat{N} + \widehat{P}\right) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

گزینه (۲) صحیح است.

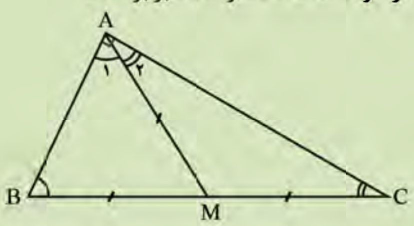
مثلث قائم الزاویه :



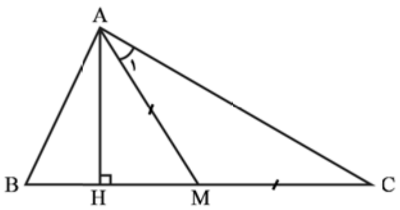
قضیه : در هر مثلث **قائم الزاویه، میانه**‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

اثبات : مطابق شکل، **با رسم یک قطر مستطیل، مستطیل به دو مثلث قائم الزاویه**‌ی همنهشت تقسیم می‌شود.

از آنجا که **قطرهای مستطیل با هم برابر بوده و همدیگر را نصف می**‌کنند (به عنوان تمرین، **این موضوع را ثابت کنید**)، **نتیجه می**‌شود که میانه‌ی AM، وتر BC را نصف کرده و با هر کدام از دو قسمت BM و MC برابر است.



نتیجه : مطابق شکل **در مثلث قائم الزاویه**‌ی ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، با رسم میانه‌ی AM دو مثلث **متساوی الساقین پدید می**‌آید که در آنها $\hat{A}_۱ = \hat{B}$ و $\hat{A}_۲ = \hat{C}$ است؛ در نتیجه «زاویه‌های ایجاد شده **بین میانه**‌ی وارد بر وتر و اضلاع قائمه **با زاویه‌های حاده**‌ی نظیر ضلع دیگر برابر است.»



▼ **مثال۴۳ : نشان دهید زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر در هر مثلث قائم الزاویه، برابر است با قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی حاده‌ی مثلث، یعنی : $H\hat{A}M = |\hat{B} - \hat{C}|$ (راس A قائم است)**

☑**پاسخ:** مثلث **AMC** در رأس M **متساوی الساقین است، پس** $\hat{A}_۱ = \hat{C}$ از طرفی در مثلث **AMC** داریم :

پس :

$$H\hat{A}C = ۹۰^\circ - \hat{C} \xrightarrow{\hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ} H\hat{A}C = \hat{B}$$

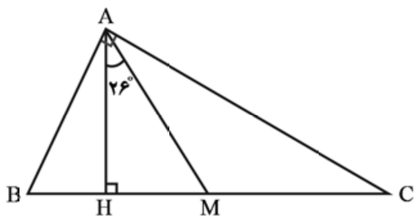
$$H\hat{A}M = H\hat{A}C - \hat{A}_۱ = \hat{B} - \hat{C}$$

در حالت کلی، چون ممکن است $\hat{B} < \hat{C}$ **باشد، عبارت به دست آمده را داخل قدر مطلق می**‌گذاریم، یعنی $H\hat{A}M = |\hat{B} - \hat{C}|$.

▼ **مثال۴۴ : در مثلث قائم الزاویه‌ای، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر برابر ۲۶° است. کوچکترین زاویه‌ی مثلث چند درجه است؟**

(سراسری تجربی- ۸۱)

۱) ۲٤ ۲) ۲۸
۳) ۳۲ ٤) ۳٤



☑**پاسخ:** با فرض $\hat{B} > \hat{C}$، طبق مثال قبل و شکل روبه‌رو داریم :

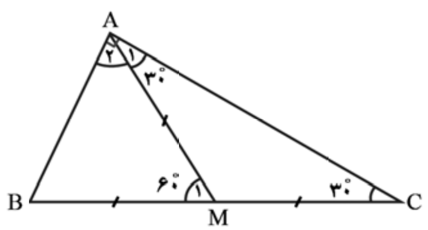
$$\begin{cases} H\hat{A}M = \hat{B} - \hat{C} = ۲۶^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \end{cases}$$

گزینه (۳) صحیح است.

نکته: اگر در مثلثی، میانه‌ی وارد بر یکی از اضلاع، نصف طول آن ضلع باشد،آن مثلث حتماً قائم الزاویه است.

▼ **مثال۴۵ : ثابت کنید در مثلث قائم الزاویه‌ای با زاویه‌ی حاده‌ی ۳۰°، ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است.** (پرتکرار - ۳ بار تکرار)

☑**پاسخ:** با رسم میانه‌ی AM، طبق شکل داریم :



$$\overset{\Delta}{AMC} : \hat{A}_۱ = \hat{C} = ۳۰^\circ \ (\text{متساوی الساقین})$$

$(\overset{\Delta}{AMC}$ زاویه‌ی خارجی$): \widehat{M}_1 = \widehat{A}_1 + \widehat{C} = ۶۰^\circ$

*مثلث ABM **متساوی الساقین بوده و زاویه‌ی** رأس آن برابر $۶۰^\circ = \widehat{M}_1$ است، پس :*

$\widehat{B} = \widehat{A}_2 = ۶۰^\circ$

***در نتیجه مثلث** ABM متساوی الاضلاع است و طول ضلع **AB** (روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰°) برابر با طول میانه‌ی AM یعنی نصف طول وتر است.*

از خم تا چند ضلعی

خم و انواع آن :

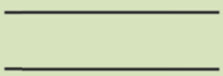
تا به **حال در قسمت**های قبل با مثلث و برخی **از ویژگی**های آن آشنا **شدیم. در واقع، مثلث ساده**ترین چندضلعی در هندسه است. اما در این قسمت می‌خواهیم **برای فهمیدن مفهوم** «چندضلعی» شما را با **مفاهیم ابتدایی**‌تر از چندضلعی آشنا کنیم.

یکی از مفاهیم تعریف نشدهی هندسه‌ی اقلیدسی، «خم» است. لطفاً **به تعاریف زیر دقت کنید :**

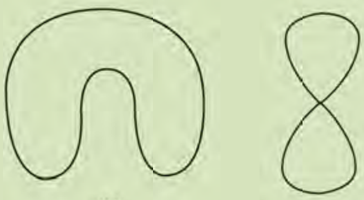
الف) خم مسطح : خمی است که بتوان آن را بدون **برداشتن** قلم از روی کاغذ رسم کرد. **به عبارتی خم مسطح، یک مجموعه نقاط به هم** پیوسته **در صفحه است که می**‌توان با یک بار حرکت **قلم، آن را رسم کرد.**

به عنوان **مثال، شکل**های روبه‌رو نمونه‌هایی از خم مسطح هستند :

ولی **شکل روبه**‌رو، **خم مسطح نیست :**



ب) خم ساده : به خم مسطحی که هیچ یک از نقاط **خود را قطع نکند، مگر در حالتی** که **نقاط انتهایی به هم می**‌رسند، یک خم ساده می‌گویند. **به عنوان مثال، خم** (۱) ساده **است ولی خم** (۲) ساده نیست.

