

ارتعاشات مکانیکی

سید یوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

مقدمه

- تعریف ارتعاشات
- تاریخچه ارتعاشات
- مفاهیم اولیه ارتعاشات

□ درجه آزادی (DoF) Degree of Freedom

- دسته بندی ارتعاشات
- کاربردهای آتی و حال حاضر

تعریف ارتعاشات

■ ارتعاشات vibration: هر حرکتی که خود را بعد از یک بازه زمانی تکرار می کند ارتعاشات یا نوسان oscillation گفته می شود.

□ مثال: حرکت تاب مانند آونگ و ارتعاش تار کشیده شده

■ مطالعه ارتعاشات با مطالعه حرکت‌های نوسانی اجسام و نیروهای متناظر با آنها سروکار دارد.

■ از Wikipedia گذاشته شود

مطالعه ارتعاشات، چرا؟

- ارتعاشات می تواند به **تغییر مکان بسیار زیاد و شکست** در ماشین آلات و سازه ها منجر شود
- برای کاهش ارتعاشات از طریق **طراحی مناسب ماشین** و نصب آنها
- برای **سود بردن (استفاده مفید)** از ارتعاشات در چندین وسیله و کاربرد صنعتی
- برای بهبود بازده بعضی از ماشین آلات، ریخته گری، فورج و جوشکاری
- برای شبیه سازی زلزله و تحقیقات زمین شناسی و طراحی راکتورهای هسته ای

تاریخچه ارتعاشات

- سال ۲۶۰۰ قبل از میلاد چنگ (دستگاه موسیقی)
- ۵۸۲-۵۰۷ قبل از میلاد فیثاقورس: مطالعه صدای موزیک
- Chang Heng در ۱۳۲ میلادی اختراع لرزه نگار
- گاليله ۱۶۴۲-۱۵۶۴ میلادی مطالعه آونگ ساده
- نیوتن ۱۷۲۷-۱۶۴۲، برنولی ۱۷۸۲-۱۷۰۰، اویلر ۱۷۸۳-۱۷۰۷، لاگرانژ ۱۸۱۳-۱۷۳۶ مطالعه سیستماتیک (مبنائی) دینامیک و ارتعاشات
- کولمب ۱۷۸۴ طراحی وسیله آزمایش ارتعاش پیچشی
- تیموشنکو ۱۹۷۲-۱۸۷۸: تئوری تیر تیموشنکو
- میندلین: تئوری صفحات میندلین
- پیونکاره و لیاپانو: ارتعاشات غیر خطی
- دافینگ و وندریپول: ارتعاش غیر خطی در مهندسی
- ارتعاشات در نانوتکنولوژی:

Pythagoras فیثاقورس

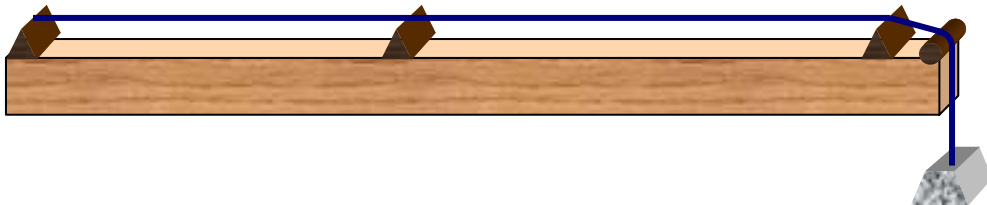


■ شاید اولین کسی باشد که بر روی صدای موزیک تحقیق کرد

■ او دستگاهی ساخت که فاصله تکیه گاه تار را تغییر می داد و کشش در تار نیز قابل تغییر بود

■ در یک کشش ثابت او دریافت که طول تار در زیر و بم بودن صدا مؤثر است.

■ بعد از او بیشتر تحقیقات روی آلات موسیقی بوده است



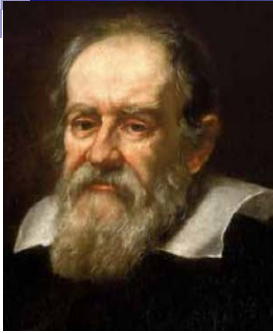
اولین لرزه نگار



■ Zhang Heng در سال ۱۳۲ میلادی

اولین لرزه نگار را برای اندازه گیری شدت زلزله ساخت.

■ این دستگاه شبیه یک سماور به قطر تقریبی $1/9$ متر است که در داخل آن مکانیزمی موجود است که شامل آونگی است که اطراف آن ۸ اهرم وجود دارد. این اهرمها به سر ۸ مجسمه اژدها (در ۸ جهت) متصل هستند. مجسمه ها در دهانشان یک گوی برنزی است که در صورت زلزله رها شده و با مجسمه وزغ در پائین آن برخورد می کند و در نتیجه جهت زلزله و زمان آن مشخص می شود.



از گالیله تا ریلی

■ گالیله ۱۶۴۲-۱۵۶۴

- بنیان گذار علوم تجربی (آزمایشی) مدرن
- شروع آزمایش بر روی پاندول ساده
- کتابی در ۱۶۳۸ منتشر کرد که **فرکانس، تشدید**، طول، کشش و چگالی تار مرتعش را توصیف می کرد

■ رابرت هوک ۱۷۰۳-۱۶۵۳

- رابطه بین گام و فرکانس تار مرتعش را پیدا کرد

از گالیله تا ریلی

■ ژوزف ساویور Joseph Sauveur ۱۶۵۳-۱۷۱۶

- کلمه **آکوستیک** را برای علم صدا رایج کرد
- پایه گذار گره، حلقه، هارمونیک و فرکانس اصلی
- فرکانس تار کشیده را از شکم دادگی sag نقطه وسط محاسبه کرد

■ نیوتن ۱۶۴۲-۱۷۲۷

- در ۱۶۸۶ کار ماندگارش **Philosophia Naturalis Principa Mathematica** را منتشر و سه قانون حرکت را کشف کرد

از گالیله تا ریلی

■ لاگرانژ ۱۷۳۶-۱۸۱۳

□ حل تحلیلی تار مرتعش و معادله موج را پیدا کرد

■ پواسون ۱۷۸۱-۱۸۴۰

□ حل مسئله ارتعاش غشاء انعطاف پذیر مستطیلی

■ کلبش ۱۸۳۳-۱۸۷۲

□ مطالعه غشاء مدور

■ ریلی

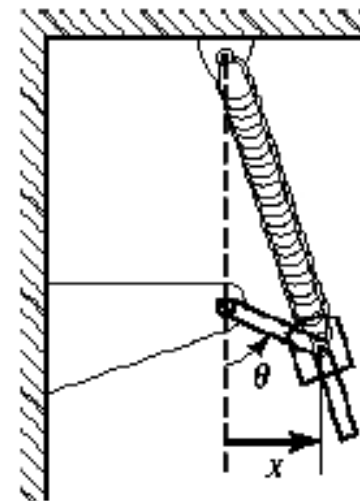
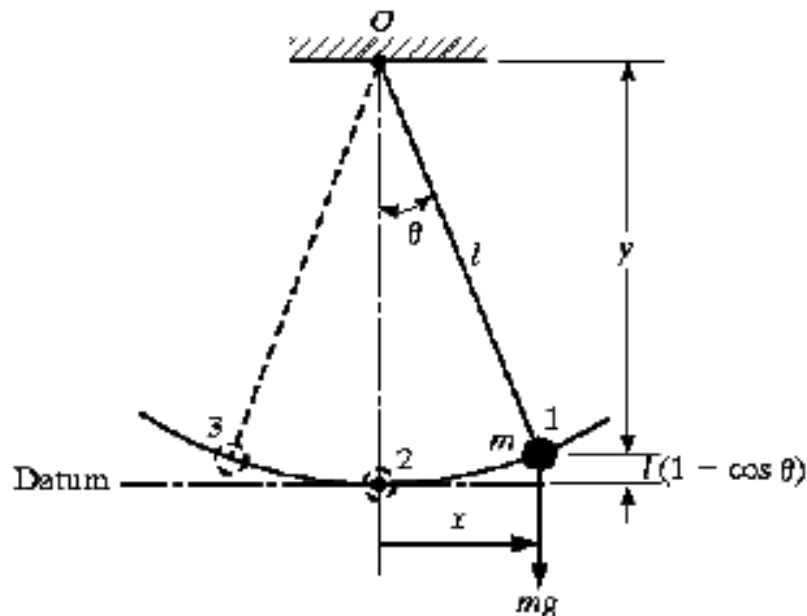
□ پایه گذار روش ریلی ریتز که برای پیدا کردن فرکانسهای طبیعی سیستمهای پیوسته استفاده می شود.

مفاهیم اولیه ارتعاشات

- هر حرکتی که خود را در یک بازه زمانی تکرار نماید
- سیستم ارتعاشی شامل:
 - فنر یا کشسانی (وسیله ای جهت ذخیره انرژی پتانسیل)
 - جرم یا لختی (اینرسی) (وسیله ای جهت ذخیره انرژی جنبشی)
 - میراگر (damper) (وسیله ای جهت اتلاف تدریجی انرژی)
- تبادل انرژی از انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی و برعکس

Degree of Freedom (DoF) آزادی (DoF)

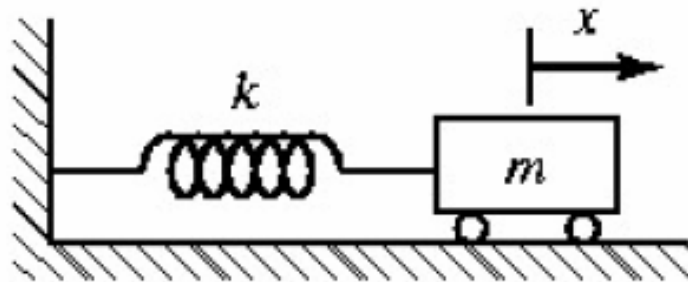
- کمترین مختصات مستقل لازم برای مشخص کردن کامل موقعیت تمام اجزاء سیستم در هر لحظه از زمان
- سیستم یک درجه آزادی:



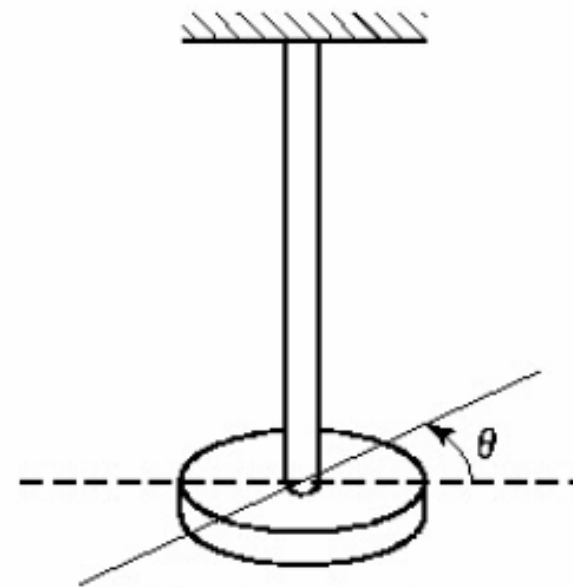
(a) Slider-crank-spring mechanism

Degree of Freedom (DoF)

■ سیستم یک درجه آزادی:



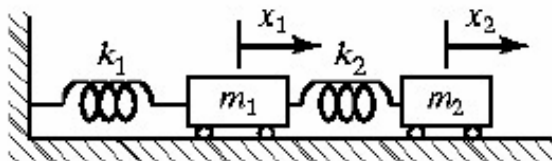
(b) Spring-mass system



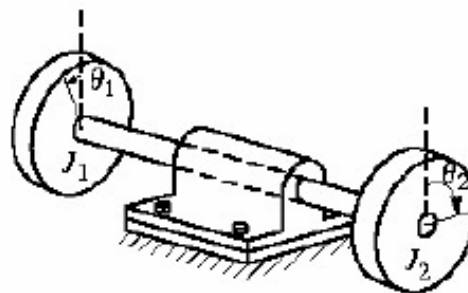
(c) Torsional system

Degree of Freedom (DoF)

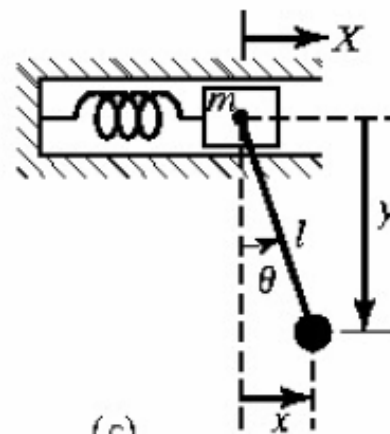
■ سیستم دو درجه آزادی:



(a)



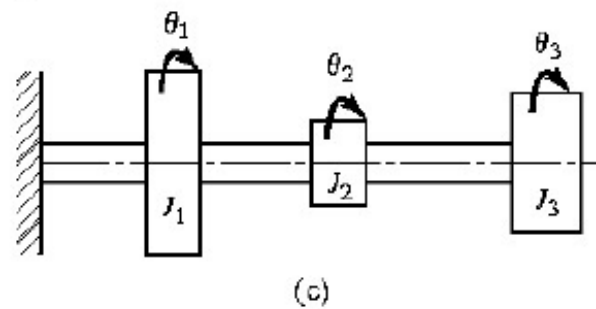
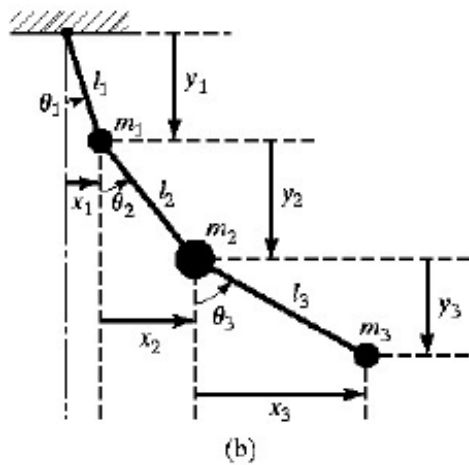
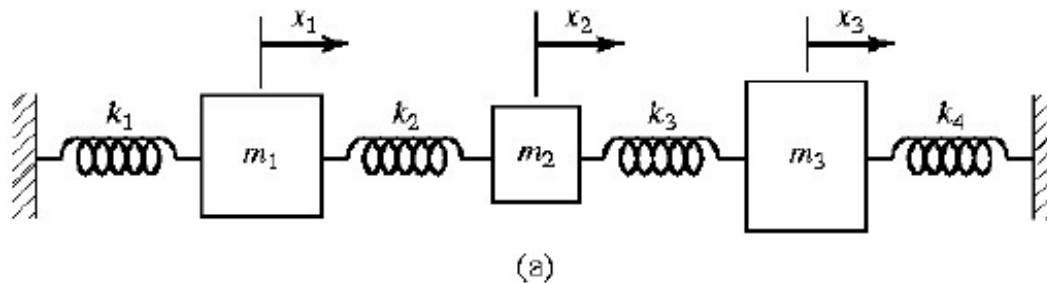
(b)



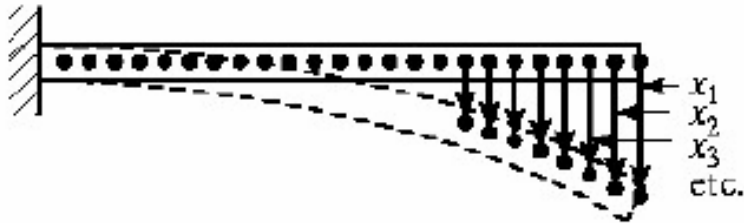
(c)

Degree of Freedom (DoF)

■ سیستم سه درجه آزادی:



Degree of Freedom (DoF) آزادی (DoF)



- سیستم بینهایت درجه آزادی:
- سیستم با بینهایت درجه آزادی را سیستم پیوسته Continuous یا توزیع شده Distributed گویند.
- سیستم با تعداد محدود درجه آزادی را سیستم گسسته discrete یا متمرکز شده lumped گویند
- نتایج دقیقتر با افزایش تعداد درجه آزادی بدست می آید.

دسته بندی ارتعاشات

■ ارتعاش آزاد: Free Vibration

- بعد از یک اغتشاش اولیه سیستم به حال خود گذاشته می شود تا ارتعاش نماید. نیروی خارجی روی سیستم عمل نمی کند. مثال: پاندول ساده

■ ارتعاش اجباری Forced Vibration

- سیستمی که تحت نیروی خارجی ارتعاش می کند. مثال: ارتعاش ایجاد شده در اثر دوران ماشین لباسشوئی یا زلزله
- تشدید (رزونانس Resonance): زمانی اتفاق می افتد که فرکانس نیروی خارجی و یکی از فرکانسهای طبیعی سیستم برهم منطبق باشند.

دسته بندی ارتعاشات

■ ارتعاش نامیرا Undamped Vibration

□ اگر طی نوسانات انرژی بر اثر اصطکاک یا هر مقاومت دیگر تلف نشود.

■ ارتعاش میرا Damped Vibration

□ اگر طی نوسانات انرژی بر اثر اصطکاک یا هر مقاومت دیگر تلف شود.

□ تقریباً همه سیستمهای ارتعاشی تا حدی میرا هستند.

دسته بندی ارتعاشات

■ ارتعاش خطی: **Linear** vibration

- وقتی همه اجزاء سیستم ارتعاشی دارای رفتار خطی هستند.
- اجزاء سیستم: فنر، میراگر
- معادله دیفرانسیل حاکم خطی و اصل برهم نهش قابل اعمال است

■ ارتعاش غیر خطی: **Nonlinear** vibration

- اگر یکی از اجزاء سیستم ارتعاشی دارای رفتار غیر خطی باشد.
- معادله دیفرانسیل حاکم غیر خطی، اصل برهم نهش اعمال نمی شود
- ارتعاش با اصطکاک خشک

دسته بندی ارتعاشات

■ ارتعاشات معین Deterministic Vibration

□ اگر مقدار تحریک (نیرو یا حرکت) که بر روی سیستم ارتعاشی عمل می کند در هر زمان مشخص باشد.

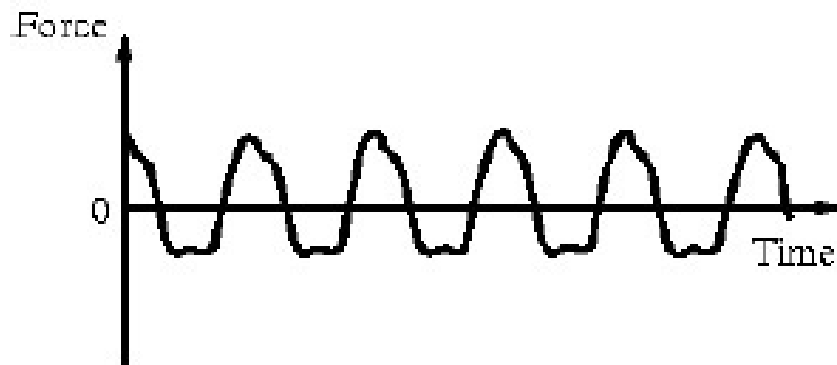
■ ارتعاشات نامعین Nondeterministic Vibration یا تصادفی Random

که مقدار تحریک در زمان داده شده را نمی توان پیش بینی کرد □ زمانی

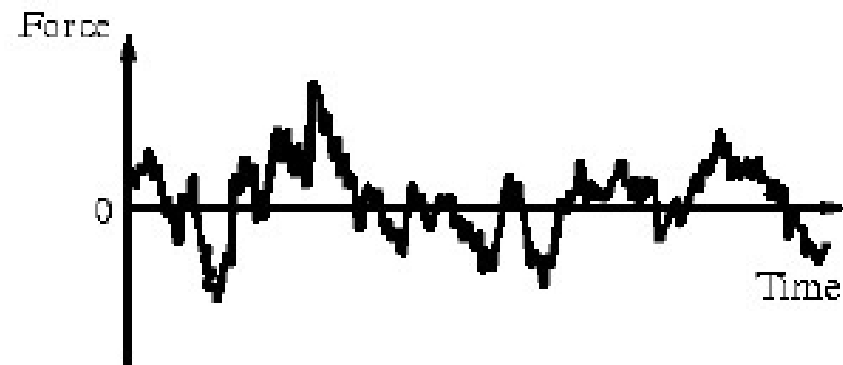
ک

دسته بندی ارتعاشات

■ مثالهایی از نیروی تحریک معین و تصادفی



(a) A deterministic (periodic) excitation



(b) A random excitation

ارتعاشات در زندگی Vibration in our lives



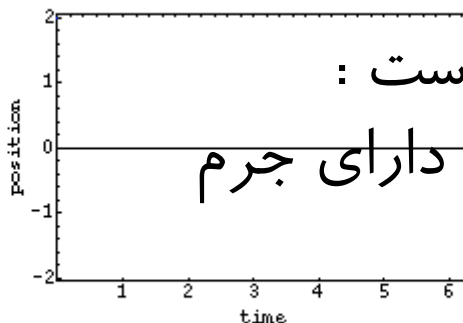
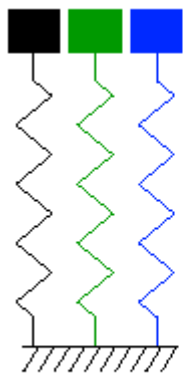
- ضربان قلب، نوسان شش، شنیدن بدلیل ارتعاش پرده گوش و حتی خرخر بدلیل ارتعاش



- امواج نورانی باعث دیدن و امواج صوتی باعث شنیدن

- حرف زدن بدلیل ارتعاش تارهای حنجره

- راه رفتن با نوسان پا است



© 1996 - V. Sparrow
modified by D. Russell, 1997

- بحث درس به ارتعاشات مکانیکی محدود است :
ارتعاش سیستمهای دینامیکی (سیستمی که دارای جرم و کشسانی باشد)

دوستی و دشمنی ارتعاشات

■ دوست:

