

## مجموعه ها (جبر و احتمال)

درسنامه جامع , نکات آموزشی و کنکوری

همراه با تست های سراسری داخل و خارج از کشور و جامع سنجش

1380-93

ویژه ی داوطلبان رشته ی ریاضی

مؤلف : ابراهیم پناهی

دانشجوی دکتری مهندسی برق مخابرات

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس کنکور

و دبیر دبیرستان های تهران

شماره تماس : 09196025850 — ایمیل : [Panahisaeed59@yahoo.com](mailto:Panahisaeed59@yahoo.com)

مرداد ماه 1393

مقدمه مولف :

مجموعه ای که پیش روی شماست حاصل تلاش و زحمات شبانه روزی اینجانب طی دو سال اخیر هست که به مرور زمان و با دقت و مطابق نیاز داوطلبان رشته ی ریاضی برای آمادگی در آزمون سراسری تهیه گردیده است.

عوامل مهمی باعث نگارش این مجموعه شده است، یکی این که در اکثر کتاب های کمک آموزشی و شاید بشه گفت همه ی آنها تست های ارائه شده و تهیه شده برای داوطلبان عزیز کنکور به صورت مخلوط و غیراستاندارد است.

عدم استاندارد بودن تست ها یکی از عواملی است که در تمرکز داوطلبان کنکور نقشی بسیار منفی دارد. دیگه اینکه تمام چیزایی رو که یک داوطلب کنکور با دانستن و رعایت آنها می تونه درس ریاضی را 100٪ بزنده در این کتاب آورده شده است.

البته تعدادی تست های تالیفی نیز در این مجموعه برای تسلط بی قیدوشرط شما دانش آموزان گرامی بر درس جبروا احتمال که حدود 15 درصد تست های کنکور سراسری را شامل می شود نیز در این مجموعه گردآوری شده است. شاید برخی از شماها بگید که در این صورت و در نبود تست های تالیفی ممکنه با کمبود تست مواجه شوید. اما می تونید یک تست رو چندین بار حل کنید خوب. تکرار و تمرین خودش یکی از عوامل موفقیت طی هر فرایندی ست.

در مجموعه ی آموزشی که پیش روی شماست ، تمام سعی اینجانب بر این بوده است که برای همه ی مباحث روش هایی و راهکارهایی سریع که شما داوطلبان را در کوتاه ترین زمان ممکن به پاسخ صحیح می رساند ارائه شده است. البته این راهکارها و ترفندها در همه ی مباحث درسی و در بخش های مختلف ارائه شده است.

توصیه ی بنده به همه ی داوطلبان عزیز این است که برای اینکه به بهترین رتبه های کنکور نائل شوید فقط یادگیری مطالب و حتی تسلط کامل بر مباحث نیز نمی تواند ضامن موفقیت شما در کنکور باشد. اگر قصد دارید جزو رتبه های برتر کنکور باشید سعی کنید علاوه بر تسلط کافی بر مباحث یک سری فاکتورها را در وجود خود تقویت کنید. فاکتورهایی مانند (افزایش قدرت محاسباتی – پرهیز از نوشتن تا حد ممکن – تکنیک های محاسباتی و ...).

امیدوارم که مجموعه ی تهیه شده که در خدمت شما داوطلبان عزیز و گرامی قرار می گیرد موجب رضایت شما داوطلبان عزیز قرار گیرد.

مبحث مجموعه ها یکی از مباحث مهم ریاضیات است که در فصل دوم کتاب جبر و احتمال به آن پرداخته شده است و معمولاً سه سوال از آن در آزمون کنکور سراسری برای شما داوطلبان ریاضی طرح می شود.

پس مبحث مهمی بوده و شما داوطلبان و دانش آموزان گرامی باید به اندازه ی کافی برای این مبحث وقت صرف کنید.

این مجموعه را به روح خواهر عزیزم و تمام کسانی که از بدو تاریخ تاکنون جان خویش را در راه اعتلای ایران عزیز نثار نموده اند تقدیم می کنم.

داوطلبان عزیز می توانند برای تهیه ی جزوات کنکوری به صورت موضوعی و کلاس خصوصی با اینجانب تماس بگیرید.

موفق باشید.

\*برای تهیه ی پکیج کامل جزوه های رشته ی ریاضی و تجربی می توانید با شماره ی 09196025850 و یا با ایمیل [Panahisaeed59@yahoo.com](mailto:Panahisaeed59@yahoo.com) با اینجانب در تماس باشید.

#### جزوه های رشته ی ریاضی

(دنباله ی حسابی و هندسی - تابع و ویژگی های آن - ماتریس مرتبه ی دو - حل تست های مثلثات 13 سال اخیر بدون استفاده از یک فرمول - ترکیبات - هندسه ی 1 (زاویه و مثلث - مساحت و قضیه ی فیثاغورس - تشابه و قضیه ی تالس - شکل های فضایی) - هندسه ی 2) استدلال در هندسه - دایره - تبدیلات - صفحه و فضا) - استدلال ریاضی (جبر و احتمال) - جبر مجموعه ها - احتمال - بسط دوجمله ای - معادلات و توابع درجه ی 2 - بخش پذیری - لگاریتم و توابع نمایی - نامعادلات و تعیین علامت - حد و پیوستگی - مشتق و کاربرد آن - دنباله ها - انتگرال - گراف - نظریه ی اعداد - ترکیبات (ریاضیات گسسته) - بردارها (هندسه ی تحلیلی) - خط و صفحه در فضا - مقاطع مخروطی - ماتریس مرتبه ی سوم - نمودارها - آمار و مدل سازی و ...)

#### جزوه های رشته ی تجربی

(دنباله ی حسابی و هندسی - تابع و ویژگی های آن - ماتریس مرتبه ی دو - حل تست های مثلثات 13 سال اخیر بدون استفاده از یک فرمول - ترکیبات - هندسه ی 1 (زاویه و مثلث - مساحت و قضیه ی فیثاغورس - تشابه و قضیه ی تالس - شکل های فضایی) - احتمال ویژه ی رشته ی تجربی - بسط دوجمله ای - معادلات و توابع درجه ی 2 - بخش پذیری - لگاریتم و توابع نمایی - نامعادلات و تعیین علامت - حد و پیوستگی - مشتق و کاربرد آن - دنباله ها - انتگرال ویژه ی رشته ی تجربی - بردارها (ویژه ی رشته ی تجربی) - هندسه ی مختصاتی و مقاطع مخروطی - نمودارها - آمار و مدل سازی و ...)

## \*مجموعه

به اجتماع و دسته ای از اشیاء معین و مشخص و متمایز ، مجموعه می گویند. مجموعه از مفاهیم اولیه ی ریاضی بوده و تعریفی جامع نمی توان برای آن ارائه نمود.

## \*گزاره نما

گزاره نما عبارتی است که شامل نمادی مانند  $x$  است که هرگاه هر عضوی مانند  $a \in A$  را به جای  $x$  قرار دهیم ، جمله ی حاصل یا به وضوح درست باشد یا نادرست. در این صورت گویند گزاره نما برای مجموعه ی  $A$  معتبر است.

## \*ویژگی ها و تعاریف اولیه در مورد یک مجموعه

- 1- تکرار اعضای مجموعه ، مجموعه را تغییر نمی دهد.
- 2- جابجایی اعضای مجموعه ، مجموعه را تغییر نمی دهد.
- 3- اگر شیء  $x$  عضو مجموعه ی  $A$  باشد ، می نویسیم  $x \in A$  و در غیر این صورت  $x \notin A$ .
- 4- مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را تهی نامیده و با علامت  $\emptyset$  یا  $\{ \}$  نمایش می دهند.
- 5- دو مجموعه را مساوی می گویند هرگاه اعضای هر دو مجموعه یکسان باشد.
- 6- مجموعه ی  $B$  را زیرمجموعه ی مجموعه ی  $A$  می نامند هرگاه هر عضو متعلق به مجموعه ی  $B$  متعلق به مجموعه ی  $A$  نیز باشد و می نویسند :  $B \subset A$
- 7- هر مجموعه ، زیرمجموعه ی خودش است.
- 8- مجموعه ی تهی زیرمجموعه ی تمام مجموعه هاست.
- 9- اگر  $A \subset B$  و  $B \subset C$  ، آنگاه می توان گفت :  $A \subset C$ .
- 10- اگر  $A \subset B$  و  $B \subset A$  باشد آنگاه :  $A = B$ .
- 11- تعداد کل زیرمجموعه های هر مجموعه ی  $n$  عضوی از رابطه ی  $2^n$  به دست می آید.
- 12- تعداد زیرمجموعه های  $r$  عضوی از یک مجموعه ی  $n$  عضوی از رابطه ی  $\binom{n}{r}$  محاسبه می شود.
- 13- هر زیرمجموعه از یک مجموعه که با خود آن مجموعه برابر نباشد را زیرمجموعه ی محض یا سره می نامند و تعداد آن از رابطه ی  $2^n - 1$  به دست می آید.
- 14- مجموعه ی تهی زیرمجموعه ی سره ندارد.

15- در نظریه ی مجموعه ها ، همه ی مجموعه های مورد بررسی ، زیرمجموعه ی یک مجموعه به نام مجموعه ی مرجع می باشند و با حرف M یا U نشان می دهند.

16- یک مجموعه ی n عضوی دارای  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \dots + \binom{n}{n}$  زیرمجموعه ی حداقل k عضوی است.

17- مجموعه ای که تعداد اعضای آن نامحدود باشد را نامتناهی نامیده و تعداد زیرمجموعه های آن نامشخص است.

18 - تعداد زیرمجموعه های r عضوی یک مجموعه ی n عضوی حاوی k عضو معین از رابطه ی  $\binom{n-k}{r-k}$  و فاقد k عضو معین از رابطه ی  $\binom{n-k}{r}$  به دست می آید.

مثال 1: مجموعه ی  $k = \{1,2,3,4,5,6\}$  چند زیرمجموعه ی حداقل 3 عضوی دارد؟

68(4

64 (3

42 (2

32 (1

پاسخ: گزینه ی 2 صحیح است.

همانطور که گفته شد هر مجموعه ی n عضوی دارای  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \dots + \binom{n}{n}$  زیرمجموعه ی حداقل k عضوی است.

$$k = 3 \rightarrow \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{6 \times 5}{2} + 6 + 1 = 20 + 15 + 6 + 1 = 42$$

مثال 2: اگر 3 عضو از اعضای مجموعه ای را حذف کنیم ، از تعداد زیرمجموعه های آن 896 واحد کاسته می شود. این مجموعه چند عضو دارد؟

12(4

11 (3

10 (2

9 (1

پاسخ: گزینه ی 2 صحیح است.

می دانیم که تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی n عضوی از رابطه ی  $2^n$  به دست می آید. با توجه به این نکته می توان نوشت :

$$2^n = 896 + 2^{n-3} \rightarrow 2^n - 2^{n-3} = 896 \rightarrow 2^{n-3}(2^3 - 1) = 896 \rightarrow 2^{n-3} = \frac{896}{7} = 128 = 2^7 \rightarrow n - 3 = 7 \rightarrow n = 10$$

مثال 3 : کدامیک از مجموعه های داده شده ، با سایر مجموعه ها مساوی نیست؟

$$B = \{m \in \mathbb{Z} | m^2 > 2m\} \quad (2)$$

$$A = \{m \in \mathbb{Z} | |m| > 1\} \quad (1)$$

$$A = \left\{m \in \mathbb{Z} \left| \frac{2-m}{1+m} \leq 0 \right.\right\} \quad (4)$$

$$C = \{m \in \mathbb{Z} | m^3 \neq m\} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ی 2 صحیح است.

$$\left( \begin{array}{l} |m| > 1 : m > 1 \text{ or } m < -1 \rightarrow A = Z - \{-1, 0, 1\} \\ m^2 > 2m : m^2 - 2m > 0 : m(m-2) > 0 \rightarrow m > 2, m < 0 \rightarrow B = Z - \{0, 1, 2\} \\ m^3 \neq m : m^3 - m \neq 0 : m(m^2 - 1) \neq 0 \rightarrow m \neq 0, 1, -1 \rightarrow C = Z - \{0, 1, -1\} \\ \frac{2-m}{1+m} \leq 0 : m \geq 2, m < -1 : D = Z - \{0, -1, 1\} \end{array} \right.$$

مثال 4 : تعداد زیرمجموعه های 4 عضوی مجموعه ی اعداد طبیعی یک رقمی که شامل همه ی اعداد بخش پذیر بر 3 باشد , برابر کدام است؟

- 5 (1) 6 (2) 7 (3) 8 (4)

پاسخ: گزینه ی 2 صحیح است.

همانطور که می دانیم کل اعداد طبیعی یک رقمی شامل نه رقم 1 تا 9 می باشد . حال اگر قرار باشد زیرمجموعه های 4 عضوی از این مجموعه ی اعداد را که شامل سه رقم 3 و 6 و 9 که مضربی از عدد 3 هستند را محاسبه کنیم به صورت زیر عمل می کنیم :

$$n = 9, r = 4, k = 3 : \binom{n-k}{r-k} = \binom{9-3}{4-3} = \binom{6}{1} = 6$$

مثال 5 : تعداد زیرمجموعه های 5 عضوی مجموعه ی اعداد طبیعی یک رقمی که فاقد اعداد فرد اول یک رقمی باشد , برابر کدام است؟

- 5 (1) 6 (2) 7 (3) 8 (4)

پاسخ: گزینه ی 2 صحیح است.

همانطور که می دانیم کل اعداد طبیعی یک رقمی شامل نه رقم 1 تا 9 می باشد . حال اگر قرار باشد زیرمجموعه های 5 عضوی از این مجموعه ی اعداد را که فاقد سه رقم 3 و 5 و 7 که اعداد اول فرد یک رقمی هستند را محاسبه کنیم به صورت زیر عمل می کنیم :

$$n = 9, r = 5, k = 3 : \binom{n-k}{r} = \binom{9-3}{5} = \binom{6}{5} = 6$$

مثال 6 : اگر مجموعه ی  $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  باشد , آن گاه مجموعه ی  $A - \{a, b\}$  چند زیرمجموعه ی سره ی غیر تهی دارد؟

- 12 (1) 13 (2) 14 (3) 15 (4)

پاسخ: گزینه ی 4 صحیح است.

همانطور که می دانیم تعداد زیرمجموعه های سره یا محض یک مجموعه ی  $n$  عضوی از رابطه ی  $2^n - 1$  به دست می آید که اگر زیرمجموعه ی تهی را نیز از آنها حذف کنیم , آن گاه تعدادشان به  $2^n - 2$  تقلیل خواهد یافت.

$$A - \{a, b\} = \{a, b, \{a\}, \{b\}\} \rightarrow n = 4 : 2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$$

## \*مجموعه ی توانی

مجموعه ی همه ی زیرمجموعه های یک مجموعه را مجموعه ی توانی آن مجموعه می نامند و با  $P(A)$  نمایش می دهند. و برای یک مجموعه ی  $n$  عضوی از رابطه ی  $2^n$  به دست می آید.

\*چند نکته در مورد مجموعه ی توانی :

1- اگر مجموعه ی  $A$  دارای  $n$  عضو باشد، آن گاه مجموعه ی  $P(A)$  دارای  $2^n$  عضو و بالطبع دارای  $2^{2^n}$  زیرمجموعه خواهد بود.

2- برای دو مجموعه ی دلخواه  $A, B$  همواره داریم:  $A \subseteq B \rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

$$3 - P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

4 -  $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$  و الزامی وجود ندارد که رابطه ی  $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$  حتما برقرار باشد.

مثال 7: اگر  $A$  یک مجموعه ی 3 عضوی باشد، آن گاه مجموعه ی زیرمجموعه های آن چند زیرمجموعه دارد؟

512(4

256 (3

128 (2

64 (1

پاسخ: گزینه ی 3 صحیح است.

می دانیم که منظور از مجموعه ی زیرمجموعه های یک مجموعه، همان  $P(A)$  مجموعه ی توانی می باشد.

مجموعه ی توانی نیز دارای  $2^3 = 2^8 = 256$  زیرمجموعه می باشد.

مثال 8: اگر  $A$  مجموعه ی اعداد دورقمی فرد و  $B = \{9k | k \in A\}$ ، آنگاه مجموعه ی توانی  $A \cap B$  چند عضو دارد؟

8 (4

6 (3

4 (2

2 (1

پاسخ: گزینه ی 2 صحیح است.

$$A = \{11, 13, 15, \dots, 99\}, B = \{77, 91\} \rightarrow n(A \cap B) = 2$$

تعداد اعضای یک مجموعه ی توانی  $n$  عضوی از رابطه ی  $2^n$  به دست می آید و چون مجموعه ی مورد نظر 2 عضو دارد جواب مطلوب تست مفروض نیز به صورت  $2^2 = 4$  محاسبه می شود.

مثال 9 : هر عضو کدامیک از مجموعه های داده شده ی زیر ، عضوی از مجموعه ی توانی همان مجموعه نیز محسوب می شود؟

$$(1) \{a, \{a, \{a\}\}\} \quad (2) \{a, \{\{a\}\}\} \quad (3) \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\} \quad (4) \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$$

پاسخ: گزینه ی 4 صحیح است.