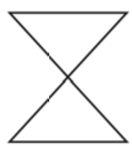
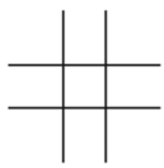
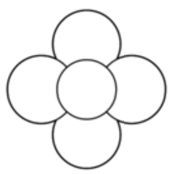


(۱) (۲)

ج) خم ساده‌ی بسته : اگر نقاط انتهایی خم ساده **بر هم منطبق باشند، آن را خم ساده**ی بسته می‌گویند. به عنوان مثال در شکل بالا، خم (۱) یک خم ساده‌ی بسته است.

قضیه‌ی خم جردن : هر خم ساده‌ی بسته، **صفحه را به سه زیر مجموعه**ی جدا از هم «درون»، «بیرون» و «روی خم» تقسیم می‌کند.

▼ مثال۴۶: کدام یک از شکل‌های زیر، خم مسطح نیست؟

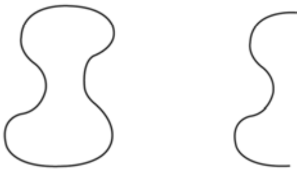
۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

☑**پاسخ:** شکل (۳) *را نمی‌توان با یک بار حرکت قلم (بدون برداشتن آن از روی کاغذ) رسم کرد!*

▼ **مثال ۴۷ : با استفاده از چند پاره خط، خمی رسم کنید که : (پرتکرار – ۳ بار تکرار)**

الف) ساده و بسته باشد. **ب) ساده باشد ولی بسته نباشد.**

☑**پاسخ:** خم‌های *مورد نظر را به صورت روبه‌رو* می‌توان رسم کرد :

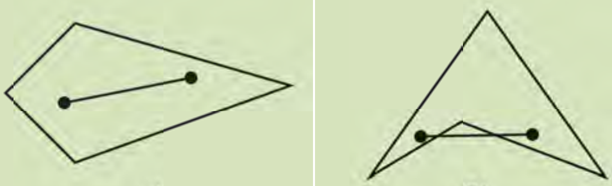


(الف) **(ب)**

د) ناحیه : با توجه به **قضیه‌ی** خم جردن، هر خم ساده‌ی بسته، صفحه **را به مجموعه**‌های مجزای درون، بیرون و روی خم **تقسیم** می‌کند، که **به اجتماع یک خم ساده‌ی** بسته به همراه نقاط **درون آن یک** «ناحیه» می‌گوییم.

هـ) ناحیه‌ی محدب : اگر پاره خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه یک ناحیه **را به هم وصل می‌**کند، کاملاً درون آن ناحیه قرار گیرد، به آن ناحیه‌ی محدب می‌گوییم**، در غیر این صورت آن را ناحیه‌**ی مقعر می‌نامیم.

به عنوان **مثال، ناحیه‌**ی (۱) محدب است و ناحیه‌ی (۲) مقعر :

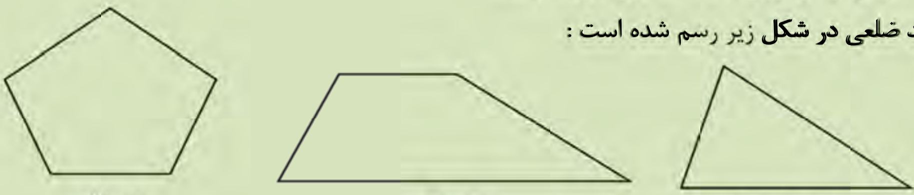


(۱) (۲)

اکنون **که شرایط مهیا شده، چند ضلعی را تعریف می**‌کنیم :

چندضلعی : یک خم **ساده‌**ی بسته است که **از اجتماع حداقل سه پاره**‌خط تشکیل شده، به طوری که نقاط انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه **بوده و هیچ سه نقطه‌**ی متوالی از آنها **روی یک خط قرار نگرفته باشد.**

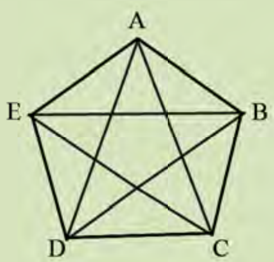
به عنوان مثال، چند **نمونه چند ضلعی در شکل** زیر رسم شده است :



پنج ضلعی چهار ضلعی سه ضلعی (مثلث)

تعریف : به نقاط تقاطع **پاره**‌خط‌ها، «رأس» و به هر پاره‌خط، «ضلع» **گفته می**‌شود.

قطر چند ضلعی : در **یک چند ضلعی (با بیش از** ۳ رأس)، به پاره‌خطی **که دو رأس غیر مجاور را به هم** وصل **می**‌کند «قطر» گفته می‌شود.



به عنوان **مثال، یک پنج ضلعی دارای** ۵ قطر است :

قطرها $\rightarrow$ AC, AD, BE, BD, CE

تذکر : در نام**گذاری رئوس یک چند ضلعی، سعی کنید (حتماً!) رئوس را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت** (یا خلاف آن) نـام-**گذاری کنید. (همانند شکل بالا که در جهت عقربه‌های ساعت** نام‌گذاری شده است.)

توجه : **چند ضلعی‌ها هم به دلیل آن که یک خم ساده‌ی بسته هستند به دو دسته‌ی محدب و مقعر تقسیم می‌شوند. البتـه هرگاه چند ضلعی بدون نام محدب یا مقعر ذکر شد، منظور همان چند ضلعی محدب است.**

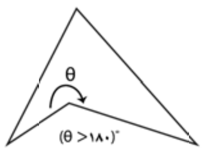
مثال۴۸ : ناحیه‌ی **محدود به یک چند ضلعی در کدام حالت ممکن است مجموعه‌ی** محدب نباشد؟(سراسری ریاضی -۷۶)

۱) تمام نقاط پاره‌خطی که دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌کنند عضو آن مجموعه است.

۲) هر زاویه‌ی داخلی کمتر از نیم صفحه است.

۳) سایر رأس‌ها در یک طرف هر خطی قرار دارند که بر ضلع آن منطق است.

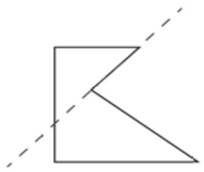
۴) **یک قطر آن را به دو** مجموعه‌ی محدب تقسیم می‌کند.



پاسخ: گزینه‌ها را تک تک بررسی می‌کنیم.

گزینه (۱) : دقیقاً تعریف ناحیه‌ی محدب آمده است، پس ممکن نیست که محدب نباشد.

گزینه (۲) : این گزینه در واقع تعریف دیگری برای محدب بودن یک چند ضلعی است، یعنی اگر چند ضلعی دارای زاویه‌ی بیشتر از **نیم صفحه باشد آنگاه حتماً مقعر است. درستی این مطلب را به وضوح در شکل روبه**رو مشاهده می‌کنید.

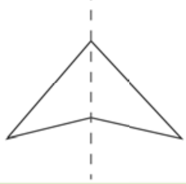


گزینه (۳) : این گزینه نیز حالت دیگری برای محدب بودن یک چند ضلعی است.

یعنی اگر رأس‌ها در دو طرف یکی از خطوطی که بر ضلع چند ضلعی منطبق است، قرار داشته باشد، آنگاه چند ضلعی حتماً مقعر است.