□ نقاله، فشرده ساز، دریل
نوماتیک و

پ

ماشین لباس شوئی

□

□ لرزاننده های مکانیکی، مخلوط

ننده، سورت کننده

■ دشمن

□ **تشدید = تخریب پل**

□ همین مسئله در ماشین آلات اتفاق

می افتد

□ ارتعاش زیاد باعث شل شدن

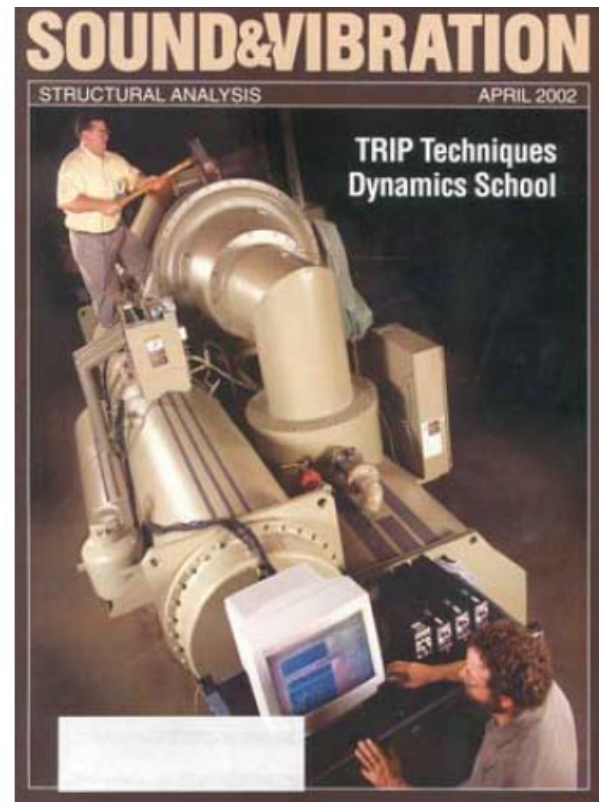
اتصالات، صدا و شکست می شود

□ تاثیر بر بدن: ناراحتی، خستگی و

کاهش بازده

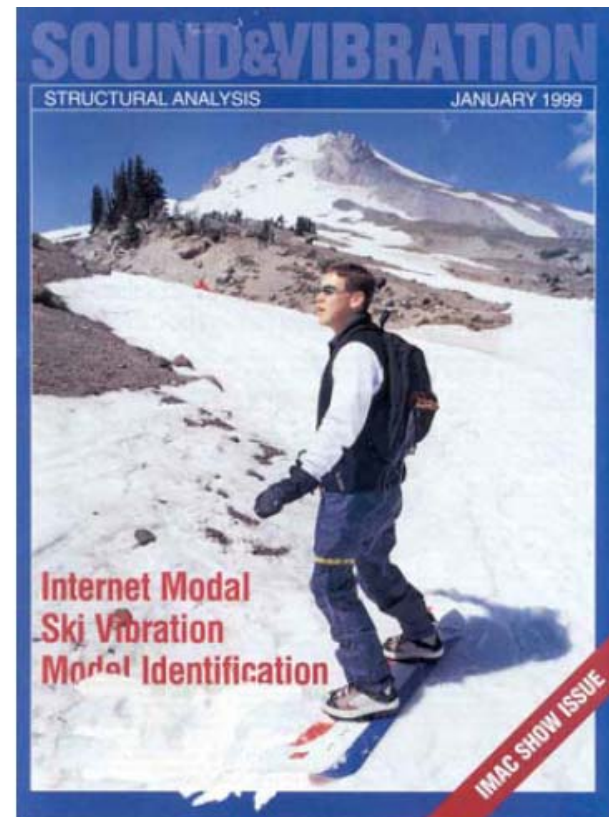
اهمیت مطالعه ارتعاشات در

Vibrations in Machinery

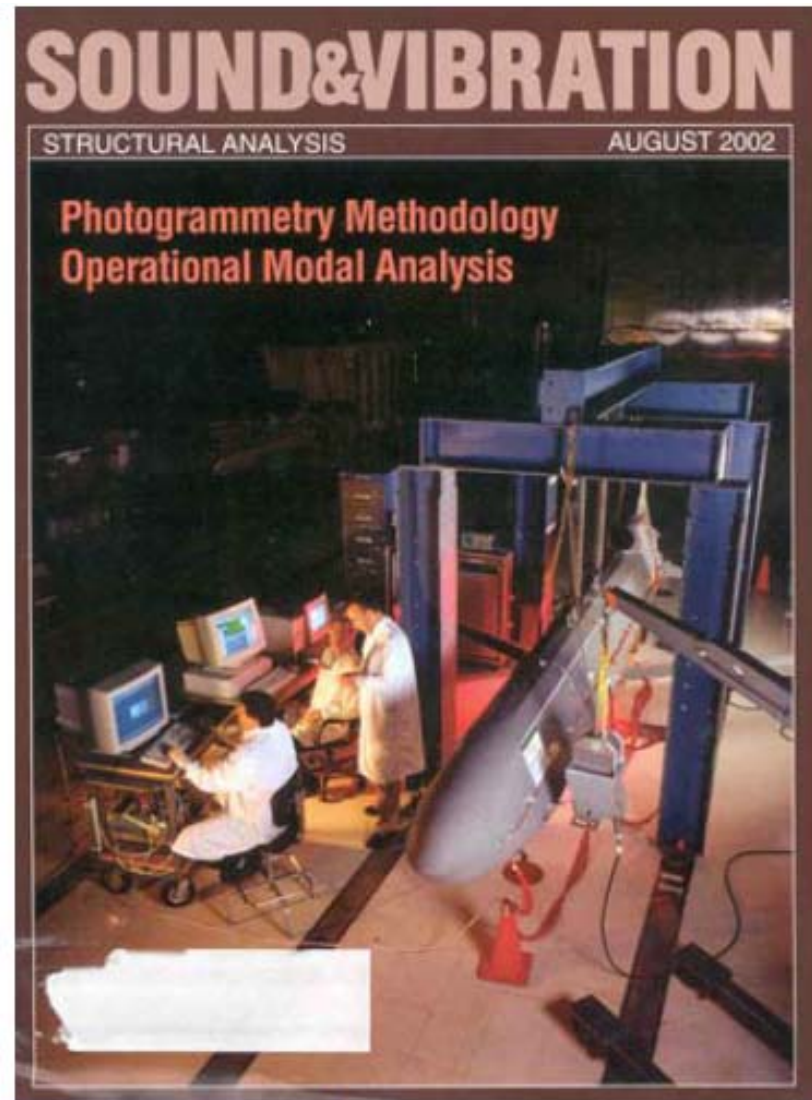


اهمیت مطالعه ارتعاشات در

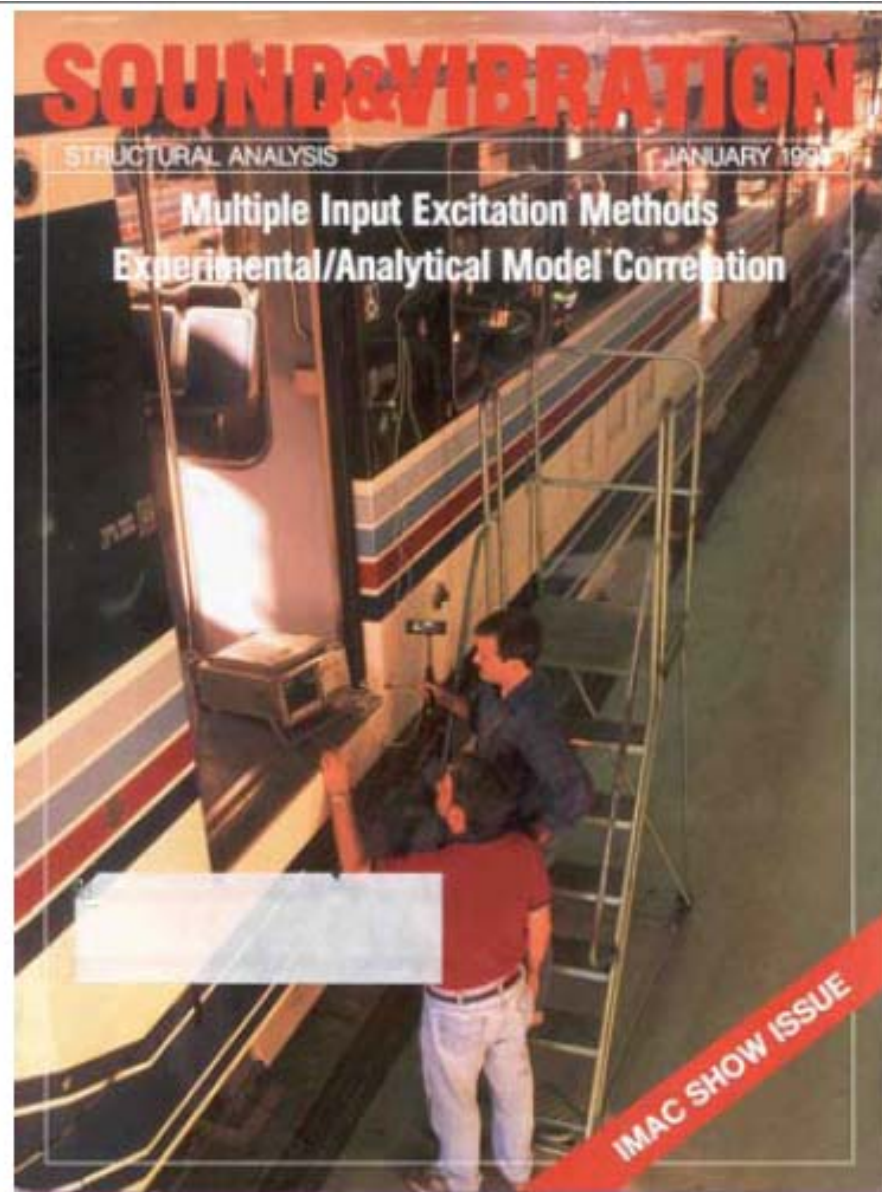
Vibrations in Recreation



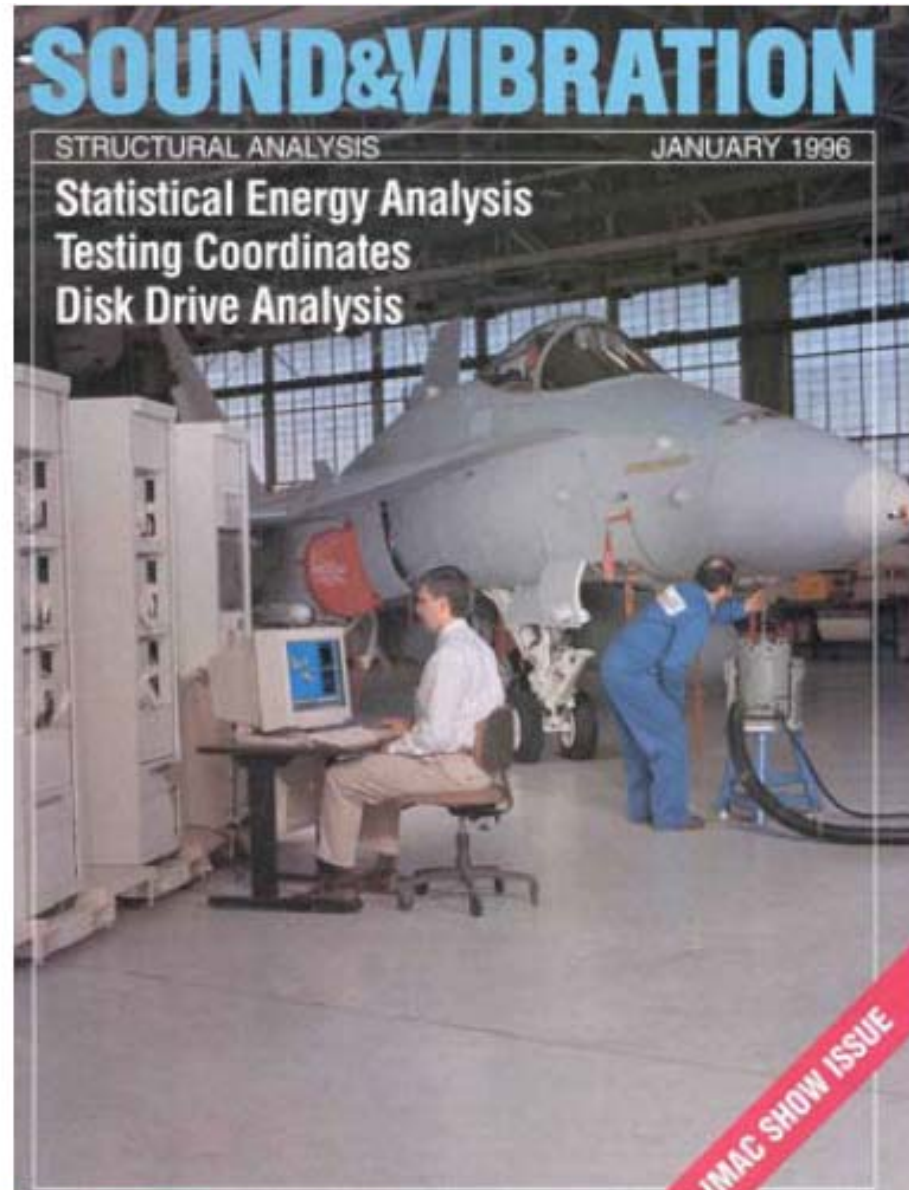
Vibrations in Defense



Vibrations in Transportation



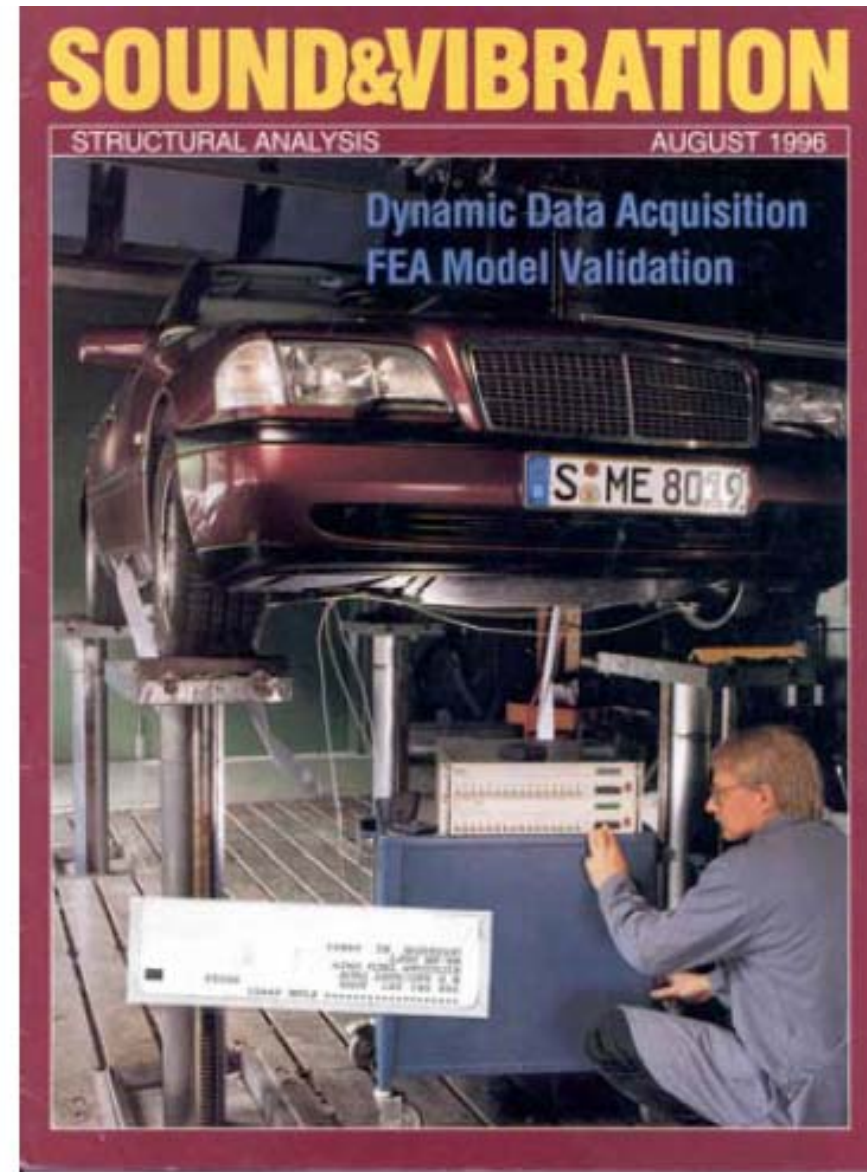
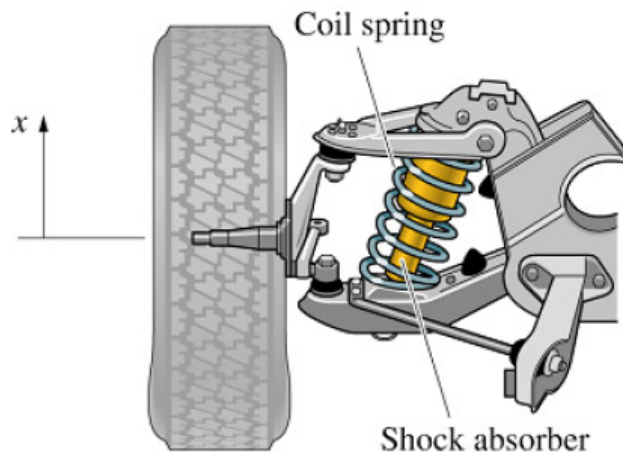
Vibrations in Aerospace



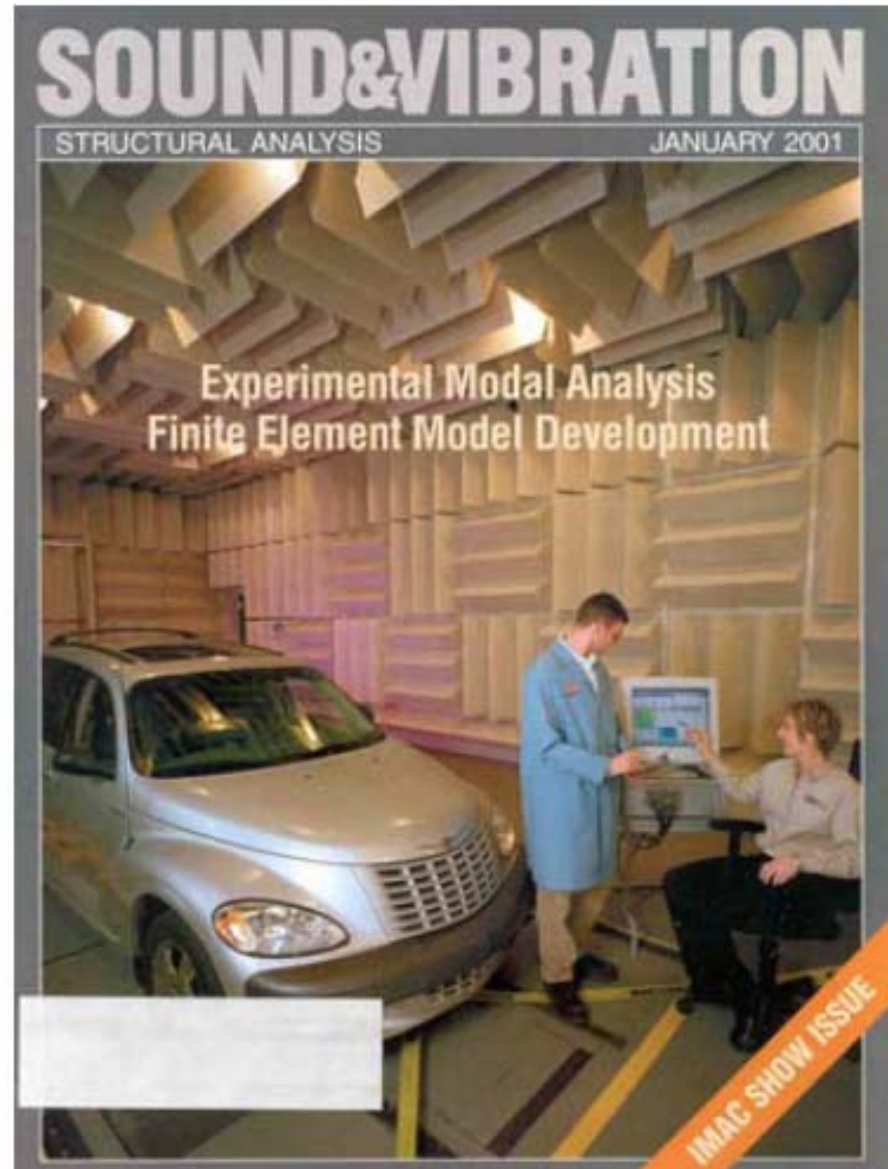
Vibrations in Automobiles

- NVH (Noise, Vibration, & Harshness) is a Top Priority for the BIG 3 Auto Industry.
- Several hundred million dollars have been invested in infrastructure & human resource development in this area over the past 10 years.

Passive vibration control (I)



Sound/Noise in Automobiles



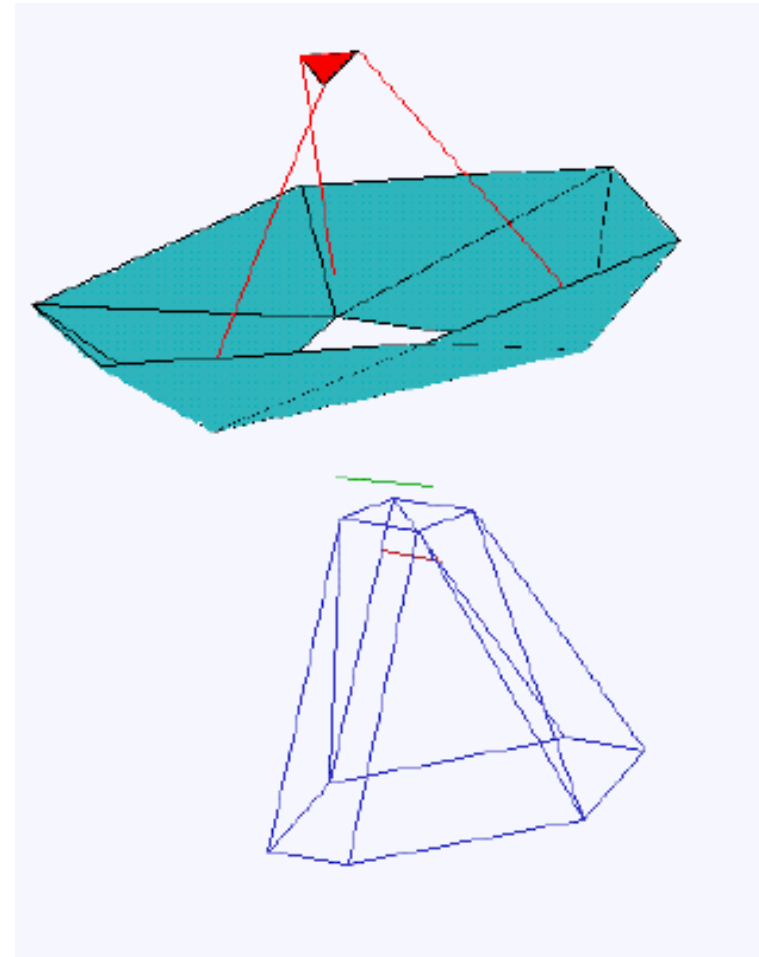
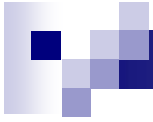


MichiganTech

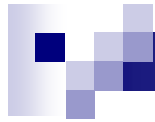


Nobeyama 45m Radio Telescope









DISASTER!
The Greatest
Camera Scoop
of all time!

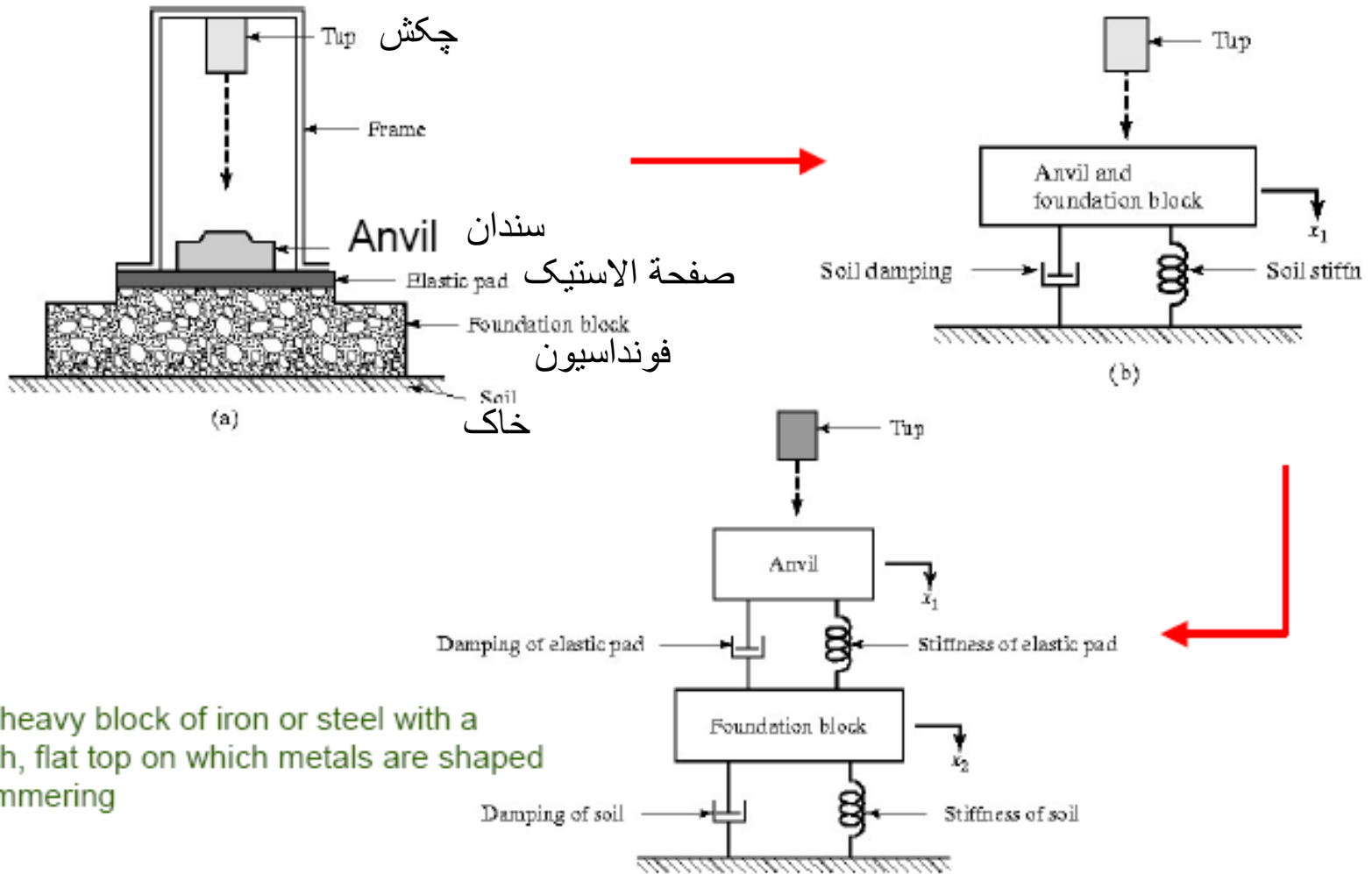
EARLY FILMS



روند تحلیل ارتعاشی

- مرحله اول: مدلسازی ریاضی
- مرحله دوم: استخراج معادله حاکم
- مرحله سوم: حل معادله حاکم
- مرحله چهارم: تفسیر نتایج

مثالی از مدل‌سازی ریاضی (پرس فورج)



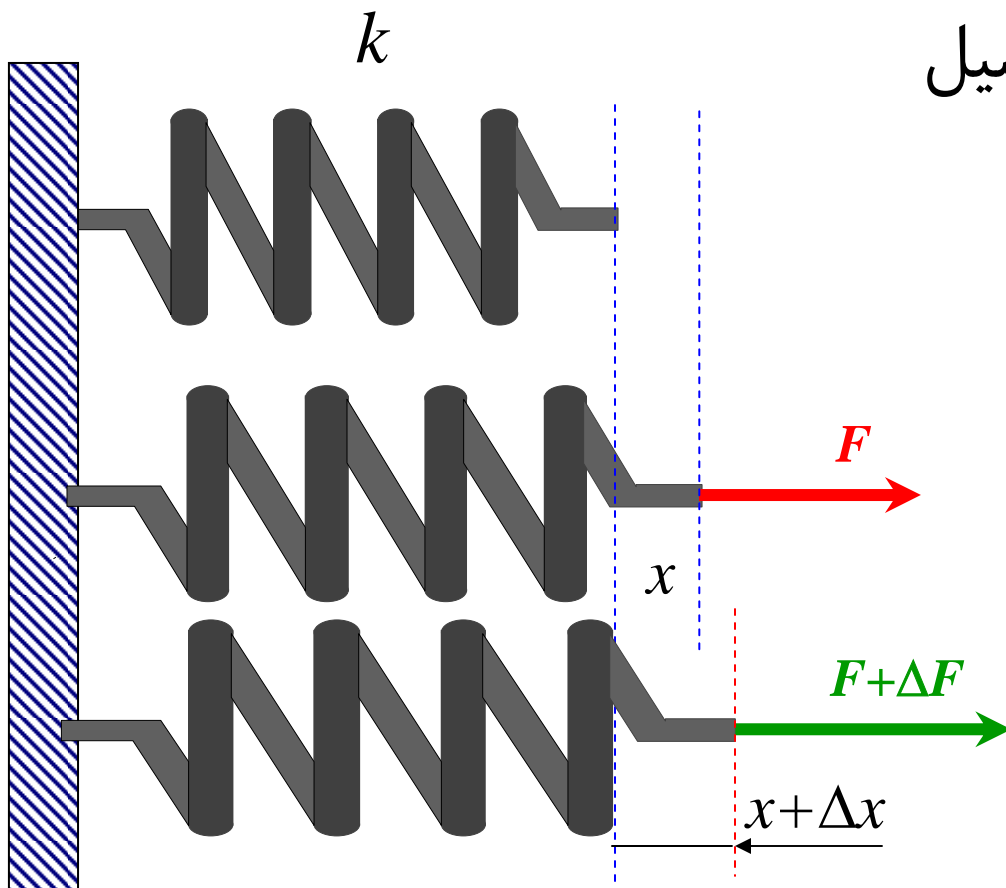
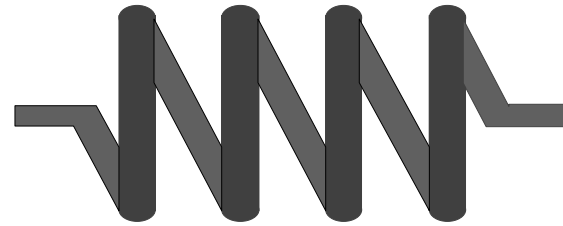
Anvil: heavy block of iron or steel with a smooth, flat top on which metals are shaped by hammering

اجزاء یک سیستم ارتعاشی

■ سیستم ارتعاشی شامل:

- فنر یا کشسانی (وسیله ای جهت ذخیره انرژی پتانسیل) یا وارد کننده نیروی برگرداننده
- جرم یا لختی (اینرسی) (وسیله ای جهت ذخیره انرژی جنبشی) ایجاد نیروی اینرسی یا نیروی مقاوم در مقابل تغییر سرعت
- میراگر (damper) (وسیله ای جهت اتلاف تدریجی انرژی) نیروی مقاوم در مقابل حرکت

فنر یا کشسان



■ ذخیره کننده انرژی پتانسیل

■ عامل نیروی برگرداننده

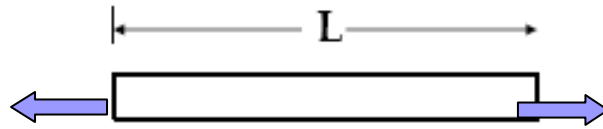
■ فنر خطی: $F = kx$

■ رابطه نیرو-تغییر مکان = خطی

$$F + \Delta F = F(x + \Delta x) = F(x) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \Delta x$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \dots = k$$

انواع فنرها



$$K = \frac{AE}{L}$$



■ فنر حلقوی: تغییر شکل در اثر پیچش و خمش

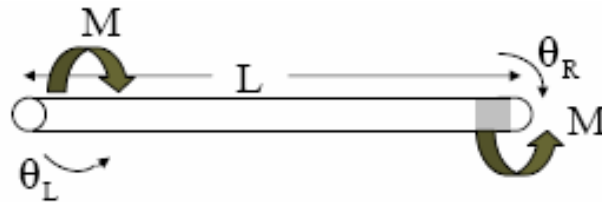
$$k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$$

قطر سیم \rightarrow Gd^4 \leftarrow مودول برشی
 شعاع حلقه \rightarrow $64nR^3$ \leftarrow تعداد حلقه

■ فنر پیچشی

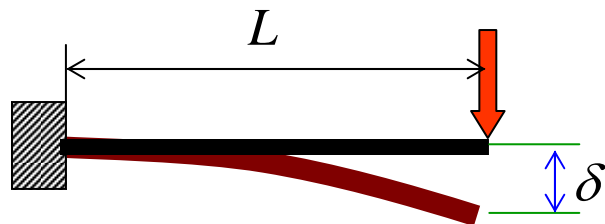


K_t



$$K_t = \frac{GJ}{L} \quad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

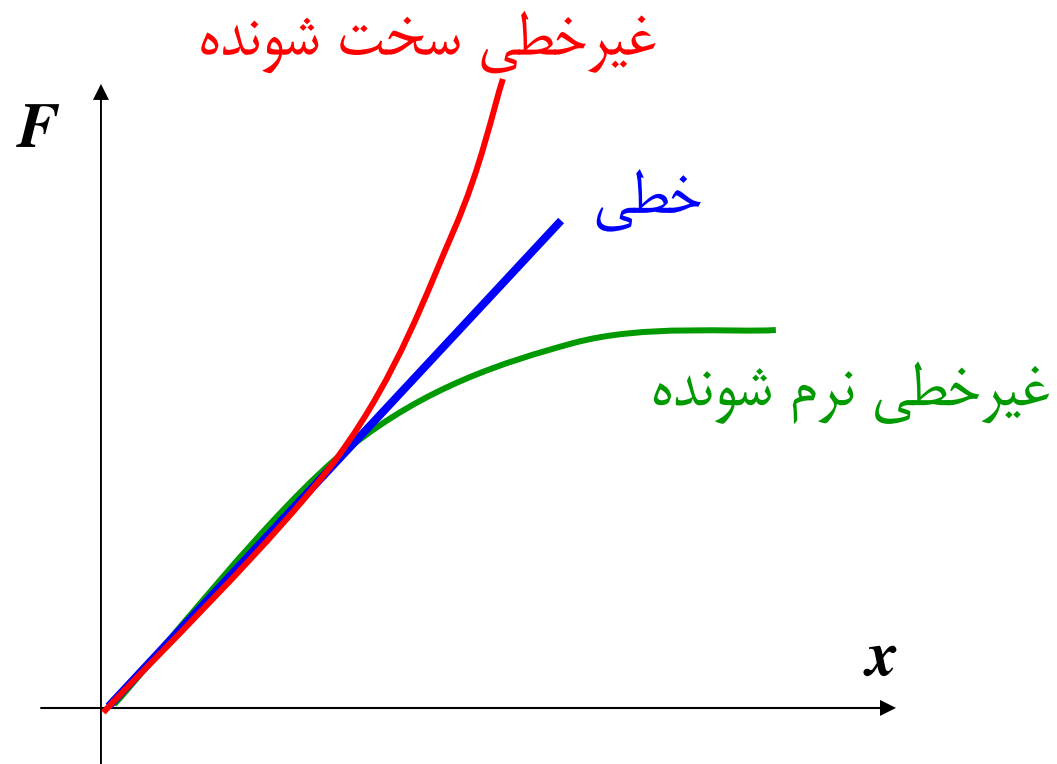
■ فنر تخت



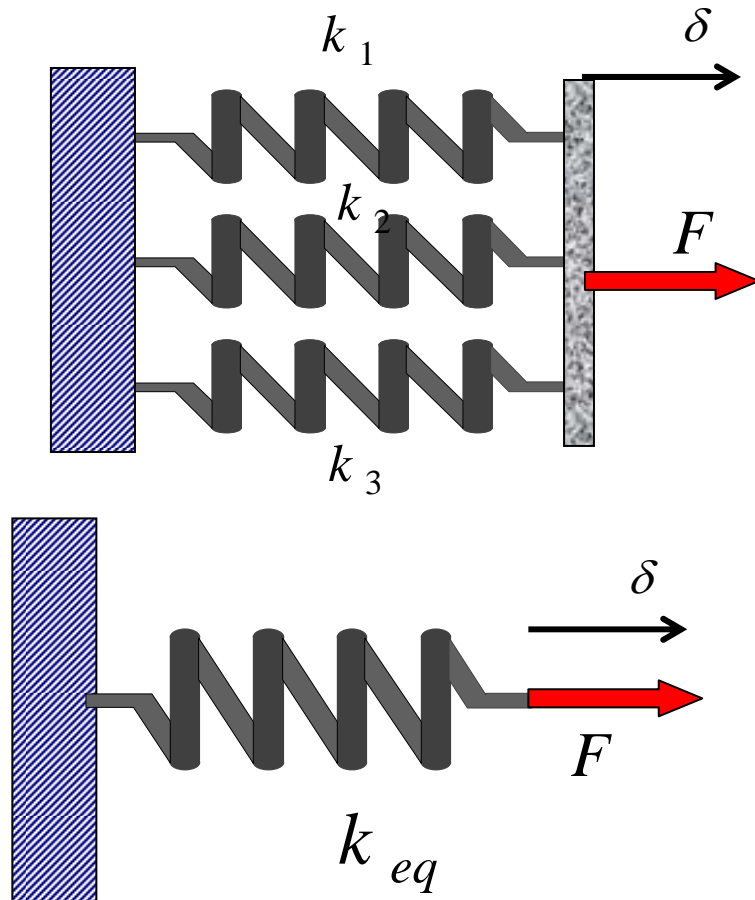
$$K_b = \frac{3EI}{L^3}$$

■ غیره

فتره‌های خطی و غیر خطی



ترکیب فنرها



■ فنرهای موازی

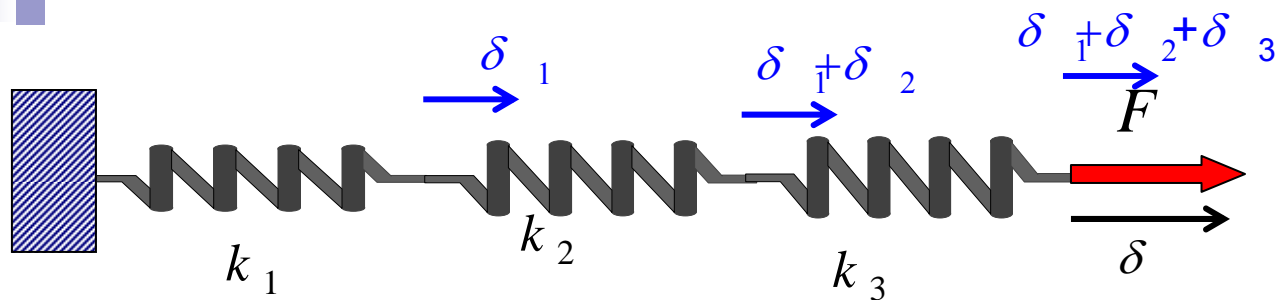
□ تغییر مکان δ یکسان

□ نیروی کل معادل مجموع نیروها

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$k_{eq} \delta = k_1 \delta + k_2 \delta + k_3 \delta$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3$$

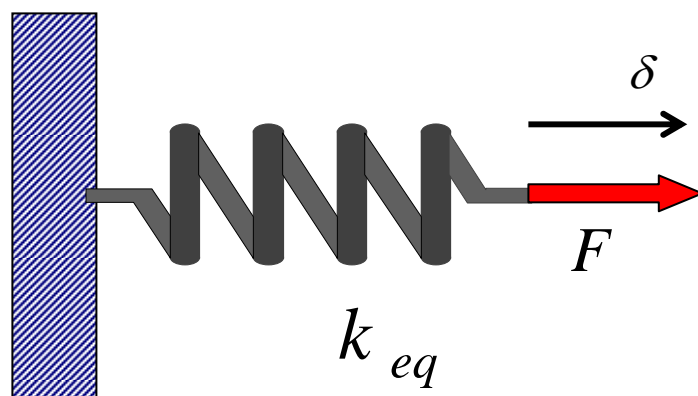


ترکیب فنرها

■ فنرهای سری

□ تغییر مکان معادل مجموع تغییر مکانها

□ نیروی فنرها یکسان است



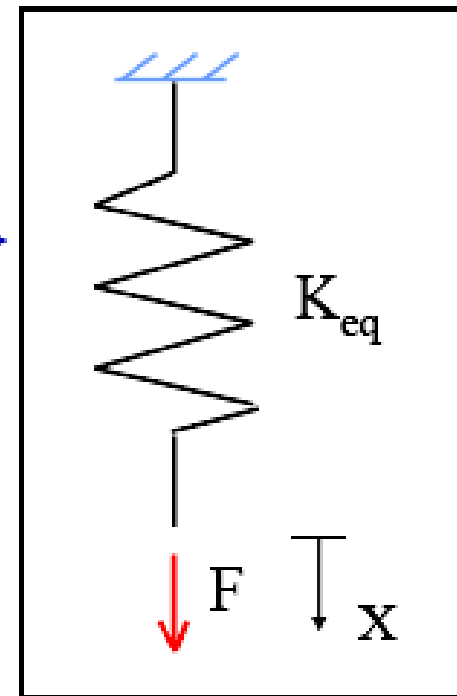
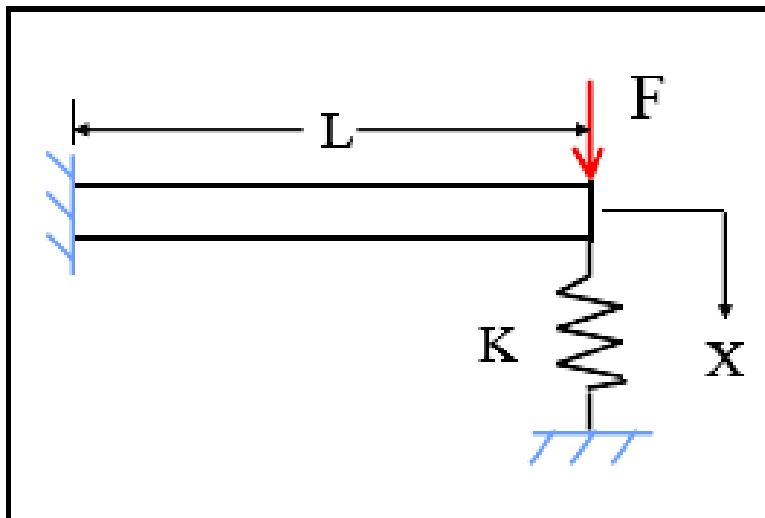
$$F = F_1 = F_2 = F_3$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

$$\frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

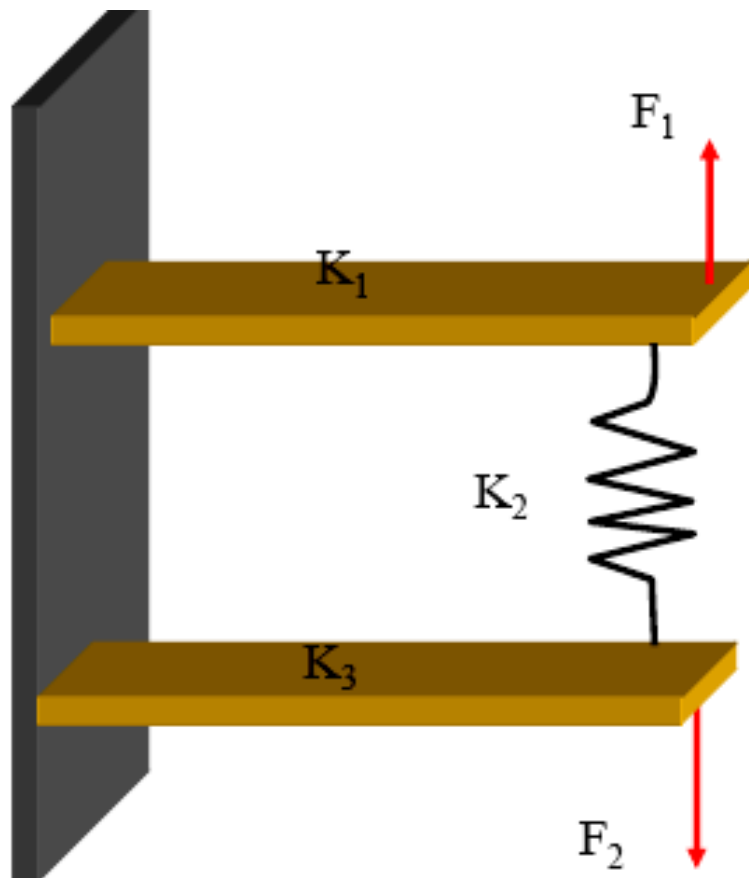
سیستم معادل



$$K_{eq} = K + \frac{3EI}{L^3}$$

Equivalent System

مثال



$$F_1 = K_{eq} X$$

$$K_{eq} = K_1 + \frac{K_2 K_3}{K_2 + K_3}$$

$$F_2 = K_{eq} X$$

$$K_{eq} = K_3 + \frac{K_2 K_1}{K_2 + K_1}$$

چرا این دو k_{eq} معادل با هم برابر نیستند؟ آیا سیستم غیر خطی است؟

انرژی: المان فنر

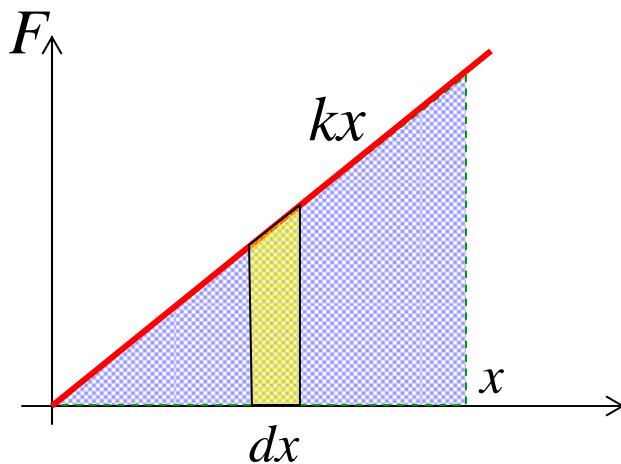
$$dU = Fdx = kxdx$$

■ انرژی پتانسیل جزئی

■ انرژی پتانسیل فنری که به اندازه x کشیده شده:

$$U = \int_0^x dU = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$



■ برای فنر پیچشی:

$$U = \frac{1}{2} k_T \theta^2$$

المان فنر بازاویه

■ روش انرژی:

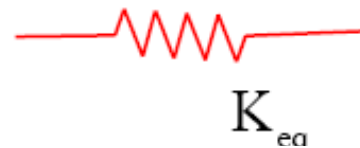
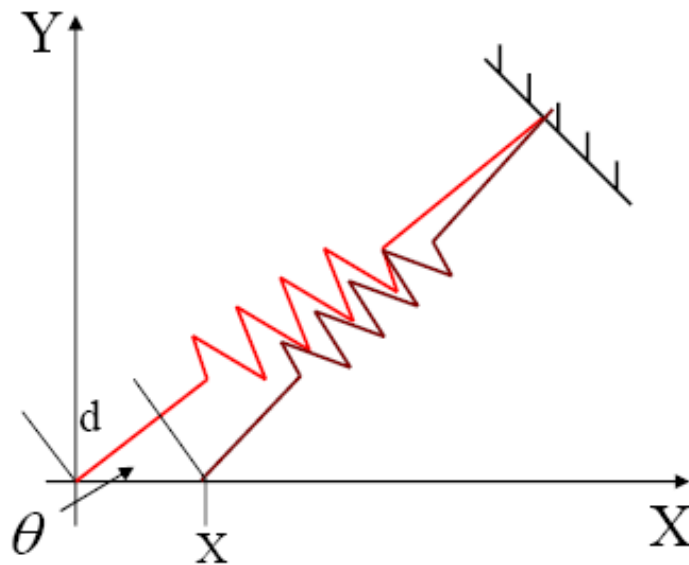
$$d = x \cos \theta$$

Equivalent potential energy

$$U = \frac{1}{2} k (x \cos \theta)^2 = \frac{1}{2} k_{eq} x^2$$

$$K_{eq} = K \cos^2 \theta$$

in the x-direction



المان فنر بازاويه

■ نیرو؟

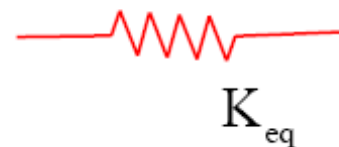
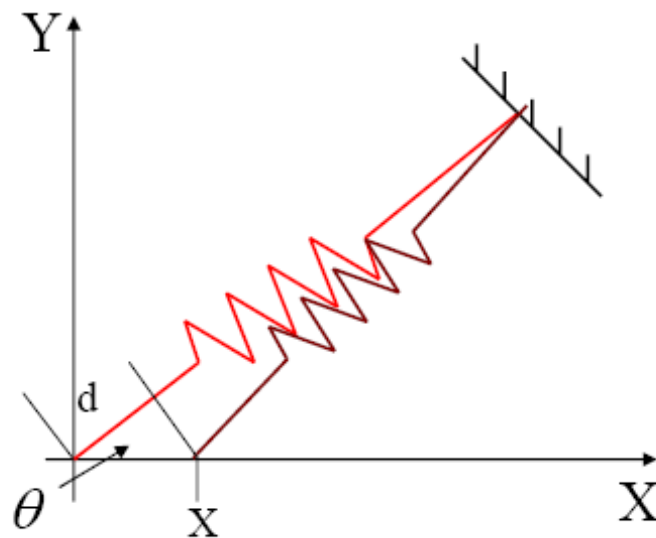
$$d = x \cos \theta$$

Equivalent potential energy

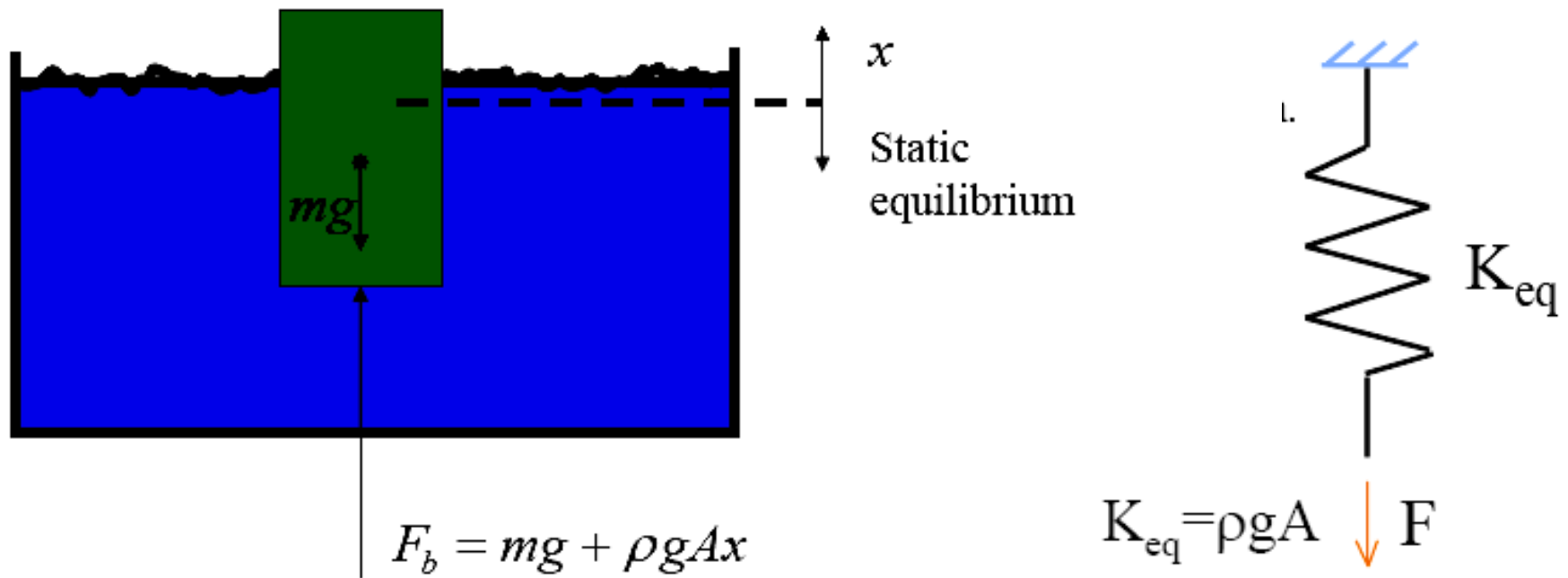
$$U = \frac{1}{2} k (x \cos \theta)^2 = \frac{1}{2} k_{eq} x^2$$

$$K_{eq} = K \cos^2 \theta$$

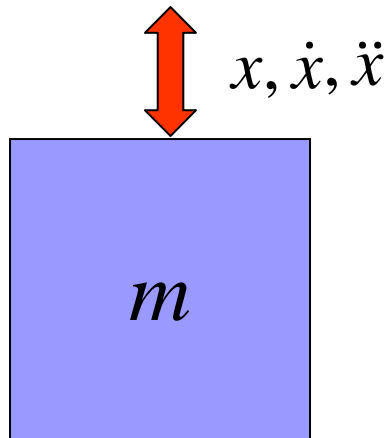
in the x-direction



فشر و غوطه وری

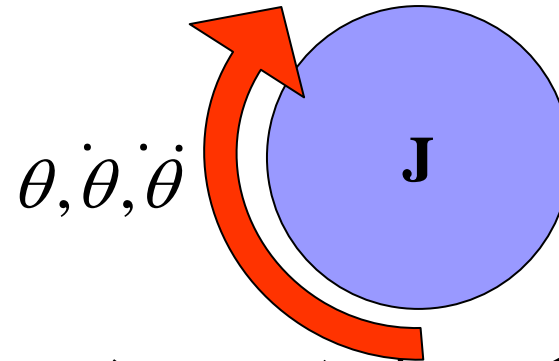


المانهای جرم و لختی



$$T_T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$m \ddot{x}$$



■ ذخیره کننده انرژی جنبشی

$$T_R = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

■ نیروی اینرسی

$$J \ddot{\theta}$$

حرکت انتقالی بدون دوران

$$\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$m \ddot{x}$$

$$J \ddot{\theta} = 0$$

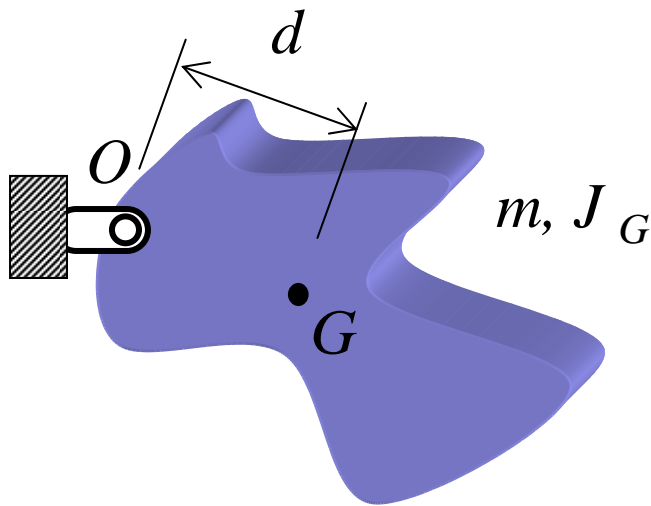
■ جسم فقط حرکت انتقالی دارد (ذرات)

■ انرژی جنبشی:

■ نیروی اینرسی:

■ گشتاور اینرسی

دوران حول یک نقطه



■ قضیه انتقال محورها

$$J_O = J_G + md^2$$

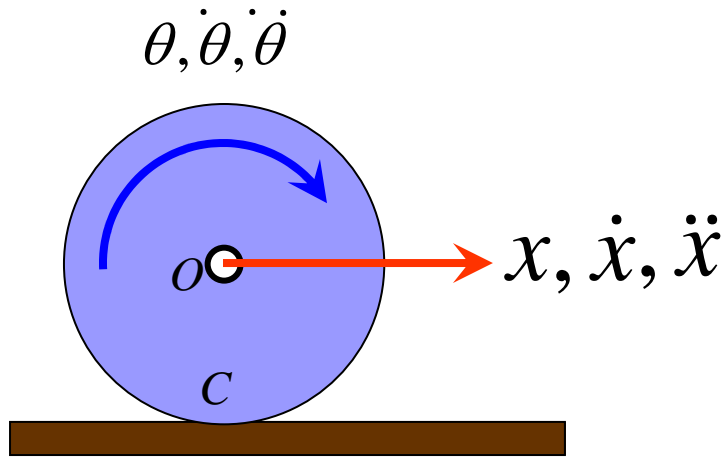
■ انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

■ گشتاور اینرسی حول O

$$J \ddot{\theta}$$

حرکت کلی



- مرکز آنی سرعت صفر
- انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

- نیروی اینرسی

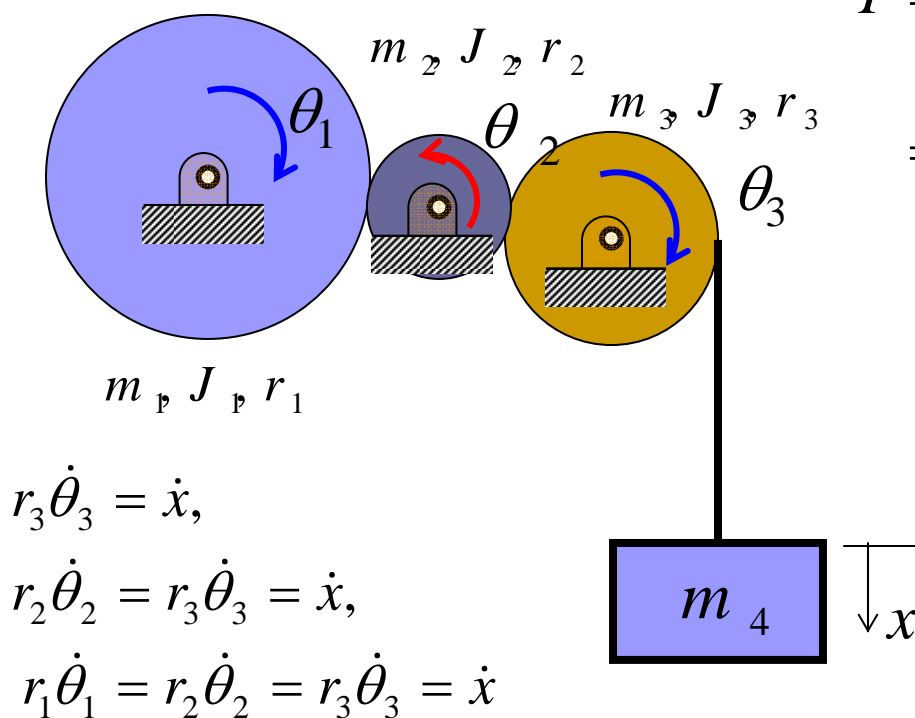
$$m \ddot{x}$$

$$J \ddot{\theta}$$

- گشتاور اینرسی

ترکیب جرمها

■ با استفاده از مجاسبه انرژی جنبشی راحتتر است.



$$T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2$$

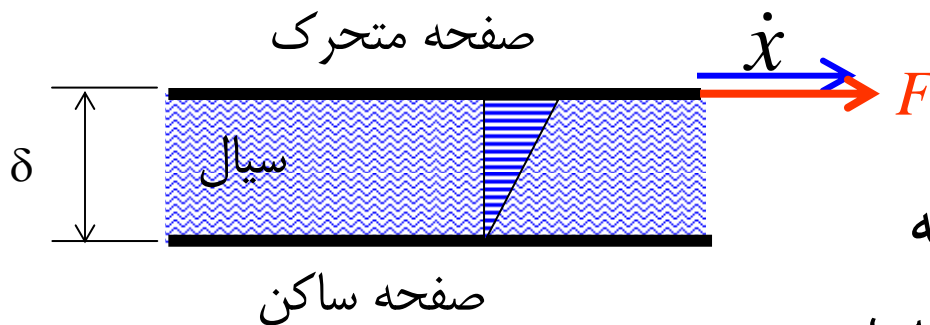
$$= \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2} + m_4 \right) \dot{x}^2$$

$$m_{eq} = \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{J_2}{r_2^2} + \frac{J_3}{r_3^2} + m_4$$

میراگر (دمپر)



■ میرائی ویسکوز

■ اگر سیال بین دو صفحه با فاصله کم قرار گیرد تنش برشی متناسب

با تغییرات سرعت در امتداد عمود بر جریان سیال است

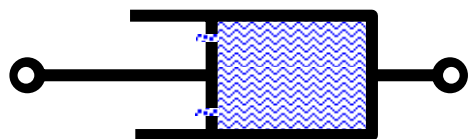
$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

■ اگر فاصله کم باشد تغییرات خطی است

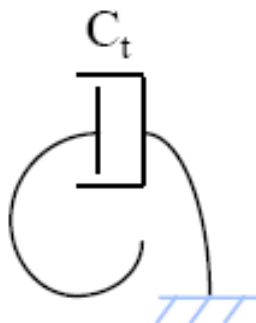
$$\frac{dv}{dy} = \frac{\dot{x}}{\delta} \quad \tau = \mu \frac{\dot{x}}{\delta} = \frac{\mu}{\delta} \dot{x} \quad F = \tau A = \frac{\mu A}{\delta} \dot{x} = c \dot{x}$$

میراگر

- لذا در جائیکه سیال ویسکوز بعنوان میراگر وجود داشته باشد با تقریب خوبی نیرو بصورت خطی با سرعت تغییر می کند
- ضریب میرائی معمولاً با c نشان داده می شود
- توان تلف شده



c



c_t

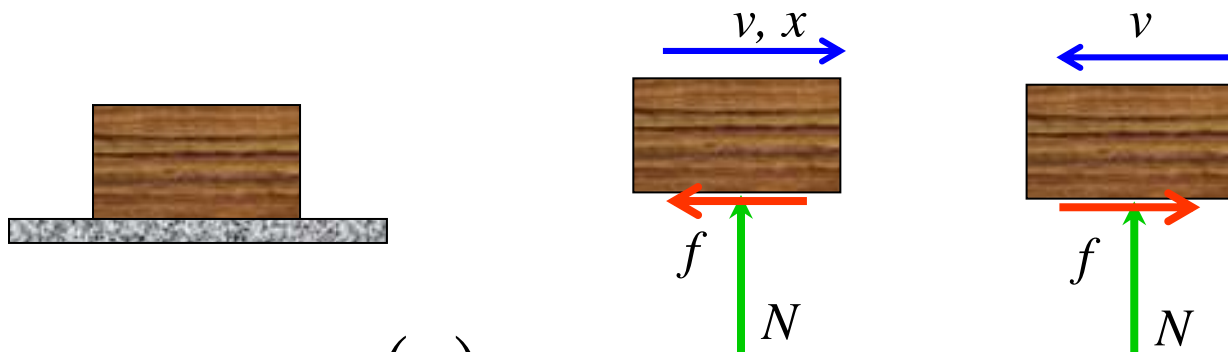
$$- F_D v = -(c\dot{x})\dot{x} = -c\dot{x}^2$$

$$- M\omega = -(c_T\dot{\theta})\dot{\theta} = -c_T\dot{\theta}^2$$

- ترکیب میراگرها مانند فنر است

انواع دیگر میرائی

- انواع دیگری از میرائی موجود است که معمولاً معادل میرائی ویسکوز در نظر گرفته می شود و بعداً بحث خواهد شد.
- میرائی بدلیل اصطکاک خشک (کلمب)



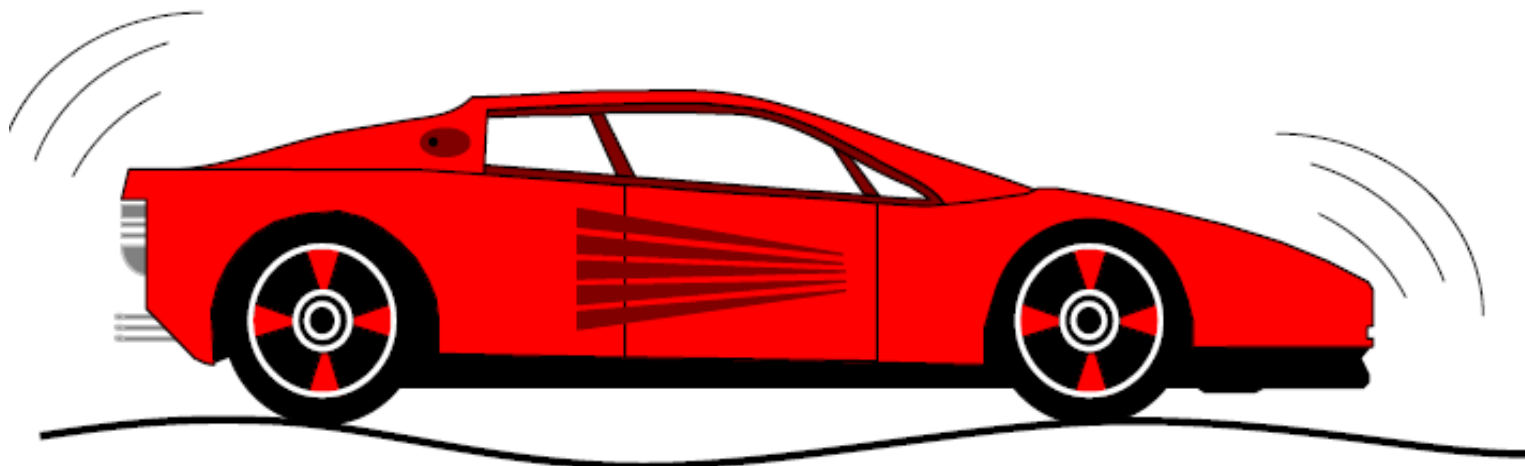
$$f = -\text{sgn}(\dot{x})\mu N$$

$$-f \dot{x}$$

- توان تلف شده

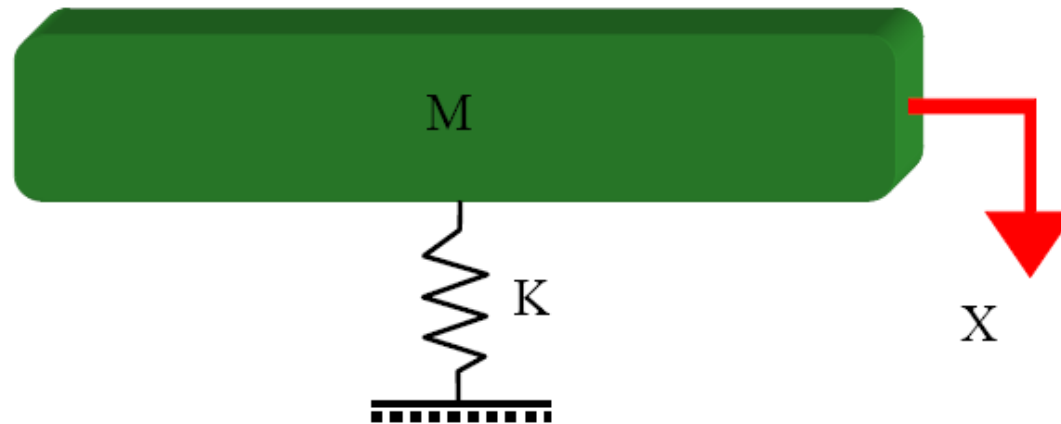
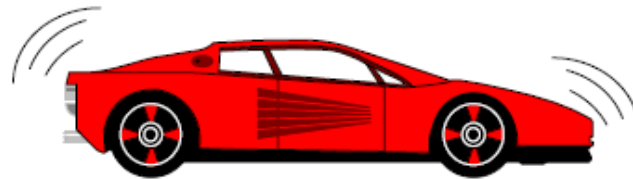
مدلسازی یک سیستم دینامیکی

Modeling Dynamic Systems

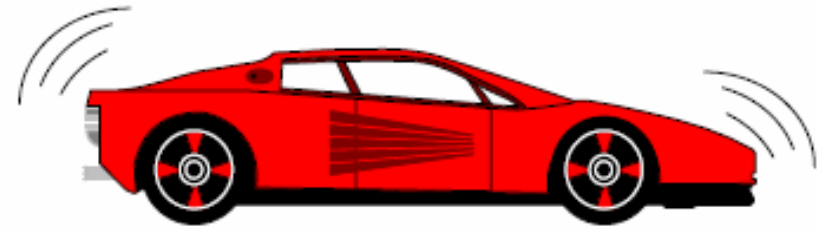


مدلسازی با سیستم یک درجه آزادی

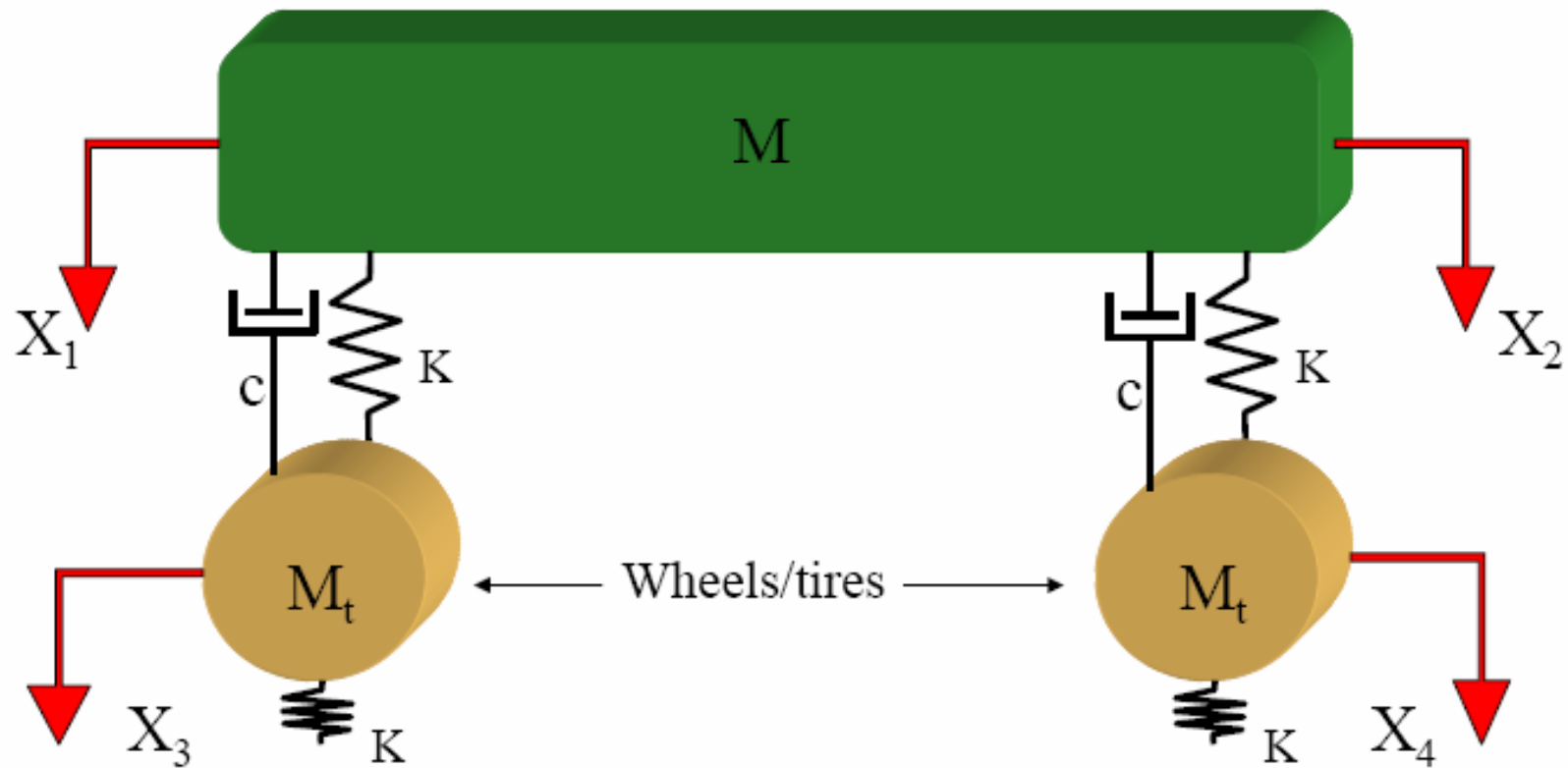
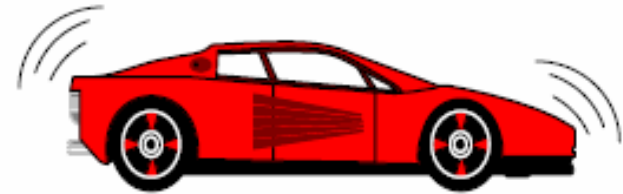
Vibrating Systems: Single Degree of Freedom (SDOF)



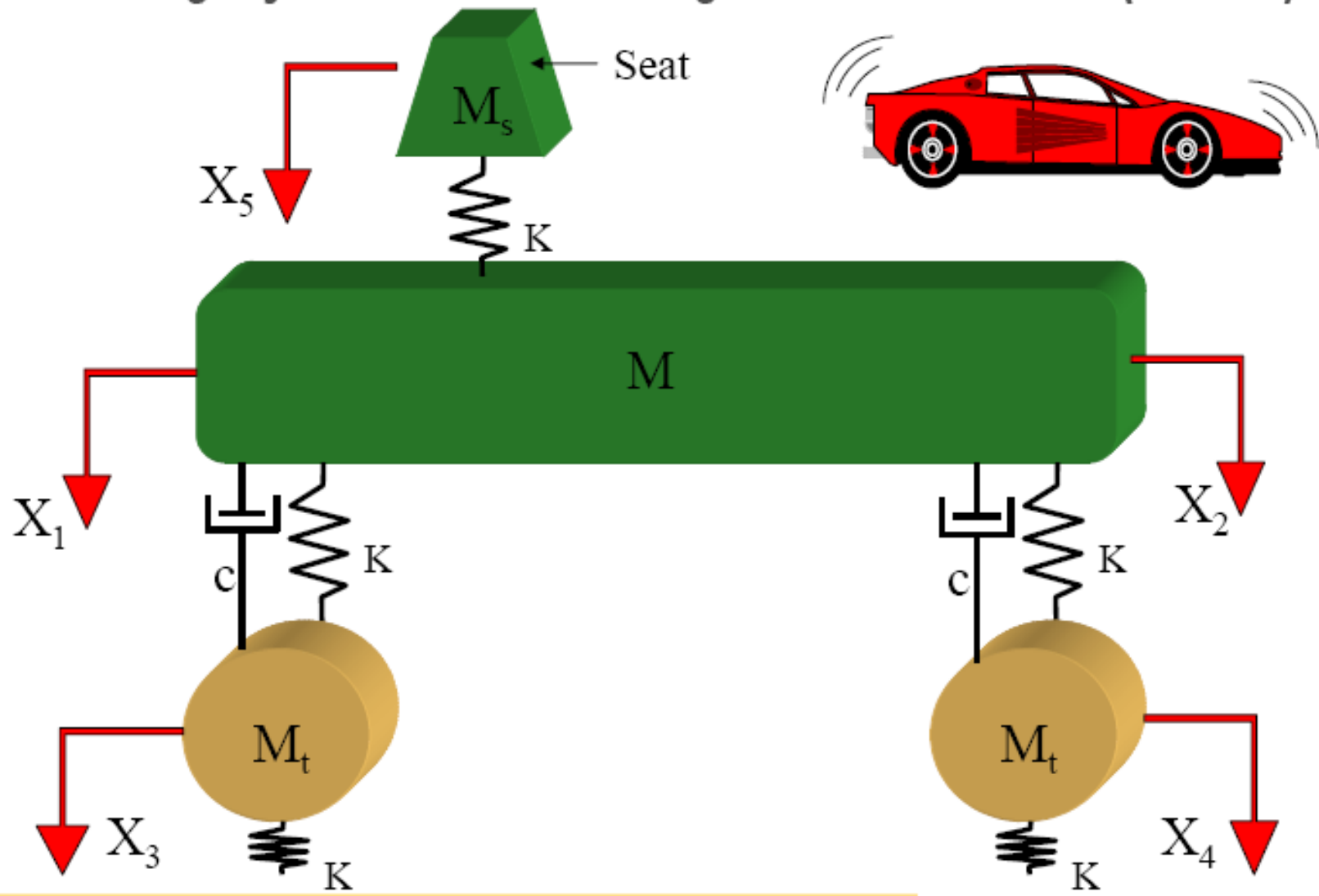
Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)