هر عضو مجموعه ، عضوی از مجموعه ی توانی خود نیز باشد. یعنی اینکه در آن مجموعه ، هر عضو آن زیرمجموعه ی آن نیز باشد و این شرایط فقط در مجموعه ی داده شده در گزینه ی 4 برقرار است.

$$a \subseteq A, \quad \{a\} \subseteq A, \quad \{\{a\}\} \subseteq A$$

\*مجموعه ی مجزا

دو مجموعه را مجزا گویند هرگاه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند و  $A \cap B = \emptyset$

\*اجتماع دو مجموعه :

اجتماع دو مجموعه ی  $A$  و  $B$  را با  $A \cup B$  نمایش داده و آن را به صورت مجموعه ی تمام عضوهایی که حداقل به یکی از این دو مجموعه تعلق داشته باشند تعریف می کنند.

تعمیم اجتماع :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

\*اشتراک دو مجموعه :

اجتماع دو مجموعه ی  $A$  و  $B$  را با  $A \cap B$  نمایش داده و آن را به صورت مجموعه ی تمام عضوهایی که به هر دو مجموعه تعلق داشته باشند تعریف می کنند.

تعمیم اشتراک :

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

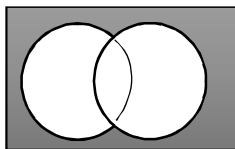
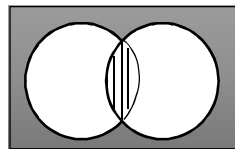


## \*نمودار ون :

این نمودار ، روشی برای نمایش مجموعه ها بوده و روشی بسیار سریع در حل برخی از تست های مطرح شده در مورد جبر مجموعه ها بوده و شما را از عملیات موجود در جبر مجموعه ها که در ادامه به این روابط اشاره نیز خواهیم نمود ، بی نیاز می سازد.

در این نمودار ، معمولا مجموعه ی مرجع را با یک مستطیل و سایر مجموعه ها را با اشکال هندسی دیگری و متداولاً دایره نشان داده و عملیات صورت گرفته روی مجموعه ها را با زدن هاشور مشخص می کنند.

M

 $A \cup B$  $A \cap B$ 

برای مثال در مورد عملیات اجتماع و اشتراک :

مثال 10 : مجموعه ی  $A_i = \left\{ \frac{i(i+1)}{2} \leq x \leq i^2 \right\}$  در مجموعه ی اعداد طبیعی تعریف شده است. مجموعه ی  $\bigcap_{i=5}^8 A_i$  چند عضو دارد؟

3 (4

2 (3

1 (2

1) صفر

☞ جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

$$A_5 = \{15, 16, 17, \dots, 25\}$$

$$A_6 = \{21, 22, 23, \dots, 36\}$$

$$A_7 = \{28, 29, 30, \dots, 49\}$$

$$A_8 = \{36, 37, 38, \dots, 64\}$$

$$\bigcap_{i=5}^8 A_i = A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8 = \emptyset \quad \text{فاقد عضو}$$

دقت داشته باشید که اشتراک مجموعه ها را باید دو به دو و به ترتیب به دست آوریم.

مثال 11 : مجموعه ی  $A_n = \left( \frac{-1}{n}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$  به صورت بازه تعریف شده است. مجموعه ی  $(A_3 \cap A_5) \cup A_2$  به کدام صورت است؟

(-1, +∞) (4

(-1, 1) (3

 $\left( \frac{-1}{5}, 3 \right)$  (2 $\left( \frac{-1}{2}, 1 \right)$  (2

☞ جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

$$A_3 = \left( \frac{-1}{n}, \frac{n(n-1)}{2} \right) = \left( \frac{-1}{3}, 3 \right) \quad \text{و} \quad A_5 = \left( \frac{-1}{5}, 10 \right) \quad \text{و} \quad A_2 = \left( \frac{-1}{2}, 1 \right)$$

$$(A_3 \cap A_5) \cup A_2 = \left( \left( \frac{-1}{3}, 3 \right) \cap \left( \frac{-1}{5}, 10 \right) \right) \cup \left( \frac{-1}{2}, 1 \right) = \left( \frac{-1}{5}, 3 \right) \cup \left( \frac{-1}{2}, 1 \right) = \left( \frac{-1}{5}, 3 \right)$$

\* آنچه که در مورد جبر مجموعه ها باید بدانیم

$$1) M' = \emptyset$$

$$3) (A)'' = A$$

$$5) A, B \subseteq (A \cup B)$$

$$7) A \subseteq B \rightarrow A \cup B = B,$$

$$9) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$11) A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$13) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$15) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$17) A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$$

$$19) A - B = A \cap B'$$

$$21) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$2) \emptyset' = M$$

$$4) A \subseteq B \rightarrow B' \subseteq A'$$

$$6) (A \cap B) \subseteq A, B$$

$$8) A \subseteq B \rightarrow A \cap B = A$$

$$10) A \cup \emptyset = \emptyset$$

$$12) A \cup U = U$$

$$14) A \cap U = A$$

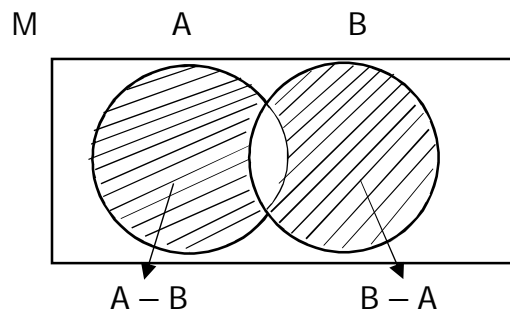
$$16) A \cup A' = U$$

$$18) A \cap A' = \emptyset$$

$$20) A - B = B' - A'$$

$$22) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

\* تفاضل دو مجموعه :



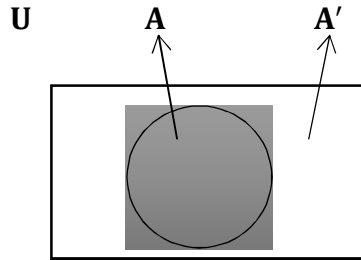
$A - B$  : تفاضل مجموعه ی  $B$  از  $A$ , مجموعه ی عضوهایی ست که به  $A$  تعلق دارند ولی در  $B$  وجود ندارند.

$B - A$  : تفاضل مجموعه ی  $A$  از  $B$ , مجموعه ی عضوهایی ست که به  $B$  تعلق دارند ولی در  $A$  وجود ندارند.

دقت داشته باشید که دو مجموعه ی  $A - B$  و  $B - A$  از هم مجزا هستند.

$$A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B = A \cap B' = B' - A'$$

\*متمم یک مجموعه :



متمم مجموعه ی  $A$  را نسبت به مجموعه ی جهانی  $U$  با  $A'$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنند :

$$A' = U - A$$

\*تفاضل متقارن دو مجموعه

تفاضل متقارن دو مجموعه ی  $A, B$  مجموعه ی اعضای است که متعلق به  $A$  یا متعلق به  $B$  است ، ولی به اشتراک دو مجموعه تعلق ندارد و آن را با  $A \Delta B$  نمایش داده و به صورت زیر بیان یا محاسبه می کنند :

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \text{ OR } (A - B) \cup (B - A)$$

\*روش شماره گذاری در حل مسائل مربوط به جبر مجموعه ها

هرگاه در عبارت جبری داده شده ، یک تساوی از مجموعه ها را داشته باشیم ، به صورت زیر عمل می کنیم :

- 1 - هر دو طرف تساوی را به صورت اجتماع مجموعه های جدا از هم می نویسیم.
- 2 - مجموعه های مساوی را از طرفین تساوی حذف می کنیم.
- 3 - مجموعه های باقیمانده را مساوی تهی قرار داده و رابطه ی داده شده را محاسبه می کنیم.
- 4 - به هر مجموعه شکلی دلخواه و معمولاً دایره نسبت داده و آن گاه به هر یک از مجموعه های مجزا از هم عددی را نسبت می دهیم و نهایتاً به کمک این اعداد رابطه ها را بازنویسی نموده و به ترتیب سه شماره ی قبلی عمل می کنیم.

مثال 12: برای سه مجموعه ی  $A$  و  $B$  و  $C$  رابطه ی  $(A - B) \subseteq (B \cap C)$  برقرار است. کدام رابطه الزاماً درست است؟

$$B \cap C = \emptyset \quad (4)$$

$$A \subseteq B \quad (3)$$

$$A \subseteq C \quad (2)$$

$$B = \emptyset \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ی 3 صحیح است.

$$\begin{cases} (A - B) \subseteq (B \cap C) \\ (B \cap C) \subseteq B \end{cases} \xrightarrow{\text{بدیهی}} (A - B) \subseteq B \stackrel{(A-B) \cap B = \emptyset}{=} \emptyset \xrightarrow{\text{الزاماً}} A - B = \emptyset \rightarrow A \subseteq B$$

مثال 13: متمم مجموعه ی  $(A - B)' - B$  نسبت به مجموعه ی جهانی  $U$  کدام است؟

$$B \cap C = \emptyset \quad (4)$$

$$A \subseteq B \quad (3)$$

$$A \subseteq C \quad (2)$$

$$A \cup B \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ی 1 صحیح است.

$$(A - B)' - B = (A - B)' \cap B' = ((A - B) \cup B)' = (A \cup B)' \stackrel{\text{متمم}}{\Rightarrow} A \cup B$$

مثال 14: اگر  $A \cap B \cap C = (A \Delta B) \Delta C$ , کدام یک از نتایج زیر درست است؟

$$A = \emptyset \quad (4)$$

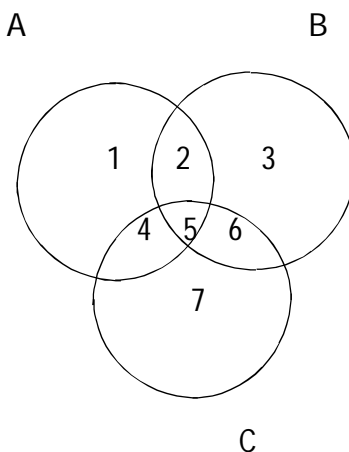
$$C \subseteq (A \cup B) \quad (3)$$

$$A \cap B \cap C = C \quad (2)$$

$$B = C \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از روش شماره گذاری تست داده شده را حل می کنیم تا با نحوه ی حل مسائل جبر مجموعه ها به این روش نیز آشنا شوید.



طبق رابطه ی  $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$  می دانیم که تفاضل متقارن دو مجموعه، قسمت مشترک را حذف کرده و بقیه را نگه می دارد.

$$A \cap B \cap C = 5$$

$$A \Delta B = (1, 2, 3, 4, 5, 6) - (2, 5) = (1, 3, 4, 6) \quad , \quad (A \Delta B) \Delta C = (1, 3, 4, 5, 6, 7) - (4, 6) = (1, 3, 5, 7)$$

$$(1 \cup 3 \cup 5 \cup 7) \stackrel{\text{الزاما}}{=} 5 \Rightarrow 1 = 3 = 7 = \emptyset$$

یعنی شماره های 1 و 3 و 7 انگار وجود ندارند. با این حساب:

بررسی گزینه ها:

$$B = C : \{2, 5, 6\} = \{4, 5, 6\} \quad \times \quad \text{گزینه ی 1:}$$

گزینه ی 2:  $\times$   $A \cap B \cap C = C : \{5\} = \{4,5,6\}$ گزینه ی 3:  $\checkmark$   $C \subseteq (A \cup B) : \{4,5,6\} \subseteq \{1,2,4,5,6\}$ گزینه ی 4:  $\times$   $A = \emptyset : \{2,4,5\} = \emptyset$ مثال 15: اگر  $B' \subseteq A$  باشد، آن گاه مجموعه  $((A \Delta B) - B)'$  برابر کدام است؟

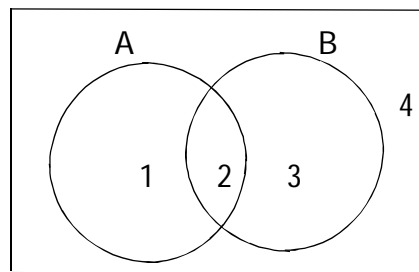
A (1) B (2) A' (3) B' (4)

پاسخ: گزینه ی 2 صحیح است.

تست مفروض را هم به روش شماره گذاری و هم به روش جبر مجموعه ها و با استفاده از فرمول ها و روابطی که برای جبر مجموعه ها بیان کردیم، حل خواهیم کرد تا شما داوطلبان عزیز به تناسب تشخیص خود و اینکه کدام روش در حل چگونه مسائلی مفیدتر بوده و شما را سریع به پاسخ تست می رساند آشنا شوید.

روش شماره گذاری

M



$$B' \subseteq A \rightarrow A \cap B' = B' \rightarrow \{1,4\} \cap \{1,2\} = \{1\} = \{1,4\} \xrightarrow{\text{الزاما}} 4 = \emptyset$$

یعنی شماره ی 4 انگار وجود ندارد. با این حساب :

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (1,2,3) - (2) = (1,3) \xrightarrow{(A \Delta B) - B} (1,3) - (2,3) = \{1\} \xrightarrow{\text{شماره ی 4 وجود ندارد}} \{2,3,4\} = \{2,3\} = B$$

روش جبر مجموعه ها

$$B' \subseteq A \rightarrow A \cap B' = B'$$

$$\begin{aligned} [(A - B) \cup (B - A) - B] &= [(A - B) \cup (B - A) \cap B'] = [(A - B) \cap B'] \cup [(B - A) \cap B'] \\ &= [(A \cap B') \cap B'] \cup [(B \cap A') \cap B'] = [A \cap B'] \cup [\emptyset] = A \cap B' = B' \xrightarrow{} B \end{aligned}$$

مثال 16: اگر  $A - (A' \cup B) = B'$  باشد، کدام گزینه در مورد رابطه ی بین این دو مجموعه صحیح است؟

$$A = B' \quad (4)$$

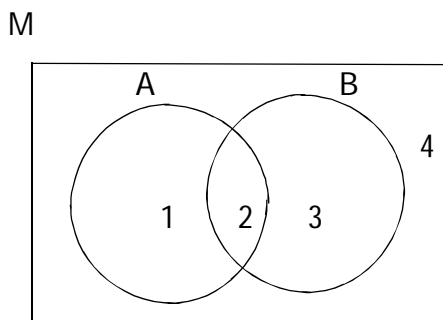
$$A \cap B = \emptyset \quad (3)$$

$$B' \subseteq A \quad (2)$$

$$A \subseteq B' \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ی 2 صحیح است.

روش شماره گذاری :



$$A - (A' \cup B) = B' \rightarrow \{1,2\} - (\{3,4\} \cup \{2,3\}) = \{1,4\} \rightarrow \{1,2\} - \{2,3,4\} = \{1,4\} \rightarrow \{1\} = \{1,4\} \stackrel{\text{الزاما}}{\Rightarrow} 4 = \emptyset$$

یعنی شماره ی 4 انگار وجود ندارد. با این حساب :

بررسی گزینه ها :

گزینه ی 1:  $A \subseteq B' : \{1,2\} \subseteq \{1\} \quad \times$

گزینه ی 2:  $B' \subseteq A : \{1\} \subseteq \{1,2\} \quad \checkmark$

گزینه ی 3:  $A \cap B = \emptyset : \{1,2\} \cap \{2,3\} = 2 \quad \times$

گزینه ی 4:  $A = B' : \{1,2\} = \{1\} \quad \times$

\*تذکر مهم :

مطابق آنچه که در روش شماره گذاری نیز به آن اشاره شد، سعی کنید فقط در تست هایی که یک تساوی از روابط بین مجموعه ها را داریم از این روش استفاده کنید.

\*عدد اصلی یک مجموعه ( کاردینال )

تعداد اعضای مجموعه ی متناهی A را عدد اصلی آن مجموعه می نامند و با  $n(A)$  یا کاردینال  $|A|$  نمایش می دهند.

\*ویژگی های مهم عدد اصلی (کاردینال) مجموعه ها

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

1- برای هر دو مجموعه ی متناهی و جدا از هم  $A, B$  داریم :

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

2- برای هر دو مجموعه ی متناهی  $A, B$  داریم :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

3- برای هر دو مجموعه ی متناهی  $A, B$  داریم :4- برای سه مجموعه ی متناهی  $A, B, C$  داریم :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |(A \cap B \cap C)|$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B|$$

- 5

$$|A' \cap B'| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

- 6

$$|A' \cap B' \cap C'| = |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

- 7

$$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

- 8

مثال 17: اگر  $A = \{x : x \in \mathbb{N} : 2^x \leq x^2\}$ ,  $B = \{n : n \in \mathbb{Z} : n! \leq 2^n\}$ , آن گاه مجموعه ی  $A \Delta B$  چند عضو دارد؟

4 (4

3 (3

2 (2

1 (1

پاسخ: گزینه ی 3 صحیح است.