درستی این مطلب

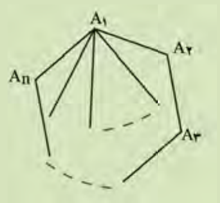
را در **شکل** روبه‌رو می‌بینید.



گزینه (۴) : شکل روبه‌رو **در شرایط این گزینه صدق می‌کند** ولی این چند ضلعی محدب نیست.

گزینه (۴) صحیح است.

قضیه : تعداد قطرهای **یک** nضلعی محدب برابر است **با** $\frac{n(n-3)}{2}$.



اثبات : مطابق شکل، n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ را در نظر بگیرید. از رأس A_1 (و هر رأس دیگر آن)، (۱ − n) پاره‌خط می‌توان به رئوس دیگر رسم کرد که **دو تای آنها** (A_1A_2 و A_1A_n) ضلع هستند، پس **از هر رأس** n **ضلعی، (n-۳)** قطر رسم می‌شود.

n رأس **داریم که از هر کدام از آنها (n-۳)** قطرمی‌گذرد، پس n(n-۳) **قطر داریم ولی توجه داشته باشید که هر قطر را ۲** بار شمرده‌ایم، مثلاً قطر A_1A_3 هم برای رأس A_1شمرده شده و هم برای رأس A_3؛ پس در مجموع تعداد قطرها برابر خواهد شد با $\frac{n(n-3)}{2}$

نتیجه : از هر رأس **n** ضلعی، (۳ −n) قطر می‌گذرد.

مثال۴۹ : تعداد **قطرهای یک n ضلعی دو برابر تعداد اضلاع آن است. n** کدام است؟ (سراسری ریاضی -۷۵)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ با توجه به فرض داریم :

$$\frac{n(n-3)}{2}=2n \overset{n\neq 0}{\Longrightarrow} n-3=4 \Rightarrow n=7$$

گزینه (۲) صحیح است.

▼ **مثال۵۰:** اگر یک **رأس جدید به یک n ضلعی اضافه کنیم، ۹ قطر جدید به قطرهای آن افزوده می‌شود. این n ضلعی چند قطر دارد؟**

☑ **پاسخ:** *تعداد قطرهای (n + 1) ضلعی برابر است با :*

$$\frac{(n+1)\overbrace{(n+1-3)}^{n-2}}{2}=\frac{n^2-n-2}{2}$$

پس طبق فرض داریم

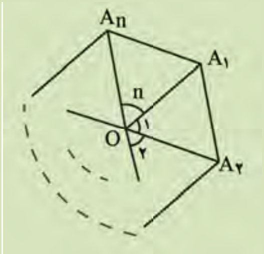
$$\frac{n^2-n-2}{2}-\frac{\overbrace{n(n-3)}^{n^2-3n}}{2}=9\Rightarrow n-1=9\Rightarrow n=10$$

تعداد قطرهای یک ۱۰ ضلعی برابر است با :

$$\frac{10\times(10-3)}{2}=\frac{10\times 7}{2}=35$$

قضیه : مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی محدب برابر است با $180^\circ\,(n-2)$.

اثبات : مطابق شکل، **نقطه‌ی** دلخواه O ، درون n ضلعی $A_1A_2 \ldots A_n$ را به تمام رأس‌های این n ضلعی وصل می‌کنیم. **اگر تمام** زوایای داخلی مثلث‌های به وجود آمده را با هم جمع کنیم، آنگاه :



$$\underbrace{\text{مجموع زوایای داخلی } n \text{ مثلث}}_{n\times 180^\circ}=\text{مجموع زوایای داخلی } n \text{ ضلعی}+\left(\underbrace{\hat{O}_1+\hat{O}_2+\cdots+\hat{O}_n}_{360^\circ}\right)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع زوایای داخلی } n \text{ ضلعی}=180^\circ n-360^\circ=180^\circ\,(n-2)$$

▼ **مثال۵۱: در کدام چندضلعی مجموع زوایای داخلی آن ٤ برابر مجموع زوایای داخلی یک ۵ ضلعی است. سپس تعداد قطرهای آن را حساب کنید.**

(پر تکرار – ۱۲ بار تکرار)

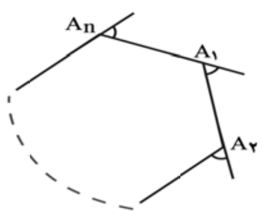
☑ **پاسخ:** *با توجه به فرض در این n ضلعی داریم :*

$$180^\circ\,(n-2)=4\,(180^\circ\,(5-2))\Rightarrow n-2=4\times 3=12\Rightarrow n=14$$

در چهارده ضلعی، تعداد قطرها برابر است با :

$$\frac{14\times\,(14-3)}{2}=\frac{14\times 11}{2}=77$$

▼ **مثال۵۲: نشان دهید که مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر °۳۶۰ است.**



☑ **پاسخ:** *مطابق شکل، هر زاویه‌ی خارجی، مکمل زاویه‌ی داخلی متناظرش است، یعنی داریم :*

$$\text{مجموع زوایای خارجی}=\hat{A}_1'+\hat{A}_2'+\cdots+\hat{A}_n'=(180^\circ-\hat{A}_1)+\cdots+(180^\circ-\hat{A}_n)$$

$$\Rightarrow \text{مجموع زوایای خارجی}=180^\circ n-\underbrace{(\hat{A}_1+\cdots+\hat{A}_n)}_{180^\circ(n-2)}=180^\circ n-(180^\circ n-360^\circ)=360^\circ$$

▼ **مثال۵۳:** در یک **n ضلعی، مجموع زوایای داخلی ۷ برابر مجموع زوایای خارجی است. تعداد قطرهای این n ضلعی را حساب کنید.**

(پر تکرار – ۲ بار تکرار)

☑ **پاسخ:** ***از آنجا که مجموع زوایای*** *خارجی این n ضلعی برابر °۳۶۰ است، پس طبق فرض داریم :*

$$180^\circ(n-2)=7\times 360^\circ\xrightarrow{\div 180^\circ}n-2=14\Rightarrow n=16$$

تعداد قطرهای ۱۶ ضلعی برابر است با :

$$\frac{۱۶\,(۱۶-۳)}{۲} = \frac{۱۶ \times ۱۳}{۲} = ۱۰۴$$

نکته: در یک n ضلعی منتظم (که تمام اضلاعش با هم برابرند) :

اولاً) هر زاویه‌ی داخلی برابر است با $\frac{۱۸۰^\circ\,(n-۲)}{n}$.

ثانیاً) هر زاویه‌ی خارجی برابر است با $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$.

▼ **مثال ۵۴** : **هر زاویه‌ی یک ۱۸ ضلعی منتظم چند درجه است؟** (سراسری تجربی- ۷۵)

۱) ۱۵۰° ۲) ۱۵۵° ۳) ۱۶۰° ٤) ۱۶۵°

☑ **پاسخ:** *هر زاویه‌ی ۱۸ ضلعی منتظم برابر است با :*

$$\frac{۱۸۰^\circ\,(۱۸-۲)}{۱۸} = \frac{۱۸۰^\circ \times ۱۶}{۱۸} = ۱۶۰^\circ$$

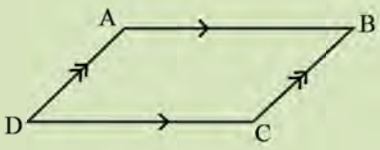
گزینه‌ی (۳) صحیح است.