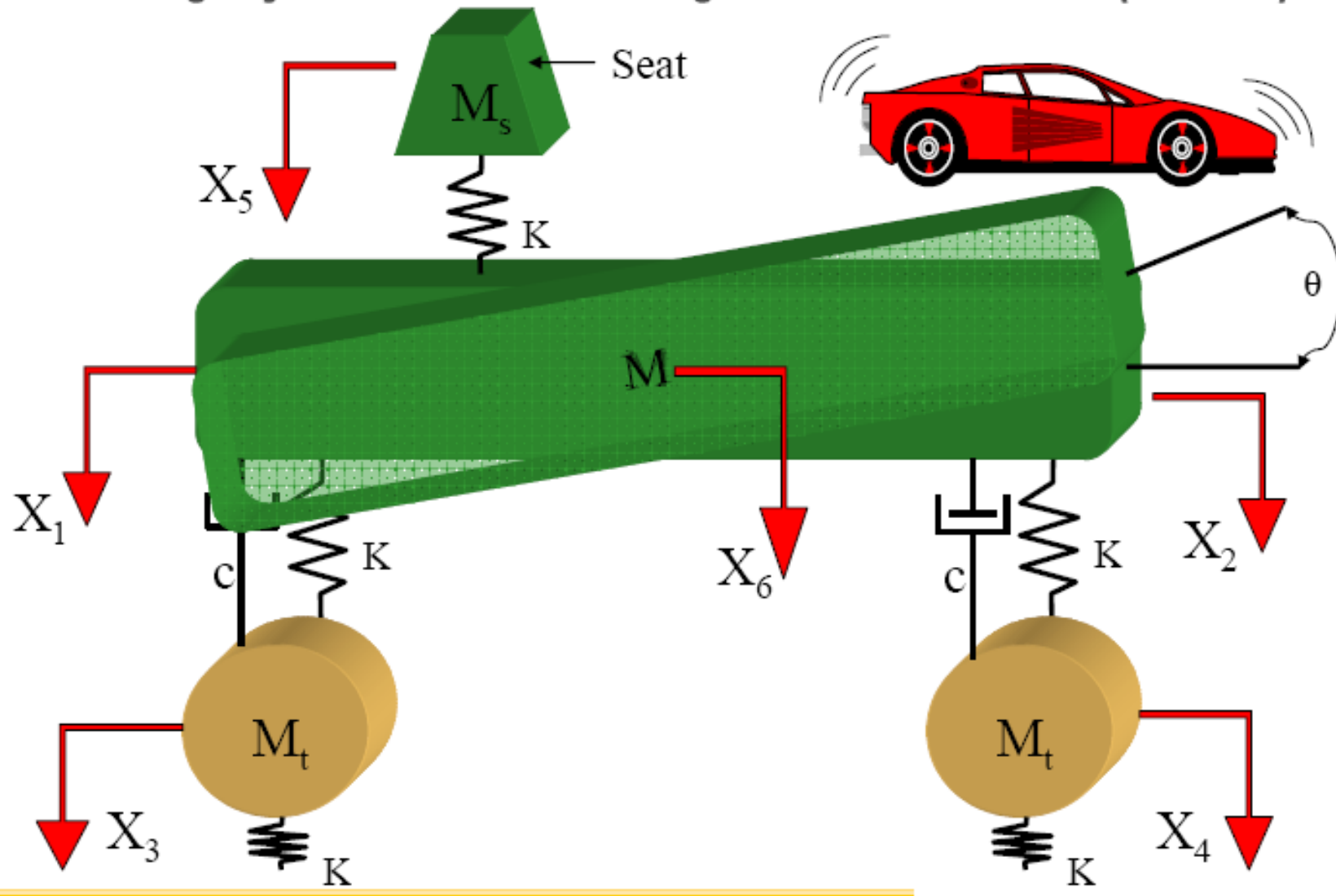
Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)



Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)

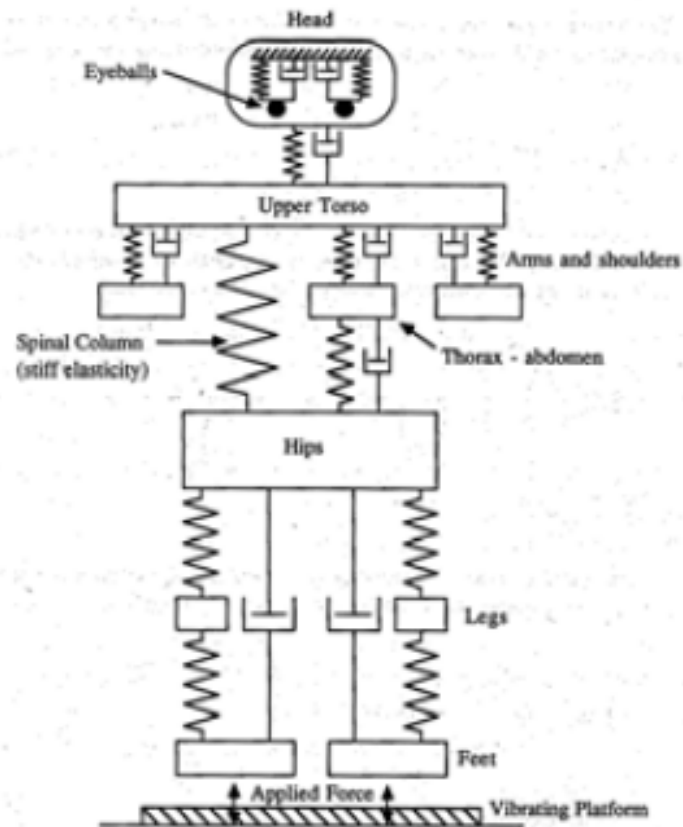


Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)



Vibrating Systems: The Human Body

Fig. 1.6. A simplified, multiple, discrete mass-spring-damper model of a human body standing on a vibrating platform.



ارتعاشات مکانیکی ۲

سید یوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

حرکت هارمونیک

■ حرکت نوسانی ممکن است بطور مرتب خود را تکرار نماید:

□ مانند حرکت آونگ ساده

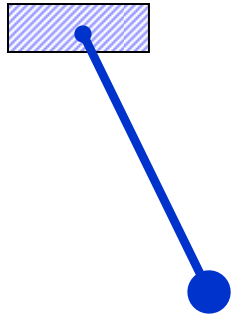
■ یا ممکن است نامنظم باشد:

□ مانند حرکت زمین در زلزله

■ اگر حرکت بعد از زمان معلومی خود را تکرار نماید آن را **حرکت**

تناوبی گویند.

■ ساده ترین نوع حرکت تناوبی را **حرکت هارمونیک** گویند



حرکت هارمونیک

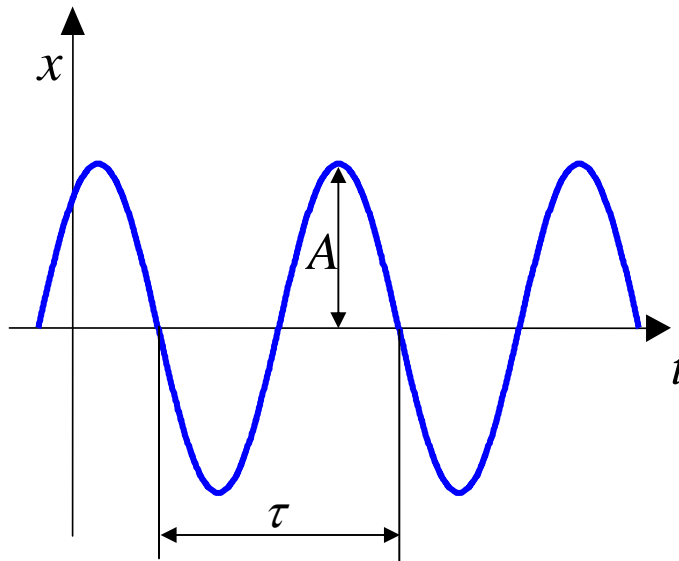
■ تعاریف:

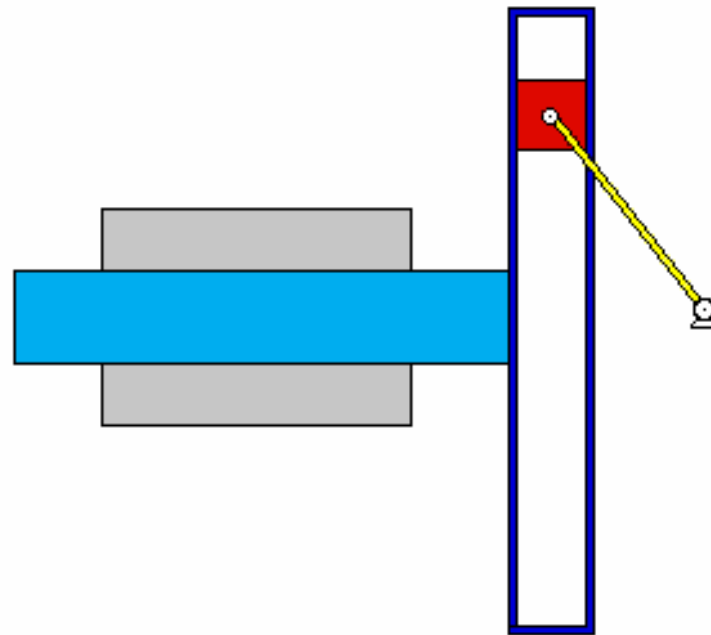
□ زمان تناوب (τ): کوتاهترین زمانی که تابع خود را تکرار نماید. (واحد آن ثانیه است)

□ فرکانس (f): تعداد تکرار در هر ثانیه
(Cycle/s, Hz)

$$f = \frac{1}{\tau}$$

□ دامنه A : بیشترین مقدار تابع است

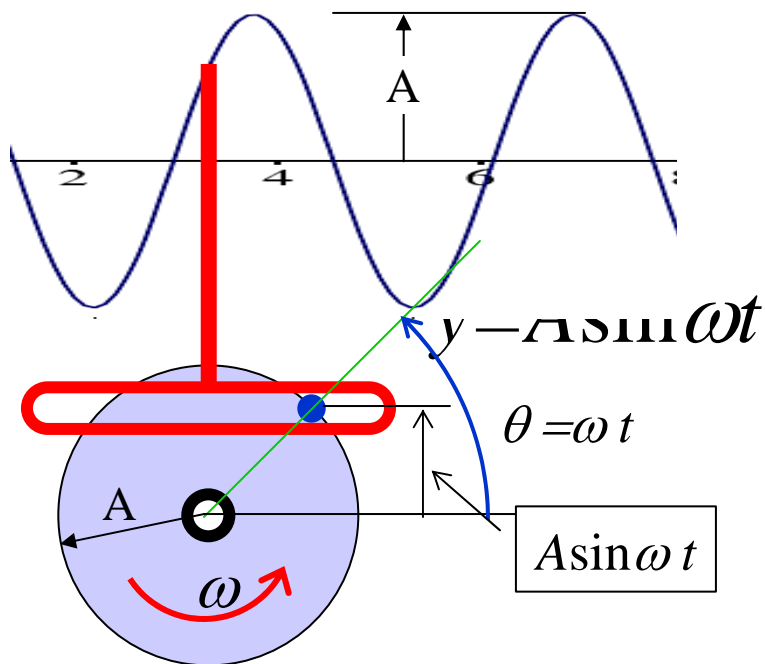




Created for "Design of Machinery, 3rd ed." by R. L. Norton and
"The Multimedia Handbook of Mechanical Devices" by S. Wang
Software copyright © 2004 by The McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

حرکت هارمونیکی

■ نحوه تولید یک حرکت هارمونیک
ینوسی



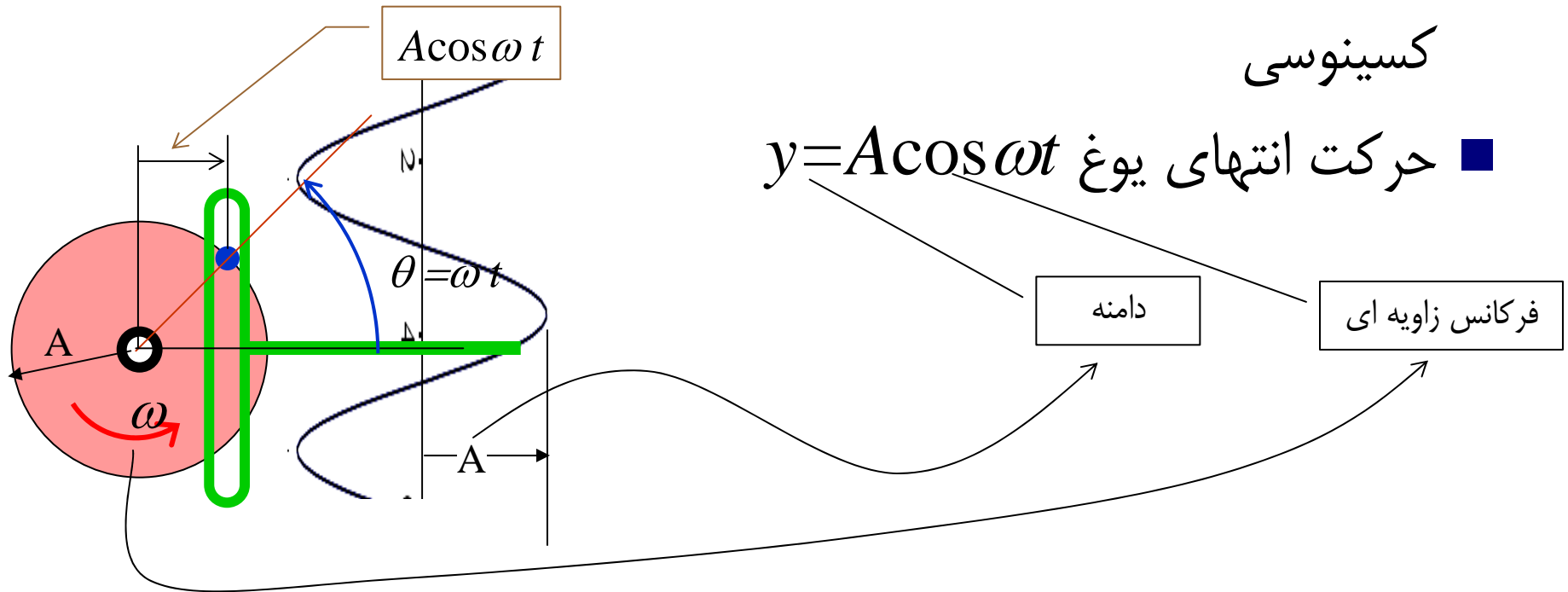
■ حرکت زائدهای غیر

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{\tau}$$

حرکت هارمونیکی

■ نحوه تولید یک حرکت هارمونیک
کسینوسی

■ حرکت انتهای یوغ $y = A \cos \omega t$



حرکت هارمونیکی

■ مشتقات حرکت هارمونیکی

$$y = A \sin \omega t$$

$$\dot{y} = \omega A \cos \omega t = (\omega A) \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 A \sin \omega t = (\omega^2 A) \sin(\omega t + \pi) = -\omega^2 y \quad (*)$$

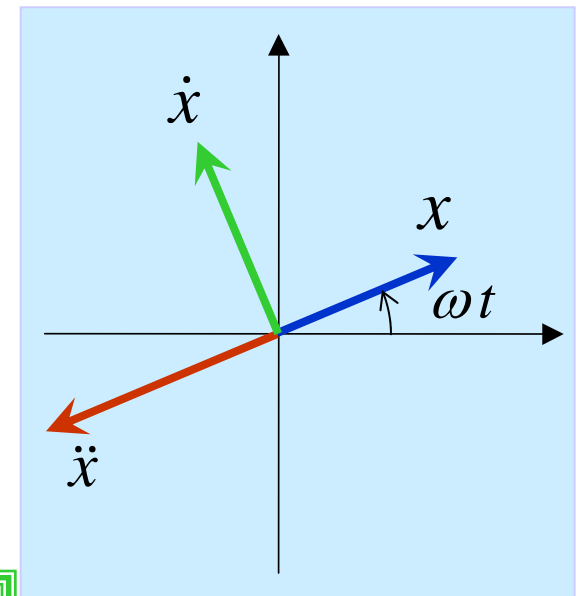
$$x = A \cos \omega t$$

$$\dot{x} = -\omega A \sin \omega t = (\omega A) \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \cos \omega t = (\omega^2 A) \cos(\omega t + \pi) = -\omega^2 x \quad (**)$$

$$(*) \Rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y \Rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

$$(**) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$



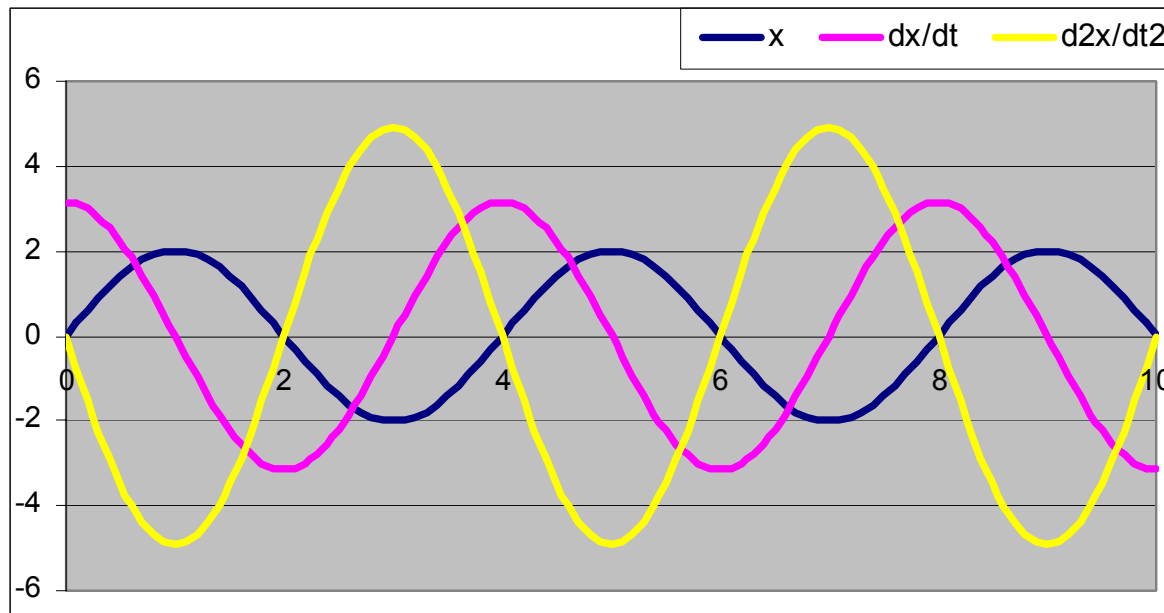
دیاگرام فازوری

حرکت هارمونیکی

■ تابع هارمونیکی جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

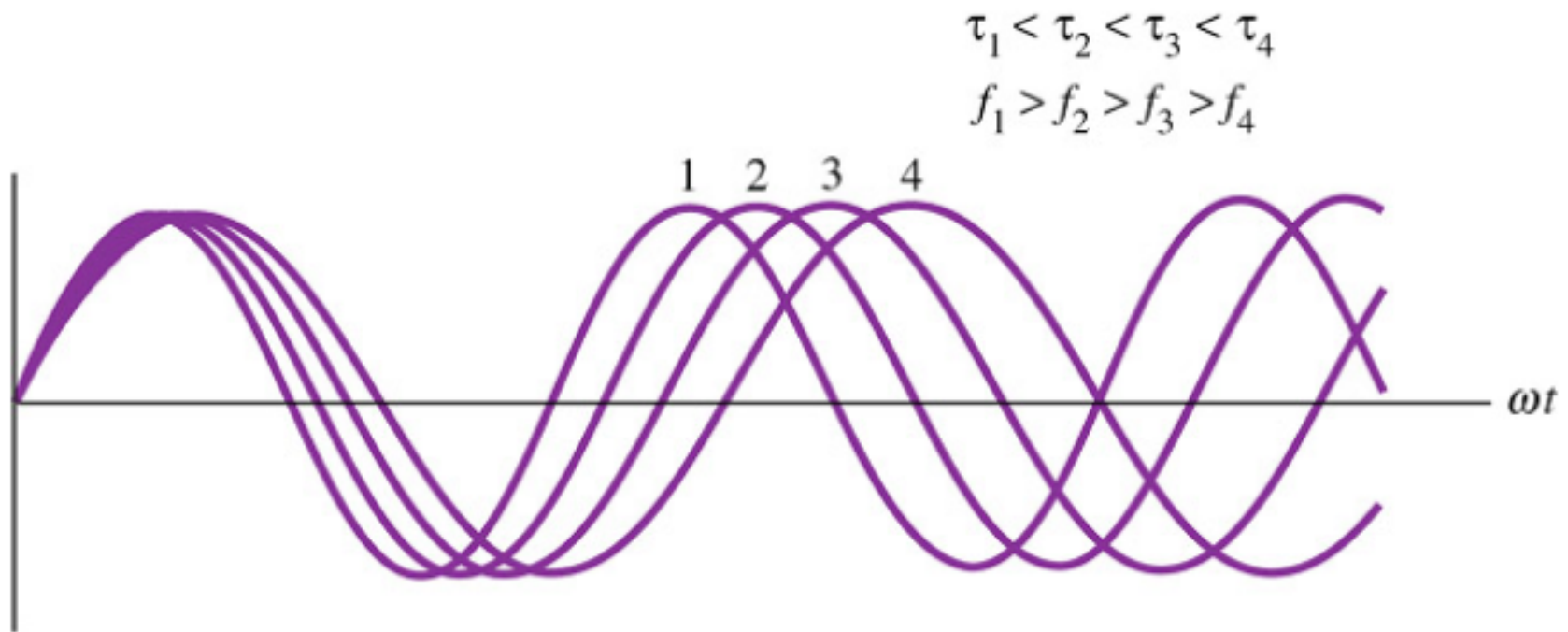
است



$$A = 2$$

$$\omega = \pi/2$$

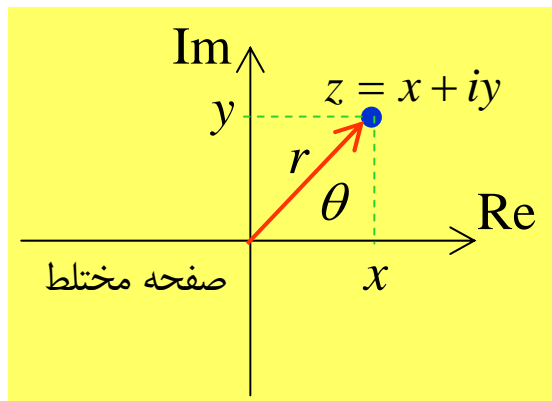
Vibration frequency and period



مقدمه ای بر جبر مختلط

$$i = \sqrt{-1}$$

$$z = x + iy$$



■ وه مو
ی یکه

جدء
د نخت ملط
■

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

■ همیشه د
نخت ملط

$$\text{Arg}(z) = \angle z = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

مقدمه ای بر جبر مختلط

$$\operatorname{Re}(z) = x$$

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

$$\bar{z} = x - iy$$

■ قسمت حقیقی:

■ قسمت موهومی:

■ مزدوج z

■ مختصات قطبی:

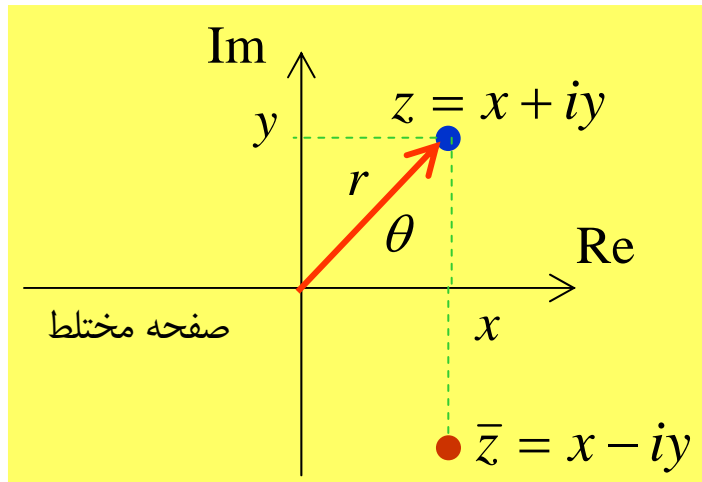
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i \theta}$$

$$\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r e^{-i \theta}$$

$$e^{i \theta} = \cos \theta + i \sin \theta \text{ فرمول اویلر}$$



جبر مختلط

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

■ اگر

$$\left. \begin{array}{l} z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = r_1 r_2 \\ \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}, \quad r_2 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \theta_1 + \theta_2$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) = \theta_1 - \theta_2$$

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |\bar{z}| |z| = |z|^2$$

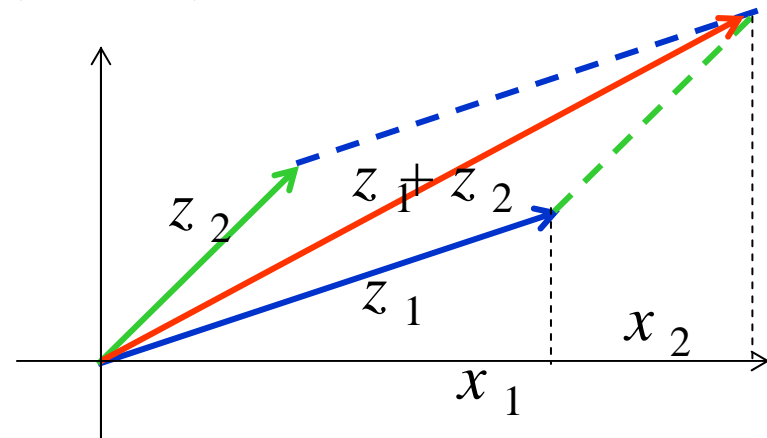
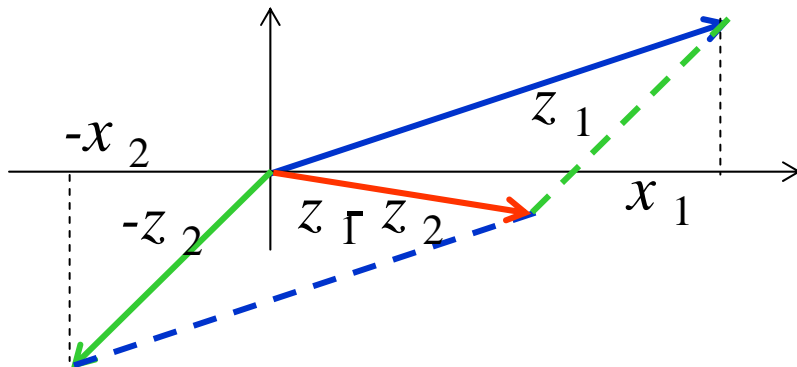
جبر مختلط

■ اگر

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = x_1 + iy_1, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = x_2 + iy_2$$

$$z_1 + z_2 = r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = r_1 e^{i\theta_1} - r_2 e^{i\theta_2} = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$



حساب مختلط

■ مشتق گیری از اعداد مختلط

$$z = re^{i\omega t} = r \cos \omega t + ir \sin \omega t = x + iy$$

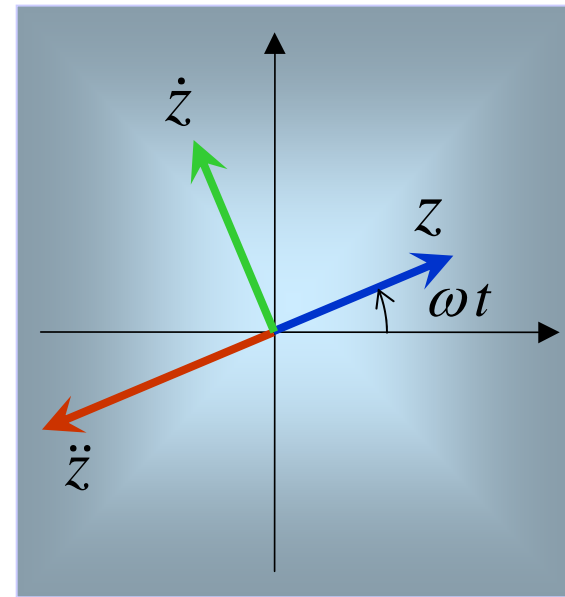
$$\dot{z} = i\omega re^{i\omega t} = -\omega r \sin \omega t + i\omega r \cos \omega t = -\omega y + i\omega x$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 re^{i\omega t} = -\omega^2 z \Rightarrow \ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

$$z = re^{i\omega t}$$

$$\dot{z} = i\omega re^{i\omega t} = \omega re^{i(\omega t + \pi/2)}$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 re^{i\omega t} = \omega^2 re^{i(\omega t + \pi)}$$



حرکت تناوبی

■ هر تابع متناوب (تحت شرایطی) را می توان به صورت سری فوریه نشان داد:

■ سری فوریه:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)]$$

■ ضرایب فوریه:

$$a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(x) dx \qquad a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(x) \cos(\omega_n x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(x) \sin(\omega_n x) dx$$

$$\omega_n = n\omega_1 \quad n = 1, 2, \dots \qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{\tau}$$

شکل دامنه و اختلاف فاز سری فوریه

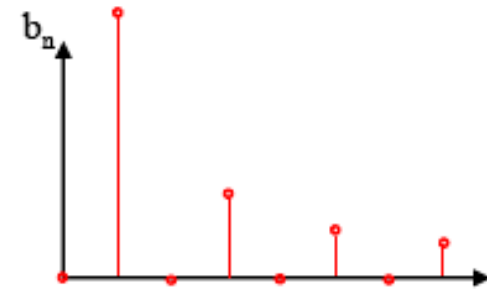
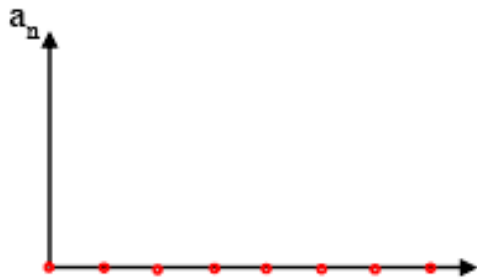
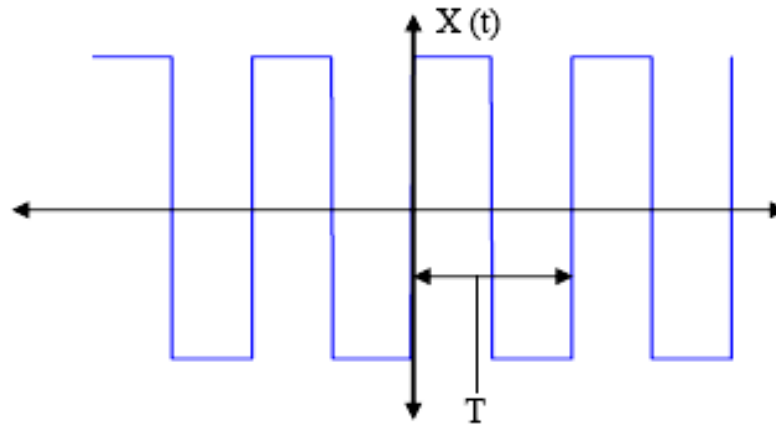
■ سری فوریه به شکل زیر هم نوشته می شود:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 x + \delta_n) \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$
$$\delta_n = \tan^{-1} \left(-\frac{b_n}{a_n} \right)$$

■ طیف دامنه:

□ ترسیم نموداری از $c_n/2$ بر حسب $n\omega_1$ (برای $n=1,2,\dots$) را **طیف دامنه** تابع متناوب f گویند.