اعضای دو مجموعه ی یادشده را با توجه به روابط تعریف شده برای آن ها به دست می آوریم :

$$A = \{2, 3, 4\}, B = \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{0, 1, 2, 3, 4\} - \{2, 3\} = \{0, 1, 4\}$$

مثال 18: اگر  $A \subseteq B \subseteq C$  و تعداد اعضای این مجموعه ها برابر 7 و 13 و 22 باشد, تعداد اعضای مجموعه ی  $A \cup (B \Delta C)$  کدام است؟

17 (4

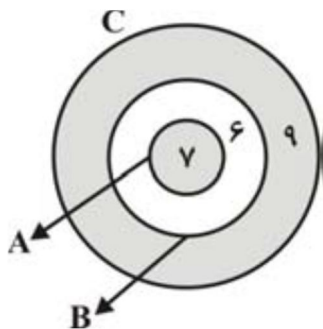
16 (3

15 (2

14 (1

پاسخ: گزینه ی 3 صحیح است.

اگر با توجه به فرض مساله نمودار ون این مجموعه ها را رسم کنیم :



$$B \subseteq C \rightarrow B \cup C = C, B \cap C = B : B \Delta C = (B \cup C) - (B \cap C) = C - B \rightarrow |B \Delta C| = |C| - |B| = 22 - 13 = 9$$

$$A \cup (B \Delta C) = A \cup (C - B)$$

$$|A \cup (C - B)| = |A| + |(C - B)| - |A \cap (C - B)| = 7 + 9 - 0 = 16$$

مثال 19: تعداد اعداد دورقمی که مضرب 7 هستند اما بر 11 بخش پذیر نیستند، کدام است ؟

15 (4

14 (3

13 (2

12 (1

جواب: گزینه ی 1 صحیح است.

اگر مجموعه ی A را مجموعه ی اعداد دورقمی مضرب 7 و مجموعه ی B را مجموعه ی اعداد دورقمی مضرب 11 بنامیم، آن گاه مطلوب مساله محاسبه ی کاردینال یا عدد اصلی مجموعه ی  $A \cap B'$  خواهد بود و می توان نوشت :

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = \left( \left[ \frac{99}{7} \right] - \left[ \frac{9}{7} \right] \right) - \left( \left[ \frac{99}{77} \right] - \left[ \frac{9}{77} \right] \right) = (14 - 1) - (1 - 0) = 13 - 1 = 12$$

\*تذکر: با توجه به اینکه مسائل مربوط به اصل شمول و عدم شمول در کتاب درسی ریاضیات گسسته به طور مفصل مورد بررسی قرار خواهد گرفت، به همین مثال های طرح شده ی اخیر در مورد این مبحث بسنده می کنیم.

\*افراز یک مجموعه

اگر A یک مجموعه ی غیرتهی باشد، گوییم که مجموعه ی A به n زیرمجموعه ی  $A_1, A_2, \dots, A_n$  افراز شده است، هرگاه :

$$A_i \neq \emptyset$$

الف - هیچ یک از زیرمجموعه ها تهی نباشد. یعنی :

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

ب - اشتراک هر دو زیرمجموعه ی متمایز تهی باشد. یعنی :

$$\cup A_i = A$$

ج - اجتماع تمام زیرمجموعه ها با مجموعه ی اصلی برابر باشد :



مثال 20: مجموعه ی  $A = \{a, b, c, d\}$  را به چند طریق می توان به دو زیرمجموعه افراز کرد؟

8 (4

7 (3

6 (2

5 (1

گزینه ی 3 صحیح است.

کاملاً بدیهی ست که برای اینکه یک مجموعه ی چهار عضوی را به دو زیرمجموعه افراز کنیم تنها می توان آن را به صورت دو مجموعه ی دو عضوی و یا دو مجموعه ی تک عضوی و سه عضوی نوشت . یعنی باید داشته باشیم :

$$A_1 = \{a, b\}, \{c, d\}$$

$$A_2 = \{a, c\}, \{b, d\}$$

$$A_3 = \{a, d\}, \{b, c\}$$

$$A_4 = \{a\}, \{b, c, d\}$$

$$A_5 = \{b\}, \{a, c, d\}$$

$$A_6 = \{c\}, \{a, b, d\}$$

$$A_7 = \{d\}, \{a, b, c\}$$

\*زوج مرتب

به عبارت  $(a, b)$  یک زوج مرتب می گویند و عدد  $a$  را مولفه ی اول و عدد  $b$  را مولفه ی دوم زوج مرتب می نامند.

دو زوج مرتب زمانی مساوی اند که :

مولفه های نظیر به نظیر آنها یکسان باشند.

$$(a, b) = (c, d) \iff \overset{\text{اگر و فقط اگر}}{a = c, b = d}$$

\*حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

حاصل ضرب دکارتی مجموعه ی  $A$  در مجموعه ی  $B$  عبارت است از مجموعه ی زوج مرتب هایی که مختص اول آنها متعلق به مجموعه ی  $A$  و مختص دوم آنها متعلق به مجموعه ی  $B$  می باشد. و آن را به صورت  $A \times B$  نمایش می دهند و خاصیت جابجایی ندارد.

\*چند نکته :

1- حاصل ضرب دکارتی مجموعه ی  $A$  در خودش را به صورت  $A^2$  نمایش می دهند.

2- با توجه به اینکه حاصلضرب دکارتی را زوج های مرتب تشکیل می دهند , مولفه ی اول را روی محور طول ها و مولفه ی دوم را روی محور عرض ها نشان می دهند.

3- حاصل ضرب دکارتی بر روی اعمال  $-$  و  $\Delta$  و  $U$  و  $\cap$  توزیع پذیر است.

\*ویژگی های عدد اصلی ضرب دکارتی دو مجموعه

$$n[(A \times B) \cap (B \times A)] = n[(A \cap B)]^2 \quad -1$$

$$n[(A \times B) \cup (B \times A)] = 2n(A).n(B) - n[(A \cap B)]^2 \quad -2$$

$$n[(A \times B) - (B \times A)] = n(A).n(B) - n[(A \cap B)]^2 \quad -3$$

$$n[B^2 - A^2] = [n(B)]^2 - n[(A \cap B)]^2 \quad -4$$

مثال 21: اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  باشد , آن گاه تعداد عضوهای  $A^2 - B^2$  کدام است؟

13 (4

12 (3

11 (2

10 (1

پاسخ: گزینه ی 3 صحیح است.

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

$$n[A^2 - B^2] = [n(A)]^2 - n[(A \cap B)]^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

مثال 22: اگر  $|A \times B| = 56$  و مجموعه ی  $(A \times B) - (B \times A)$  دارای 31 عضو باشد , حداقل تعداد اعضای ممکن برای مجموعه ی B کدام است؟

7 (4

6 (3

5 (2

4 (1

پاسخ: گزینه ی 4 صحیح است.

$$n[(A \times B) - (B \times A)] = n(A \times B) - n[(A \cap B)]^2 \rightarrow 31 = 56 - n[(A \cap B)]^2 \rightarrow n[(A \cap B)]^2 = 25 \rightarrow n(A \cap B) = 5$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 56 = 1 \times 56 = 2 \times 28 = 4 \times 14 = 8 \times 7$$

با توجه به اینکه  $|A \cap B| \leq |A|$  ,  $|B|$  , پس فقط حالت تجزیه ی 7 و 8 تایی صحیح بوده که حداقل تعداد ممکن برای مجموعه ی یادشده 7 عضو خواهد بود و گزینه ی 4 پاسخ صحیح تست است.

\*بدون تردید هم ارزی یک پای ثابت تست های ریاضی و درس جبر و احتمال شما خواهد بود. پس با دقت این بخش از درس را مطالعه نمایید.

## \*رابطه

در صورتی که  $R$  یک رابطه از  $A$  در  $B$  باشد و داشته باشیم  $(a, b) \in R$ . در این صورت می نویسیم  $aRb$  و می گوئیم  $a$  با  $b$  به وسیله ی رابطه ی  $R$  مربوط اند.

## \*وارون رابطه

برای نوشتن وارون رابطه ی  $R$  کافی ست در هر کدام از زوج مرتب های داده شده ، جای مولفه ی اول و دوم را عوض کنیم. بدیهی ست :

$$D_R = R_{R^{-1}}, \quad R_R = D_{R^{-1}},$$

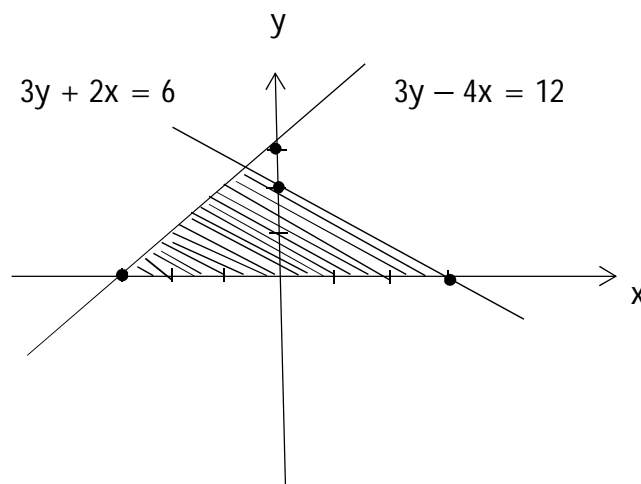
## \*رسم نمودار رابطه ها

برای رسم نمودار یک رابطه از صفحات مختصات  $x, y$  استفاده می شود. اگر رابطه ی  $R \subseteq A \times B$  تعریف شود ، آن گاه عضوهای مجموعه ی  $A$  روی محور افقی و عضوهای مجموعه ی  $B$  روی محور عمودی در نظر گرفته می شود.

مثال 23 : نقطه ی  $A$  روی نمودار رابطه ی :  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3y + 2x \leq 6, 3y - 4x \leq 12\}$  واقع در ناحیه ی اول انتخاب شده است.

بیشترین مقدار  $y - x$  کدام است؟

3,7 (4)                      3,6 (3)                      3,5 (2)                      3,4 (1)



جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

با رسم نمودارهای دو خط داده شده ی  $3y + 2x = 6, 3y - 4x = 12$  مشخص است که بیشترین مقدار  $x - y$  در نقطه ی برخورد آنها حاصل می شود.

$$\begin{pmatrix} 3y - 4x = 12 \\ 3y + 2x = 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{جمع معادلات}} \begin{pmatrix} 3y - 4x = 12 \\ -3y - 2x = -6 \end{pmatrix} \Rightarrow -6x = 6 \rightarrow x = -1, y = \frac{8}{3}, y - x = \frac{11}{3} \cong 3.7$$

مثال 24: رابطه ی  $R_0 = \{(x, y) : x^3 \leq 2y\}$  بر روی مجموعه ی اعداد  $\{1, 3, 5, 6, 8\}$  تعریف شده است. این رابطه چند عضو دارد؟

1) 4      2) 5      3) 7      4) 8

پاسخ: گزینه ی 2 صحیح است.

عضوهای مجموعه ی دوتایی مورد نظر را با توجه به شرط داده شده مشخص می کنیم :

$$\{(1,1), (1,3), (1,5), (1,6), (1,8)\}$$

کاملاً مشخص است که مجموعه ی مورد نظر 5 عضو دارد.

مثال 25: رابطه ی  $\leq$  بر مجموعه ی  $A = \{2, 4, 5, 7, 9\}$  تعریف شده است. این رابطه چند عضو دارد؟

1) 9      2) 10      3) 12      4) 15

پاسخ: گزینه ی 4 صحیح است.

کافی ست تمام زوج مرتب هایی را که در آن مختص اول از مختص دوم کمتر یا مساوی است را بنویسیم :

$$\{(2,2), (2,4), (2,5), (2,7), (2,9), (4,4), (4,5), (4,7), (4,9), (5,5), (5,7), (5,9), (7,7), (7,9), (9,9)\}$$

مثال 26: رابطه ی  $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x| \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$  چند عضو دارد؟

1) 12      2) 14      3) 15      4) 16

پاسخ: گزینه ی 3 صحیح است.

$$|x| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \rightarrow x = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \xRightarrow{0 \leq y \leq x^2} y = \{0, 1, 2\} \rightarrow 5 \times 3 = 15 \text{ عضو}$$

\*خواص رابطه ها

1- انعکاسی (بازتابی)

هرگاه رابطه ی  $R$  در مجموعه ی  $A$  تعریف شده باشد ، به طوری که هر عضو  $A$  به وسیله ی رابطه ی  $R$  با خودش مربوط شود. در این صورت می گوییم رابطه ی

$$aRa$$

$R$  در مجموعه ی  $A$  دارای خاصیت بازتابی (انعکاسی) می باشد.

**2- خاصیت تقارنی**

هرگاه رابطه ی  $R$  در مجموعه ی  $A$  تعریف شده باشد گوییم  $R$  در مجموعه ی  $A$  دارای خاصیت تقارنی است هرگاه به ازای هر  $a, b \in A$  داشته باشیم :

$$aRb \rightarrow bRa$$

**3- خاصیت تعدی (ترایابی) (تراگذری)**

هرگاه رابطه ی  $R$  در مجموعه ی  $A$  تعریف شده باشد به طوری که برای هر  $a, b, c \in A$  داشته باشیم :

$$\begin{pmatrix} aRb \\ bRc \end{pmatrix} \rightarrow aRc$$

به این نکته ی مهم توجه داشته باشید که هرگاه مولفه ی دوم زوج مرتبی ، مولفه ی اول زوج مرتب دیگری نباشد ، آن گاه خاصیت ترایابی تحت تاثیر این زوج مرتب قرار نخواهد گرفت.

**4- خاصیت پادتقارن (ضد تقارن)**

هرگاه رابطه ی  $R$  در مجموعه ی  $A$  تعریف شده باشد این رابطه دارای خاصیت پادتقارنی است هرگاه :

$$\forall a, b \in A : aRb, bRa \rightarrow a = b$$

**\*چند نکته ی مهم**

**1- رابطه ی تهی روی مجموعه ی غیرتهی دارای خاصیت بازتابی نیست.**

**2- اگر رابطه ای دارای خواص تقارنی و پادتقارنی باشد ، لزوما تراگذری هم خواهد بود.**

**3- تمام رابطه هایی که به صورت  $R = A^2$  روی مجموعه ی  $A$  تعریف شده باشند ، همواره خواص (بازتابی - تقارنی و تراگذری) را دارند.**

**4- هر رابطه ی تک عضوی روی مجموعه ی  $A$  تعریف شده باشد دارای دو خاصیت (تراگذری و پادتقارنی) است.**

**5- هر رابطه ای که هم متقارن و هم پاد متقارن باشد ، یا تهی ست و یا دارای زوج مرتبی به فرم  $(a, a)$  می باشد.**

**\*رابطه ی هم ارزی**

هرگاه رابطه ی  $R$  روی مجموعه ی  $A$  تعریف شده باشد و دارای سه خاصیت اصلی بازتابی و تقارن و تعدی باشد ، دراین صورت می گوییم رابطه ی  $R$  روی مجموعه ی  $A$  یک رابطه ی هم ارزی است.

## \*دسته (کلاس) هم ارزی

هرگاه رابطه ی هم ارزی روی یک مجموعه ی  $A$  تعریف شده باشد و آن مجموعه را به زیرمجموعه های مجزا که هر یک از آنها را دسته یا کلاس هم ارزی می نامند تقسیم می کند. دسته ی هم ارزی  $a$  را تحت رابطه ی  $R$  با علامت  $[a]$  نمایش داده و  $a$  را نماینده ی دسته می نامند و می نویسند :

$$[a] = \{x | xRa\}$$

به طور کلی دسته ی هم ارزی هر رابطه هم ارزی روی مجموعه ی اعداد صحیح و یا زیرمجموعه ای از آن را با کوچکترین عدد غیرمنفی آن دسته مشخص می کنند.

## \*چند نکته ی مهم دیگر و کاربردی

1- برای تعیین اعداد بخش پذیر بر  $m$ ، ابتدا اولین و آخرین عدد بخش پذیر بر  $m$  را تعیین نموده و آنها را به ترتیب  $y, x$  نامگذاری می کنیم و با استفاده از رابطه ی زیر تعداد آنها را به دست می آوریم :

$$n = \frac{y - x}{m} + 1$$

2- برای شمردن تعداد رابطه ی های هم ارزی روی یک مجموعه، باید تعداد افزایش های ممکن آن مجموعه را نوشت.

3- همیشه کمترین تعداد اعضای یک رابطه ی هم ارزی متناظر با بیشترین تعداد کلاس و بیشترین تعداد اعضای یک رابطه ی هم ارزی متناظر با کمترین تعداد کلاس می باشد.

مثال 27: رابطه ی  $R$  روی  $R^2$  به صورت  $|a| + |b| = |c| + |d| \Leftrightarrow (a, b)R(c, d)$  تعریف شده است.  $\left[ (1, -2) \right]$  چه مساحتی را اشغال می کند؟

20 (4

18 (3

9 (2

6 (1

پاسخ: گزینه ی 3 صحیح است.

کلاس هم ارزی داده شده را با توجه به رابطه ی تعریف شده می نویسیم :

$$\left[ (1, -2) \right] = \{(x, y) | (x, y)R(1, -2)\} \rightarrow |x| + |y| = |1| + |-2| = 3$$

\*نکته: معادله ی  $|x - a| + |y - b| = k$  :  $k > 0$  معادله ی مربعی ست به مرکز  $(a, b)$  و به قطر  $2k$  که مساحتش برابر است با  $2k^2$

با توجه به نکته ی داده شده می توان نوشت :

$$|x| + |y| = 3 \rightarrow k = 3 : S = 2(3^2) = 2(9) = 18$$

قابل ذکر است در صورتی که این نکته را حتی بلد نباشید ، می توانید با استفاده از ویژگی های قدرمطلق به راحتی نمودار رابطه ی داده شده را رسم نموده و به مطلوب تست برسید . گرچه و مطمئنا این فرایند زمان بر خواهد بود.