متوازی الاضلاع :

در میان چهارضلعی‌ها، **متوازی الاضلاع دارای ویژگی‌**های متعددی است که در حل بعضی از مسائل هندسی پر کاربرد هستند.

همانطور **که از نام متوازی** الاضلاع پیداست، به چهار **ضلعی‌**ای که **اضلاع مقابلش موازی هستند**، «متوازی الاضلاع» گفته می‌شود.

$$\begin{cases} AB||CD \\ AD||BC \end{cases}$$



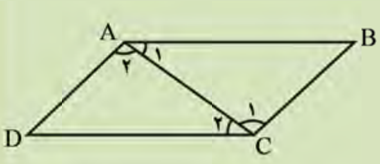
قضیه : در هر متوازی **الاضلاع**،

الف) **اضلاع مقابل مساوی**‌اند. ب) زاویه‌های مقابل مساوی‌اند.

ج) زاویه‌های مجاور، **مکمل**‌اند. د) قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

اثبات :

(الف) **و (ب) : قطر AC** از متوازی الاضلاع ABCD را رسم می‌کنیم، داریم :



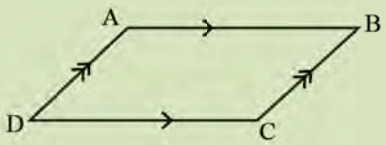
$$\begin{cases} AB||CD,\ \text{مورب}\ AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۱ = \hat{C}_۲ \\ AD||BC,\ \text{مورب}\ AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۲ = \hat{C}_۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{C}_۲ \\ \hat{C}_۱ = \hat{A}_۲ \\ AC\ (\text{ضلع مشترک}) \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} A\overset{\Delta}{B}C \cong A\overset{\Delta}{D}C$$

در دو مثلث همنهشت ADC و ABC ، اولاً اضلاع متناظر با هم برابرند : (الف) AB=CD و AD=BC

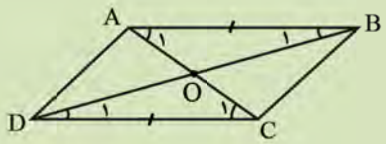
ثانیاً $\hat{B}=\hat{D}$ و همچنین **از برابری**‌های $\hat{A}_1=\hat{C}_2$ و $\hat{A}_2=\hat{C}_1$ نتیجه می‌شود که: $\hat{A}=\hat{C}$ (ب)

ج) **چون** $AB \parallel CD$ و **خطوط** BC و **AD** مورب هستند، **پس از قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می**‌شود که :



$$\begin{cases}\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\\ \hat{A}+\hat{D}=180^\circ\end{cases}$$

د) محل برخوردها **قطرها را** O می‌گیریم، با توجه به **شکل داریم :**



$$AB \parallel CD,\begin{cases}\text{مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_1=\hat{C}_1\\ \text{مورب } BD \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{B}_1=\hat{D}_1\end{cases}$$

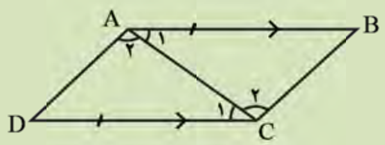
$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{C}_1\\ \hat{B}_1=\hat{D}_1\\ AB=CD\end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABO}\cong\overset{\Delta}{CDO}$$

در دو مثلث **همنهشت**CDO وABO داریم AO = OC و BO = OD، **یعنی قطرها همدیگررا نصف می**‌کنند.

تمرین : نشان دهید **چهار ضلعی‌ای که هر یک از ویژگی‌های زیر را داشته باشد، قطعاً متوازی الاضلاع** است.

الف) هر دو ضلع مقابل آن مساوی باشند. ب) هر دو زاویه‌ی مقابل آن مساوی باشند.

ج) هر دو زاویه‌ی **مجاور آن مکمل باشند.** د) قطرها منصف یکدیگر باشند.



قضیه : چهارضلعی‌ای که **دارای دو ضلع مساوی و موازی باشد، متوازی الاضلاع است.**

اثبات : مطابق شکل **در چهارضلعی**ABCD، دو ضلع **AB** و CD **مساوی و موازی**‌اند، داریم :

$$AB \parallel CD,\ \text{مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_1=\hat{C}_1$$

$$\begin{cases}AB=CD\\ \hat{A}_1=\hat{C}_1\\ AC\ (\text{ضلع مشترک})\end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{ACD}$$

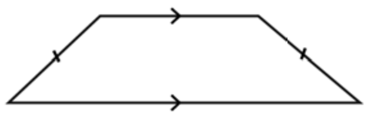
در دو مثلث **همنهشت** ABC و ACD داریم $\hat{A}_2=\hat{C}_2$ که طبق قضیه‌ی خطوط موازی و مورب (با خط مورب AC) نتیجه می‌شود که **AD**$\parallel$BC؛ پس در **چهار ضلعی** ABCD، اضلاع روبه‌رو **با هم موازی‌اند، یعنی متوازی الاضلاع است.**

▼ **مثال۵۵ : کدام یک از چهار ضلعی‌های زیر یک متوازی الاضلاع را مشخص نمی‌کند؟** (آزاد- ۶۸)

۱) **چهار ضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع مساوی داشته باشد.** ۲) چهار ضلعی که قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

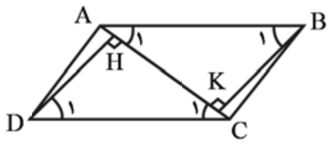
۳) **چهار ضلعی که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد.** ٤) چهار ضلعی که زوایای روبه‌رویش مساوی باشند.

☑ **پاسخ:** گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ که ***خواص متوازی الاضلاع بودند. شکل زیر که دو ضلع مساوی و دو ضلع موازی دارد، متوازی الاضلاع نیست.***



گزینه (۱) صحیح است.

▼**مثال ۵۶: ثابت کنید دو رأس B , D از متوازی الاضلاع ABCD از قطر AC به یک فاصله‌اند.** (پر تکرار – ۳ بار تکرار)



☑**پاسخ:** مطابق **شکل ارتفاع‌های BK, DH** را بر قطر AC رسم می‌کنیم.داریم:

$$AB||CD, \text{مورب } AC \xrightarrow{\text{قضیه‌ی خطوط موازی و مورب}} \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱$$

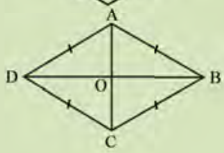
در دو مثلث قائم الزاویه‌ی ABK, DHC داریم :

$$\hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \text{ و } \hat{H} = \hat{K} = ۹۰^\circ \xrightarrow{\text{جمع زوایا}} \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱$$

$$\begin{cases} \hat{D}_۱ = \hat{B}_۱ \\ \hat{C}_۱ = \hat{A}_۱ \\ CD = AB \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{DHC} \cong \overset{\Delta}{ABK}$$

در دو مثلث همنهشت DHC و ABK داریم DH = BK.