Time to Frequency Domain Conversion: **Fourier Series**

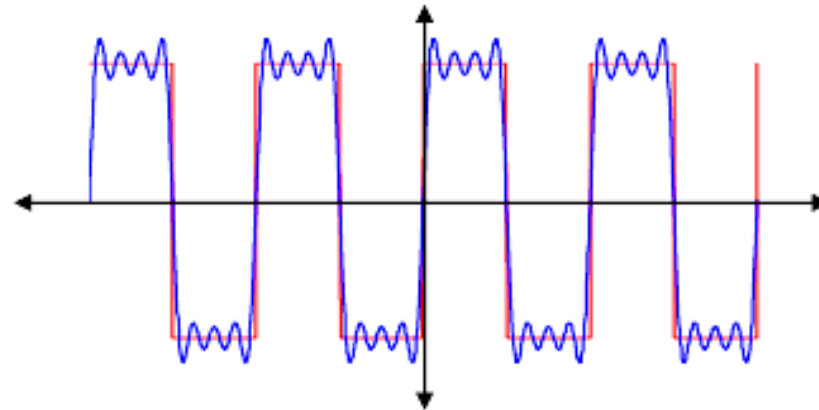


$$x(t) = +\frac{4}{\pi}\sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega t) + \frac{4}{7\pi}\sin(7\omega t) + \dots$$

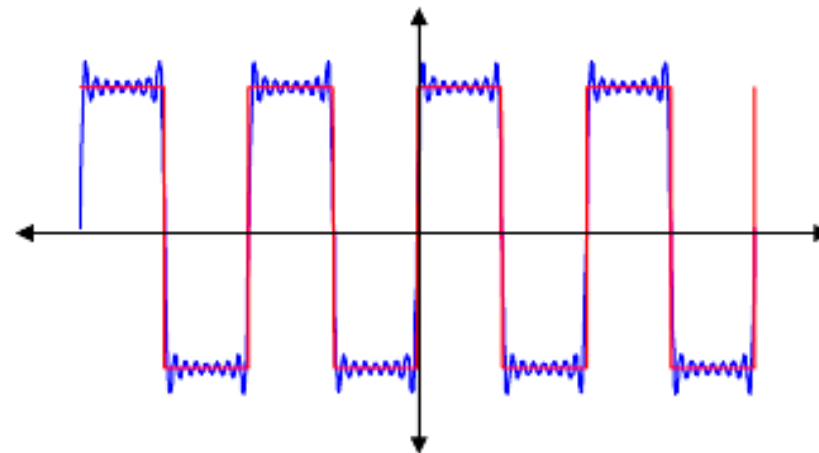
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Time to Frequency Domain Conversion: **Fourier Series**

Example of 4 terms



Example of 8 terms



شکل مختلط سری فوریه

■ سری فوریه مختلط $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_1 x}$$

$$c_n = \frac{1}{\tau} \int_b^{b+\tau} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt$$

■ طیف فرکانس (طیف دامنه) یک تابع متناوب نموداری است از ترسیم نقاط:

$$\left(n\omega_0 \mid c_n \right)$$

■ که $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ می باشد.

■ مثال: $x = A \sin \omega t$

■ A

■ $0 (0 \leq t \leq 2\pi), \frac{2A}{\pi} (0 \leq t \leq \pi)$

■ $\frac{\dot{A}}{2}$

■ $\frac{A}{\sqrt{2}}$

$$db = 20 \log_{10} \left| \frac{x_1}{x_2} \right|, \quad SPL = 20 \log_{10} \left| \frac{P}{P_o} \right|$$

■ مقدار پیک: بیشینه تابع

■ مقدار متوسط: $\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$

■ مقدار متوسط مربع: mean square value

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$$

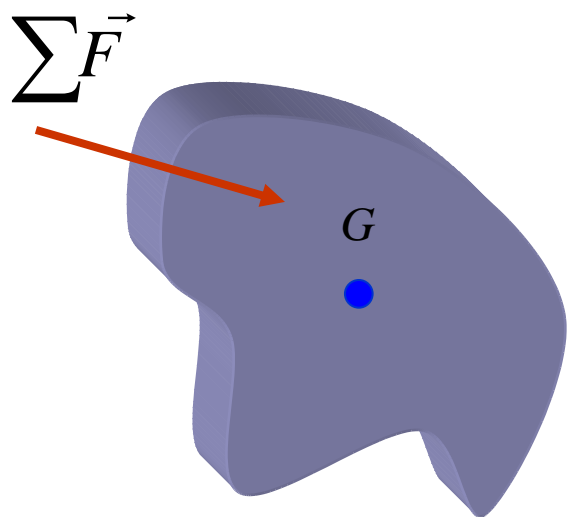
■ ریشه مقدار متوسط مربع: RMS

$$\sqrt{\overline{x^2}}$$

■ دسیبل:

$$P_o = 20 \mu Pa$$

مروری بر دینامیک (روش نیرو)



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$$

■ حالت کلی

$$\sum M_G = J_G \alpha$$

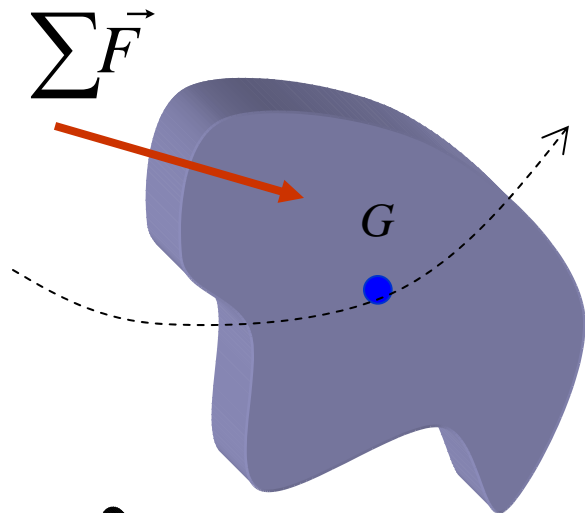
$$\sum M_P = J_G \alpha + m a_G d$$

P نقطه ای که دارای شتاب است

$$\sum M_P = J_P \alpha + \vec{\rho} \times m \vec{a}_P$$

P نقطه ای که دارای شتاب است و متعلق به جسم

مروری بر دینامیک (روش نیرو)

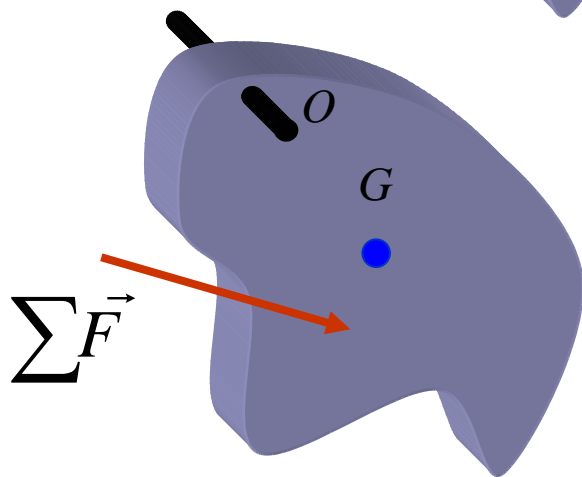


■ حرکت انتقالی و حرکت ذره

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_G$$

$$\sum M_G = 0$$

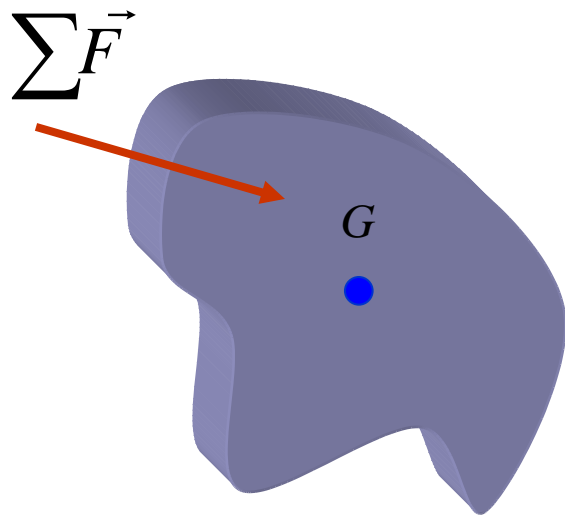
■ حرکت دورانی حول یک نقطه:



$$\sum M_O = J_O \alpha$$

مروری بر دینامیک (روش انرژی)

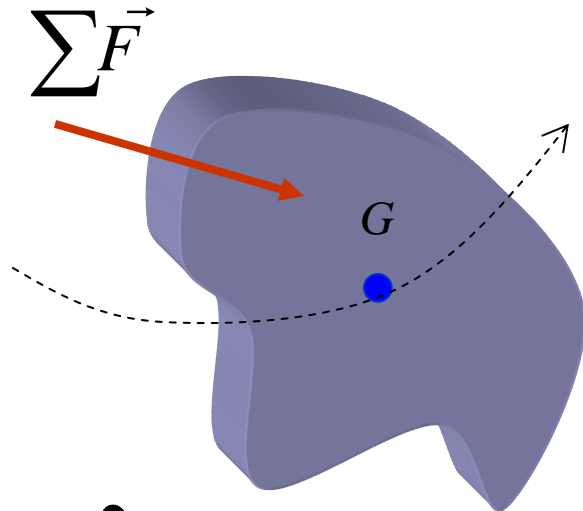
■ حالت کلی



C مرکز آنی سرعت صفر

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

مروری بر دینامیک (روش انرژی)

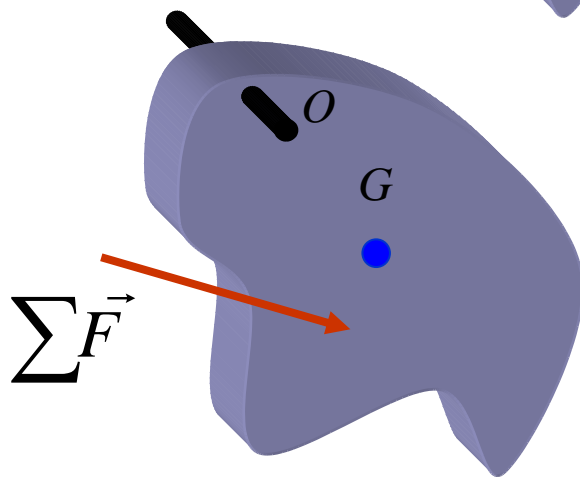


■ حرکت انتقالی و حرکت ذره

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2$$

■ حرکت دورانی حول یک نقطه:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$



$$T = \frac{1}{2} J_O \omega^2$$

مقدمه ای بر حل معادلات دیفرانسیل

- در ارتعاشات عمدتاً به معادلات مرتبه دوم برخورد می شود که شکل کلی آنها به صورت زیر است:

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = f(t)$$

- اگر $f(t=0)$ باشد معادله همگن و راحتتر حل می شود
- در صورتی که شرایط اولیه موجود باشد جواب منحصر به فرد است.

حل معادله همگن

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

$$y = Ae^{mt}$$

■ جوابی به صورت

$$y = Ae^{mt} \Rightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dt} = mAe^{mt} \Rightarrow \ddot{y} = m^2 Ae^{mt}$$

$$(am^2 + bm + c)Ae^{mt} = 0$$

معادله: $Ae^{mt} \neq 0$ با قرار دادن

$$am^2 + bm + c = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

و ■

حل معادله همگن

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■ با توجه به مقدار زیر رادیکال
جوابهای مختلفی را خواهیم داشت

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0, \quad m_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad y(t) = A_1 e^{\left(-\frac{b}{2a} + i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{b}{2a} - i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)t}$$

$$y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \left(A_1 e^{i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t} + A_2 e^{-i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t} \right) = e^{-\frac{b}{2a}t} \left(A_1^* \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right) + A_2^* \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}t\right) \right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0, \quad m_1 = m_2 = -\frac{b}{2a}, \quad y(t) = (B_1 + B_2 t) e^{-\frac{b}{2a}t}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0, \quad m_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} \left(C_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}t} \right)$$

حالت خاص $b=0$

■ لذا فقط حالت اول $\Delta < 0$ وجود دارد و جواب معادله به صورت زیر است:

$$\Delta = -4ac < 0, \quad m_{1,2} = \pm i \frac{2\sqrt{ac}}{2a}, \quad y(t) = \left(A_1 e^{i\sqrt{\frac{c}{a}}t} + A_2 e^{-i\sqrt{\frac{c}{a}}t} \right)$$

$$y(t) = \left(A_1^* \sin\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) + A_2^* \cos\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) \right) = D \sin\left(\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) - \phi\right) = D^* \cos\left(\left(\sqrt{\frac{c}{a}}t\right) - \phi^*\right)$$

■ همانگونه که قبلاً نیز نشان داده شد این یک تابع هارمونیک است و جواب معادله

$$\ddot{y} + \frac{c}{a}y = 0$$

حل معادله غیر همگن

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = f(t)$$

■ معادله غیر همگن

دارای مجموع دو جواب عمومی و خصوصی زیر است

$$y(t) = y_g + y_p$$

جواب خصوصی

جواب عمومی که جواب معادله همگن است

■ این جوابها با وجود شرایط مرزی منحصر به فرد خواهند بود

استفاده از تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیلی

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} ye^{-st} dt \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} = sY(s) - y(0),$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} = s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0),$$

$$\mathcal{L}\left\{a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy\right\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

استفاده از تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیلی

$$\mathcal{L} \left\{ a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy \right\} = \mathcal{L} \{ f(t) \} = F(s)$$

$$a(s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + b(sY(s) - y(0)) + c(Y(s)) = F(s)$$

$$Y(s)[as^2 + bs + c] = F(s) + (as + b)y(0) + a\dot{y}(0)$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{as^2 + bs + c} + \frac{(as + b)y(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{a\dot{y}(0)}{as^2 + bs + c}$$

استفاده از حل عددی

■ روشهای حل عددی همچون

□ اویلر

□ اویلر اصلاح شده

□ رانگ کوتا - مرتبه ۴ (دقیقترین جوابها)

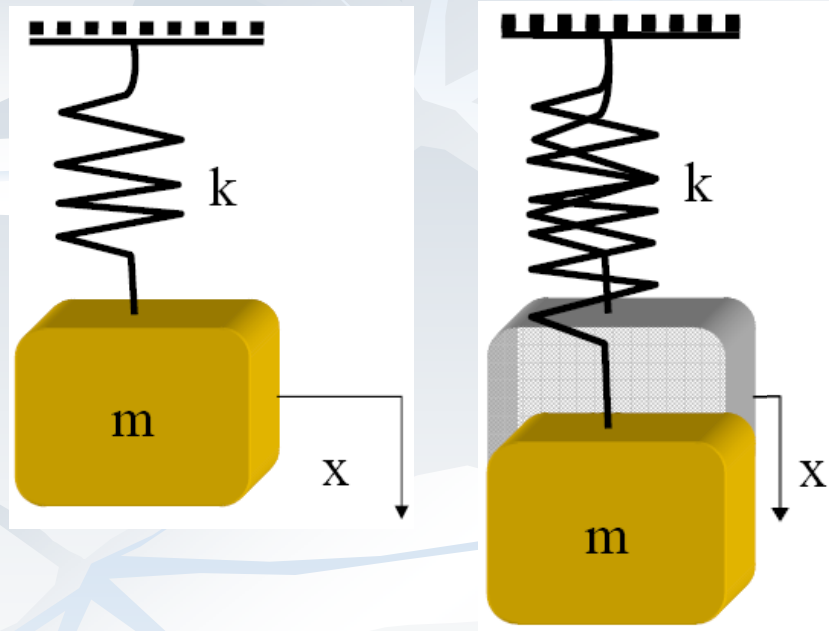
ارتعاشات مکانیکی ۳

سیدیوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

ارتعاشات آزاد یک درجه آزادی

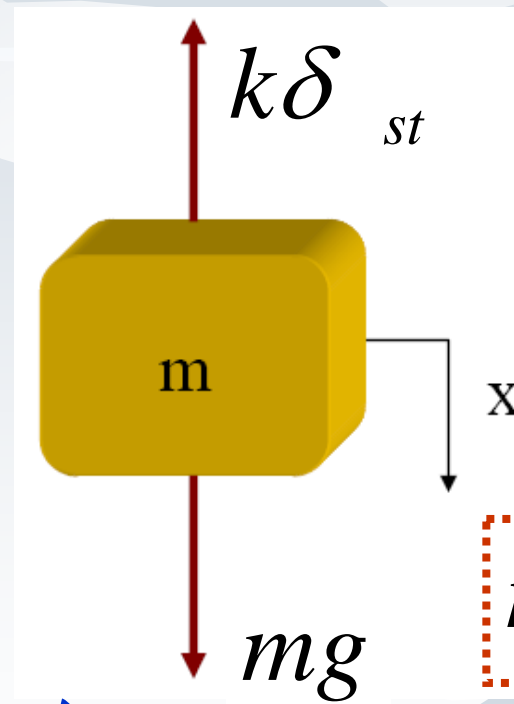
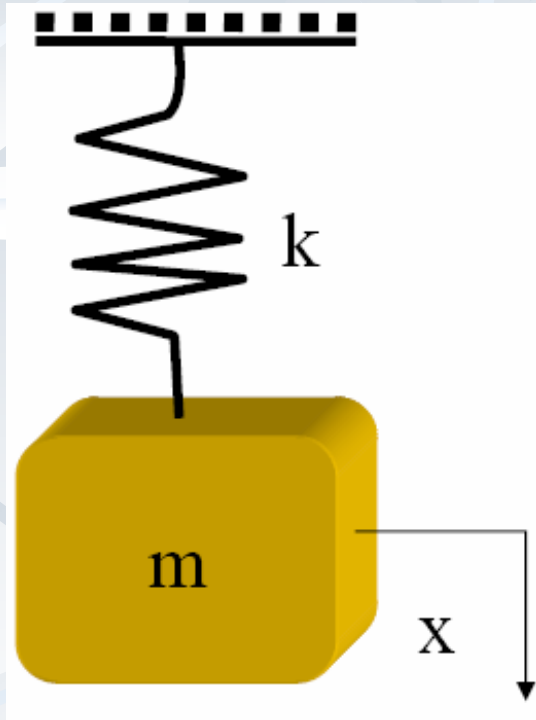


بدست

- فرضهای اصلی
 - سیستم نامیرا است
 - نیروی خارجی وجود ندارد
 - حرکت فقط در امتداد قائم است

■ نظری مهندسی (جایابی و)

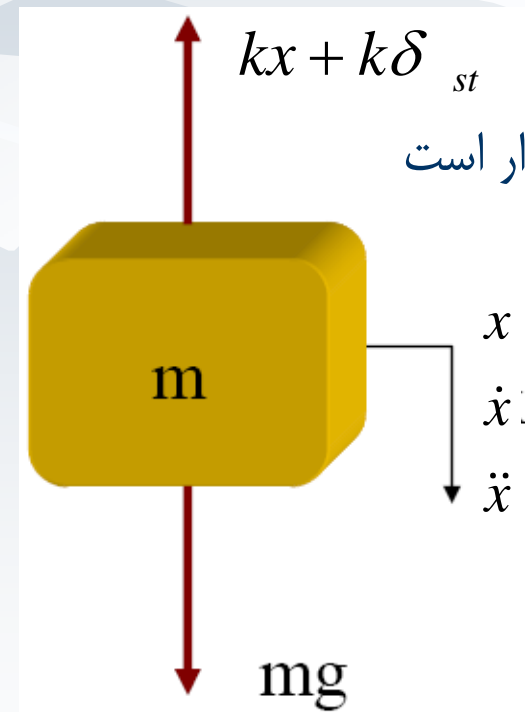
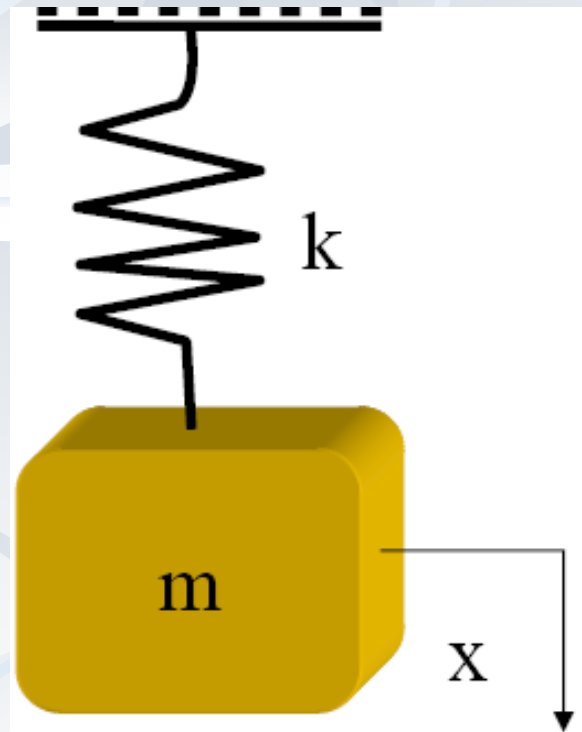
دیاگرام آزاد: تعادل استاتیکی



$$mg = k\delta_{st}$$

در حالت سکون $x=0$ تعادل استاتیکی

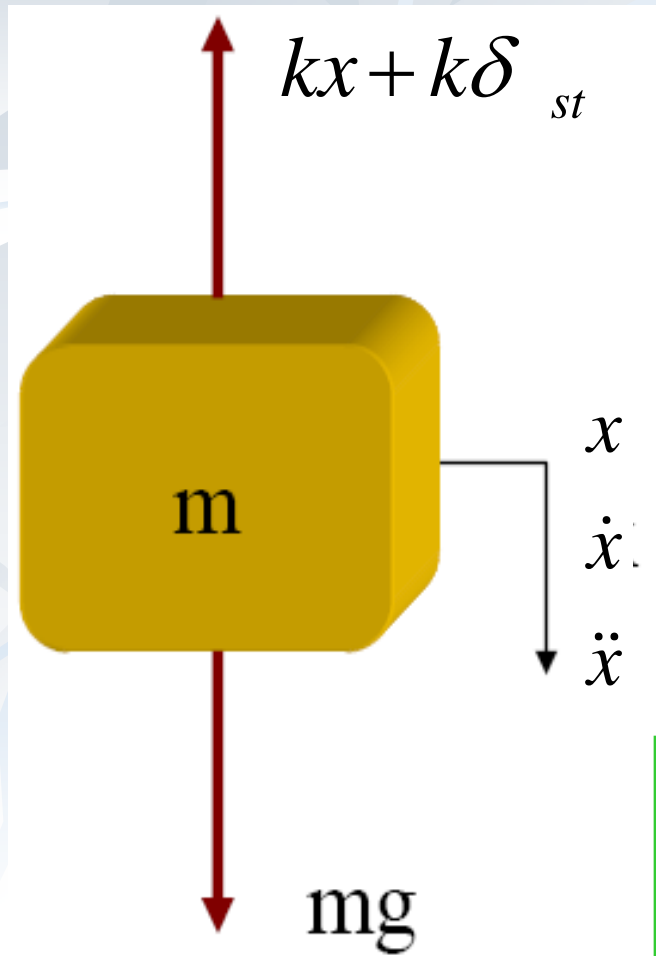
تعدادل دینامیکی: دیاگرام آزاد



تعدادل دینامیکی برقرار است

■ توجه: x از موقعیت تعدادل استاتیکی اندازه گرفته شده است.

تعدادل دینامیکی: دیاگرام آزاد



■ اعمال قانون دوم نیوتن:

$$\downarrow \sum F = ma$$

$$-kx - k\delta_{st} + mg = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{■ معادله حرکت:}$$

■ Equation of Motion (EOM)

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

EOM

M

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

■ معادله حرکت:

■ معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ با ضرایب ثابت

■ همگن و خطی

■ شکل جوابها:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = X \cos(\omega t - \phi)$$

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

در حال حاضر این جواب بررسی می شود ←

EOM

M

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

■ معادله حرکت:

■ جوابی صورت جوابی $x(t) = Ce^{\lambda t}$ فرض می شود:

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

$$\dot{x}(t) = \lambda Ce^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$$

■ با قرار دادن در EOM

$$m\lambda^2 Ce^{\lambda t} + kCe^{\lambda t} = 0$$

$$(m\lambda^2 + k)Ce^{\lambda t} = 0 \Rightarrow m\lambda^2 + k = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

پاسخ معادله حرکت

■ در نتیجه جواب معادله دیفرانسیل:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x(t) = C_1 e^{i \sqrt{k/m} t} + C_2 e^{-i \sqrt{k/m} t}$$

■ که C_1 و C_2 ثابت‌هایی هستند، که با اعمال شرایط مرزی بدست می‌آیند.

■ اما:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

پاسخ معادله حرکت

$$x(t) = C_1 e^{i\sqrt{k/m}t} + C_2 e^{-i\sqrt{k/m}t}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

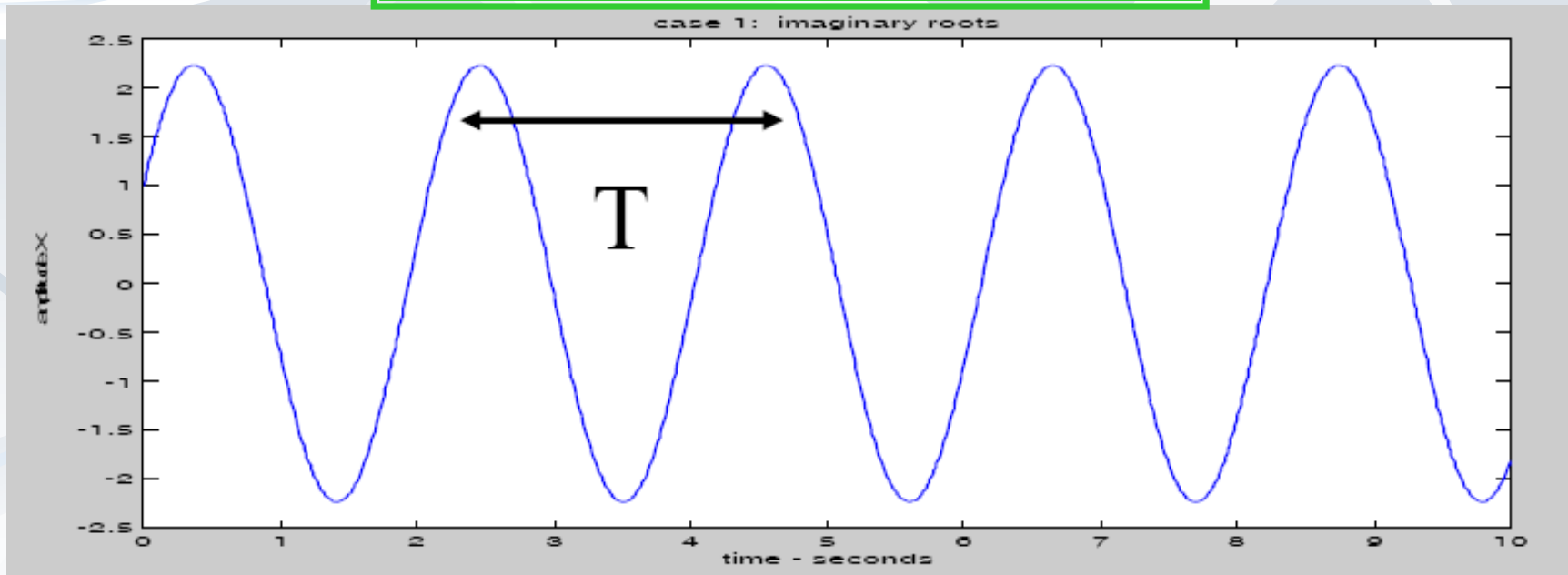
■ در نتیجه:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 (\cos\sqrt{k/m}t + i\sin\sqrt{k/m}t) + C_2 (\cos\sqrt{k/m}t - i\sin\sqrt{k/m}t) \\ &= (C_1 + C_2) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i(C_1 - C_2) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{aligned}$$

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

پاسخ معادله حرکت

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{rad/s}) \quad \text{فرکانس طبیعی}$$

پاسخ معادله حرکت

$$x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{Hz یا } cycle/s) \quad \text{فرکانس طبیعی}$$

$$x(t) = A \cos(2\pi f_n t) + B \sin(2\pi f_n t)$$

پاسخ معادله حرکت

■ A و B با اعمال شرایط اولیه بدست می آید:

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

$$x(0) = A \cos(\omega_n 0) + B \sin(\omega_n 0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad A = x_0$$

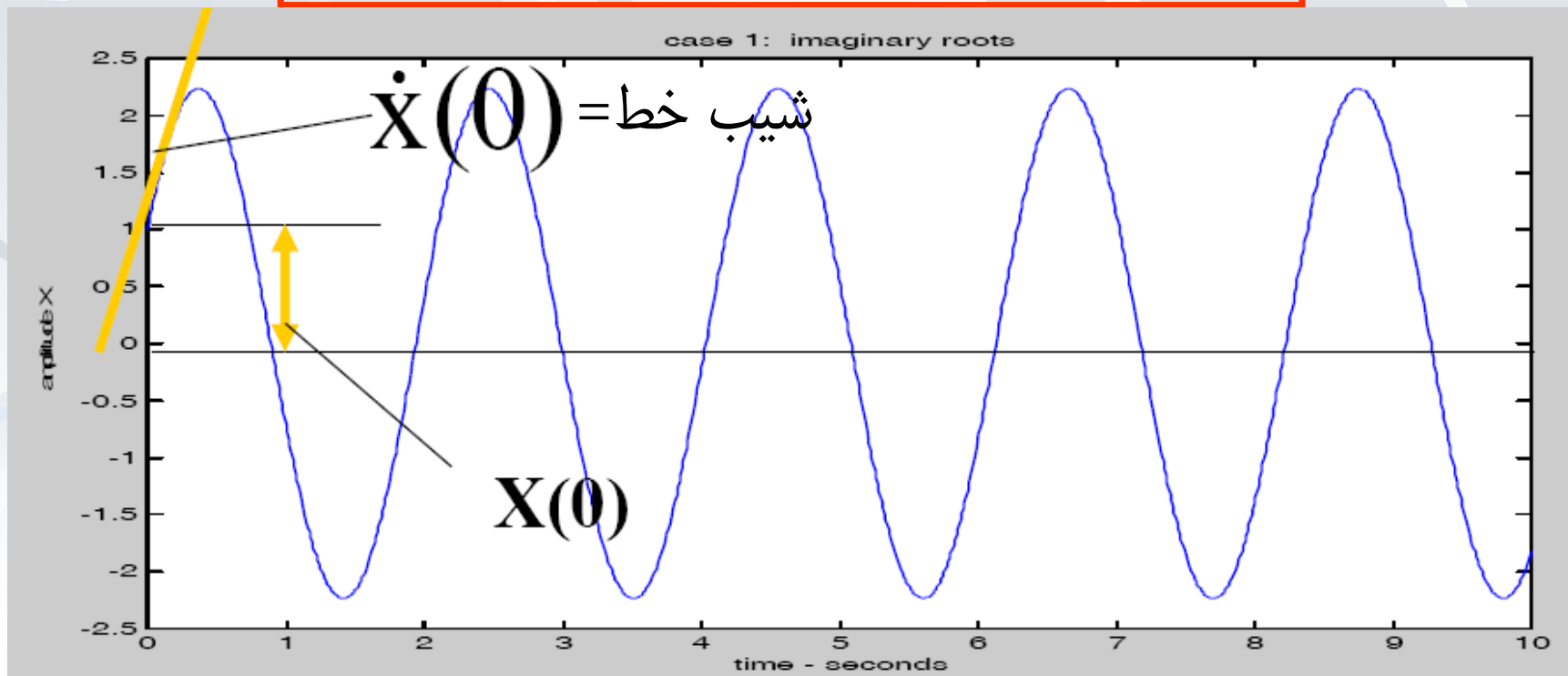
$$\dot{x}(t) = -\omega_n A \cos(\omega_n t) + \omega_n B \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_n A \sin(\omega_n 0) + \omega_n B \cos(\omega_n 0) = v_0$$

$$\omega_n B = v_0 \quad B = \frac{v_0}{\omega_n}$$

پاسخ معادله حرکت

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$



شکل‌های دیگر پاسخ هارمونیک

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = X \cos(\omega_n t - \phi) = X \cos(\omega_n t) \cos(\phi) + X \sin(\omega_n t) \sin(\phi)$$

$$X \cos \phi = x_0 \quad X \sin \phi = \frac{v_0}{\omega_n}$$

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\tan \phi = \frac{v_0}{x_0 \omega_n}$$

اختلاف فاز

دامنه

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \cos\left(\omega_n t - \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{x_0 \omega_n}\right)\right)$$

شکل‌های دیگر پاسخ هارمونیک

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = X \sin(\omega_n t + \phi) = X \sin(\omega_n t) \cos(\phi) + X \cos(\omega_n t) \sin(\phi)$$

$$X \cos \phi = \frac{v_0}{\omega_n} \quad X \sin \phi = x_0$$

$$X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}$$

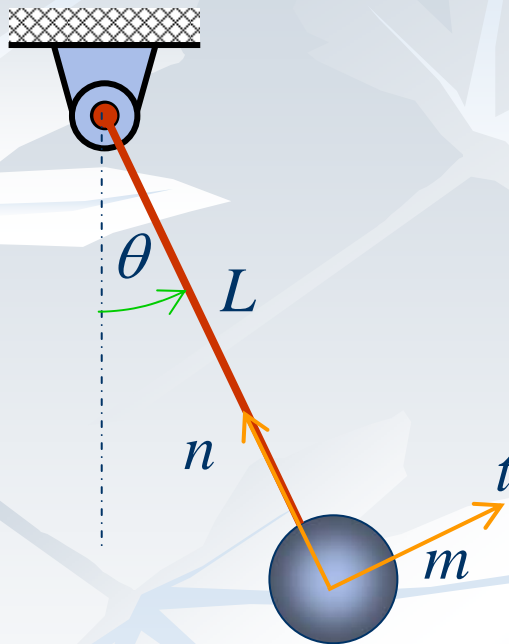
$$\tan \phi = \frac{x_0 \omega_n}{v_0}$$