مثال 28 : رابطه ی  $R$  روی مجموعه ی اعداد صحیح زوج به صورت  $xRy \Leftrightarrow 6|x^2 - y^2$  تعریف شده است. آیا این رابطه هم ارزی ست؟ در صورت هم ارزی بودن تعداد کلاس های هم ارزی آن کدام است؟

(1) هم ارزی نیست. (2) 1 (3) 2 (4) 3

کجواب : گزینه ی 3 صحیح است.

برای اطمینان از درستی یا نادرستی گزینه ی 1 باید هم ارزی بودن رابطه را بررسی نمود :

هر عدد زوج را می توان (البته با توجه به صورت پرسش مساله) به یکی از صورت های  $6k - 2$  ,  $6k + 2$  ,  $6k$  نوشت . پس مربع آن ها به یکی از صورت های  $6q + 4$  ,  $6q$  درمی آید :

$$(6k)^2 = 36k^2 = 6(6k^2) = 6q \quad , \quad (6k + 2)^2 = 36k^2 + 24k + 4 = 6(6k^2 + 4k) + 4 = 6q + 4$$

پس این رابطه بدیهی ست که هم ارزی بوده و چون مربع اعداد زوج در تقسیم بر 6 دارای دو باقیمانده ی صفر و 4 هستند , پس این رابطه مجموعه ی اعداد صحیح را به دو دسته ی هم ارزی تقسیم نموده و گزینه ی 3 پاسخ صحیح و مطلوب تست است.

$$1) \quad aRa \Leftrightarrow 6|a^2 - a^2 = 0 \quad \checkmark \quad \text{خاصیت بازتابی .}$$

$$2) \quad aRb \Leftrightarrow bRa : 6|a^2 - b^2 \rightarrow 6|b^2 - a^2 \rightarrow bRa \quad \checkmark \quad \text{خاصیت تقارن .}$$

$$3) \quad \left( \begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix} \right) \Leftrightarrow aRc : \left( \begin{matrix} 6|a^2 - b^2 \\ 6|b^2 - c^2 \end{matrix} \right) \stackrel{\text{طرفین رابطه را با هم جمع می کنیم}}{=} \Rightarrow 6|a^2 - c^2 \rightarrow aRc \quad \checkmark \quad \text{خاصیت تعدی یا ترایی .}$$

پس رابطه ی داده شده هم ارزی است.

"تست های سراسری داخل و خارج از کشور و جامع سنجش"

1- اگر  $A = \{x \in \mathbb{N}, 5 < x^2 < 50\}$  و  $B = \{3k - 2 | k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 4\}$  باشند تعداد زیرمجموعه های  $(A \times B) \cap (B \times A)$  کدام است؟ (سراسری ریاضی 93)

(1) 4      (2) 8      (3) 16      (4) 32

2- تعداد افرازهای مجموعه ی  $A = \{a, b, c, d, e\}$  که شامل فقط یک مجموعه ی تک عضوی باشد کدام است؟ (سراسری ریاضی 93)

(1) 10      (2) 12      (3) 15      (4) 20

3- آیا رابطه ی  $(a, b)R(c, d) \leftrightarrow ad = bc$  روی مجموعه ی  $\mathbb{R}^2$  هم ارزی ست؟ در صورت هم ارزی نمودار  $\left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right]$  از کدام نقطه می گذرد؟ (سراسری ریاضی 93)

(1) هم ارزی نیست.      (2)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$       (3)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$       (4)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

4- اگر  $A \subset B \subset C$  باشد، مجموعه ی  $(A' \cap B')' \cap (A' \cap C')'$  برابر کدام است؟ (سنجش جامع ریاضی 93)

(1) A      (2) B      (3) C      (4) A - C

5- نقطه ی M بر نمودار رابطه ی  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4y + 5x \leq 20, 4y - 3x \leq 12\}$  واقع در ناحیه ی اول انتخاب شده است. بیشترین مقدار  $x + y$  کدام است؟ (سنجش جامع ریاضی 93)

(2) 4,25      (2) 4,5      (3) 4,75      (4) 5

6- اگر  $A \subset B$  باشد، آنگاه کدام بیان نادرست است؟ (سنجش جامع ریاضی 93)

(1)  $A \cap B' = \emptyset$       (2)  $B' \subset A'$       (3)  $B \cap A' = \emptyset$       (4)  $A \Delta B = B - A$



7- اگر  $A = \{2k - 1 | k \in \mathbb{Z}, -1 \leq k \leq 2\}$  و  $B = \{x : x \in \mathbb{N} | x^2 \leq 16\}$  باشد، مجموعه  $A^2 \cap B^2$  چند زیرمجموعه دارد؟ (سنجش جامع ریاضی 93)

8 (1) 12 (2) 16 (3) 32 (4)

8- رابطه ی  $R_0 = \{(x, y) : x^2 \leq y\}$  بر روی مجموعه ی اعداد  $\{1, 2, 3, 6, 9\}$  تعریف شده است. این رابطه چند عضو دارد؟ (سنجش جامع ریاضی 93)

4 (2) 5 (2) 7 (3) 8 (4)

9- مجموعه ی  $A_i = \{i \leq x \leq 9 + i\}$  در مجموعه ی اعداد طبیعی تعریف شده است. مجموعه ی  $\bigcap_{i=3}^9 A_i$  چند عضو دارد؟ (سنجش جامع ریاضی 93)

3 (3) 4 (2) 5 (3) 6 (4)

10- رابطه ی  $\leq$  بر مجموعه ی  $A = \{2, 4, 5, 7, 9\}$  تعریف شده است. این رابطه چند عضو دارد؟ (سنجش جامع ریاضی 93)

9 (2) 10 (2) 12 (3) 15 (4)

11- حداقل چند زوج مرتب به صورت  $(a, b)$  با مختص های اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم، تا مطمئن باشیم در دو زوج انتخابی، جمع مختص های اول و جمع مختص های دوم، اعداد زوج هستند؟ (سراسری ریاضی 92)

3 (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4)

12- اگر  $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$  و  $i = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ، آنگاه مجموعه ی  $(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7)$  به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی 92)

(1)  $[-2, -1) \cup (1, 2]$  (2)  $[-2, -1] \cup [1, 2]$  (3)  $[-1, 1]$  (4)  $\emptyset$

13- اگر  $A = \{2k - 1 | k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 5\}$  و  $B = \{k \in \mathbb{Z} | |k - 3| \leq 2\}$  , آن گاه مجموعه ی  $(A \times B) \cap (B \times A)$  چند عضو دارد؟  
(سراسری ریاضی 92)

16 (4) 9 (3) 8 (2) 6 (1)

14- اگر  $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, 2\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2 = 3x\}$  , آن گاه تعداد زیرمجموعه های سره و غیرتهی مجموعه ی  $A - B$  کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 92)

14 (4) 6 (3) 4 (2) 2 (1)

15- رابطه ی  $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | |x| \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$  چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 92)

16 (4) 15 (3) 14 (2) 12 (2)

16- تعداد زیرمجموعه های  $\{a, \{a\}, \{a, b\}, \{b, a\}\}$  کدام است؟ (سنجش جامع ریاضی 92)

24 (4) 16 (3) 12 (2) 8 (1)

17- مجموعه ی  $A$  دارای 18 عضو و مجموعه ی  $B$  دارای 25 عضو و مجموعه ی  $A \cap B$  دارای 9 عضو است. تفاضل متقارن  $A, B$  چند عضو دارد؟  
(سنجش جامع ریاضی 92)

34 (4) 28 (3) 25 (2) 21 (1)

18- رابطه ی  $\{(x, y) | x < y\}$  بر مجموعه ی  $\{m \in \mathbb{Z} | 4 \leq m^2 \leq 9\}$  چند عضو دارد؟ (سنجش جامع ریاضی 92)

8 (4) 6 (3) 7 (2) 5 (1)

19- اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{2, 3, 4, 5\}$  باشد , مجموعه ی  $(A \times B) \cup (B \times A)$  چند عضو دارد؟ (سنجش جامع ریاضی 92)

15 (4) 16 (3) 18 (2) 20 (1)

20- خلاصه شده ی عبارت مجموعه ای  $[(A \cap B) \cup (A - B)]' \cap B$  کدام است؟ (سنجش جامع ریاضی 92)

- (1)  $A \cap B$  (2)  $B - A$  (3)  $\emptyset$  (4)  $M$

21- اگر  $A \cap B = A$  باشد , آنگاه کدام گزاره نادرست است؟ (سنجش جامع ریاضی 92)

- (1)  $B' \subset A'$  (2)  $A' \cap B = \emptyset$  (3)  $A \cap B' = \emptyset$  (4)  $A' \cup B = M$

22- اگر  $A$  مجموعه ی اعداد دورقمی و  $B = \{7k | k \in A\}$  , آنگاه مجموعه ی توانی  $A \cap B$  چند عضو دارد؟ (سنجش جامع ریاضی 92)

- (2) 8 (2) 12 (3) 16 (4) 32

23- اگر  $S = \{(x, y) | |y - x| \leq 2, |x| \leq 2\}$  زیرمجموعه ای از  $R^2$  باشد , فاصله ی دورترین نقاط مجموعه ی  $S$  از مبدا مختصات کدام است؟

(سنجش جامع ریاضی 92)

- (1) 4 (2)  $2\sqrt{5}$  (3)  $4\sqrt{2}$  (4) 5

24- چند زیرمجموعه از مجموعه ی  $\{a, b, \{a, b\}, \{b, a\}\}$  عضو  $\{a, b\}$  را ندارد؟ (سراسری ریاضی 91)

- (1) 4 (2) 6 (3) 8 (4) 12

25- نمودار رابطه ی  $S = \{(x, y) \in Z^2 : |y| \leq -x, x \geq -3\}$  از چند نقطه تشکیل شده است؟ (سراسری ریاضی 91)

- (1) 12 (2) 14 (3) 15 (4) 16

26- اگر  $A, B$  دو مجموعه ی غیرتهی باشند ,  $(A \cap B') - (B - A)$  برابر کدام مجموعه است؟ (سراسری ریاضی 91 خارج از کشور)

- (1)  $B'$  (2)  $\emptyset$  (3)  $A \cap B$  (4)  $A - B$

27- اگر  $S = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 3x - x^2\}$  , مجموعه ی  $S \cap (Z \times Z)$  چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 91)

- (1) 6 (2) 7 (3) 8 (4) 9

28- در مجموعه ها  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  رابطه ی  $R$  روی  $A \times B$  به صورت  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

تعریف شده است. اگر این رابطه هم ارزی باشد , مجموعه ی  $A \times B$  را به چند کلاس هم ارزی افراز می کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 91)

- (1) 4 (2) 6 (3) 9 (4) رابطه هم ارزی نیست.

29- مجموعه ی  $A \cup B$  دارای 512 زیرمجموعه و مجموعه ی  $A \cap B$  دارای 8 زیرمجموعه است. مجموعه ی  $A \Delta B$  چند عضو دارد؟ (سنجش جامع ریاضی 91)

- (1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8

30- اجتماع دو مجموعه ی  $\{\{\emptyset\}, \{a\}, a\}$  و  $\{a, \emptyset\}$  چند عضو دارد؟ (سنجش جامع ریاضی 91)

- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

31- تعداد زیرمجموعه های مجموعه ی  $\{\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}, \{2\}, 1\}$  کدام است؟ (سنجش جامع ریاضی 91)

- (1) 16 (2) 32 (3) 36 (4) 64

32- اگر  $S = \{(x, y) : 2y - x \leq 2, y \geq 3\}$  و  $A = \{(x, y) | x \leq 4\}$  زیرمجموعه ای از  $R^2$  باشند و  $B = A \cap S$  , فاصله ی دورترین نقاط مجموعه ی  $B$  از مبدا مختصات کدام است؟ (سنجش جامع ریاضی 91)

- (1) 5 (2) 6 (3)  $3\sqrt{2}$  (4)  $2\sqrt{3}$

33- اگر  $A, B, C$  سه مجموعه ی غیر تهی باشند, به طوری که  $A \subset B$ , آن گاه مجموعه ی  $(A \cap B \cap C) - (A \cap (B - C))$  کدام است؟ (سراسری ریاضی 90)

(1)  $B$  (2)  $A \cap C$  (3)  $A$  (4)  $A \cap C'$

34- مجموعه ی  $A = \{a, b, \{a, b\}, \{a\}\}$  را به چند طریق می توان به سه زیرمجموعه افراز کرد؟ (سراسری ریاضی 90)

(2) 6 (2) 4 (3) 5 (4) 3

35- رابطه ی  $R$  در مجموعه ی اعداد صحیح فرد به صورت  $8|x^2 - y^2 \Leftrightarrow xRy$  تعریف شده است. آیا این رابطه هم ارزی است؟, در صورت هم ارزی بودن, تعداد کلاس های هم ارزی کدام است؟ (سراسری ریاضی 90)

(1) 1 (2) 2 (3) بی شمار (4) هم ارزی نیست.

36- اگر  $A, B$  دو مجموعه ی غیر تهی و  $A \cap B' = B \cap A'$ , آن گاه مجموعه ی  $(A \Delta B) - A$  کدام است؟ (سراسری ریاضی 90 خارج از کشور)

(1)  $\emptyset$  (2)  $A$  (3)  $B$  (4)  $B'$

37- تعداد افرازهای مجموعه ی  $\{0, 1, 2, 3\}$  کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 90)

(1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 15

38- کدام رابطه هم ارزی نیست؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 90)

(1) بخش پذیری بر روی اعداد حقیقی (2) تشابه دو شکل هندسی  
(3) هم باقی مانده در تقسیم دو عدد صحیح بر 7 (4) هم مساحت در دو شکل هندسی

39- اگر  $B = \{x : x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 9\}$  و  $A = \{2k - 1 | k \in \mathbb{Z} : 0 \leq k \leq 2\}$  باشد، تعداد زیرمجموعه های  $B^2 - A^2$  کدام است؟

(سنجش جامع ریاضی 90)

8 (1) 32 (2) 16 (3) 64 (4)

40- نقطه ی  $M(x, y)$  در ناحیه ی اول در شرط  $\begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ y + 2x \geq 1 \end{cases}$  صدق می کند. کمترین مقدار  $x + 2y$  کدام است؟ (سنجش جامع ریاضی 90)

$\frac{1}{2}$  (1) 1 (2)  $\frac{3}{2}$  (3) 2 (4)

41- اگر  $A \subset B$  باشد، کدام گزاره نادرست است؟ (سنجش جامع ریاضی 90)

$A' \cap B = \emptyset$  (1)  $B' \subset A'$  (2)  $A \cap B' = \emptyset$  (3)  $A' \cup B = \emptyset$  (4)

42- از مجموعه ی  $A$  یک عضو برداشتیم و به عضوهای مجموعه ی  $B$  اضافه کردیم. تعداد عضوهای مجموعه ی  $B$  تغییر نکرد. کدام رابطه نتیجه می شود؟ (سنجش جامع ریاضی 90)

$A \subset B$  (1)  $B \subset A$  (2)  $A \cap B \neq \emptyset$  (3)  $A \cup B = U$  (4)

43- اگر  $A = \{a, b, \{a, b\}, \{a\}\}$  و  $B = \{a, b\}$ ، مجموعه ی  $A - \{B\}$  چند زیرمجموعه ی سره غیر تهی دارد؟ (سراسری ریاضی 89)

2 (1) 7 (2) 6 (3) 14 (4)

44- اگر  $A, B$  دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه ی  $[A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)]$  برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی 89)

$A' - B'$  (1)  $(A - B)'$  (2)  $A'$  (3)  $\emptyset$  (4)

45- رابطه ی  $R$  روی مجموعه ی  $R^2$  به صورت  $a^2 - c^2 = b^2 - d^2 \Leftrightarrow (a, b)R(c, d)$  تعریف شده است. اگر این رابطه هم ارزی باشد، کدام عضو در کلاس هم ارزی  $(3, 5)$  است؟ (سراسری ریاضی 89)

$(-5, 3)$  (1)  $(0, 4)$  (2)  $(4, 0)$  (3)  $(4, 4)$  هم ارزی نیست (4)

46- اگر  $A = \{a, b, \{b\}, \{a\}\}$  , مجموعه ی  $A - \{A\}$  چند زیرمجموعه ی سره غیر تهی دارد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 89)

- (2) 2 (2) 6 (3) 7 (4) 14

47- متمم مجموعه ی  $C \cup A' \cup B'$  , نسبت به مجموعه ی جهانی با کدام مجموعه برابر نیست؟ (سراسری ریاضی 89 خارج از کشور)

- (1)  $(A \cap B) - (A \cap C)$  (2)  $(A - C) \cup (B - C)$  (3)  $A \cap (B - C)$  (4)  $(A \cap B) - C$

48- اگر  $A$  مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی و  $B$  مجموعه ی اعداد اول دورقمی کمتر از 50 باشند، رابطه ای به صورت  $x = a \Leftrightarrow R(a, b)$  بر روی مجموعه  $AB$  تعریف شده است. این رابطه مجموعه ی  $A \times B$  را به چند دسته ی هم ارزی تقسیم می کند؟ (سراسری ریاضی 89 خارج از کشور)