چهار ضلعی‌های خاص :



در این بخش به معرفی **لوزی، مستطیل، مربع و ذوزنقه می**‌پردازیم.

لوزی : متوازی الاضلاعی **است که تمام اضلاعش با هم برابرند.**

توجه : (۱) به طور کلی، **لوزی به چهار ضلعی**‌ای گفته می‌شود که تمام اضلاعش با هم مساوی باشد.

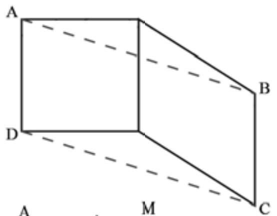
(۲) از آنجاکه لوزی، متوازی الاضلاع است پس تمام خواص متوازی الاضلاع در مورد آن برقرار است.

قضیه : در هر لوزی **(اولاً) قطرها بر هم عمودند، (ثانیاً) قطرها نیمساز زاویه**‌ها هستند.

اثبات : الف) چون **AB = AD** پس **A** از دو سر پاره خط BD به یک فاصله است، **یعنی** A روی عمود منصف BD قرار **دارد و به طریق مشابه نیز**، C روی عمود منصف BD قرار دارد، یعنی AC همان عمود منصف **قطر** BD است، پس قطرها **بر هم عمودند. (و به طور کلی عمود منصف یکدیگر هستند.)**

ب) **با توجه به قسمت قبل، در مثلث متساوی الساقین** ADB، AO هم میانه، هم ارتفاع و هم نیمساز است، **یعنی** قطر AC نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ و قطر BD نیمساز $\hat{B}$ و $\hat{D}$ است.

▼**مثال ۵۷: در شکل زیر، یک مربع و یک لوزی با زاویه‌ی ۶۰ درجه در یک ضلع مشترکند. بزرگترین زاویه‌ی متوازی الاضلاع ABCD چند درجه است؟** (سراسری تجربی - ۸۸)(اشتباهات متداول)

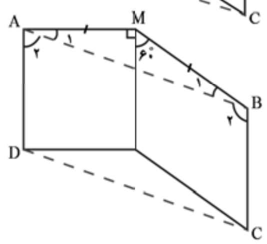


۱) ۱۰۰

۲) ۱۰۵

۳) ۱۲۰

۴) ۱۳۵



☑**پاسخ:** با توجه به فرض و شکل روبه‌رو، طول اضلاع لوزی با مربع برابر است و داریم :

$$\overset{\Delta}{AMB}: A\hat{M}B = ۹۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۵۰^\circ \quad (\text{متساوی الساقین})$$

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

پس در متوازی الاضلاع ABCD داریم :

$$\begin{cases} \widehat{A}_2 = 90^\circ - \widehat{A}_1 = 75^\circ \\ \widehat{B}_2 = 120^\circ - \widehat{B}_1 = 105^\circ \end{cases}$$

گزینه (۲) صحیح است.

توجه: بعضی از دانش‌آموزان به اشتباه گزینه‌ی (۳) را انتخاب می‌کنند، زیرا زاویه‌ی منفرجه‌ی متوازی الاضلاع را برابر زاویه‌ی منفرجه لوزی یعنی 120° می‌گیرند. مطابق شکل واضح است که زاویه‌ی بزرگتر در متوازی الاضلاع، کوچکتر از زاویه‌ی بزرگتر لوزی (120°) می‌باشد.

تمرین : نشان دهید در متوازی الاضلاعی که هر کدام از شرایط زیر برایش برقرار باشد، لوزی است.

الف) قطرها بر هم عمود باشند. **ب) قطرها نیمساز زاویه‌ها باشند.**

▼ مثال۵۸ : کدام یک از تعریف‌های زیر، تعریف لوزی نیست؟ (سراسری ریاضی- ۶۲)

۱) متوازی الاضلاعی که اضلاعش با هم مساوی‌اند. ۲) متوازی الاضلاعی که اقطارش بر هم عمودند.

۳) متوازی الاضلاعی که اقطارش منصف یکدیگرند. ٤) متوازی الاضلاعی که قطرهایش نیمساز زوایا باشند.

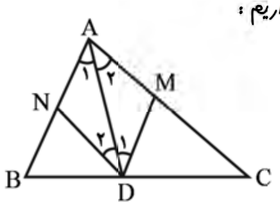
☑ **پاسخ**: ***با توجه به مطالب پیشین، تنها گزینه‌ی*** *(۳) تعریف لوزی نیست. در واقع در **گزینه‌ی** (۳) تعریف متوازی الاضلاع بیان شده است.*

▼ مثال۵۹ : در مثلث ABC، از نقطه‌ی D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه‌ی A با ضلع BC، خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن را در M و N قطع کنند، MN و AD نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (سراسری تجربی- ۷۸)

۱) فقط عمود بر هم ۲) فقط منصف هم

۳) زاویه‌ی بین آنها مکمل$\widehat{A}$ ٤) عمود منصف هم

☑ **پاسخ**: ***ابتدا دقت کنید که نیمساز*** *AD زاویه‌ی A را به دو زاویه‌ی برابر $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ تقسیم می‌کند. مطابق شکل داریم :*



$$\begin{cases} DM \| AB,\ \text{مورب } AD \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \widehat{D}_1 = \widehat{A}_1 \\ DN \| AC,\ \text{مورب } AD \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \widehat{D}_2 = \widehat{A}_2 \end{cases} \Rightarrow \text{AMDN متوازی الاضلاع است}$$

پس در متوازی الاضلاع AMDN، قطر AD نیمساز زوایای $\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ است و این موضوع فقط موقعی می‌تواند برقرار باشد که AMDN لوزی باشد که در آن صورت قطرهایش یعنی MN و AD هم منصف و هم بر هم عمودند.

گزینه (۴) صحیح است.

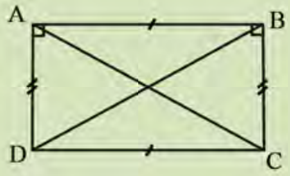
مستطیل : متوازی الاضلاعی است که یک **زاویه‌ی** قائمه دارد.

توجه : (۱) به طور کلی، مستطیل به چهارضلعی‌ای گفته می‌شود که چهار زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

(۲) از آنجا که مستطیل، متوازی الاضلاع است، پس تمام خواص متوازی الاضلاع در مورد آن برقرار است.

قضیه : در هر مستطیل، **قطرها با هم برابرند.**

اثبات : دو مثلث قائم **الزاویه**ی ABD و ABC همنهشت‌اند، زیرا :



$$\begin{cases} AB(\text{ضلع مشترک}) \\ \hat{A}=\hat{B}=۹۰^\circ \\ AD=BC \end{cases} \xrightarrow{\text{ض زض}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ABC}$$

در دو مثلث همنهشت ABD و ABC داریم AC = BD، یعنی قطرهای مستطیل با هم برابرند.

تمرین : نشان دهید که متوازی الاضلاع با دو قطر برابر، مستطیل است.

مربع : مربع را هم به **عنوان حالت خاص مستطیل می**‌شود بیان کرد و هم به عنوان حالت خاص لوزی.

(**مربع به عنوان حالت خاص مستطیل**) مستطیلی است که دو ضلع مجاورش با هم برابر است.