اختلاف فاز

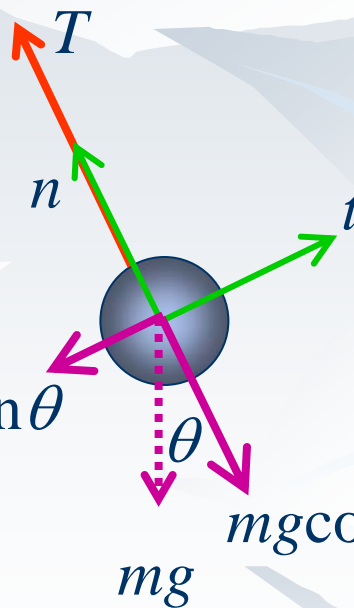
دامنه

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \sin\left(\omega_n t + \tan^{-1}\left(\frac{x_0 \omega_n}{v_0}\right)\right)$$

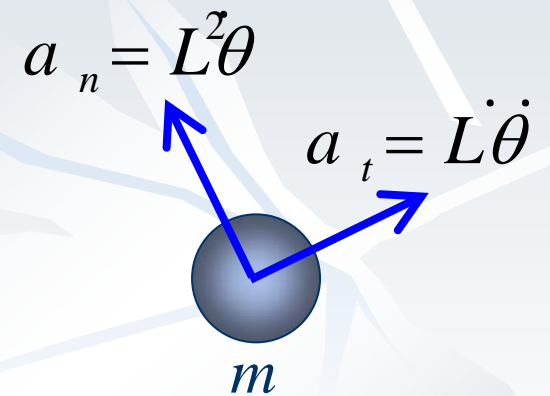
مثال: آونگ ساده



FBD



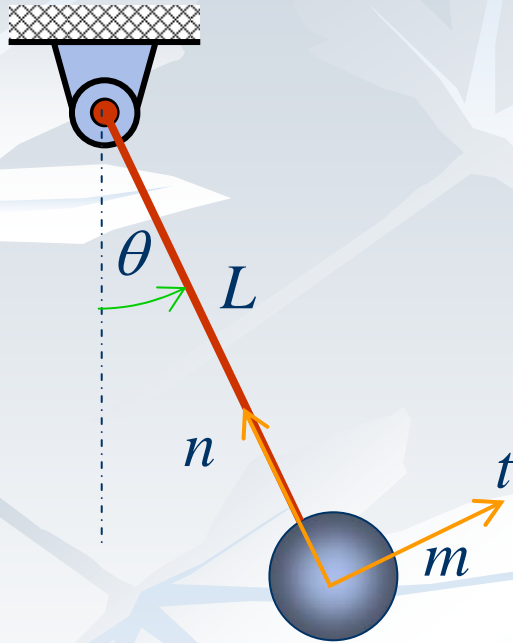
نیروی برگرداننده



$$\sum F_t = ma_t = mL\ddot{\theta}$$

$$-mg \sin \theta = mL\ddot{\theta}$$

مثال: آونگ ساده



■ معادله حرکت: $-mg \sin \theta = mL\ddot{\theta}$

$$L\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad \theta \ll \pi \Rightarrow \theta = \sin \theta$$

$$L\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

■ حل معادله حرکت:

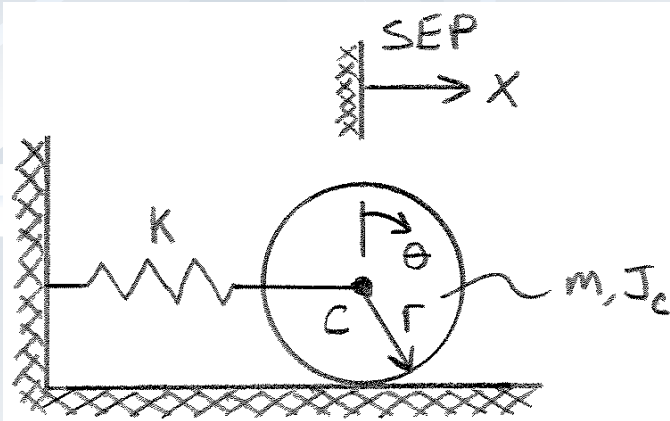
$$\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

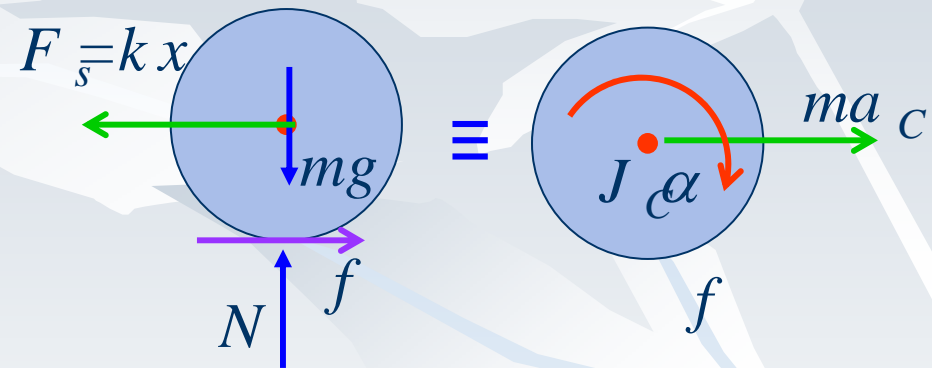
$$\tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

مثال

Static equilibrium position



الف: معادله حرکت



ب: به عنوان مختصات مستقل x مختصات وابسته θ

$$\sum F_y = 0 \quad N = mg$$

$$\sum F_x = ma_c \quad -kx + f = m\ddot{x}$$

$$x = r\theta, \quad \dot{x} = r\dot{\theta}, \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$\sum M_c \quad J_c \alpha$$

$$-f r = J_c \ddot{\theta}$$

$$-kr\theta - \frac{J_c \ddot{\theta}}{r} = mr\ddot{\theta}$$

$$(J_c + mr^2) \ddot{\theta} + kr^2 \theta = 0$$

ادامه

$$\underbrace{(J_C + mr^2)}_{m_{eq}} \ddot{\theta} + \underbrace{kr^2}_{k_{eq}} \theta = 0$$

$$m_{eq} \ddot{\theta} + k_{eq} \theta = 0$$

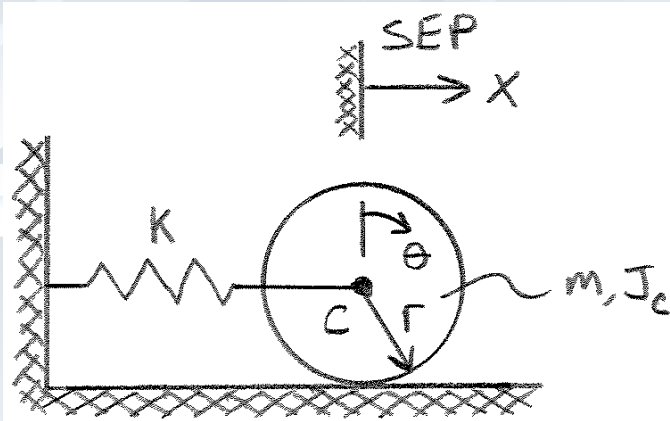
■ پاسخ:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

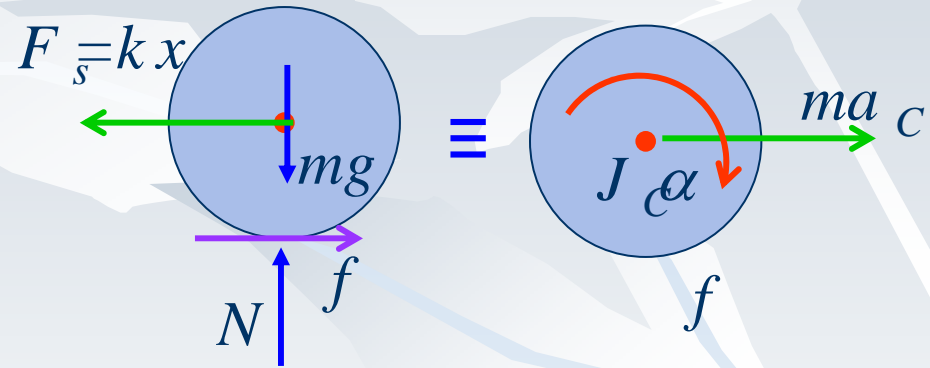
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{kr^2}{J_C + mr^2}}, \quad \tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{J_C + mr^2}{kr^2}}$$

مثال

Static equilibrium position



الف: معادله حرکت



ب: به عنوان مختصات مستقل θ مختصات وابسته x (I)

$$\sum F_y = 0 \quad N = mg$$

$$\sum F_x = ma_C \quad -kx + f = m\ddot{x}$$

$$x = r\theta, \quad \dot{x} = r\dot{\theta}, \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$\sum M_C \quad J_C \alpha$$

$$-kx - \frac{J_C \ddot{x}}{r^2} = m\ddot{x}$$

$$-f r = J_C \ddot{\theta}$$

$$\left(\frac{J_C}{r^2} + m \right) \ddot{x} + kx = 0$$

ادامه

$$\left(\frac{J_C}{r^2} + m \right) \ddot{x} + kx = 0$$

↓

$$m_{eq} \ddot{x} + kx = 0$$

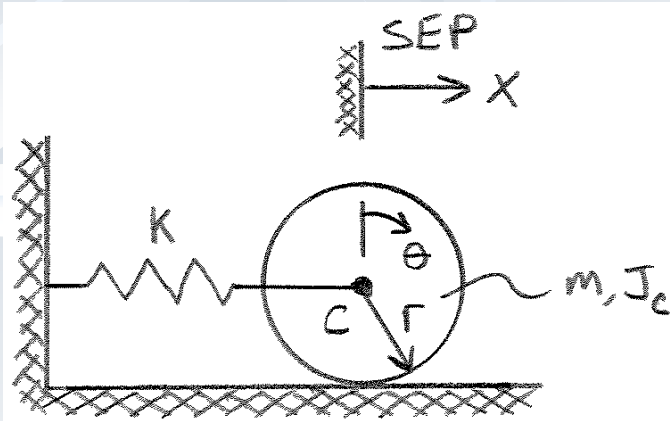
■ پاسخ:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

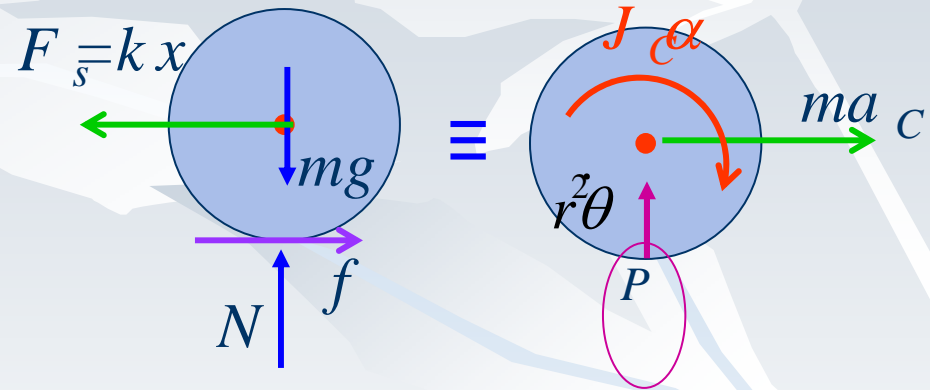
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{k}{J_C/r^2 + m}}, \quad \tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{J_C/r^2 + m}{k}}$$

مثال

Static equilibrium position



الف: معادله حرکت



$$\sum M_P = J_P \alpha + \vec{\rho} \times m \vec{a}_P$$

$$\sum M_P = J_c \alpha + m a_c d$$

$$x = r\theta, \quad \dot{x} = r\dot{\theta}, \quad \ddot{x} = r\ddot{\theta}$$

$$-kr(r\theta) = J_P \ddot{\theta}, \quad J_P = J_c + mr^2$$

$$(J_c + mr^2) \ddot{\theta} + kr^2 \theta = 0$$

$$-kr(r\theta) = J_c \ddot{\theta} + m \ddot{x} r = (J_c + mr^2) \ddot{\theta}$$

$$(J_c + mr^2) \ddot{\theta} + kr^2 \theta = 0$$



ادامه

$$\underbrace{(J_C + mr^2)}_{m_{eq}} \ddot{\theta} + \underbrace{kr^2}_{k_{eq}} \theta = 0$$

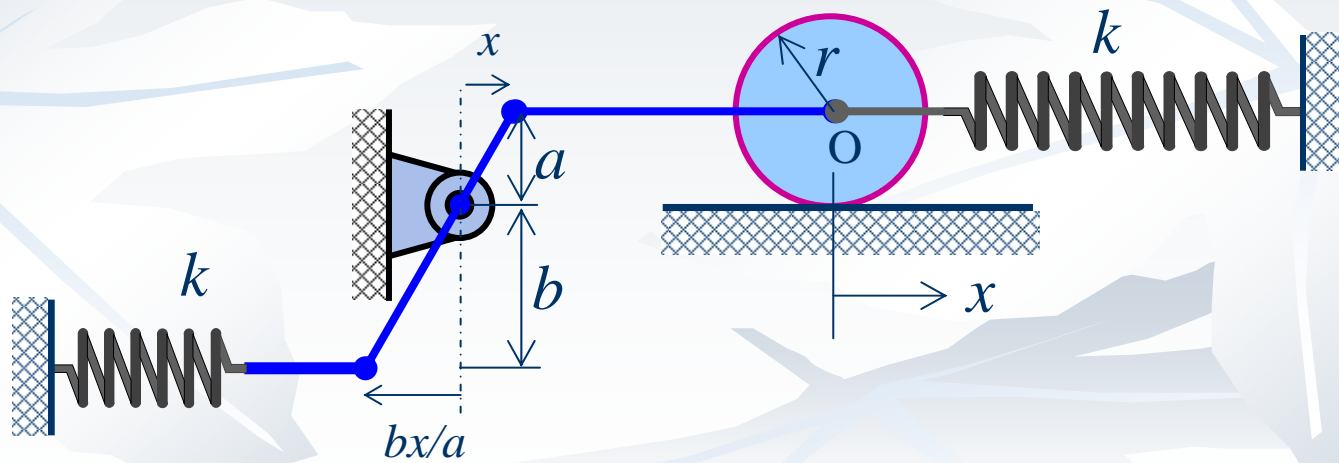
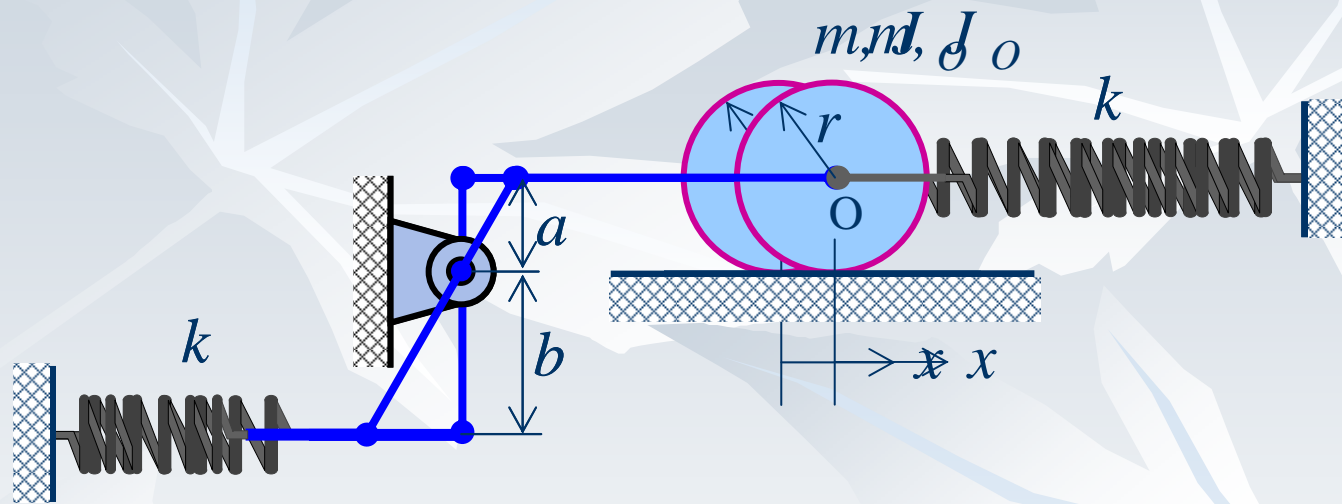
$$m_{eq} \ddot{\theta} + k_{eq} \theta = 0$$

پاسخ: ■

$$\theta(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

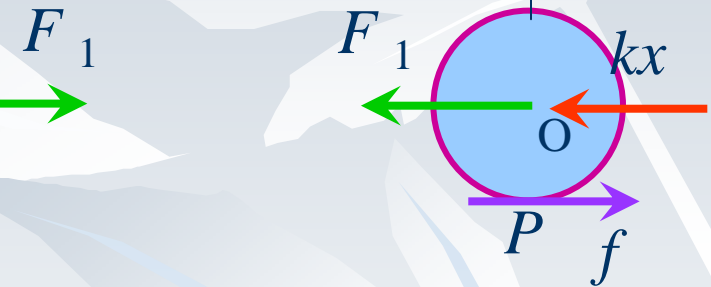
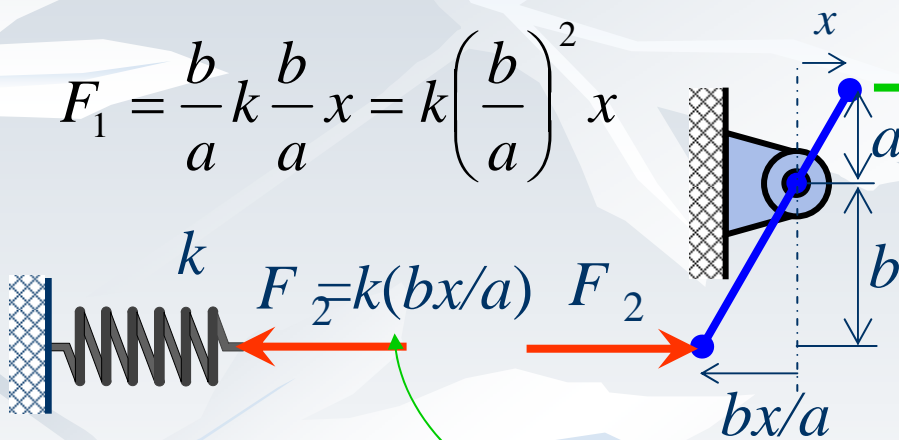
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{kr^2}{J_C + mr^2}}, \quad \tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{J_C + mr^2}{kr^2}}$$

مثال



$$\sum M = 0, \quad aF_1 - bF_2$$

$$F_1 = \frac{b}{a}k \frac{b}{a}x = k\left(\frac{b}{a}\right)^2 x$$



$$\sum M_P = J_P \alpha + \vec{\rho} \times m \vec{a}_P$$

$$-(F_1 + kx)r = J_P \ddot{\theta}$$

$$J_P = J_O + mr^2$$

$$\theta = \frac{x}{r}$$

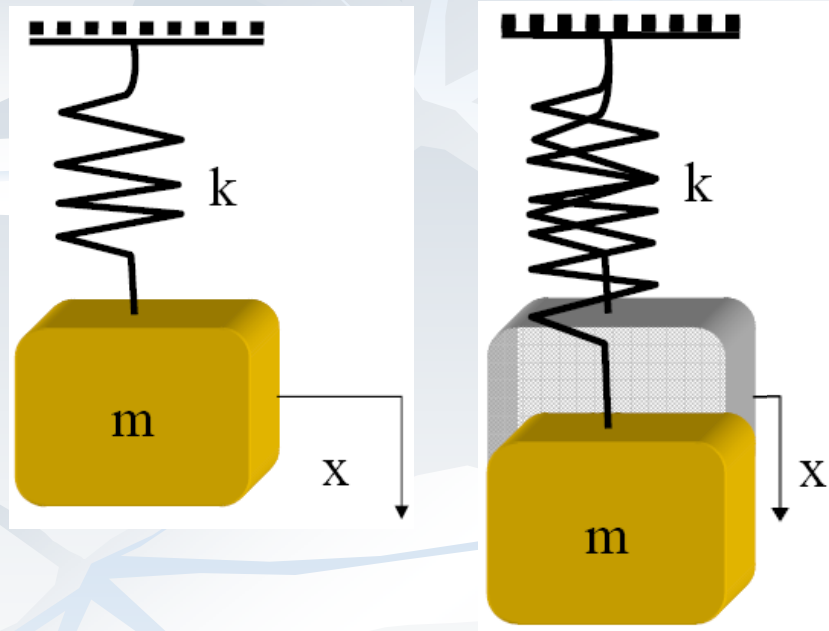
$$-\left(k\left(\frac{b}{a}\right)^2 x + kx\right)r = (J_O + mr^2)\frac{\ddot{x}}{r}$$

$$\left(\frac{J_O}{r^2} + m\right)\ddot{x} + k\left(\frac{b^2 + a^2}{a^2}\right)x = 0$$

$$m_{eq} = \left(\frac{J_O}{r^2} + m\right),$$

$$k_{eq} = k\left(\frac{b^2 + a^2}{a^2}\right)$$

ر جلیب بچی



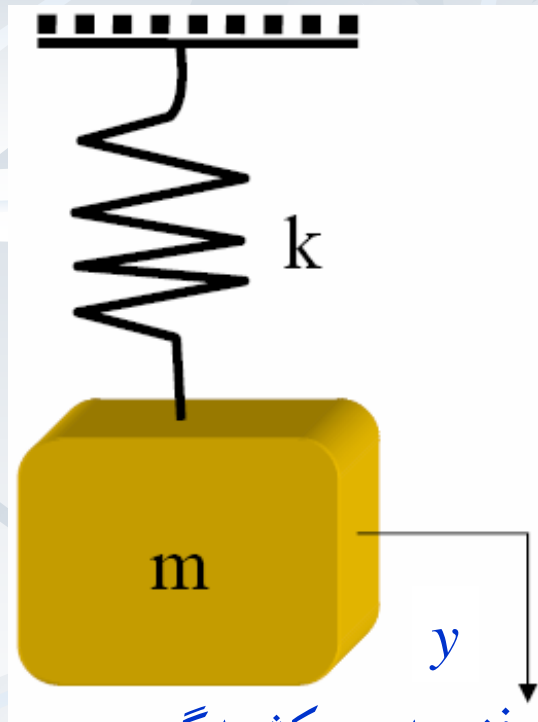
بدست

■ فرضهای اصلی

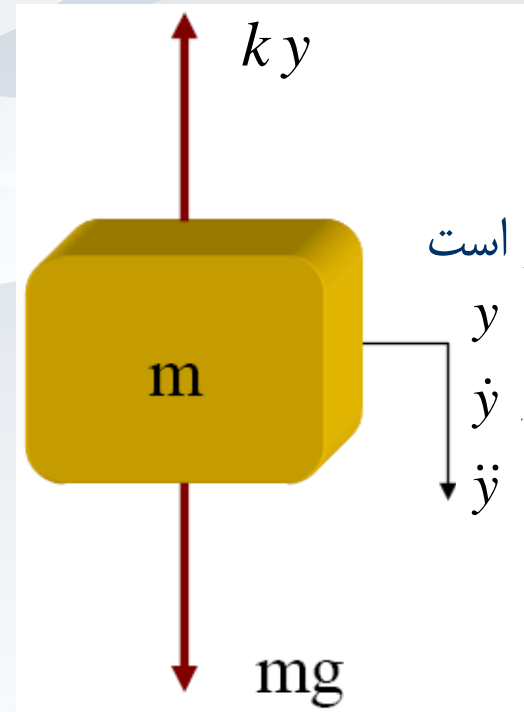
- سیستم نامیرا است
- نیروی خارجی وجود ندارد
- حرکت فقط در امتداد قائم است

■ نظریه حاشیه (جانبی) و

اثر جابجائی استاتیکی



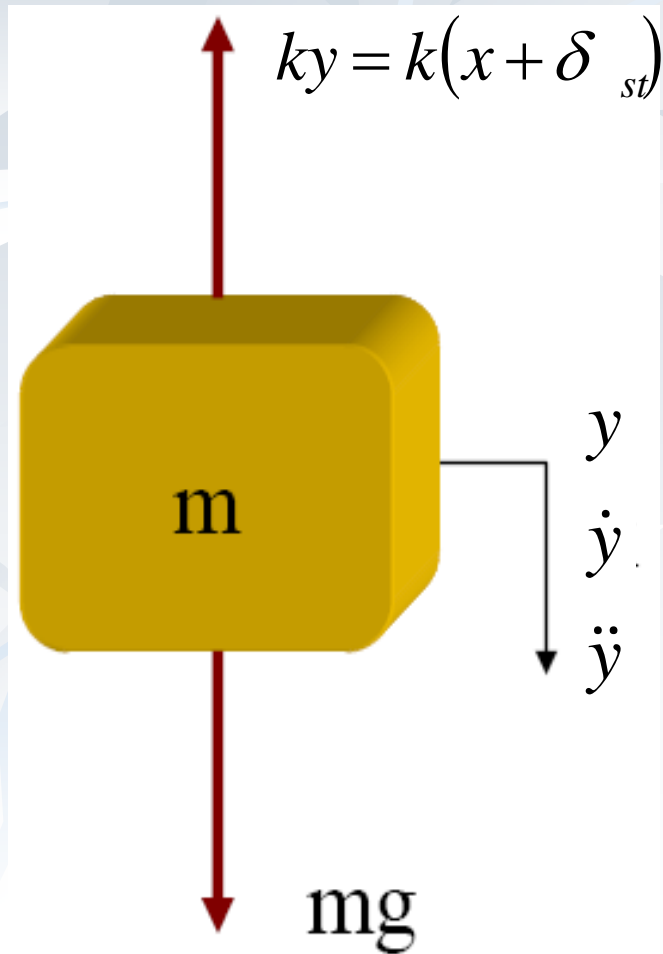
$y=0$ فنر بدون کشیدگی



تبادل دینامیکی برقرار است

■ توجه: y از موقعیت بدون کشیدگی فنر اندازه گرفته شده است.

تعدادل دینامیکی: دیاگرام آزاد



■ اعمال قانون دوم نیوتن:

$$\downarrow \sum F = ma$$

$$-ky + mg = m\ddot{y}$$

$$m\ddot{y} + ky = mg$$

■ معادله حرکت:

Equation of Motion (EOM) ■

$$m\ddot{y} + ky = mg$$

پاسخ

$$m\ddot{y} + ky = mg$$

■ حل:

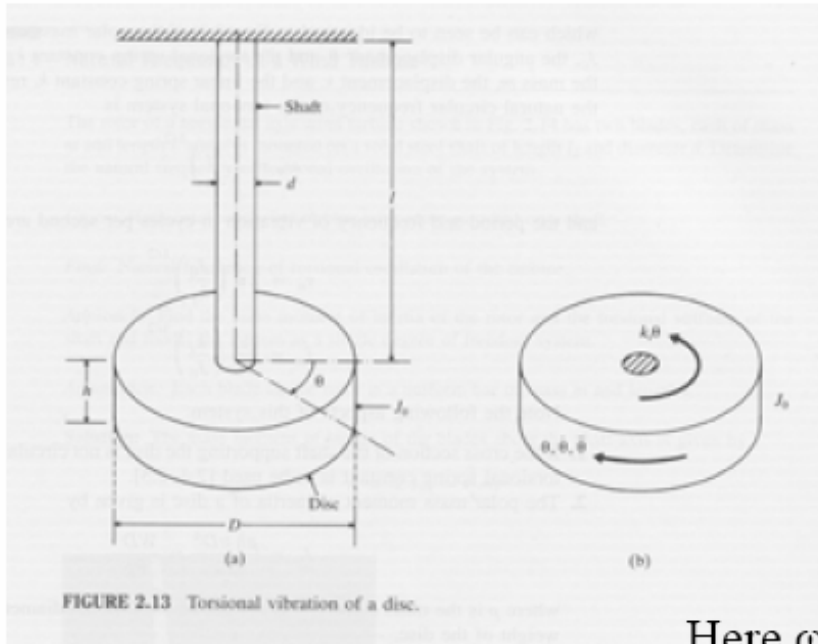
$$y(t) = y_g + y_p = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t) + \frac{mg}{k}$$

$$y(t) = x(t) + \delta_{st}$$

لازم است که وزن نادیده گرفته شود!!

■ اگر g در معادله حرکت در یکی از متغیرهای مستقل x, \dot{x}, \ddot{x} ضرب شود نمی توان توان را نادیده گرفت.