- (1) 9 (2) 10 (3) 11 (4) فاقد هم ارزی

49- کدام قضیه ی شرطی زیر برگشت پذیر نیست؟ (سراسری ریاضی 88)

- (1)  $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$  (2)  $A \subset B \Rightarrow A - B = \emptyset$   
(3)  $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$  (4)  $A = B \Rightarrow A \cap B = B \cap C$

50- مجموعه ی  $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$  برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی 88)

- (1)  $A'$  (2)  $B$  (3)  $B - A$  (4)  $\emptyset$

51- اگر  $A_n = \{m \in \mathbb{Z} | m \geq -n, 2^m \leq n, n \in \mathbb{N}\}$  , آنگاه مجموعه ی  $A_3 \cap A_4$  چند زیرمجموعه دارد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 88)

- (1) 8 (2) 16 (3) 32 (4) 36

52- متمم مجموعه ی  $(B - A)' - A$  نسبت به مجموعه جهانی کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 88)

- (1)  $A \cup B$  (2)  $A \cap B$  (3)  $A$  (4)  $B$

53- اگر مجموعه ی  $A$  دارای 5 عضو و مجموعه ی  $B$  دارای 6 عضو و مجموعه ی  $A \cap B$  دارای 2 عضو باشند، مجموعه ی  $(A \cap B') \times (A \cup B)'$  چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی 87)

(1) 8 (2) 10 (3) 12 (4) 15

54- مجموعه ی اعداد طبیعی را به سه مجموعه ی  $A, B, C$  افراز کرده ایم. اگر  $A = \{n : n = 7k + 2, k \in \mathbb{N}\}$  و  $B = \{n : n = 7k - 3, k \in \mathbb{N}\}$  باشد، کدام دو عدد به یک کلاس هم ارزی حاصل از این افراز تعلق دارند؟ (سراسری ریاضی 87)

(1) 13 و 21 (2) 13 و 23 (3) 21 و 32 (4) 23 و 32

55- کدام رابطه یک رابطه ی هم ارزی نیست؟ (سراسری ریاضی 87)

- (1) متشابه بودن دو مثلث در مجموعه ی مثلث ها  
(2) عمود بودن دو خط در مجموعه ی خطوط در فضا  
(3) موازی بودن دو خط در مجموعه ی خطوط در فضا  
(4) معادل بودن مساحت دو مثلث در مجموعه ی مثلث ها

56- اگر  $A_i = \{m \in \mathbb{Z} | -i \leq m \leq 8 - i\}$ ، مجموعه ی  $\bigcup_{i=1}^8 A_i - \bigcap_{i=1}^8 A_i$  چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 87)

(1) 13 (2) 14 (3) 15 (4) 16

57- اگر  $A, B, C$  سه مجموعه ی غیرتهی باشند، از کدام تساوی الزاما  $A = B$  نتیجه می شود؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 87)

- (1)  $A \times C = B \times C$   
(2)  $A \cap C = B \cap C$   
(3)  $A \cup C = B \cup C$   
(4)  $A \times (B - C) = (A - C) \times B$

58- اگر رابطه ی  $R$  روی مجموعه ی  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  به صورت  $aRb \Leftrightarrow |3b - a| < 4$  تعریف شده باشد، رابطه ی  $R$  چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 87)

(1) 8 (2) 9 (3) 10 (4) 11



59- مجموعه ی  $A$  , 5 عضو بیشتر از مجموعه ی  $A'$  دارد. خارج قسمت یا تفاضل تعداد زیرمجموعه های این دو مجموعه کدام است؟ (سراسری ریاضی 86)

- (1) خارج قسمت 25 (2) خارج قسمت 32 (3) تفاضل 25 (4) تفاضل 32

60- اگر  $A \cup (B - A) = B$  , آنگاه : (سراسری ریاضی 86)

- (1)  $A \subseteq B$  (2)  $B \subseteq A$  (3)  $A = \emptyset$  (4)  $B = \emptyset$

61- اگر  $A = \{2\}$  و  $B = \{2, \{2\}\}$  و  $C = \{\{2\}, \{\{2\}\}\}$  , کدام رابطه نادرست است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 86)

- (1)  $B \subset C$  (2)  $A \subset B$  (3)  $A \in B$  (4)  $B \in C$

62- اگر  $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$  به صورت بازه باشد , مجموعه ی  $A_3 \cup A_6 - A_3$  برابر کدام بازه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 86)

- (1)  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  (2)  $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  (3)  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  (4)  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

63- اگر  $A, B$  دو مجموعه ی غیرتهی و  $(A \times B) \subset (B \times A)$  , آنگاه  $A \Delta B$  برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 86)

- (1)  $\emptyset$  (2)  $A$  (3)  $A \cap B$  (4)  $A \cup B$

64- رابطه ی  $\{(x, y) | x < y\}$  بر مجموعه ی  $\{m \in \mathbb{Z} | m^2 \leq 4\}$  چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی 85)

- (1) 8 (2) 9 (3) 10 (4) 12

65- اگر  $A, B$  دو مجموعه ی غیرتهی باشند و  $(A \times B) - (B \times A) = \emptyset$  باشد , آنگاه کدام مجموعه غیرتهی است؟ (سراسری ریاضی 85)

- (1)  $A \cap B$  (2)  $A - B$  (3)  $A \Delta B$  (4)  $(B \times A) - (A \times B)$

66- اگر  $A$  مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی و رابطه ی  $R$  زیرمجموعه ای از  $A^2$  به صورت  $a + d = b + c \Leftrightarrow (a, b)R(c, d)$  تعریف شده باشد، آیا این رابطه هم ارزی است؟ در صورت قبول، دسته ی هم ارزی (5 و 2) چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی 85)

(1) 4 (2) 6 (3) 7 (4) رابطه هم ارزی نیست

67- اگر  $A' \subset B'$  باشد، مجموعه ی  $(A \cap B) \cup (A \Delta B)$  برابر کدام مجموعه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 85)

(1)  $A$  (2)  $B$  (3)  $A'$  (4)  $B'$

68- اگر  $A, B$  دو مجموعه ی غیرتهی باشند و  $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$  باشد، آنگاه مجموعه  $A - B$  برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی 85 خارج از کشور)

(1)  $A$  (2)  $\emptyset$  (3)  $B - A$  (4)  $A \Delta B$

69- دو مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  مفروش می باشد و رابطه  $R$  روی  $A \times B$  به صورت  $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow (a - c)(b - d) = 0$  تعریف شده است. اگر این رابطه هم ارزی باشد، در صورت قبول دسته ی هم ارزی (3 و 1) چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور 85)

(1) 4 (2) 6 (3) 9 (4) رابطه هم ارزی نیست.

70- اگر  $n$  عدد طبیعی و  $A_n$  بازه ی  $(n(-1)^n, 2n)$  باشد، چند عدد صحیح به  $\bigcup_{n=1}^4 A_n$  تعلق دارد؟ (سراسری ریاضی 84)

(1) 8 (2) 9 (3) 10 (4) 11

71- مجموعه ی اعداد طبیعی را به سه مجموعه ی  $A, B, C$  افراز کرده ایم. اگر  $A = \{n : n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}\}$  و مجموعه ی  $B$  به صورت

$B = \{n : n = 6k - 1, k \in \mathbb{N}\}$  باشد، کدام عدد طبیعی به مجموعه ی  $C$  تعلق دارد؟ (سراسری ریاضی 84)

(1) 11 (2) 29 (3) 33 (4) 37

72- تعداد نقاطی از صفحه مختصات که درون دایره ی به معادله ی  $x^2 + y^2 = 16$  قرار داشته و هردو مختصات آن نقاط عددی صحیح باشند , کدام است؟ (سراسری ریاضی 84)

41 (1) 42 (2) 44 (3) 45 (4)

73- اگر  $A, B$  دو مجموعه ی غیر تهی با جهانی  $U$  باشند , مجموعه ی  $A' \Delta B'$  برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی 83)

$A \cap B$  (1)  $A \cup B$  (2)  $A \Delta B$  (3)  $U$  (4)

74- اگر  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $A \cap B = \{2, 3\}$  و مجموعه ی  $(A - B) \times (B - A)$  دارای 6 عضو است. تعداد عضوهای مجموعه ی  $B$  کدام است؟ (سراسری ریاضی 83)

3 (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4)

75- مجموعه ی  $\{a, b, \{a\}, \{b\}\}$  دارای چند زیرمجموعه شامل عضو  $a$  می باشد؟ (سراسری ریاضی 82)

4 (1) 8 (2) 10 (3) 12 (4)

76- در رابطه ی  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 - 2x, y \leq 3\}$  بیشترین مقدار  $x + y$  کدام است؟ (سراسری ریاضی 82)

5 (1) 6 (2) 7 (3) 7,5 (4)

77- اگر  $A$  مجموعه ی اعداد دورقمی و  $B = \{7k : k \in A\}$  , آنگاه مجموعه ی توانی  $(A \cap B)$  چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی 81)

6 (1) 8 (2) 16 (3) 32 (4)

78- مجموعه ی  $A$  دارای 14 و مجموعه ی  $B$  دارای 17 و مجموعه ی  $A \cap B$  دارای 5 عضو است. تفاضل متقارن  $A, B$  چند عضو دارد؟ (سراسری ریاضی 81)

19 (1) 20 (2) 21 (3) 22 (4)

79- اگر  $A_n = [n - 1, n + 1]$ , آنگاه مجموعه ی  $\bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^3 A_n$  با کدام مجموعه برابر است؟ (سراسری ریاضی 80)

(1)  $1 \leq x \leq 5$  (2)  $0 \leq x \leq 5$

(3)  $0 \leq x \leq 5 : x \neq 2$  (4)  $1 \leq x \leq 5 : x \neq 2$

80- در رابطه ی هم ارزی  $R = \{x, y \mid x, y \in \mathbb{Z}, x - y = 7k, k \in \mathbb{Z}\}$  عدد 39 با کدام عدد داده شده در یک کلاس هم ارزی قرار دارند؟

(سراسری ریاضی 80)

(1) 95 (2) 96 (3) 97 (4) 98

81 - کدام گزینه ی زیر مثال نقض دارد؟ (سراسری ریاضی 80)

(1) هر مربع یک لوزی است.

(2) هر عدد اول و بزرگتر از 2 فرد است.

(3) هر مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الساقین است.

(4) توان دوم هر عدد طبیعی بزرگتر از توان سوم آن است.

## پاسخنامه ی تشریحی تست های سراسری و سنجش

1 - **جواب:** گزینه ی 3 صحیح است.

اعضای دو مجموعه ی یاد شده را با توجه به رابطه ی تعریف شده برای آن ها می نویسیم :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7\} , \quad B = \{1, 4, 7, 10\} , \quad A \cap B = \{4, 7\}$$

$$n((A \times B) \cap (B \times A)) = n^2(A \cap B) = 2^2 = 4 = \overset{\text{تعداد زیر مجموعه ها}}{=} \implies 2^4 = 16$$

2 - **جواب:** گزینه ی 4 صحیح است.

با توجه به آنچه که در صورت تست طرح گردیده است فقط با دو حالت مواجه هستیم. افراز مجموعه به صورت یک مجموعه ی تک عضوی و یک مجموعه ی 4 عضوی می باشد که کاملاً مشخص است در این حالت با 5 حالت روبرو هستیم .

و افراز به صورت مجموعه ی تک عضوی و دو مجموعه ی 2 عضوی که در این حالت نیز با 15 صورت مختلف مواجه خواهیم بود :

$$\frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{2!} = \frac{5 \times 6 \times 1}{2} = 15$$

و در مجموع با 20 افراز سروکار خواهیم داشت.

3 - **جواب:** گزینه ی 1 صحیح است.

سه خاصیت مورد نظر برای هم ارزی بودن یک رابطه را بررسی می کنیم :

$$\text{برقرار} : (a, b)R(a, b) \rightarrow ab = ba \quad \text{بازتابی}$$

$$\text{برقرار} : (a, b)R(c, d) \rightarrow ad = bc \rightarrow cb = ad \rightarrow (c, d)R(a, b) \quad \text{تقارن}$$

$$\text{برقرار} : \left( \begin{array}{l} (a, b)R(c, d) \rightarrow ad = bc \\ (c, d)R(e, f) \rightarrow cf = de \end{array} \right) : adcf = bcde \stackrel{\div dc}{\implies} (a, b)R(e, f) \rightarrow af = be \quad \text{عددی}$$

$$(x, y)R(2, 6) \rightarrow 6x = 2y \rightarrow y = 3x$$

که تنها نقطه ی داده شده در گزینه ی 3 در این معادله صدق می کند.

اما این رابطه هم ارزی نیست. در اثبات ویژگی سوم این رابطه یعنی خاصیت تعدی ما از تقسیم استفاده نمودیم. با توجه به اینکه رابطه ی تعریف شده برای عدد صفر نیز صادق است. پس باید این رابطه را در مورد زوج مرتب هایی که شامل صفر نیز می باشند امتحان کنیم تا در صورت درستی بر این خاصیت نیز صحه بگذاریم.

$$(2,6)R(0,0) \rightarrow 2 \times 0 = 6 \times 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$(0,0)R(1,4) \rightarrow 0 \times 4 = 0 \times 1 \rightarrow 0 = 0$$

پس باید :

$$(2,6)R(1,4) \rightarrow 2 \times 4 = 6 \times 1 \rightarrow 8 = 6$$

شما بی نهایت مثال نقض برای رد هم ارزی بودن رابطه می توانید بزنید.

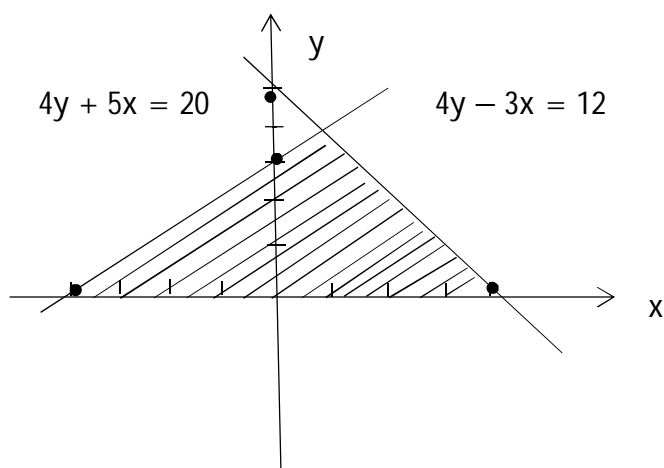
**4 - جواب :** گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از قوانین تعریف شده بر روی مجموعه ها خواهیم داشت :

$$(A' \cap B')' = A \cup B \stackrel{A \subset B}{\Rightarrow} B, \quad (A' \cap C')' = A \cup C \stackrel{A \subset C}{\Rightarrow} C$$

$$(A' \cap B')' \cap (A' \cap C')' = B \cap C \stackrel{B \subset C}{\Rightarrow} B$$

**5 - جواب :** گزینه ی 3 صحیح است.



با رسم نمودارهای دو خط داده شده ی  $4y + 5x = 20$ ,  $4y - 3x = 12$  مشخص است که بیشترین مقدار  $x + y$  در نقطه ی برخورد آنها حاصل می شود.

$$\begin{pmatrix} 4y + 5x = 20 \\ 4y - 3x = 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{جمع معادلات}} \begin{pmatrix} 4y + 5x = 20 \\ -4y + 3x = -12 \end{pmatrix} \Rightarrow 8x = 8 \rightarrow x = 1, y = 3.75, x + y = 4.75$$

6 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

$$A \subset B \rightarrow \begin{cases} B' \subset A' \\ A \cap B' = \emptyset \\ B \cap A' \neq \emptyset \rightarrow B - A \neq \emptyset \\ A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = B - A \end{cases}$$

7 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

$$A = \{-3, -1, 1, 3\} \quad , \quad B = \{1, 2, 3, 4\}$$

با مشخص کردن اعضای مجموعه های  $A^2$  و  $B^2$  به راحتی می توان فهمید این دو مجموعه در چهار عضو زیر مشترک هستند :

$$A^2 \cap B^2 = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\} \xRightarrow{n} 4 = \overset{\text{تعداد زیر مجموعه ها}}{=} \implies 2^4 = 16$$

دانش آموزان عزیز حتما توجه دارند که تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی  $n$  عضوی از رابطه ی  $2^n$  به دست می آید که طبیعتا عدد گزینه ی 2 به هیچ وجه نمی تواند پاسخ مطلوب تست باشد.

8 - که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

عضوهای مجموعه ی دوتایی مورد نظر را با توجه به شرط داده شده مشخص می کنیم :

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (1,9), (2,6), (2,9), (3,9)\}$$

کاملا مشخص است که مجموعه ی مورد نظر 8 عضو دارد.