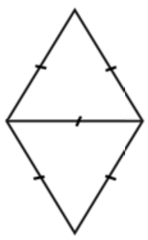
(**مربع به عنوان حالت خاص لوزی**) لوزی‌ای است که یک زاویه قائمه دارد.

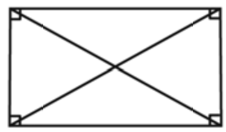
نتیجه : مربع هم مستطیل است و **هم لوزی (و به طور کلی حالت خاصی از متوازی الاضلاع)، پس تمام خواص آنها را دارد.**

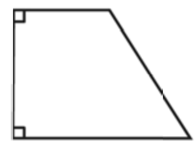
▼ **مثال ۶۰ : کدام مورد، یک مربع را مشخص می‌کند؟** (آزاد -۷۵)

۱) لوزی که یک قطرش با ضلع آن برابر باشد.
۲) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشد.
۳) متوازی الاضلاعی که دو قطرش مساوی باشند.
۴) ذوزنقه‌ای که دو زاویه‌ی قائمه داشته باشد.

☑ **پاسخ:** *برای گزینه‌های ۱، ۳ و ۴، می‌توان شکل‌های زیر را رسم کرد که هیچ کدام مربع نیست.*

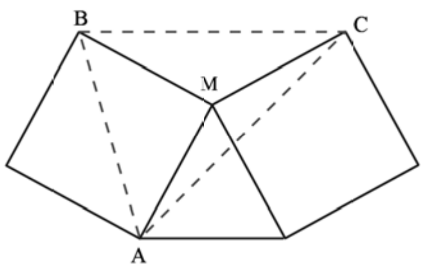

گزینه ۱:


گزینه ۳:


گزینه ۴:

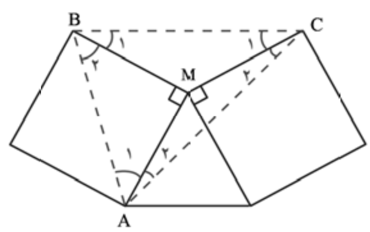
در گزینه (۲)، مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود است، منظور همان مستطیلی است که لوزی نیز باشد، یعنی مربع است.

▼ **مثال ۶۱ : در شکل زیر روی اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع، دو مربع بنا کرده‌ایم.** بزرگترین زاویه‌ی مثلث ABC چند برابر کوچکترین زاویه‌ی آن است؟



۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۴}{۳}$
۴) $\frac{۵}{۲}$

☑ **پاسخ:** *با توجه به فرض و شکل روبه‌رو، اضلاع مربع و مثلث با هم برابر هستند، پس :*



$$B\widehat{M}C = ۳۶۰^\circ - (۹۰^\circ + ۶۰^\circ + ۹۰^\circ) = ۱۲۰^\circ$$

$$(\text{متساوی الساقین})\ \overset{\Delta}{BMC} : \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

$$(\text{قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین})\ \overset{\Delta}{BMA} : \hat{B}_۲ = \hat{A}_۱ = \frac{۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ$$

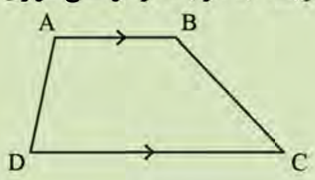
$$\overset{\Delta}{\mathrm{AMC}}: A\widehat{M}C = ۶۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۲ = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$ (قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین)

***پس** زوایای مثلث **ABC** عبارتند از :*

$$\begin{cases} \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = ۳۰^\circ + ۴۵^\circ = ۷۵^\circ \leftarrow \text{بیشترین} \\ \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۳۰^\circ + ۱۵^\circ = ۴۵^\circ \leftarrow \text{کمترین} \\ \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۴۵^\circ + ۱۵^\circ = ۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{۷۵^\circ}{۴۵^\circ} = \frac{۵}{۳}$$

***گزینه (۱)** صحیح است.*

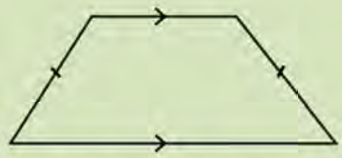
ذوزنقه : به چهارضلعی **که فقط** دو ضلع موازی دارد، **ذوزنقه می**گویند. **به هر یک از دو ضلع موازی آن،** «قاعده» و به دو ضلع غیر موازی آن، **«**ساق**»** گفته می‌شود.



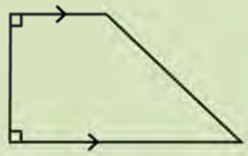
$$\begin{cases} \text{ساق ها} \rightarrow AD, BC \\ \text{قاعده ها} \rightarrow AB, CD \end{cases}$$

ذوزنقه‌ی متساوی الساقین : ذوزنقه‌ای است که دو ساق **برابر است.**

ذوزنقه‌ی قائم الزاویه : ذوزنقه‌ای است **که یکی از ساق**هایش بر دو قاعده‌ی آن عمود است.



ذوزنقه ی متساوی الساقین



ذوزنقه ی قائم الزاویه

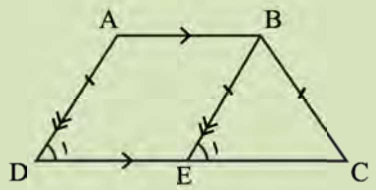
قضیه : در هر ذوزنقه‌ی متساوی الساقین،

(اولاً) **دو زاویه‌ی** مجاور **به یک قاعده با هم برابرند.**

(ثانیاً) **قطرها** با هم **برابرند.**

(ثالثاً) محل **برخورد قطرها، رأس دو مثلث متساوی الساقین است.**

اثبات : فقط قسمت **اول را ثابت می**‌کنیم و اثبات دو **قسمت دیگر را به عنوان تمرین** رها می‌کنیم.



مطابق شکل، **از** B **خطی موازی ساق** AD رسم می‌کنیم **تا** قاعده‌ی CD را در E قطع کند.

چهارضلعی ABED متوازی الاضلاع است، **در نتیجه** $\hat{E}_۱ = \hat{D}_۱$ و BE = AD.

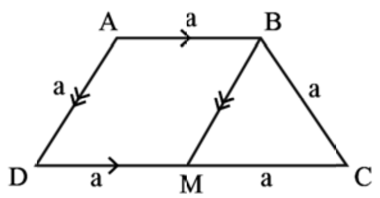
از **طرفی** AD = BC، پس BE = BC و در نتیجه مثلث BEC در رأس B متساوی الساقین است **و داریم** $\hat{C} = \hat{E}_۱ = \hat{D}_۱$.

به طریق **مشابه ثابت می**شود که $\hat{A} = \hat{B}$.

▼ **مثال۶۲ : در یک ذوزنقه‌ی متساوی الساقین، قاعده‌ی کوچک با هر ساق برابر و قاعده‌ی بزرگ دو برابر هر یک از آن‌هاست. اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی این ذوزنقه چند درجه است؟** (سراسری ریاضی- ۷٤)

۱) ۳۰ ۲) ٤۵

۳) ۶۰ ٤) ۷۵



☑ ***پاسخ**:مطابق شکل، **از رأس** B **خطی** موازی ساق AD **رسم تا متوازی الاضلاع** ABMD پدید آید. با **توجه به فرض، طول ساق**ها و قاعده‌ی کوچک را برابر a و طول قاعده‌ی بزرگ را برابر*

۲a در نظر می‌گیریم.