Torsional System: SDOF



Equation of Motion:

$$J_0 \ddot{\theta} + k_t \theta = 0$$

Solution Form:

$$\theta(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

Here $\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J}} = \frac{2\pi}{T} =$ natural frequency (rad/sec)

Compare with Translatory System

Equation of Motion: $m\ddot{x} + kx = 0$

Solution Form: $x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

روشن انرژی

- از دینامیک می دانیم که چنانچه نیروی خارجی بر سیستمی اثر نکند:
- مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی برابر مقدار ثابتی است.

$$T + U = \text{constant}$$

$$d(T + U) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

روشن ریلی

■ در این روش با فرض معلوم بودن پاسخ انرژی جنبشی بیشینه را با انرژی پتانسیل بیشینه مساوی می‌کنیم.

$$T + U = \text{constant}$$

$$T_{Max} = U_{Max}$$

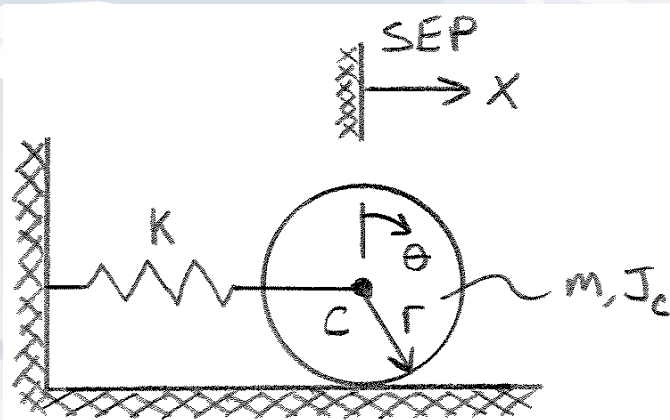
$$x = X \sin(\omega_n t + \delta) \rightarrow x_{Max} = X$$

$$\dot{x} = \omega_n X \cos(\omega_n t + \delta) \rightarrow \dot{x}_{Max} = \omega_n X$$

$$\left. \begin{aligned} T_{Max} &= \frac{1}{2} m \dot{x}_{max}^2 = \frac{1}{2} m (\omega_n X)^2 \\ U_{Max} &= \frac{1}{2} k x_{Max}^2 = \frac{1}{2} k X^2 \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} m (\omega_n X)^2 = \frac{1}{2} k X^2 \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

روش انرژی

- حرکت را از حال تعادل در نظر گرفته و باید در فشردگی اولیه فنر دقت شود.



$$U = \frac{1}{2} kx^2 \quad T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J_P \dot{\theta}^2$$

$$T + U = \frac{1}{2} k\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_P \dot{\theta}^2 = \text{Const.}$$

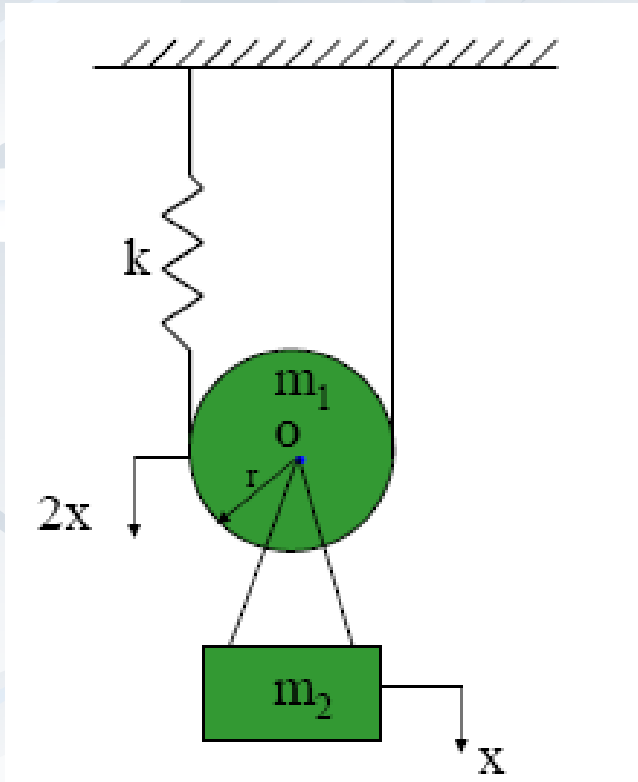
$$x = r\theta$$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{1}{2} k 2x\dot{x} + \frac{1}{2} \frac{J_P}{r^2} 2\ddot{x}\dot{x} = 0$$

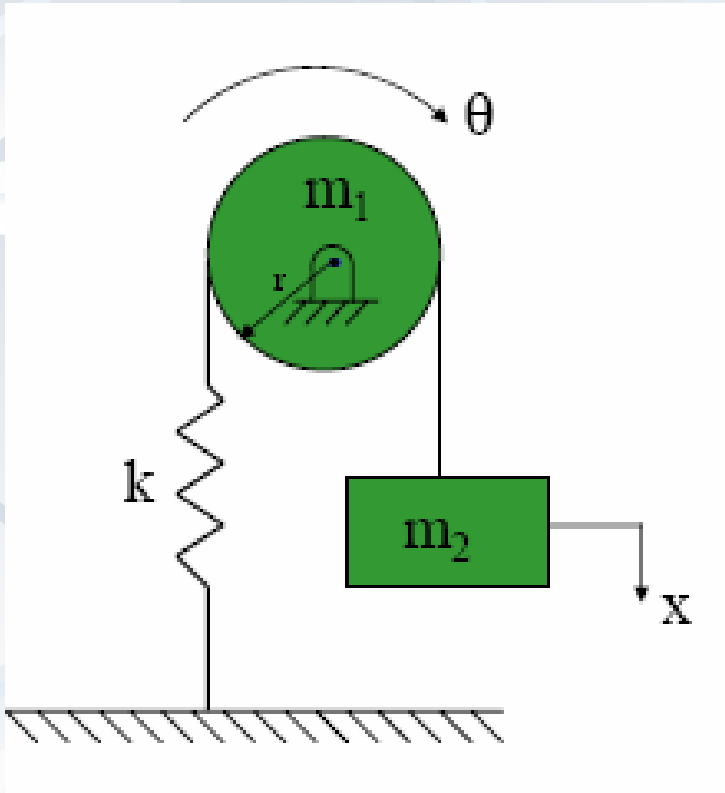
$$\left(kx + \frac{J_P}{r^2} \dot{x} \right) \dot{x} = 0 \Rightarrow \frac{J_P}{r^2} \ddot{x} + kx = 0$$

$$\left(\frac{J_C}{r^2} + m \right) \ddot{x} + kx = 0$$

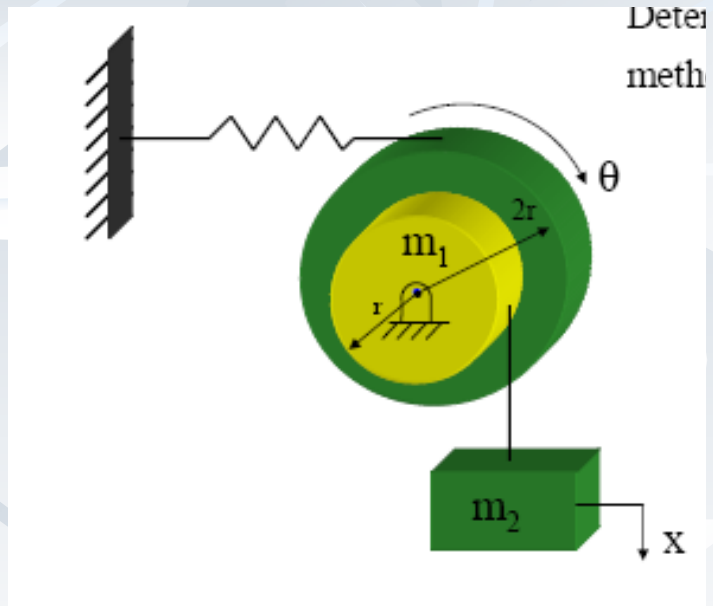
تمرین



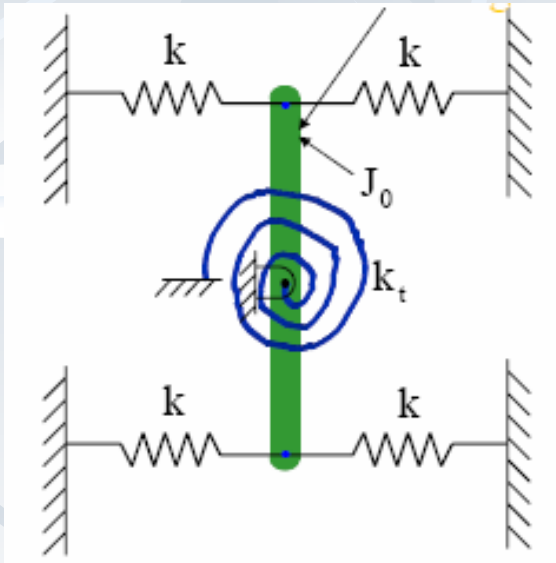
تمرین



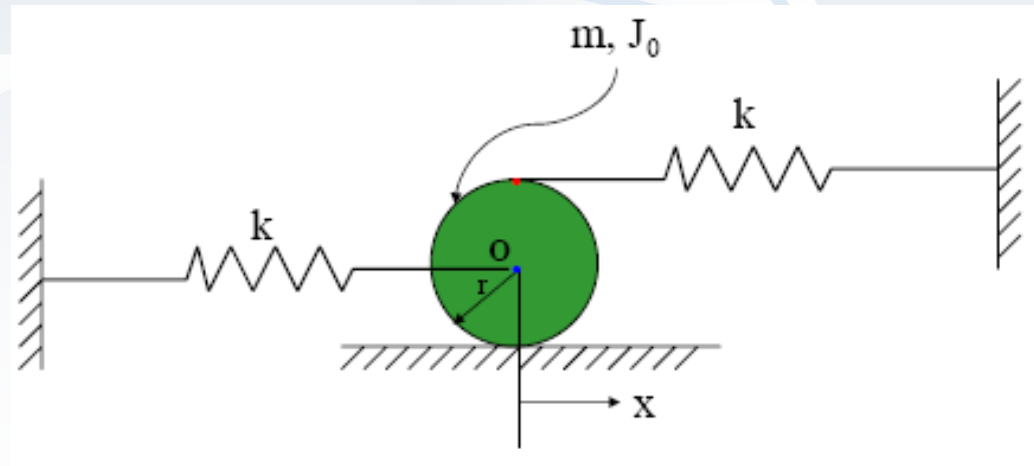
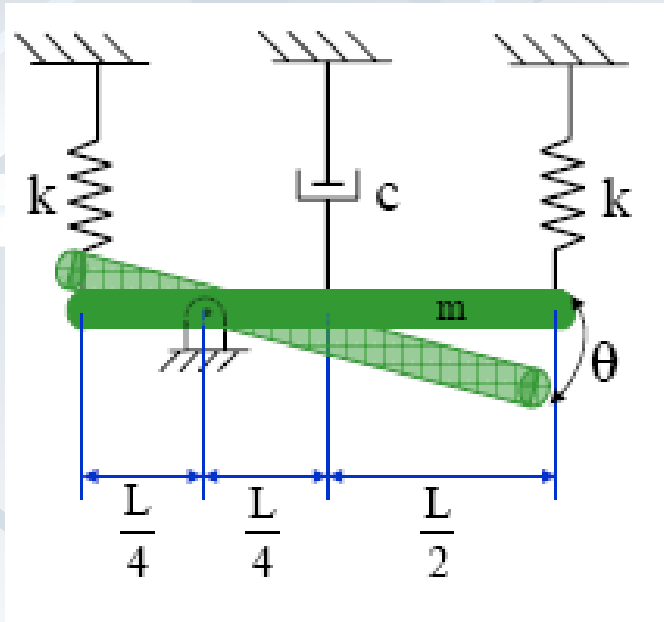
تمرین



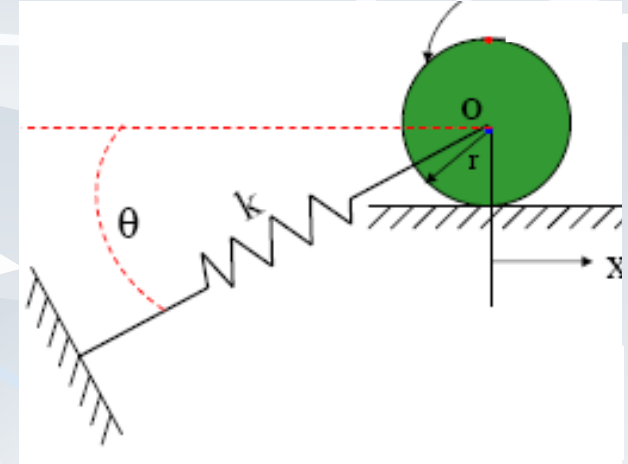
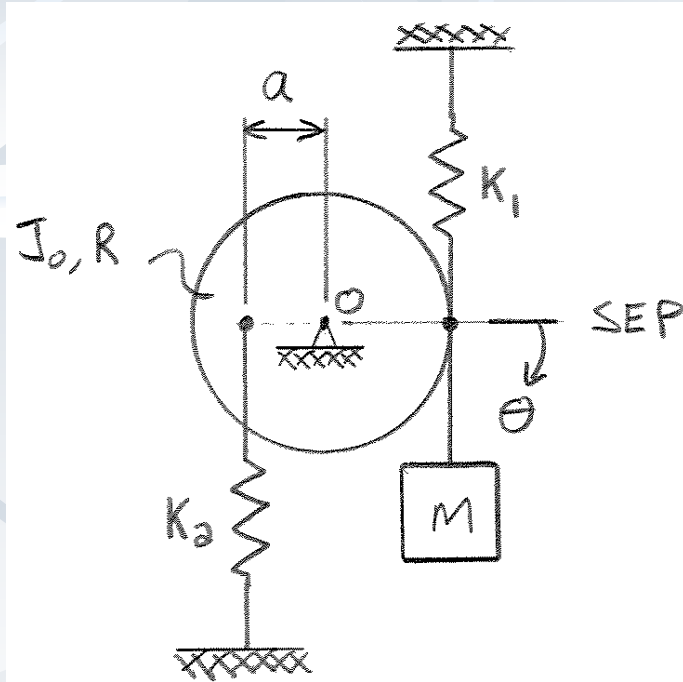
تمرین



تمرین



تمرین



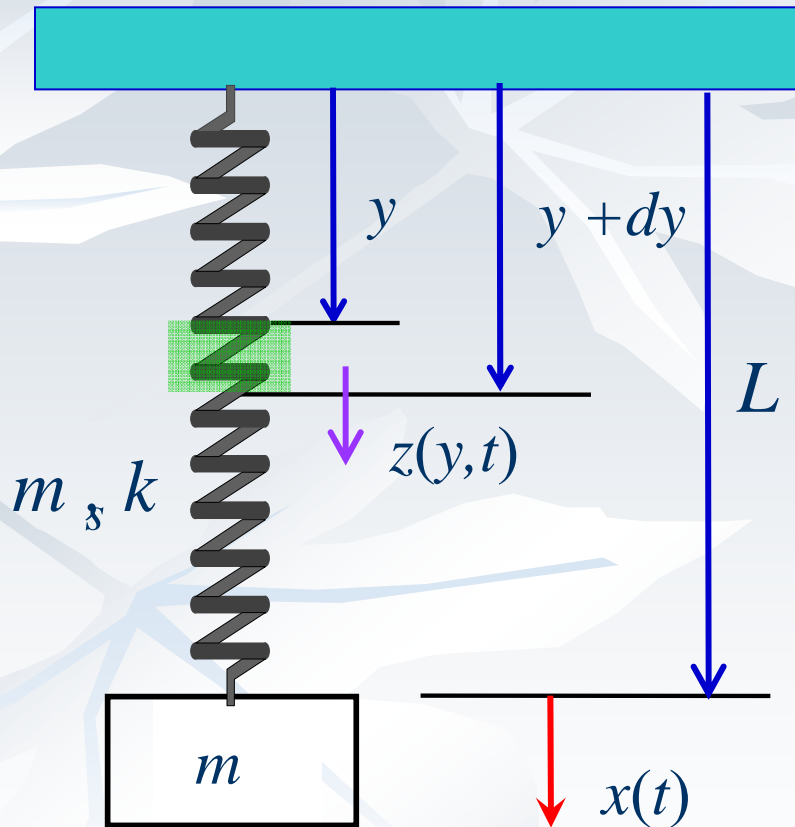
ارتعاشات مکانیکی ۴

سیدیوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

تأثیر جرم فنر



مؤثر نرفه جرم مؤثر آوردن

■ فنر دارای جرم m_s و طول L است.

■ المان dy را روی فنر در نظر می گیریم

$$dm_s = m_s \frac{dy}{L}$$

■ جابجائی x است k L dy

بدست می آید

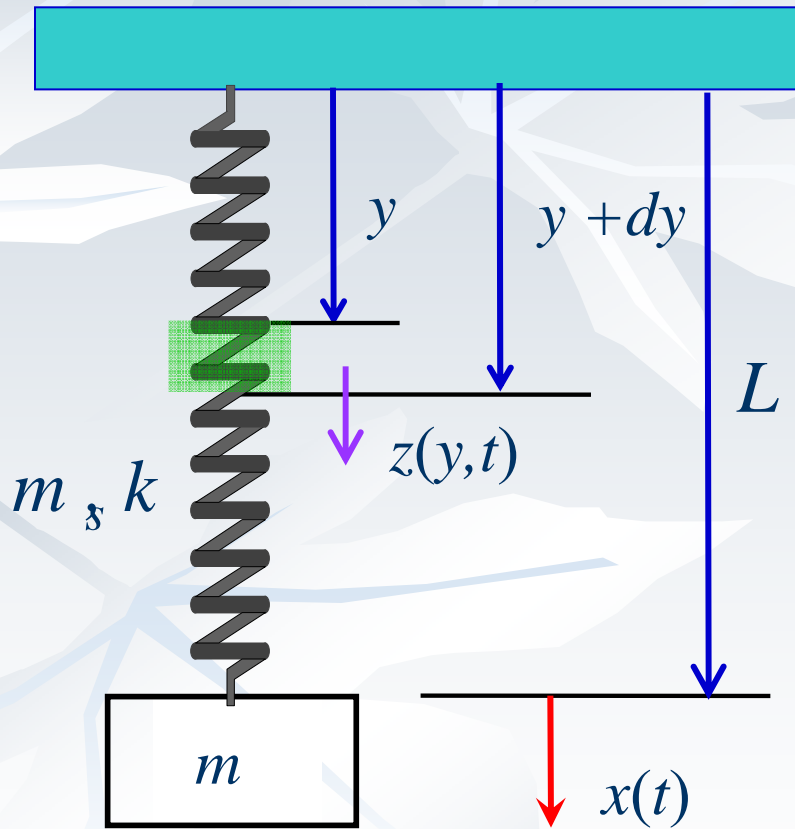
■ فرض می شود جابجائی نقاط روی فنر

برحسب y خطی است.

■ در نتیجه:

$$z = \frac{y}{L} z_{\max} = \frac{y}{L} x(t)$$

تأثير جرم فنر



■ سرعت المان: $\dot{z} = \frac{y}{L} \dot{z}_{\max} = \frac{y}{L} \dot{x}(t)$

■ انرژی جنبشی:

$$T = T_s + T_m$$

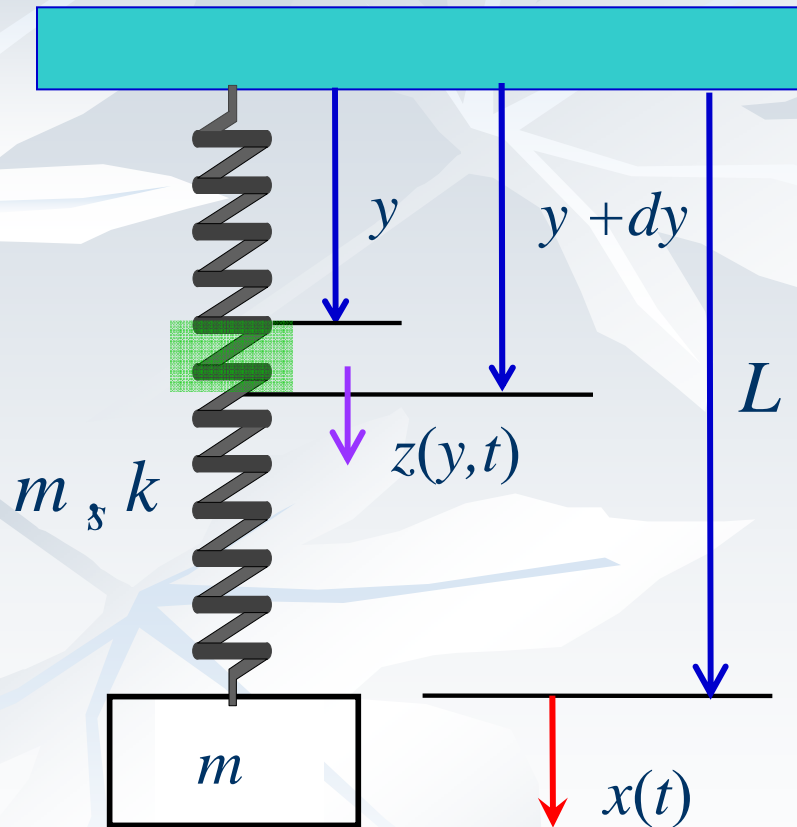
$$T_s = \frac{1}{2} \int_L \dot{z}^2 dm_s = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{y}{L} \dot{x} \right)^2 \frac{m_s}{L} dy$$

$$= \frac{m_s}{2L^3} \left(\int_0^L y^2 dy \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_s}{3} \dot{x}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_s}{3} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{3} + m \right) \dot{x}^2$$

تأثير جرم فنر



$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{3} + m \right) \dot{x}^2$$

انرژی جنبشی: m_{eq}
انرژی

$$U_s = \frac{1}{2} k (x^2)$$

پتانسیل
نرف

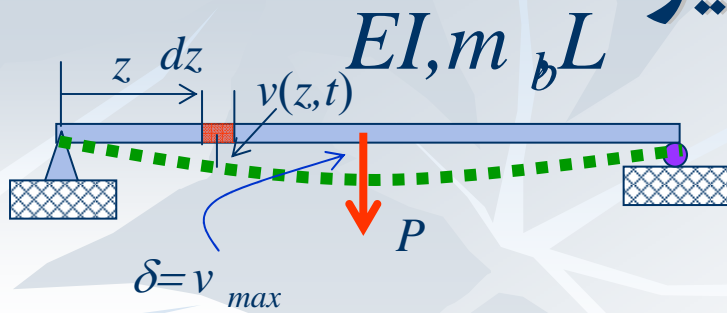
انرژی پتانسیل

$$T_{\max} = U_{\max}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m_s}{3} + m \right) \omega_n^2 X^2 = \frac{1}{2} k (X)^2$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{\frac{m_s}{3} + m}$$

تأثیر جرم تیر



■ المانی از تیر در نظر گرفته می شود،
خیز تیر در اثر نیروی مرکزی:

$$v(z) = \frac{Pz}{48EI} (3L^2 - 4z^2) \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{2}$$

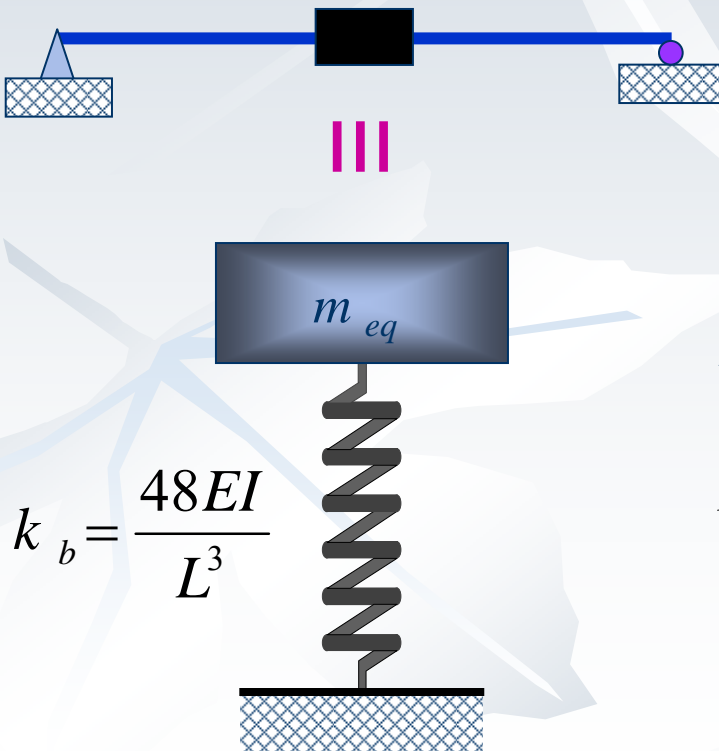
■ بیشترین خیز:

$$\delta = v_{\max} = \frac{PL^3}{48EI} \Rightarrow k_b = \frac{48EI}{L^3}$$

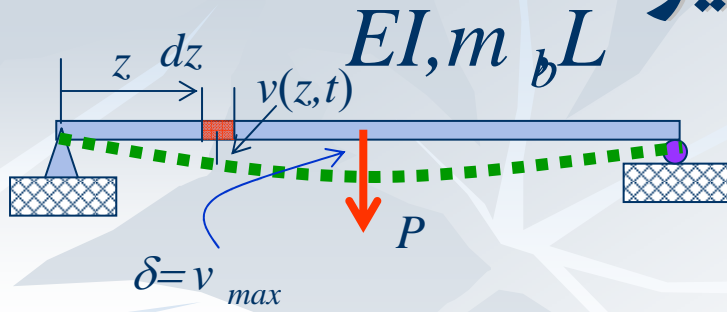
■ در نتیجه خیز تیر بصورت تابعی از بیشترین خیز

$$k_b = \frac{48EI}{L^3}$$

$$v(z) = \frac{v_{\max}}{L^3} (3L^2 z - 4z^3) \quad 0 \leq z \leq \frac{L}{2}$$



تأثير جرم تير



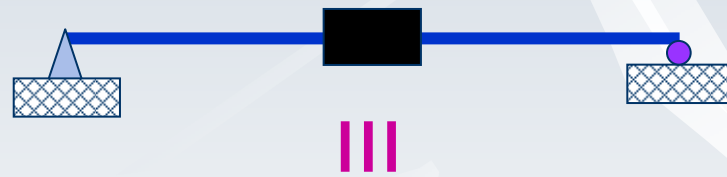
$$v(z) = \frac{v_{\max}}{L^3} (3L^2 z - 4z^3)$$

■ انرژی جنبشی مربوط به المان

$$dT = \frac{1}{2} (dm_b) \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{m_b}{L} dz \right) \frac{\dot{v}_{\max}^2}{L^6} (3L^2 z - 4z^3)^2$$

■ انرژی جنبشی کل



$$m_{eq} = 0.4857 m_b$$

$$k_b = \frac{48EI}{L^3}$$

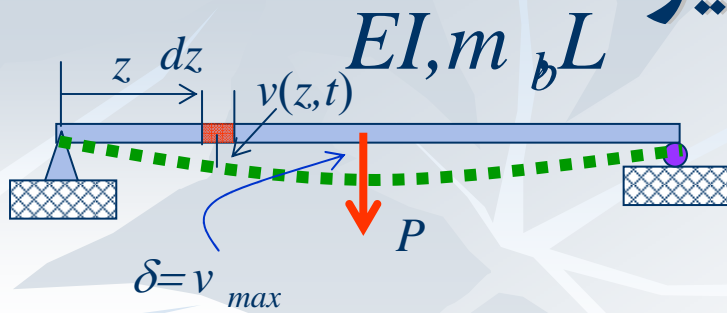


$$T = \int dT = \frac{1}{2} \left(\frac{m_b}{L} \right) \frac{\dot{v}_{\max}^2}{L^6} 2 \int_0^{L/2} (9L^4 z^2 + 16z^6 - 24L^2 z^4) dz$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{m_b}{L} \right) \frac{\dot{v}_{\max}^2}{L^6} 2 \left(3L^4 \frac{L^3}{8} + \frac{16}{7} \frac{L^7}{128} - \frac{24}{5} L^2 \frac{L^5}{32} \right)$$

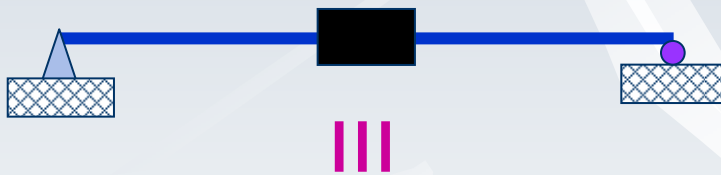
$$= \frac{1}{2} (0.4857 m_b) \dot{v}_{\max}^2$$

تأثير جرم تير



■ در نتیجه:

$$\omega_n^2 = \frac{k_b}{m_{eq}} = \frac{\frac{48EI}{L^3}}{0.4857m_b} = \frac{98.82EI}{m_b L^3}$$



$$m_{eq} = 0.4857m_b$$

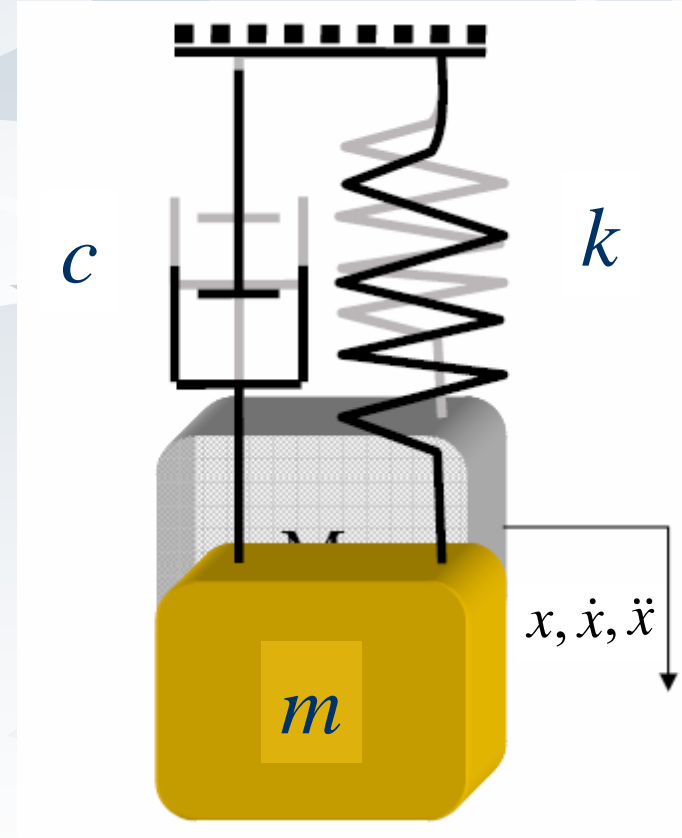
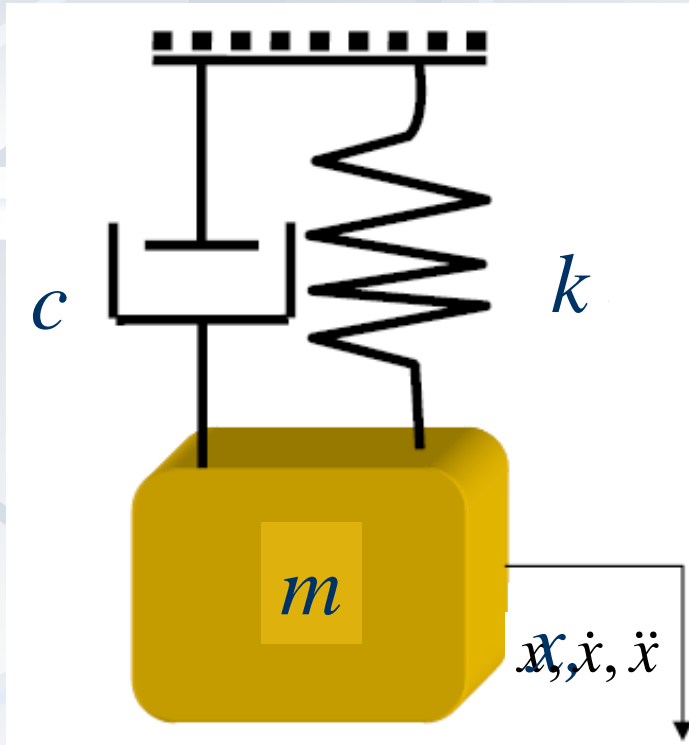
فرکانس طبیعی اول تير

$$k_b = \frac{48EI}{L^3}$$

$$\omega_1^2 = (\beta L)^4 \frac{EI}{m_b L^3} = {}^4\pi \frac{EI}{m_b L^3} = 97.41 \frac{EI}{m_b L^3}$$

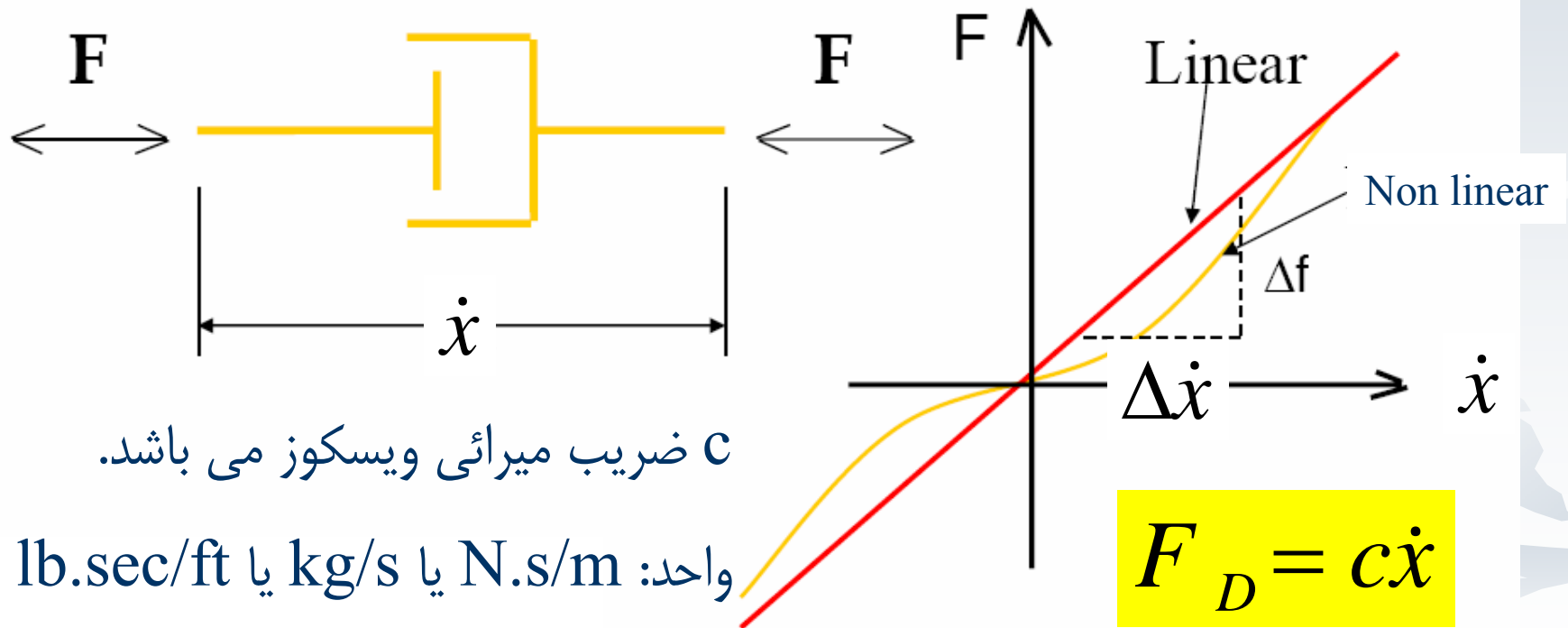
ارتعاشات آزاد میرا

ارتعاشات آزاد میرا



ارتعاشات آزاد میرا

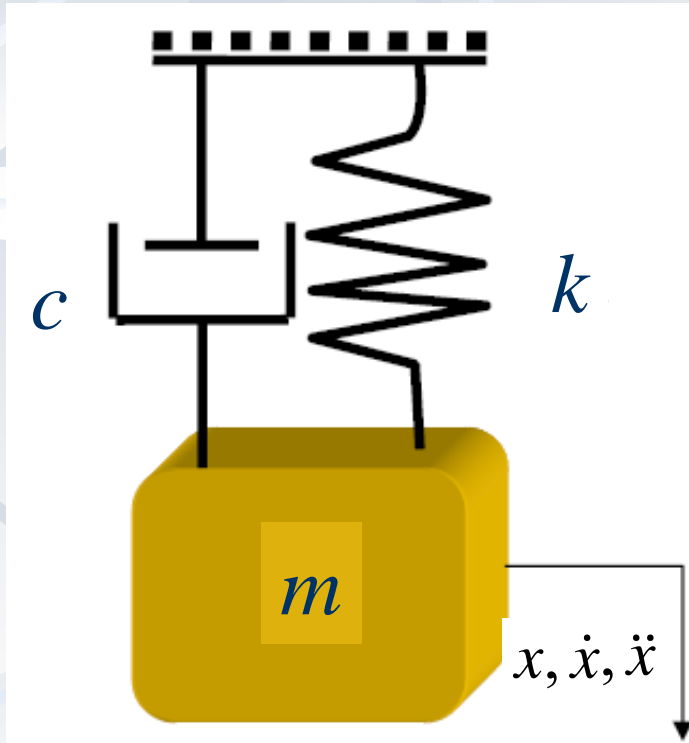
■ نیرو و سرعت متناسب و خطی هستند



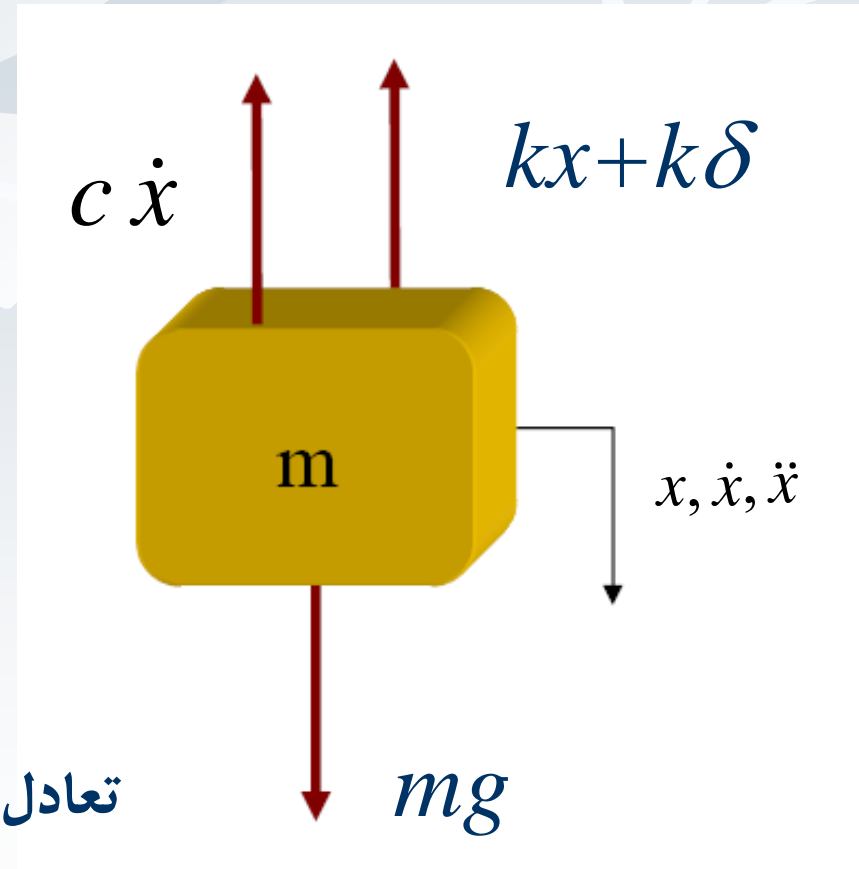
c ضریب میرائی ویسکوز می باشد.