9 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

$$\begin{aligned} A_3 &= \{3, 4, 5, \dots, 12\} & A_4 &= \{4, 5, 6, \dots, 13\} & A_5 &= \{5, 6, 7, \dots, 14\} \\ A_6 &= \{6, 7, 8, \dots, 15\} & A_7 &= \{7, 8, 9, \dots, 16\} & A_8 &= \{8, 9, 10, \dots, 17\} \\ A_9 &= \{9, 10, 11, \dots, 18\} \\ \bigcap_{i=3}^9 A_i &= \{9, 10, 11, 12\} & \text{عضو 4} \end{aligned}$$

**10 - که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.**

کافی ست تمام زوج مرتب هایی را که در آن مختص اول از مختص دوم کمتر یا مساوی است را بنویسیم :

$$\{(2,2), (2,4), (2,5), (2,7), (2,9), (4,4), (4,5), (4,7), (4,9), (5,5), (5,7), (5,9), (7,7), (7,9), (9,9)\}$$

**11 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.**

می دانیم که جمع دو عدد صحیح زمانی زوج است که آن دو عدد یا هردو زوج یا هردو فرد باشند. پس برای زوج بودن جمع مختص های اول یا دوم چهار حالت امکان پذیر است. یعنی زوج مرتب  $(a, b)$  می تواند به یکی از چهار حالت (زوج, زوج) و (فرد, فرد) و (فرد, زوج) و (زوج, فرد) در نظر گرفته شود که در این صورت جمع مختص های اول و دوم عدد زوج می شود.

با اضافه شدن یک زوج دیگر است که ممکن است این زوج از نظر زوج یا فرد بودن مختص ها با یکی از چهار زوج قبلی یکسان باشد. پس حداقل باید پنج زوج انتخاب شود و گزینه ی 3 پاسخ صحیح و مطلوب تست است.

**12 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.**

مطمئنا کسی تو اشتراک گیری و اجتماع گیری یا سایر عملیات روی مجموعه ها نباید مشکل داشته باشد , در صورت وجود مشکل و برای محض اطمینان از درستی عملیات می توانید روی محور این عملیات را انجام دهید.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = [-1, 4] \\ A_7 = [-7, 1] \\ A_2 = \left[-2, \frac{7}{2}\right] \\ A_5 = [-5, 2] \end{array} \right. \rightarrow A_2 \cap A_5 = [-2, 2] - A_1 \cap A_7 = [-1, 1] \rightarrow [-2, -1) \cup (1, 2]$$

**13 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.**

ابتدا اعضای مجموعه های داده شده را مشخص می کنیم :

$$A = \{2k - 1 | k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 5\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{k \in \mathbb{Z} | |k - 3| \leq 2\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

در مورد اعضای مجموعه ی B دقت داشته باشید که نیازی به حل رابطه ی قدرمطلق داده شده نیست و شما به راحتی می توانید اعضای مجموعه ی یادشده را حدس بزنید.

$$n((A \times B) \cap (B \times A)) = n(A \cap B)^2 = \overset{A \cap B = \{1, 3, 5\} \rightarrow n(A \cap B) = 3}{=} = = = \implies 9$$



14 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

$$x^2 + 2 = 3x \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1, 2$$

$$A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, 2\}, B = \{1, 2\} \rightarrow A - B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\} \Rightarrow \text{تعداد زیر مجموعه های سره و غیر تهی}$$

$$2^3 - 1 - 1 = 8 - 2 = 6$$

دقت داشته باشید که تعداد زیرمجموعه های سره ی یک مجموعه ی  $n$  عضوی از رابطه ی  $2^n - 1$  محاسبه می شود که چون در صورت مساله به ناتهی بودن هم اشاره شده است ، یه واحد بیشتر کم شده است.

15 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

$$|x| \leq 2 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \rightarrow x = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \xrightarrow{0 \leq y \leq x^2} y = \{0, 1, 2\} \rightarrow 5 \times 3 = 15 \text{ عضو}$$

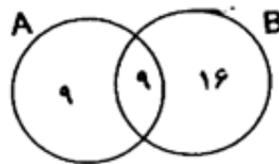
16 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

دقت داشته باشید که مجموعه ی مورد نظر 3 عضوی است و  $\{a, b\} = \{b, a\}$  و تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی 3 عضوی از رابطه ی  $2^3 = 8$  به دست می آید.

17 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

رابطه ای که برای تفاضل متقارن دو مجموعه تعریف شده است به صورت زیر است :

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$



$$n(A - B) \cup (B - A) = n(A - B) + n(B - A) = 9 + 16 = 25$$

یادآوری :

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \quad , \quad n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

18 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

اعضای رابطه ی داده شده را روی مجموعه ی مورد نظر می نویسیم :

$$4 \leq m^2 \leq 9 \xRightarrow{m \in \mathbb{Z}} \{-2, 2, -3, 3\} \stackrel{\{(x,y) | x < y\}}{=} \xRightarrow{\quad} \{(-2, 2), (-2, 3), (-3, -2), (-3, 2), (-3, 3), (2, 3)\}$$

مشخص است که رابطه ی داده شده در مجموعه ی مورد نظر 6 عضو دارد.

19 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

$$A \cap B = \{2, 3\}$$

$$n((A \times B) \cup (B \times A)) = n(A \times B) + n(B \times A) - (n(A \cap B))^2 = 12 + 12 - 4 = 24 - 4 = 20$$

20 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

$$A - B = A \cap B' \quad : \quad [(A \cap B) \cup (A - B)]' \cap B = [(A \cap B) \cup (A \cap B')]' \cap B \stackrel{\text{فکتور گیری از } A \cap}{=} \xRightarrow{\quad} \xRightarrow{\quad}$$

$$[A \cap (B \cup B')]' \cap B \stackrel{B \cup B' = U}{=} \xRightarrow{\quad} [A \cap U]' \cap B \stackrel{A \cap U = A}{=} \xRightarrow{\quad} A' \cap B = B \cap A' = B - A$$

21 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

$$A \cap B = A \rightarrow A \subset B \rightarrow B' \subset A', \quad A' \cap B \neq \emptyset, \quad A \cap B' = \emptyset, \quad A' \cup B = M$$

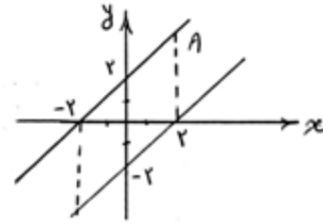
22 - که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

$$A = \{10, 11, 12, \dots, 99\}, \quad B = \{70, 77, 84, 91, 98\} \rightarrow n(A \cap B) = 5$$

تعداد اعضای یک مجموعه ی توانی n عضوی از رابطه ی  $2^n$  به دست می آید و چون مجموعه ی مورد نظر 5 عضو دارد جواب مطلوب تست مفروض نیز به صورت  $2^5 = 32$  محاسبه می شود.

23 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

ناحیه ی مورد نظر محدود به 4 خط دو به دو موازی  $y = x \pm 2 \approx y - x = \pm 2$  ،  $y = \pm x$  می باشد :



همانطور که مشاهده می شود ناحیه ی محدود به این چهار خط یک متوازی الاضلاع می باشد که مسلماً دورترین نقطه به آن راس A می باشد که در شکل نیز نشان داده شده است. یعنی نقطه ی (4 و 2) که برای محاسبه ی فاصله ی این نقطه از مبدا مختصات نیز از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$OA = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4 + 16 = 20 = 4 \times 5 = 2\sqrt{5}$$

**24 -** جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

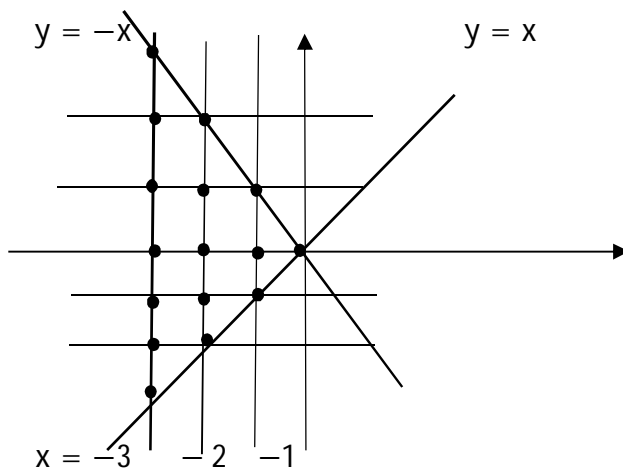
دقت داشته باشید که دو عضو  $\{a, b\} = \{b, a\}$  یکسان هستند و در واقع مجموعه ی داده شده 3 عضو دارد نه 4 عضو.

چون گفته شده است زیرمجموعه های به دست آمده فاقد عضو  $\{a, b\}$  باشد , پس طبق رابطه ی  $2^n$  تعداد زیرمجموعه های مطلوب مساله برابر است با :

$$2^{3-1} = 2^2 = 4$$

**25 -** جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

$$|y| \leq -x \rightarrow x \leq y \leq -x, \quad x \geq -3$$



با رسم نمودار رابطه ی داده شده خواهیم داشت :

$$\text{تعداد نقاط} = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

26 - که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

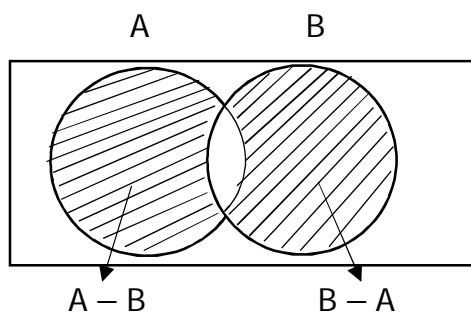
روش اول :

با استفاده از عملیات جبر مجموعه ها داریم :

$$(A \cap B') - (B - A) = (A \cap B') - (B \cap A') = (A \cap B') \cap (B \cap A')' = (A \cap B') \cap (A \cup B') = \\ ((A \cap B') \cap A) \cup ((A \cap B') \cap B') = (A \cap B') \cup ((A \cap B') \cap B') = A \cap B' = A - B$$

روش دوم :

کاملاً مشخص است که دو مجموعه ی  $A - B$  ,  $B - A$  دو مجموعه ی مجزا از هم اند.



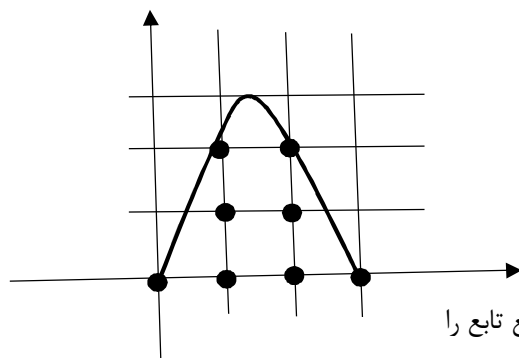
و می توان نوشت :

$$(A \cap B') - (B - A) = (A - B) - (B - A) = A - B$$

27 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

از مجموعه ی داده ی شده ی  $S$  با توجه به دو بعدی بودن فضای داده شده زوج مرتب هایی که هر کدام نشانگر مختصات یک نقطه هستند را به دست می آوریم و از این مجموعه ی نقاط , اشتراک آنها را با  $Z \times Z = Z^2$  به عنوان پاسخ صحیح و مطلوب تست در نظر می گیریم :

نمودار تابع  $y = 3x - x^2$  را رسم می کنیم :



برای اینکه به این پاسخ یعنی 8 نقطه ی مورد نظر برسیم , کافی ست نقاط تقاطع تابع را

با محور طول ها و بیشترین مقدار تابع را از رابطه ی  $x = -\frac{b}{2a}$  به دست آوریم :

$$y = 3x - x^2 = 0 \rightarrow x(3 - x) = 0 \rightarrow x = 0, 3, \quad x = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2.25$$

یعنی محدوده ی اختیار مقادیر  $x$  بین صفر و 3 و مقادیر  $y$  بین صفر و 2.25 است که با توجه به رابطه ی تعریف شده برای این مجموعه ی نقاط کلا 8 نقطه را شامل می شود :

$$(0 \text{ و } 1) - (1 \text{ و } 0) - (1 \text{ و } 1) - (1 \text{ و } 2) - (2 \text{ و } 0) - (2 \text{ و } 1) - (2 \text{ و } 2) - (3 \text{ و } 0)$$

## 28 - کج جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

برای اطمینان از درستی یا نادرستی گزینه ی 4 باید هم ارزی بودن رابطه را بررسی نمود :

$$1) \quad (a, b)R(a, b) \Leftrightarrow a + b = a + b \quad \checkmark \quad \text{خاصیت بازتابی .}$$

$$2) \quad (a, b)R(c, d) \Leftrightarrow (c, d)R(a, b) : a + d = c + b \rightarrow c + b = a + d \rightarrow (c, d)R(a, b) \quad \checkmark \quad \text{خاصیت تقارن .}$$

$$3) \quad \begin{aligned} &\text{طرفین رابطه را با هم جمع می کنیم} \\ &\left( (a, b)R(c, d) \Leftrightarrow (c, d)R(e, f) : \begin{aligned} &a + d = c + b \\ &c + f = d + e \end{aligned} \Rightarrow a + d + c + f \right. \\ &\left. = c + e + b + d \rightarrow a + f = b + e \rightarrow (a, b)R(e, f) \quad \checkmark \right. \end{aligned}$$

پس رابطه ی داده شده هم ارزی است.

اگر کلاس هم ارزی رابطه ی داده شده را بنویسیم , خواهیم داشت :

$$(x, y)R(a, b) \rightarrow x + b = y + a \rightarrow y - x = b - a$$

اگر مقادیر  $a$  شامل مجموعه ی  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و مقادیر  $b$  شامل اعضای مجموعه ی  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  باشد , برای اینکه متوجه شویم چند کلاس هم ارزی داریم باید محدوده ی تغییرات  $y - x$  را به دست آوریم :

$$(y - x)_{\min} = y_{\min} - x_{\max} = 1 - 6 = -5, \quad (y - x)_{\max} = y_{\max} - x_{\min} = 4 - 1 = 3$$

$$-5 \leq y - x \leq 3 \rightarrow \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

## 29 - کج جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

همانطور که می دانیم تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه ی  $n$  عضوی از رابطه ی  $2^n$  به دست می آید.

می دانیم که  $2^9 = 512$  می باشد. پس تعداد اعضای مجموعه ی  $A \cup B$  نه عضو و چون  $2^3 = 8$ , پس تعداد اعضای مجموعه ی  $A \cap B$  نیز سه عضو است.

و طبق رابطه ی زیر نیز می توان گفت :

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \rightarrow n(A \Delta B) = 9 - 3 = 6$$

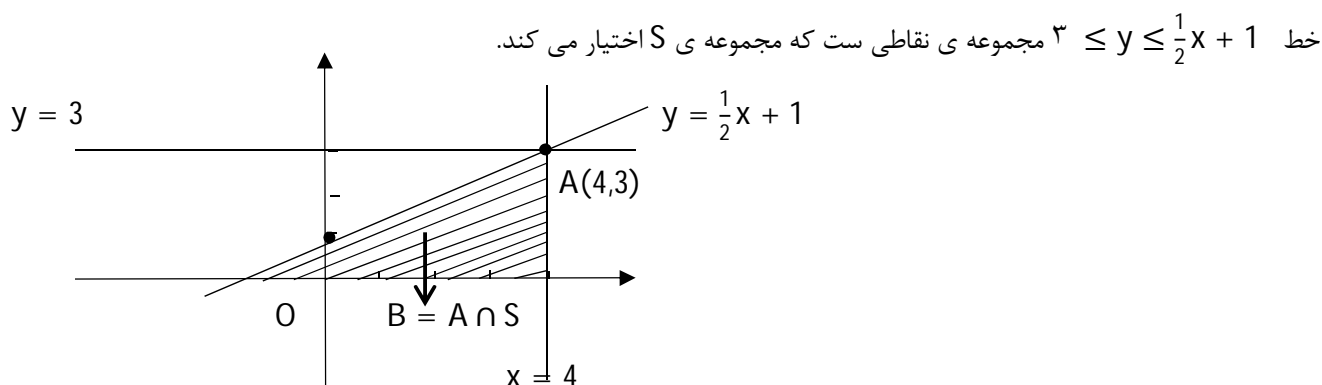
30 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

دقت داشته باشید که مجموعه ی اول تک عضوی است... و مجموعه ی دوم نیز دوعضوی و دو مجموعه عضو مشترک ندارند. پس اجتماع دو مجموعه باید سه عضو داشته باشد.

31 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

مجموعه ی داده شده دارای 6 عضو می باشد که در یک عضو مشترک هستند. یعنی 5 عضو مجزا از هم دارد. و طبق رابطه ی  $2^n$  ,  $2^5 = 32$  زیرمجموعه دارد.

32 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.