در متوازی الاضلاع **ABMD** داریم $BM = AD = a$ و $DM=AB=a$ و در نتیجه $MC = DC - DM = a$.

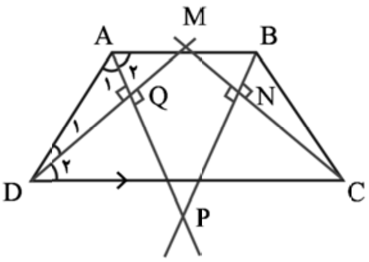
پس مثلث BMC متساوی الاضلاع است و در نتیجه $\hat{C} = ۶۰^\circ$، یعنی زوایای حاده‌ی این ذوزنقه برابر ۶۰° و زوایای منفرجه‌ی آن برابر ۱۲۰° است.

گزینه (۳) صحیح است.

▼ **مثال ۶۳: در یک ذوزنقه‌ی متساوی الساقین، از برخورد نیمسازهای داخلی، کدام چهارضلعی حاصل می‌شود؟** (سراسری ریاضی- ۸۸)

۱) مستطیل ۲) چهار ضلعی با زوایای مکمل روبه‌رو

۳) متوازی الاضلاع ۴) لوزی



☑ **پاسخ:** مطابق شکل، چهارضلعی حاصل را MNPQ می‌نامیم. نیمسازهای دو زاویه‌ی مکمل $\hat{A}$ و $\hat{D}$ در نقطه‌ی Q متقاطع‌اند. پس:

$$\hat{A}_۱ = \frac{\hat{A}}{۲}, \hat{D}_۱ = \frac{\hat{D}}{۲} \Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{D}_۱ = \frac{\hat{A} + \hat{D}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

پس $\hat{Q} = ۹۰^\circ$، به طریق مشابه نیز $\hat{N} = ۹۰^\circ$ خواهد شد.

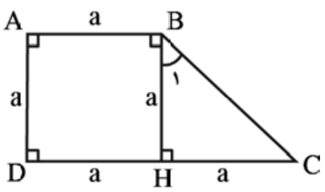
لذا در چهارضلعی **MNPQ** زوایای روبه‌روی $\hat{Q}$ و $\hat{N}$ مکمل هم هستند

و $\hat{P} + \hat{M} = ۳۶۰ - (\hat{N} + \hat{Q}) = ۱۸۰$، بنابراین $\hat{P}$، $\hat{M}$ نیز مکمل هستند.

گزینه (۲) صحیح است.

▼ **مثال ۶۴: در یک ذوزنقه‌ی قائم الزاویه، قاعده‌ی کوچکتر با ساق قائم برابر و هر دوی آنها نصف قاعده‌ی بزرگتر هستند. اندازه‌ی بزرگترین زاویه‌ی این ذوزنقه چند درجه است؟**

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰



☑ **پاسخ:** طبق فرض و شکل روبه‌رو **AB = AD = a** و **CD = ۲a** است.

از رأس B خط عمود بر قاعده‌ی CD (در واقع موازی با ساق AD) رسم می‌کنیم.

چهارضلعی **ABHD** مربع بوده و تمامی اضلاع آن برابر **a** است. مثلث **BHC** از نوع قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین است و در نتیجه:

$$\hat{C} = \hat{B}_۱ = \frac{۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ$$

پس زوایای ذوزنقه عبارتند از: ۹۰°، ۹۰°، ۴۵° و ۱۳۵°.

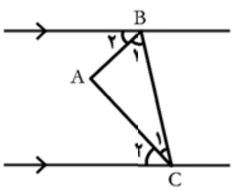
گزینه (۳) صحیح است.

آزمون

۱- **زاویه‌های A و B مکملند، اگر زاویه‌ی A دو برابر زاویه‌ی B باشد، حاصل $۲\hat{A} - ۳\hat{B}$ چقدر است؟** (آزاد- ۷۸)

۱) ۹۰° ۲) ۳۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۶۰°

۲- **در شکل روبه‌رو، اگر $\hat{B}_۱ = \hat{B}_۲$ و $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$، آنگاه اندازه‌ی زاویه‌ی A کدام است؟**



۱) ۶۰°

۲) ۷۵°

۲) ۷۵°

۳) ۹۰°

۴) ۱۰۵°

۳- در مثلث ABC، زاویه‌های خارجی B و C به ترتیب ۱۲۰° و α° و زاویه‌ی بین نیمسازهای این دو زاویه‌ی خارجی ۴۵° است، α چقدر است؟ (آزاد – ۶۶)

۱) ۱۵۰° ۲) ۱۲۰° ۳) ۹۰° ۴) ۷۵°

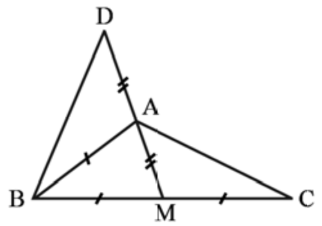
۴- اگر $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ زاویه‌های یک مثلث به ترتیب با اعداد ۱ ، ۲ و ۳ متناسب باشند و نیم‌سازهای داخلی در نقطه‌ی D متقاطع باشند، زاویه‌ی $A\hat{D}C$ کدام است؟ (آزاد – ۷۶)

۱) ۱۴۵° ۲) ۱۲۰° ۳) ۹۵° ۴) ۱۴۰°

۵ – در شکل مقابل $\hat{D}+\hat{C}=۶۱^\circ$، اندازه‌ی زاویه‌ی ABC چند درجه است؟

(سراسری تجربی – ۸۹)

۱) ۳۹
۲) ۵۶
۳) ۵۸
۴) ۶۱



۶- در صفحه‌ی یک مثلث، چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آنها به یک فاصله باشند؟

(سراسری تجربی – ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

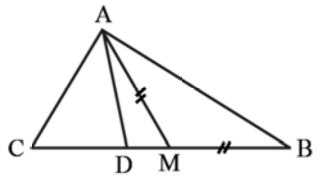
۷- در شکل زیر، AD نیمساز زاویه‌ی A و AM=MB است. اگر $\hat{B}=۳۰^\circ$ و $D\hat{A}M=۲۰^\circ$، زاویه‌ی $\hat{C}$ چقدر است؟ (آزاد – ۸۲)

۱) ۳۰°

۲) ۴۰°

۳) ۵۰°

۴) ۲۰°

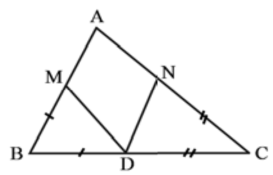


۸- در مثلث ABC داریم AB=AC و $\hat{A}=۸۰^\circ$ ، عمود منصف‌های دو ساق مثلث، قاعده‌ی BC را در M و N قطع می‌کند. کوچکترین زاویه‌ی مثلث AMN چند درجه است؟ (سراسری تجربی – ۹۲)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۹- در شکل مقابل $\hat{A}=۵۸^\circ$، BM=BD و CN=CD ، زاویه‌ی MDN چند درجه است؟ (سراسری ریاضی – ۹۱)

۱) ۵۸
۲) ۵۹
۳) ۶۱
۴) ۶۲



۱۰ – کدام گزینه صحیح است؟ (آزاد – ۷۱)

۱) م ی است.