همانطور که مشاهده می شود ناحیه ی محدود به این سه خط یک مثلث می باشد که مسلمان دورترین نقطه به آن راس A می باشد که در شکل نیز

نشان داده شده است. یعنی نقطه ی (3 و 4) که برای محاسبه ی فاصله ی این نقطه از مبدا مختصات نیز از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 9 + 16 = 25 = 5$$

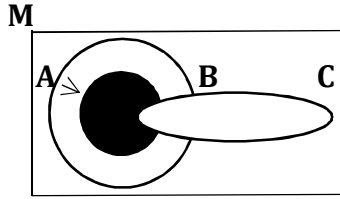
33 - که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

روش اول : جبر مجموعه ها

$$(A \cap (B - C)) - (A \cap B \cap C) = (A \cap (B \cap C')) \cap (A \cap B \cap C)' = (A \cap B \cap C') \cap (A' \cup B' \cup C') =$$

$$(A \cap B \cap C' \cap A') \cup (A \cap B \cap C' \cap B') \cup (A \cap B \cap C' \cap C') = \emptyset \cup \emptyset \cup (A \cap B \cap C') = A \cap B \cap C' \stackrel{A \subset B: A \cap B = A}{=} A \cap C'$$

روش دوم : با استفاده از نمودار ون مجموعه ها



34 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

کاملاً بدیهی ست که برای اینکه یک مجموعه ی چهار عضوی را به سه زیرمجموعه افراز کنیم تنها می توان آن را به صورت یک مجموعه ی دوعضوی و دو مجموعه ی تک عضوی نوشت . یعنی باشد داشته باشیم :

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 1}{2} = 6$$

$$A_1 = \{a, b\}, \{a, b\}, \{a\}$$

$$A_2 = \{a, \{a\}\}, \{a, b\}, b$$

$$A_3 = \{a, \{a, b\}\}, \{a\}, b$$

$$A_4 = \{b, \{a, b\}\}, a, \{a\}$$

$$A_5 = \{b, \{a\}\}, \{a, b\}, a$$

$$A_6 = \{\{a\}, \{a, b\}\}, a, b$$

35 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

برای اطمینان از درستی یا نادرستی گزینه ی 4 باید هم ارزی بودن رابطه را بررسی نمود :

$$1) \quad aRa \Leftrightarrow 8|a^2 - a^2 = 0 \quad \checkmark$$

$$2) \quad aRb \Leftrightarrow bRa : 8|a^2 - b^2 \rightarrow 8|b^2 - a^2 \rightarrow bRa \quad \checkmark$$

$$3) \quad \left( \begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix} \right) \Leftrightarrow aRc : \left( \begin{matrix} 8|a^2 - b^2 \\ 8|b^2 - c^2 \end{matrix} \right) \stackrel{\text{طرفین رابطه را با هم جمع می کنیم}}{=} \stackrel{=}{=} \stackrel{=}{=} \stackrel{=}{=} \stackrel{=}{=} 8|a^2 - c^2 \rightarrow aRc \quad \checkmark$$

پس رابطه ی داده شده هم ارزی است.

اگر کلاس هم ارزی رابطه ی داده شده را بنویسیم , خواهیم داشت :

$$xRy \rightarrow 8|x^2 - y^2$$

پس رابطه ی R یک رابطه ی هم ارزی است و از آنجایی که تمام اعداد صحیح فرد در رابطه ی فوق صدق می کنند همگی در یک دسته یا کلاس هم ارزی مانند کلاس هم ارزی [1] قرار می گیرند.

36 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

$$A \cap B' = B \cap A' \rightarrow A - B = B - A \stackrel{\text{الزاما}}{\Rightarrow} A = B$$

$$(A \Delta B) - A = ((A - B) \cup (B - A)) - A = (A - B) - A \stackrel{A-B \subset A}{=} \emptyset$$

37 - که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

اگر بخواهید مقید به حل تست با استفاده از فرمول باشید می توانید بنویسید :

$$\frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{4!} + \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{2!} + \binom{4}{1}\binom{3}{3} + \frac{\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{2!} + \binom{4}{4} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{4 \times 3 \times 1}{2} + (4 \times 1) + \frac{6 \times 1}{2} + 1 =$$

$$1 + 6 + 4 + 3 + 1 = 15$$

اما شما به راحتی می توانید افرازهای مجموعه ی یادشده ی فوق را بنویسید.

$A_1 = \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$	$A_2 = \{0\}, \{1,2,3\}$	$A_3 = \{1\}, \{0,2,3\}$
$A_4 = \{2\}, \{0,1,3\}$	$A_5 = \{3\}, \{0,1,2\}$	$A_6 = \{0,1\}, \{2,3\}$
$A_7 = \{0,2\}, \{1,3\}$	$A_8 = \{0,3\}, \{1,2\}$	$A_9 = \{0\}, \{1\}, \{2,3\}$
$A_{10} = \{0\}, \{2\}, \{1,3\}$	$A_{11} = \{0\}, \{3\}, \{1,2\}$	$A_{12} = \{1\}, \{2\}, \{0,3\}$
$A_{13} = \{1\}, \{3\}, \{0,2\}$	$A_{14} = \{2\}, \{3\}, \{0,1\}$	$A_{15} = \{0,1,2,3\}$

38 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

کاملا واضح است که بخش پذیری روی اعداد صحیح متقارن نیست و در نتیجه این رابطه هم ارزی نمی باشد.

39 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

ابتدا عضوهای دو مجموعه ی یادشده را می نویسیم :

$$A = \{-1, 1, 3\}, \quad B = \{1, 2, 3\}, \quad B^2 = \{\text{عضو}^2\} \quad \text{و} \quad C^2 = \{\text{عضو}^2\}$$

دقت داشته باشید که نیازی به نوشتن تمام اعضای مجموعه های یادشده نیستو شما با توجه به اینکه می دانید  $B^2 - A^2$  یعنی تمام اعضای از مجموعه ی  $A^2$

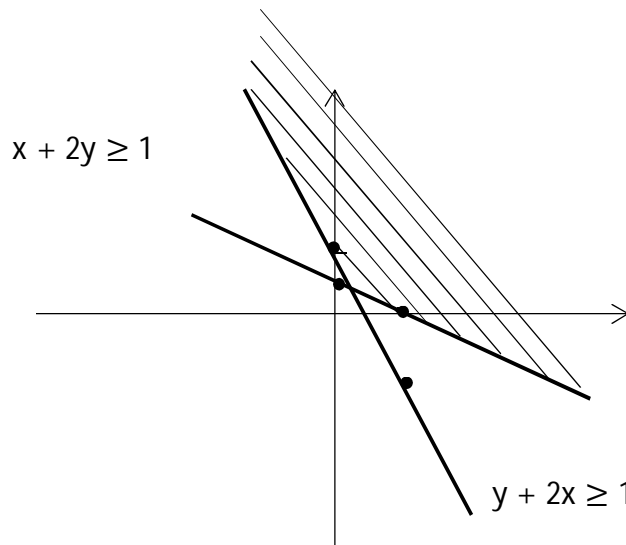
که از  $B^2$  حذف می شوند می توانید اعضای مجموعه ی  $B^2 - A^2$  را به صورت زیر بنویسید :



$$B^2 - A^2 = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)\} \rightarrow 5 \text{ عضو} \rightarrow 2^5 = 32 \text{ زیرمجموعه}$$

40 - **کج** جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

اگر خطوط یادشده را رسم کنیم , خواهیم داشت :



کاملاً مشخص است مقدار  $x + 2y = 1$  کمترین مقدار ناحیه ی مورد نظر است.

41 - **کج** جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

$$A \subset B : B' \subset A' \text{ و } B \subset A' : B \cap A' \neq \emptyset$$

همانطور که در تست های گذشته نیز بررسی کردیم , بقیه ی گزینه ها به وضوح درست می باشند.

42 - **کج** جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

مطابق صورت مساله , عضو برداشته شده در هر دو مجموعه موجود است و لذا دو مجموعه ی  $A, B$  از هم مجزا نیستند و الزاماً  $A \cap B \neq \emptyset$

43 - **کج** جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

$$A - \{B\} = \{a, b, \{a, b\}, \{a\}\} - \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a\}\} = \text{تعداد زیرمجموعه سره غیر تهی} \implies 2^3 - 1 - 1 = 6$$

44 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از جبر مجموعه ها داریم :

$$\begin{aligned} [A \cup (A \cap B)]' \cap [(B \cap A) \cup (B - A)] &= (A' \cap (A' \cup B')) \cap ((B \cap A) \cup (B \cap A')) = \\ A' \cap (A' \cup B') \cap (B \cap (A \cup A')) &= (A' \cap (A' \cup B')) \cap (B \cap M) = (A' \cap (A' \cup B')) \cap B = (A' \cap (B \cap (A' \cup B'))) = \\ &= (A' \cap ((B \cap A') \cup (B \cap B'))) = (A' \cap ((B \cap A') \cup \emptyset)) = (A' \cap (B \cap A')) = (A' \cap A') \cap B = A' \cap B = A' - B' \end{aligned}$$

45 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

می دانیم که اگر روی هر دو زوج مرتب یک ضابطه رخ دهد رابطه هم ارزی است و می توان نوشت :

$$[(3, 5)] = (x, y)R(3, 5) : x^2 - 9 = y^2 - 25 \rightarrow x^2 - y^2 = -16 \text{ . تنها گزینه ی دو این شرایط را دارد .}$$

46 - که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

مجموعه ی  $A$  دارای 4 عضو است. اما  $\{A\}$  فقط یک عضو دارد و آن هم  $\{a, b, \{b\}, \{a\}\}$  است و چون دو مجموعه ی یادشده عضو مشترک ندارند , پس  $A - \{A\}$  همان 4 عضو را دارد و می دانیم که تعداد زیرمجموعه های سره ی غیر تهی یک مجموعه ی  $n$  عضوی از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$2^n - 1 - 1 = 2^4 - 1 - 1 = 14$$

47 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها داریم :

$$C \cup A' \cup B' = C \cup (A \cap B)' \overset{\text{متمم می گیریم}}{=} [C \cup (A \cap B)']' = C' \cap (A \cap B) = (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C \text{ 4 درستی گزینه ی}$$

$$(A \cap B) \cap C' = A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C) \text{ 3 درستی گزینه ی}$$

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) \text{ 1 درستی گزینه ی}$$

48 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

مطابق آنچه که در فرض مساله مطرح شده است :

$$A = \{1,2,3, \dots, 9\} \quad , \quad B = \{11,13,17, \dots, 47\} \rightarrow A \times B = \{(1,11), (1,13), (1,17), \dots, (9,41), (9,43), (9,47)\}$$

آنچه که از رابطه ی  $(x, y)R(a, b) \Leftrightarrow x = a$  برمی آید , آن است که مولفه های اول دو زوج مرتب باید یکسان باشند. پس زوج مرتب هایی که مولفه ی اول آنها یکسان هستند با هم در ارتباط بوده و در واقع در یک کلاس هم ارزی قرار دارند.

به وضوح مشخص است که چون این رابطه دارای 9 مولفه ی اول یکسان می باشد , پس این رابطه مجموعه ی  $A \times B$  را به 9 کلاس یا رده ی هم ارزی افراز می کند.

49 - که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

سه خاصیت مهم داده شده در گزینه های 1 و 2 و 3 که از رابطه ی  $A \subset B$  نتیجه می شوند , را حتما به خاطر بسپارید :

$$A \cap B = A \quad \text{و} \quad A - B = \emptyset \quad \text{و} \quad B' \subset A'$$

به یاد داشته باشید که تمام نتایج یاد شده برگشت پذیر بوده و  $A \subset B$  را نتیجه می دهند.

اما با مثال نقضی می توان به راحتی نادرست بودن برگشت پذیری قضیه ی داده شده در گزینه ی 4 را اثبات نمود.

$$A = \{1,2\} \quad , \quad B = \{1,3\} \quad , \quad C = \{1,4\} \rightarrow A \cap B = B \cap C = \{1\} \rightarrow A \neq B$$

50 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

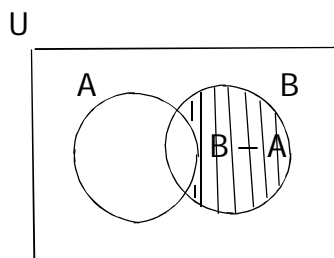
$$(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A' = (A \cap B')' \cap (A \cup B) \cap A' = (A' \cup B) \cap (A \cup B) \cap A' = \overset{\text{در دو جمله ی اول از BU فاکتور بگیرد}}{=} [B \cup (A \cap A')] \cap A' = [B \cup \emptyset] \cap A' = B \cap A' = B - A$$

51 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

$$\begin{aligned} (A_3 = \{m \in \mathbb{Z} | m \geq -3, 2^m \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}) \\ (A_4 = \{m \in \mathbb{Z} | m \geq -4, 2^m \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}) \end{aligned} \quad \overset{n}{\Rightarrow} \quad \{-3, -2, -1, 0, 1\} \overset{5 \text{ عضو}}{\Rightarrow} 2^5 = 32 \text{ زیر مجموعه}$$

52 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

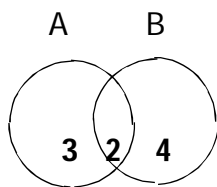
$$(B - A)' - A = (B - A)' \cap A' = ((B - A)' \cap A')' = (B - A) \cup A = A \cup B$$



53 - **که جواب :** گزینه ی 3 صحیح است.

$$|(B - A)| = |B| - |B \cap A| = 6 - 2 = 4 \quad , \quad |(A - B)| = |A| - |B \cap A| = 5 - 2 = 3$$

$$|(A \cap B') \times (A \cup B')'| = |(A \cap B') \times (A' \cap B)| = |(A - B) \times (B - A)| = |(A - B)| \times |(B - A)| = 3 \times 4 = 12$$



54 - **که جواب :** گزینه ی 1 صحیح است.

آنچه که از روابط تعریف شده برای مجموعه ها برمی آید , آن است که مجموعه ی A شامل رده ای از اعداد است که باقی مانده ی آنها بر عد 7 برابر با 2 می باشد.

مجموعه ی B شامل رده ای از اعداد است که باقی مانده ی آنها بر عد 7 برابر با 4 می باشد.

$$n = 7k - 3 \stackrel{\text{7 واحد اضافه کنید}}{=} \implies n = 7k + 4$$

و بالطبع مجموعه ی C شامل رده ای از اعداد خواهد بود که باقی مانده ی آنها بر عد 7 برابر با (0 و 1 و 3 و 5 و 6) می باشد.

پس ما باید دنبال جفت اعدادی باشیم که باقیمانده ی آنها بر 7 در یک افراز از این کلاس هم ارزی قرار داشته باشند.

**گزینه ی 1:** دو عدد 13 و 21 به ترتیب دارای باقی مانده های 6 و صفر بر عدد 7 هستند و هر دو در کلاس C قرار دارند. (گزینه ی صحیح)

**گزینه ی 2:** دو عدد 13 و 23 به ترتیب دارای باقی مانده های 6 و 2 بر عدد 7 هستند و در یک کلاس هم ارزی قرار ندارند.

**گزینه ی 3:** دو عدد 21 و 32 به ترتیب دارای باقی مانده های صفر و 4 بر عدد 7 هستند و در یک کلاس هم ارزی قرار ندارند.

**گزینه ی 4:** دو عدد 23 و 32 به ترتیب دارای باقی مانده های 2 و 4 بر عدد 7 هستند و در یک کلاس هم ارزی قرار ندارند.

**55 - که جواب :** گزینه ی 2 صحیح است.

عمود بودن دو خط در فضا دو خاصیت بازتابی و تریابی را ندارد.

(یعنی اگر خطی بر خط دیگری عمود باشد و آن خط نیز بر خط دیگری عمود باشد , دلیل نمی شود که خط اولی بر سومی نیز عمود باشد(رد خاصیت تعدی) - خاصیت بازتابی هم که به شکل واضحی امکان پذیر نیست.)

**56 - که جواب :** گزینه ی 2 صحیح است.

$$A_1 = \{-1 \leq m \leq 7\} \text{ و } A_2 = \{-2 \leq m \leq 6\} \text{ و } A_3 = \{-3 \leq m \leq 5\} \text{ و } \dots \text{ و } A_8 = \{-8 \leq m \leq 0\}$$

$$\bigcup_{i=1}^8 A_i - \bigcap_{i=1}^8 A_i = \{-8 \leq m \leq 7\} - \{-1 \leq m \leq 0\} = 16 - 2 = 14$$

**57 - که جواب :** گزینه ی 1 صحیح است.

به راحتی می توانید با آوردن مثال نقض برای سه گزینه ی دیگر نادرستی آنها را تحقیق کنید.

رد گزینه ی 2:  $A = \{1,2\}$  ,  $B = \{1,3\}$  ,  $C = \{1,4\}$

رد گزینه ی 3:  $A = \{1,2\}$  ,  $B = \{1,4\}$  ,  $C = \{2,4\}$

رد گزینه ی 4:  $A = \{1\}$  ,  $B = \{2\}$  ,  $C = \{1,2\}$

**58 - که جواب :** گزینه ی 4 صحیح است.

منظور از اعضای رابطه ی R تعداد زوج مرتب هایی به شکل  $(a, b)$  است که در رابطه ی  $|3b - a| < 4$  صدق می کند.

$$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2), (6, 3)$$

پس رابطه ی یادشده دارای 11 عضو می باشد.

**59 - که جواب :** گزینه ی 2 صحیح است.

همانطور که می دانیم یک مجموعه ی K عضوی دارای  $2^k$  زیرمجموعه است.

اگر مجموعه ی A' دارای  $2^k$  زیرمجموعه باشد , بالطبع مجموعه ی A به دلیل داشتن 5 عضو بیشتر دارای  $2^{k+5}$  زیرمجموعه خواهد بود و می توان نوشت :

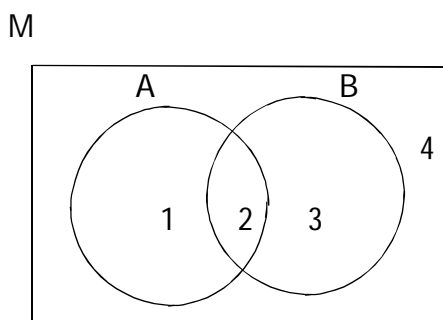
$$\frac{\text{تعداد زیر مجموعه ها ی مجموعه ی } A}{\text{تعداد زیر مجموعه ها ی مجموعه ی } A'} = \frac{2^{k+5}}{2^k} = 2^5 = 32 \quad \text{خارج قسمت}$$

60 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

به روش جبر مجموعه ها به آسانی اثبات می شود که :

$$A \cup (B - A) = B \rightarrow A \cup B = B \rightarrow A \subseteq B$$

به روش شماره گذاری نیز تست مفروض را حل می کنیم :



$$A \cup (B - A) = B \rightarrow \{1,2\} \cup [\{2,3\} - \{1,2\}] = \{2,3\} \rightarrow \{1,2\} \cup [\{3\}] = \{1,2,3\} = \{2,3\} \stackrel{\text{الزاما}}{\Rightarrow} 1 = \emptyset$$

یعنی شماره ی 1 انگار وجود ندارد. با این حساب :

بررسی گزینه ها :

گزینه ی 1 :  $A \subseteq B : \{2\} \subseteq \{2,3\}$  ✓

گزینه ی 2 :  $B \subseteq A : \{2,3\} \subseteq \{2\}$  ×

گزینه ی 3 :  $A = \emptyset : \{2\} = \emptyset$  ×

گزینه ی 4 :  $B = \emptyset : \{2,3\} = \emptyset$  ×

61 - که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

نادرستی گزینه ی 1 : برای اینکه یک مجموعه زیرمجموعه ی یک مجموعه ای باشد ، باید عینا تمام اعضای آن در مجموعه ی دوم باشد. اما عضو 2 به هیچ عنوان عینا در مجموعه ی C وجود ندارد.

درستی گزینه ی 2 :  $\{2\} \in A : \{2\} \in B \rightarrow A \subseteq B$

درستی گزینه ی 3 :  $A = \{2\} \in B$

درستی گزینه ی 4 :  $B = \{2, \{2\}\} \in C$

**62 -** که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

$$A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ و } A_6 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \rightarrow (A_3 \cup A_6) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \rightarrow (A_3 \cup A_6) - A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

در صورتی که در محاسبه ی مستقیم و اشتراک و اجتماع و سایر عملیات روی بازه ها مشکل دارید ، می توانید با تمرین روی محور اعداد این نقیصه را در خود برطرف کنید.

**63 -** که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از عملیات جبر مجموعه ها داریم :

$$\left( \begin{array}{l} (A \times B) \subset (B \times A) \\ A, B \neq \emptyset \end{array} \right) \rightarrow (A \subset B, B \subset A) \rightarrow A = B, A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = A - A = B - B = \emptyset$$

**64 -** که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

$$m^2 \leq 4 : -2 \leq m \leq 2 \rightarrow m = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$\{(x, y) | x < y\} = \{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$$

پس رابطه ی داده شده با شرط اینکه مولفه ی اول زوج مرتب از مولفه ی دوم همواره کوچکتر باشد دارای 10 عضو خواهد بود.

**65 -** که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از روش جبر مجموعه ها داریم :

$$(A \times B) - (B \times A) = \emptyset \rightarrow A \times B = B \times A \rightarrow A = B \rightarrow A \cap B = A \neq \emptyset$$

**66 -** که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

برای اطمینان از درستی یا نادرستی گزینه ی 4 باید هم ارزی بودن رابطه را بررسی نمود :

$$1) \text{ خاصیت بازتابی : } (a, b)R(a, b) \Leftrightarrow a + b = b + a \quad \checkmark$$

$$2) \text{ خاصیت تقارن : } (a, b)R(c, d) \Leftrightarrow (c, d)R(a, b) : a + d = b + c \rightarrow c + b = d + a \rightarrow (c, d)R(a, b) \quad \checkmark$$

$$3) \text{ خاصیت تعدی یا ترایی : } \begin{pmatrix} (a, b)R(c, d) \\ (c, d)R(e, f) \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a, b)R(e, f) : \begin{pmatrix} a + d = b + c \\ c + f = d + e \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{طرفین رابطه را با هم جمع می کنیم}} \begin{pmatrix} a + d + c + f = b + c + d + e \\ a + f = b + e \end{pmatrix}$$

$$a + d + c + f = b + c + d + e \xRightarrow{-(c+d)} a + f = b + e \Leftrightarrow (a, b)R(e, f) \quad \checkmark$$

پس رابطه ی داده شده هم ارزی است.

حال کلاس هم ارزی (2,5) را با توجه به رابطه ی هم ارزی داده شده می نویسیم :

$$[(2,5)] = \{(x, y) | (x, y)R(2,5)\} : x + 5 = y + 2 \rightarrow y = x + 3$$

یعنی ما باید دنبال همه ی جفت اعدادی از مجموعه ی اعداد طبیعی تک رقمی باشیم که بین مولفه ی اول و دوم آنها شرایط فوق برقرار باشد.

$$\{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8), (6,9)\}$$

که کلا 6 تا عضو دارد.

**67 -** جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از جبر مجموعه ها:

$$B' \subset A' \rightarrow A \subset B \rightarrow \begin{pmatrix} A \cap B = A \\ A \cup B = B \end{pmatrix} : A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = B - A = B \cap A'$$

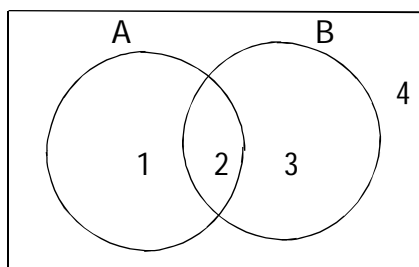
$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = (B \cap A') \cup (B \cap A) \xRightarrow{\text{از } B \cap \text{ فاکتور بگیرد}} B \cap (A \cup A') = B \cap U = B$$

با استفاده از شماره گذاری :

$$B' \subset A' \rightarrow B' \cap A' = B' \rightarrow \{1,4\} \cap \{3,4\} = \{1,4\} \rightarrow \{4\} = \{1,4\} \xRightarrow{\text{الزاما}} 1 = \emptyset$$

یعنی شماره ی 1 انگار وجود ندارد. با این حساب

M





$$[(A \cup B) - (A \cap B)] \cup (A \cap B) \rightarrow [\{2,3\} - \{2\}] \cup \{2\} \rightarrow \{3\} \cup \{2\} = \{2,3\}$$

بررسی گزینه ها :

گزینه ی 1:  $A = \{2\}$  ×گزینه ی 2:  $B = \{2,3\}$  ✓گزینه ی 3:  $A' = \{3,4\}$  ×گزینه ی 4:  $B' = \{4\}$  ×**68 -** که جواب : گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از جبر مجموعه ها:

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset \rightarrow (A \cap B) \times (B \cap A) = (A \cap B)^2 = \emptyset \rightarrow (A \cap B) = \emptyset$$

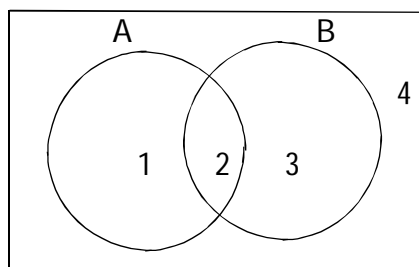
$$A - B = A - (A \cap B) = A - \emptyset = A$$

با استفاده از شماره گذاری :

$$(A \cap B) = \emptyset \rightarrow \{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\} = \emptyset \stackrel{\text{الزاما}}{\Rightarrow} 2 = \emptyset$$

یعنی شماره ی 2 انگار وجود ندارد. با این حساب

M



$$A - B \rightarrow \{1\} - \{3\} = \{1\}$$

بررسی گزینه ها :

گزینه ی 1:  $A = \{1\}$  ✓گزینه ی 2:  $\emptyset = \{ \}$  ×گزینه ی 3:  $B - A = \{3\} - \{1\} = \{3\}$  ×

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1,3\} - \{ \} = \{1,3\} \quad \times \quad \text{گزینه ی 4:}$$

69 - که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

اگر این رابطه هم ارزی باشد یعنی اینکه باید مشخص کنیم که رابطه ی تعریف شده هم ارزی هست یا نه؟

$$1) \text{ خاصیت بازتابی : } (a, b)R(a, b) \Leftrightarrow (a - a)(b - b) = 0 \quad \checkmark$$

$$2) \text{ خاصیت تقارن : } (a, b)R(c, d) \Leftrightarrow (c, d)R(a, b) : (a - c)(b - d) = 0 \rightarrow (c - a)(d - b) = 0 \rightarrow (c, d)R(a, b) \quad \checkmark$$

$$3) \text{ خاصیت تعدی یا ترایی : } \begin{pmatrix} (a, b)R(c, d) \\ (c, d)R(e, f) \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a, b)R(e, f) : \begin{pmatrix} (a - c)(b - d) = 0 \\ (c - e)(d - f) = 0 \end{pmatrix}$$

این رابطه خاصیت تعدی ندارد.

با ذکر مثال نقضی به راحتی می توان عدم وجود این خاصیت را درک نمود.

$$\begin{pmatrix} (1,2)R(1,3) \\ (1,3)R(2,3) \end{pmatrix} \rightarrow (1,2)R(2,3) \quad \times$$

70 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

$$A_1 = (-1,2) , A_2 = (2,4) , A_3 = (-3,6) , A_4 = (4,8) \rightarrow \bigcup_{n=1}^4 A_n$$

$$= (-3,8) \overset{\text{اعداد صحیح متعلق به بازه}}{=} = \implies -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \rightarrow 10 \text{ عدد صحیح}$$

71 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

مجموعه ی اعداد طبیعی در تست مفروض به سه دسته افراز شده است :

مجموعه ی **A** شامل دسته ای از اعداد طبیعی ست که باقی مانده ی آنها بر عدد 6 برابر یک می باشد.

مجموعه ی **B** شامل دسته ای از اعداد طبیعی ست که باقی مانده ی آنها بر عدد 6 برابر 5 می باشد.

$$n = 6k - 1 \overset{\text{6 واحد اضافه می کنیم}}{=} = \implies n = 6k + 5$$

پس مجموعه ی **C** باید شامل دسته ای از اعداد طبیعی ست که باقی مانده ی آنها بر عدد 6 چیزی غیر 1 و 5 باشد.

رد گزینه ی 1: باقی مانده ی عدد 11 بر 6 برابر 5 می باشد.

رد گزینه ی 2: باقی مانده ی عدد 29 بر 6 برابر 5 می باشد.

درستی گزینه ی 3: باقی مانده ی عدد 33 بر 6 برابر 3 می باشد.

رد گزینه ی 4: باقی مانده ی عدد 37 بر 6 برابر 1 می باشد.

**72 -** که جواب: گزینه ی 4 صحیح است.

در واقع با توجه به صورت پرسش مساله , مجموعه ی نقاط داخل دایره مفروض مساله است :

$$x = 0 : y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \rightarrow 7 \text{ نقطه}$$

$$x = \pm 1 : y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \rightarrow 14 \text{ نقطه}$$

$$x = \pm 2 : y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \rightarrow 14 \text{ نقطه}$$

$$x = \pm 3 : y = 0, \pm 1, \pm 2 \rightarrow 10 \text{ نقطه}$$

کلا با 45 نقطه سروکار داریم که مختصات هر دو مولفه ی آنها صحیح می باشد.

**73 -** که جواب: گزینه ی 3 صحیح است.

حتما به این دو رابطه ی مهم و بدیهی توجه داشته باشید :

$$A' - B' = B - A \quad \text{و} \quad B' - A' = A - B$$

$$A' \Delta B' = (A' - B') \cup (B' - A') = (B - A) \cup (A - B) = A \Delta B$$

**74 -** که جواب: گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از ویژگی های ذکر شده برای عدد اصلی (کاردینال) مجموعه ها داریم :

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 5 - 2 = 3$$

$$|(A - B) \times (B - A)| = 6 \stackrel{|A-B|=3}{=} \implies |B - A| = 2 : |B - A| = |B| - |A \cap B| \rightarrow 2 = |B| - 2 \rightarrow |B| = 4$$

75 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

با توجه به اینکه مجموعه دارای 4 عضو است ، بالطبع باید دارای  $2^4 = 16$  زیرمجموعه باشد. اما با توجه به اینکه در فرض مساله قید شده است که تمام زیرمجموعه های مطلوب باید شامل عضو خاص  $a$  باشند ، پس :

حالت های مطلوب 8 زیرمجموعه بوده و به صورت زیر می باشد :

$$\{a\} - \{a, b\} - \{a, \{a\}\} - \{a, \{b\}\} - \{a, b, \{a\}\} - \{a, b, \{b\}\} - \{a, \{a\}, \{b\}\} - \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$$

76 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

$$x^2 - 2x = 3 : x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \rightarrow x = 3, -1 \rightarrow y = 3$$

$$x + y = \left( \begin{matrix} 3 + 3 = 6 \\ -1 + 3 = 2 \end{matrix} \right) \overset{\max}{\Rightarrow} 6$$

77 - که جواب : گزینه ی 4 صحیح است.

اعضای دو مجموعه ی  $A$  و  $B$  را با توجه به روابط تعریف شده می توان به صورت زیر نوشت :

$$A = \{10, 11, 12, \dots, 99\} , B = \{70, 77, 84, \dots, 693\} \rightarrow A \cap B = \{70, 77, 84, 91, 98\} \rightarrow 2^5 = 32$$

می دانیم که تعداد اعضای مجموعه ی توانی برابر است با تعداد زیرمجموعه ها .

78 - که جواب : گزینه ی 3 صحیح است.

$$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 14 + 17 - 2(5) = 31 - 10 = 21$$

79 - که جواب : گزینه ی 2 صحیح است.

$$\bigcup_{n=1}^4 A_n - \bigcap_{n=1}^3 A_n = ([0,2] \cup [1,3] \cup [2,4] \cup [3,5] - [0,2] \cap [1,3] \cap [2,4]) = [0,5] - \emptyset = [0,5]$$

**80 -** کجواب : گزینه ی 1 صحیح است.

با توجه به رابطه ی هم ارزی ذکر شده معلوم است که عددی با 39 در یک کلاس هم ارزی قرار دارد که تفاضلش با آن مضربی از عدد 7 باشد.

$$95 - 39 = 56 = 8 \times 7 \quad \checkmark$$

$$96 - 39 = 57 \times$$

$$97 - 39 = 58 \times$$

$$98 - 39 = 59 \times$$

**81 -** کجواب : گزینه ی 4 صحیح است.

بی نهایت مثال نقض می توان برای رد گزینه ی 4 مثال زد. اما سه گزینه ی دیگر به وضوح درست می باشند.

$$2^2 > 2^3 : 4 > 8 \quad \times$$

موفق باشید.

پناهی - دبیر دبیرستان های تهران

مرداد ماه 1393

\*برای تهیه ی پکیج کامل جزوه های رشته ی ریاضی و تجربی می توانید با شماره ی 09196025850 و یا با ایمیل [Panahisaeed59@yahoo.com](mailto:Panahisaeed59@yahoo.com) با اینجانب در تماس باشید.

#### جزوه های رشته ی ریاضی

(دنباله ی حسابی و هندسی - تابع و ویژگی های آن - ماتریس مرتبه ی دو - حل تست های مثلثات 13 سال اخیر بدون استفاده از یک فرمول - ترکیبات - هندسه ی 1 (زاویه و مثلث - مساحت و قضیه ی فیثاغورس - تشابه و قضیه ی تالس - شکل های فضایی) - هندسه ی 2 (استدلال در هندسه - دایره - تبدیلات - صفحه و فضا) - استدلال ریاضی (جبر و احتمال) - جبر مجموعه ها - احتمال - بسط دوجمله ای - معادلات و توابع درجه ی 2 - بخش پذیری - لگاریتم و توابع نمایی - نامعادلات و تعیین علامت - حد و پیوستگی - مشتق و کاربرد آن - دنباله ها - انتگرال - گراف - نظریه ی اعداد - ترکیبات (ریاضیات گسسته) - بردارها (هندسه ی تحلیلی) - خط و صفحه در فضا - مقاطع مخروطی - ماتریس مرتبه ی سوم - نمودارها - آمار و مدل سازی و ...)

#### جزوه های رشته ی تجربی

(دنباله ی حسابی و هندسی - تابع و ویژگی های آن - ماتریس مرتبه ی دو - حل تست های مثلثات 13 سال اخیر بدون استفاده از یک فرمول - ترکیبات - هندسه ی 1 (زاویه و مثلث - مساحت و قضیه ی فیثاغورس - تشابه و قضیه ی تالس - شکل های فضایی) - احتمال ویژه ی رشته ی تجربی - بسط دوجمله ای - معادلات و توابع درجه ی 2 - بخش پذیری - لگاریتم و توابع نمایی - نامعادلات و تعیین علامت - حد و پیوستگی - مشتق و کاربرد آن - دنباله ها - انتگرال ویژه ی رشته ی تجربی - بردارها (ویژه ی رشته ی تجربی) - هندسه ی مختصاتی و مقاطع مخروطی - نمودارها - آمار و مدل سازی و ...)