۲) ه ود ست.

۳) ه ربع است.

۴) هر ذوزنقه که یک زاویه قائمه داشته باشد، مربع است.

پاسخ‌نامه

۱- ینه ۴ صحیح است.

فرض، A و $\hat{B}$ مکملند ، پس : $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ$ (۱)

همچنین طبق فرض سؤال: $\hat{A}=2\hat{B}$ (۲)

$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}\hat{\ }+\quad=180^\circ\\ \hat{A}=2\hat{B}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\quad=60^\circ\\ \hat{A}=120^\circ\end{cases}$$

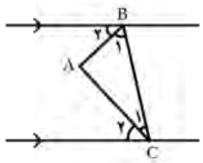
$$\Rightarrow 2\hat{A}-3\hat{B}=240^\circ-180^\circ=60^\circ$$

۲- گزینه ۳ صحیح است.

براساس قضیه خطوط موازی و مورب داریم:

$$\hat{B}_1+\hat{B}_2+\hat{C}_1+\hat{C}\ =180^\circ$$

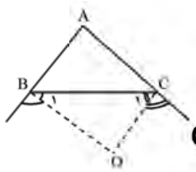
چون $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$، پس داریم:



$$2\hat{B}_1+2\hat{C}_1=180\Rightarrow\hat{B}_1+\hat{C}_1=90\Rightarrow\hat{A}=90^\circ$$

۳- لزینه ۱ .

با تو درسنامه داریم:



$$\hat{O}=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$$

طبق فرض : $\hat{O}=45^\circ=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}\Rightarrow\frac{\hat{A}}{2}=45^\circ\Rightarrow\hat{A}=90^\circ$

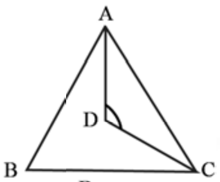
$$\begin{cases}\hat{B}\ \text{زاویه خارجی}=120^\circ\Longrightarrow 180^\circ-\hat{B}=120^\circ\Longrightarrow\hat{B}=60^\circ\\ \hat{C}\ \text{زاویه خارجی}=\alpha\Longrightarrow 180^\circ-\hat{C}=\alpha\Longrightarrow\hat{C}=180^\circ-\alpha\end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}:\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow 90^\circ+60^\circ+(180^\circ-\alpha)=180^\circ\Rightarrow\alpha=150^\circ$$

۴ گزینه ۲ صحیح است.

طبق فرض زاویه‌های مثلث را به صورت A ، $\hat{B}=2\hat{A}$ و $\hat{C}=3\hat{A}$ در نظر می‌گیریم ، پس :

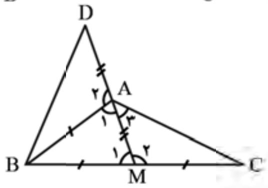
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow 6\hat{A}=180^\circ\Rightarrow\hat{A}=30^\circ,\hat{B}=60^\circ,\hat{C}=90^\circ$$



لل و متن درسنامه داریم:

$$A\hat{D}C=90^\circ+\frac{B}{2}=90+\frac{60^\circ}{2}\ =120^\circ$$

۵- گزینه صحیح است.



با توجه به شکل داریم:

$$AB=BM\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{M}_1\xrightarrow{\text{مکمل‌ها}}\hat{A}_2=\hat{M}_2$$

دو مثلث **ABD** و **AMC** به حالت (ض‌ز‌ض) با هم همنهشت هستند و در نتیجه $\hat{A}_3=\hat{D}$.

طبق فرض: $\hat{D}+\hat{C}=61^\circ\Rightarrow\hat{A}_3+\hat{C}=61^\circ$

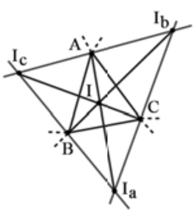
AMC زاویه‌خارجی: $\hat{M}_1=\hat{A}_3+\hat{C}=61^\circ\Rightarrow\hat{A}_1=61^\circ$

در مثلث **ABM** داریم:

$$\hat{A}_1+\hat{M}_1+A\hat{B}C=180^\circ\Rightarrow A\hat{B}C=180^\circ-2\times61^\circ=58^\circ$$

۶- گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به تعریف نیمساز اویه، ۴ نقطه در صفحه‌ی مثلث **ABC** وجود دارد که از اضلاع آن به یک فاصله است.



۱) نقطه **I**: بر خورد نیمسازهای داخلی $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{C}$

۲) نقطه a : نیمسازهای خارجی $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{C}$ و داخلی $\boldsymbol{A}$

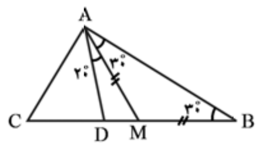
۳) نقطه b : نیمسازهای خارجی $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{C}$ و داخلی $\boldsymbol{B}$

۴) نقطه **I** : نیمسازهای خارجی $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ و داخلی $\boldsymbol{C}$

۷- گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} AM = MB \Rightarrow M\hat{A}B = \hat{B} \quad ۳۰^\circ \\ \text{طبق فرض}: D\hat{A}M = ۲۰^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D\hat{A}B = D\hat{A}M + M\hat{A}B = ۲۰^\circ + ۳۰^\circ = ۵۰^\circ$$



چون AD نیمساز $\hat{A}$ است، پس $\hat{A} = ۱۰۰^\circ$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۰۰^\circ + ۳۰^\circ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۵۰^\circ$$

۸- گزینه ۲ صحیح است.

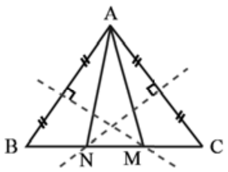
$$\hat{A} = ۸۰^\circ \ , AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ$$

پاره خط، از دو سر آن پاره خط

به یک فاصله است، پس :

$$\begin{cases} MA = MB \Rightarrow A\hat{M}B = ۱۸۰^\circ - ۲(۵۰^\circ) = ۸۰^\circ \\ NA = NC \Rightarrow A\hat{N}C = ۱۸۰^\circ - ۲(۵۰^\circ) = ۸۰^\circ \end{cases}$$

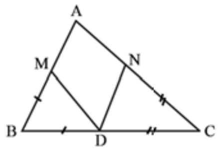
$$\xrightarrow{\overset{\Delta}{AMN}} M\hat{A}N = ۱۸۰^\circ - ۲(۸۰^\circ) = ۲۰^\circ$$



۹- گزینه صحیح است.

با توجه به متن درسنامه داریم:

$$M\hat{D}N = ۹۰^\circ - \frac{A}{۲}$$



$$\Rightarrow M\hat{D}N = ۹۰^\circ - \frac{۵۸^\circ}{۲} = ۹۰^\circ - ۲۹^\circ = ۶۱^\circ$$

۱۰- گزینه ۱ صحیح است.

شکل‌های زیر نشان می‌دهند که گزینه‌های ۲ ، و ۴ نادرست هستند.