واحد: N.s/m یا kg/s یا lb.sec/ft

دیاگرام آزاد جسم

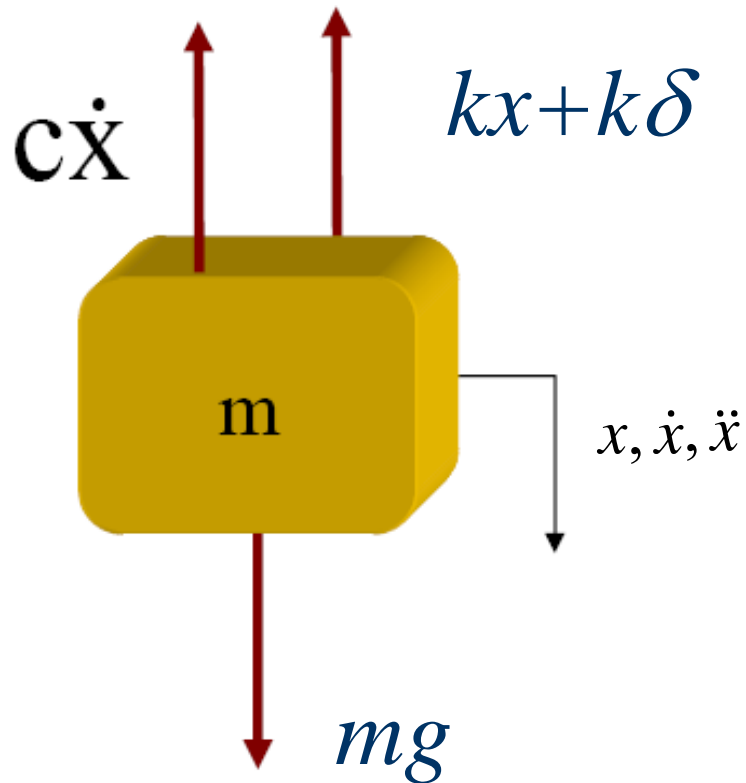


تبادل دینامیکی



معادله حرکت

■ قانون دوم نیوتن:



$$\downarrow \sum F = ma$$

$$-kx - k\delta_{st} - c\dot{x} + mg = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

■ معادله حرکت:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

پاسخ سیستم

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

■ معادله حرکت:

■ این معادله:

بفرض این مرتبه ۲ خطی

■ دارای حلی به شکلهای زیر فرض می شود:

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

پاسخ

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x(t) = Ae^{\lambda t}, \quad \dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t},$$

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)Ae^{\lambda t} = 0, \Rightarrow m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

■ معادله مشخصه:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}\right)t} + A_2 e^{\left(\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}\right)t}$$

پاسخ

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left(A_1 e^{\left(\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{\sqrt{c^2-4mk}}{2m}\right)t} \right)$$

■ بسته به مقدار زیر رادیکال، رفتار تابع تفاوت می کند.

■ الف) حالت بحرانی:

$$c^2 - 4mk = 0 \Rightarrow c^2 = 4mk \Rightarrow c = 2\sqrt{mk} = c_c$$

■ این میرائی میرائی بحرانی نام دارد و با c_c نشان می دهند.

■ پاسخ در ردین حایت چگونگی جواب:

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\frac{c}{2m}t}$$

میرائی بحرانی

$$\frac{c}{2m} = \frac{2\sqrt{km}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n \quad \blacksquare \text{ با شرایط مرزی محاسبه می شود}$$

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\omega_n t} \quad x(0) = x_0 \quad A_1$$

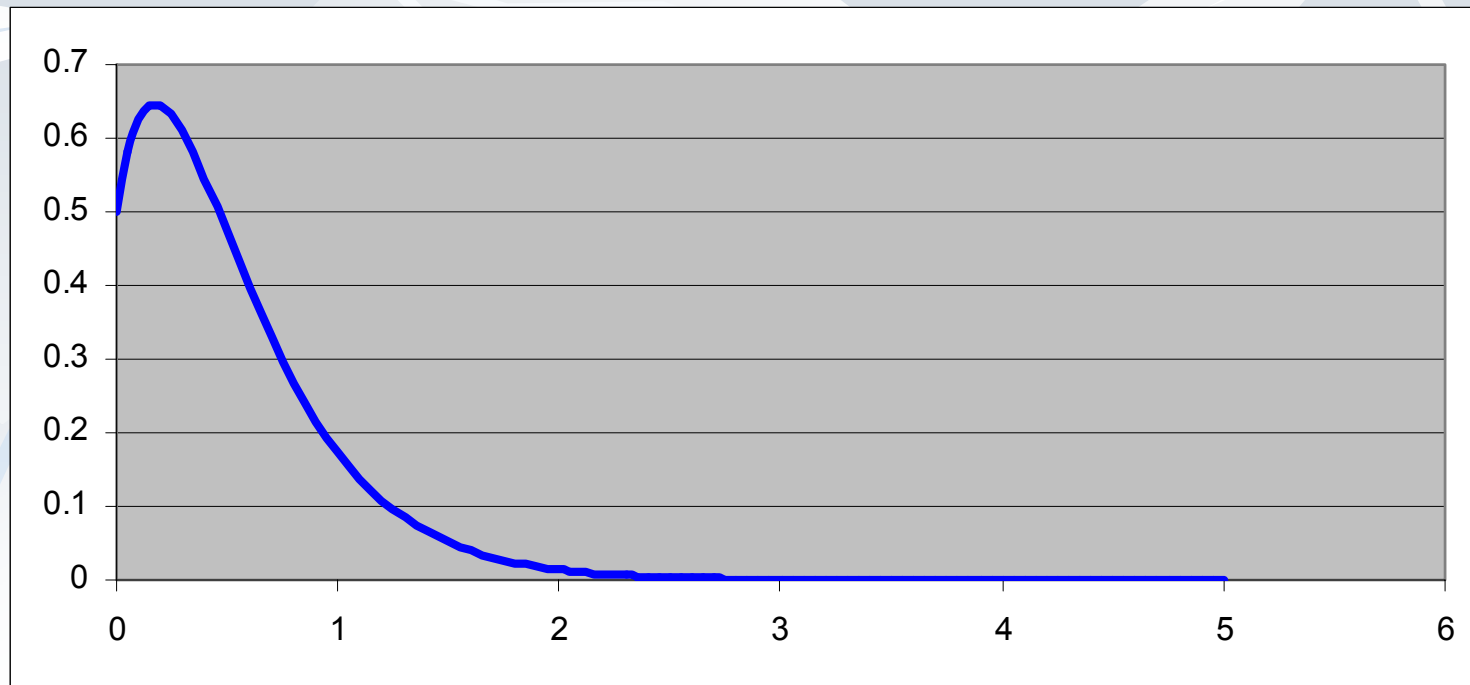
$$\dot{x}(t) = (A_2) e^{-\omega_n t} - \omega_n (A_1 + A_2 t) e^{-\omega_n t}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = (A_2) - \omega_n (x_0) \quad A_2 = v_0 + \omega_n x_0$$

$$x(t) = (x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t) e^{-\omega_n t}$$

میرائی بحرانی

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \omega_n x_0)t] \bar{e}^{\omega_n t}$$



$$x_0 = 0.5, \quad v_0 = 2, \quad m = 1 \quad k = 10 \quad c = c_c = 2\sqrt{10}$$

Underdamped (ب) زیر میرائی

■ (ب) زیر میرائی: اگر زیر رادیکال کمتر از صفر باشد:

$$c^2 - 4mk < 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm i\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left(A_1 e^{i\left(\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}\right)t} + A_2 e^{-i\left(\frac{\sqrt{4mk-c^2}}{2m}\right)t} \right)$$

میزان میرائی بحرانی: ζ

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \sqrt{\frac{m}{m}} = \frac{c}{2m} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{c}{2m} \frac{1}{\omega_n}$$

پاسخ

$$\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} = \frac{\sqrt{c_c^2 - c^2}}{2m} = \frac{c_c \sqrt{1 - \xi^2}}{2m}$$

$$\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \omega_d$$

فرکانس میرا ω_d

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left(A_1 e^{i \omega_d t} + A_2 e^{-i \omega_d t} \right)$$

در نتیجه: ■

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left(B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t) \right)$$

■ که با شرایط مرزی B_1 و B_2 بدست می آید:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -\xi \omega_n e^{-\xi \omega_n t} \left(B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t) \right) \\ & + \omega_d e^{-\xi \omega_n t} \left(-B_1 \sin(\omega_d t) + B_2 \cos(\omega_d t) \right) \end{aligned}$$

پاسخ

■ اعمال شرایط مرزی:

$$x(0) = e^{-\xi \omega_n t} (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)) = x_0 \Rightarrow B_1 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = -\xi \omega_n x_0 + \omega_d B_2 = v_0 \Rightarrow B_2 = \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d}$$

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) \right]$$

پاسخ

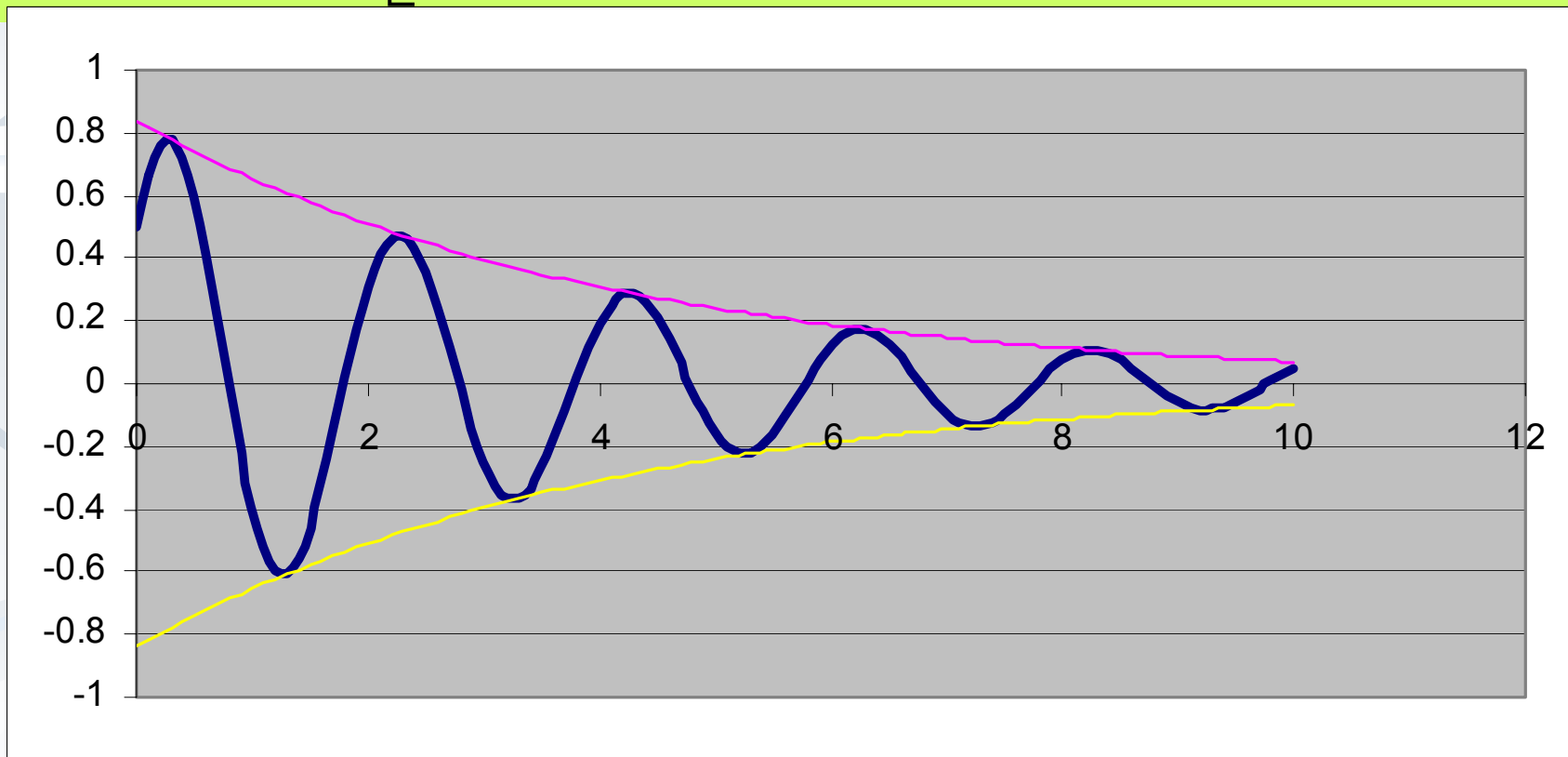
■ اشکال مختلف پاسخ:

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) \right]$$

$$x(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{x_0 \omega_d}$$

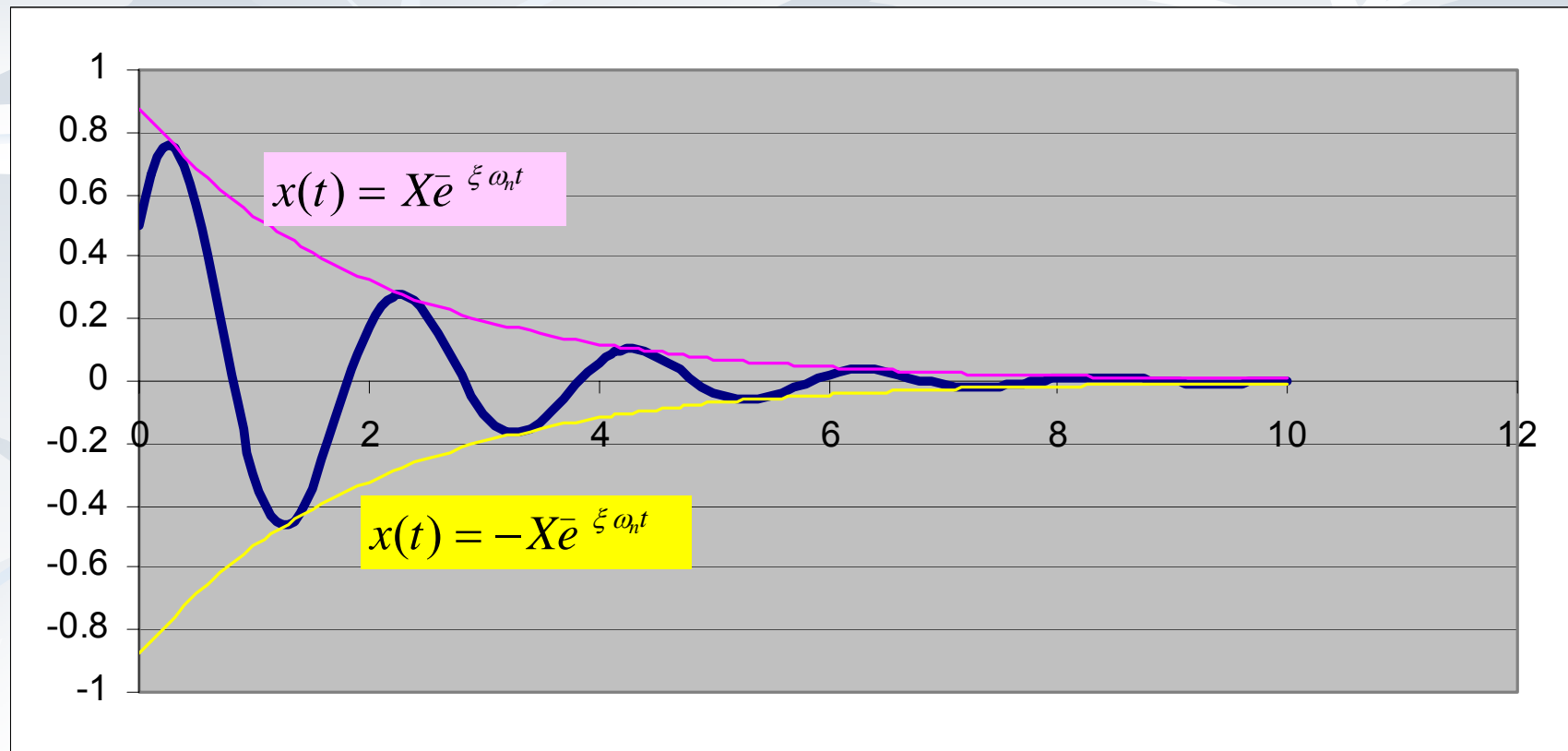
$$x(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi) \quad X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2} \quad \psi = \tan^{-1} \frac{x_0 \omega_d}{v_0 + \xi \omega_n x_0}$$

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) \right]$$



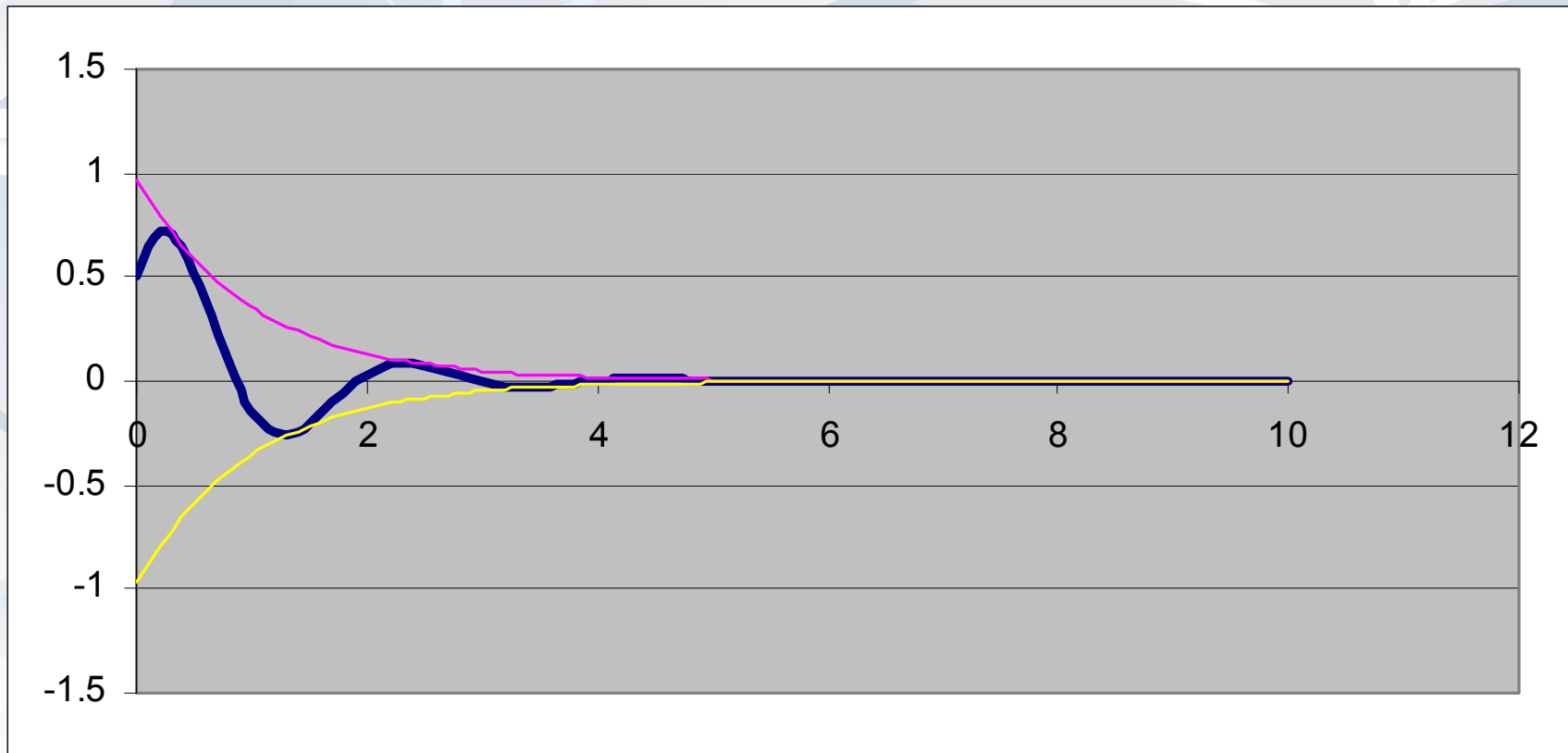
$$x_0 = 0.5, \quad v_0 = 2, \quad m = 1 \quad k = 10 \quad c = 0.5, \quad \xi = 0.0791$$

$$x(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{x_0 \omega_d}$$



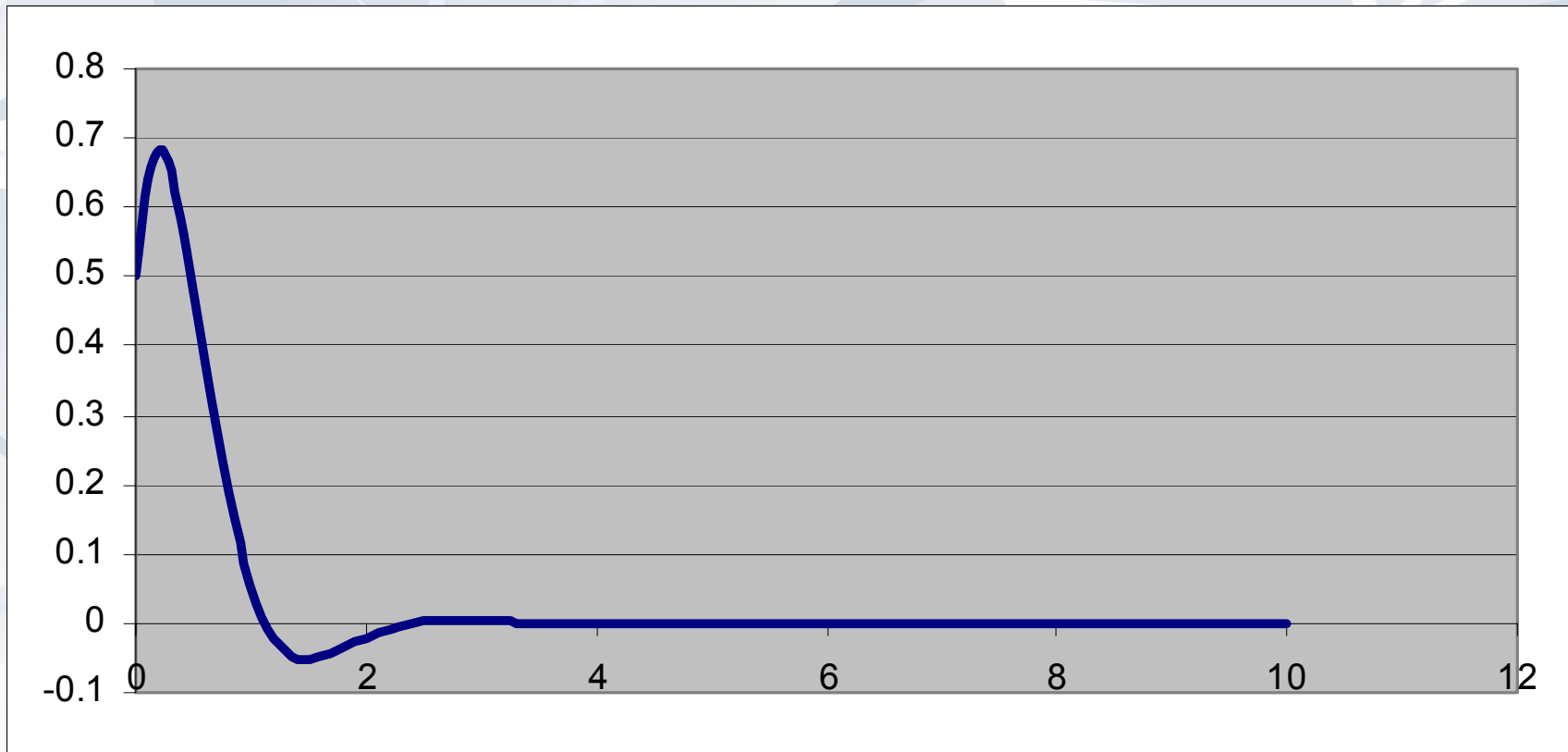
$$x_0 = 0.5, \quad v_0 = 2, \quad m = 1 \quad k = 10 \quad c = 1, \quad \xi = 0.158$$

$$x(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi) \quad X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2} \quad \psi = \tan^{-1} \frac{x_0 \omega_d}{v_0 + \xi \omega_n x_0}$$



$$x_0 = 0.5, \quad v_0 = 2, \quad m = 1 \quad k = 10 \quad c = 2, \quad \xi = 0.316$$

$$x(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi) \quad X = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_d} \right)^2} \quad \psi = \tan^{-1} \frac{x_0 \omega_d}{v_0 + \xi \omega_n x_0}$$



$$x_0 = 0.5, \quad v_0 = 2, \quad m = 1 \quad k = 10 \quad c = 4, \quad \xi = 0.632$$

Overdamped (ب) فوق میرائی

■ (ب) فوق میرائی: اگر زیر رادیکال بیشتر از صفر باشد:

$$c^2 - 4mk > 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left(A_1 e^{\left(\frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}\right)t} \right)$$

ی بزرگتر از

پاسخ

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(A_1 e^{\left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} + A_2 e^{-\left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} \right)$$

■ که با شرایط مرزی A_1 و A_2 بدست می آید:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(A_1 e^{\left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} + A_2 e^{-\left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} \right)$$

$$\dot{x}(t) = -\xi \omega_n e^{-\xi\omega_n t} \left(A_1 e^{\left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} + A_2 e^{-\left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} \right) + \left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\xi \omega_n t} \left(A_1 e^{\left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} - A_2 e^{-\left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}\right)t} \right)$$

پاسخ

■ اعمال B.C.

$$x(0) = A_1 + A_2 \quad x_0$$

$$\dot{x}(0) = -\xi \omega_n x_0 + \left(\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \right) (A_1 - A_2) = v_0$$

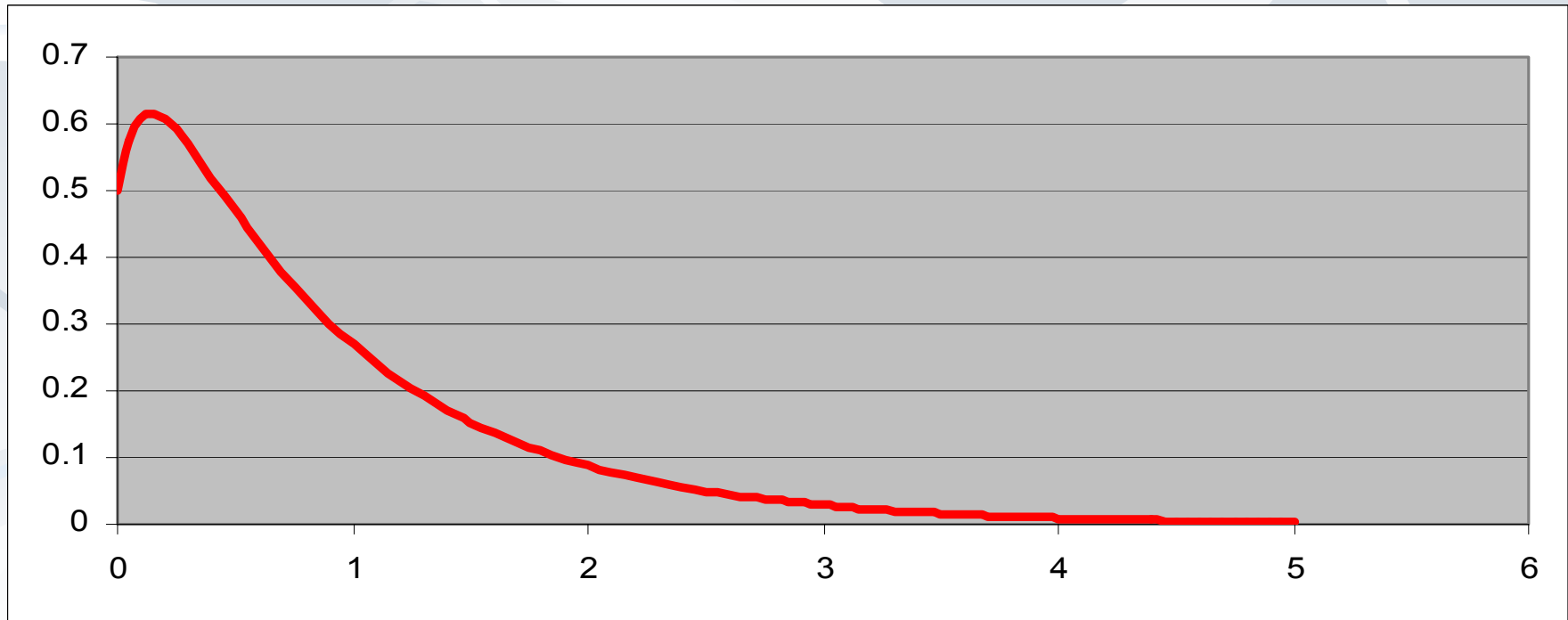
$$A_1 - A_2 = \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \right) = \frac{\omega_n x_0 \left(\sqrt{\xi^2 - 1} + \xi \right) + v_0}{2 \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

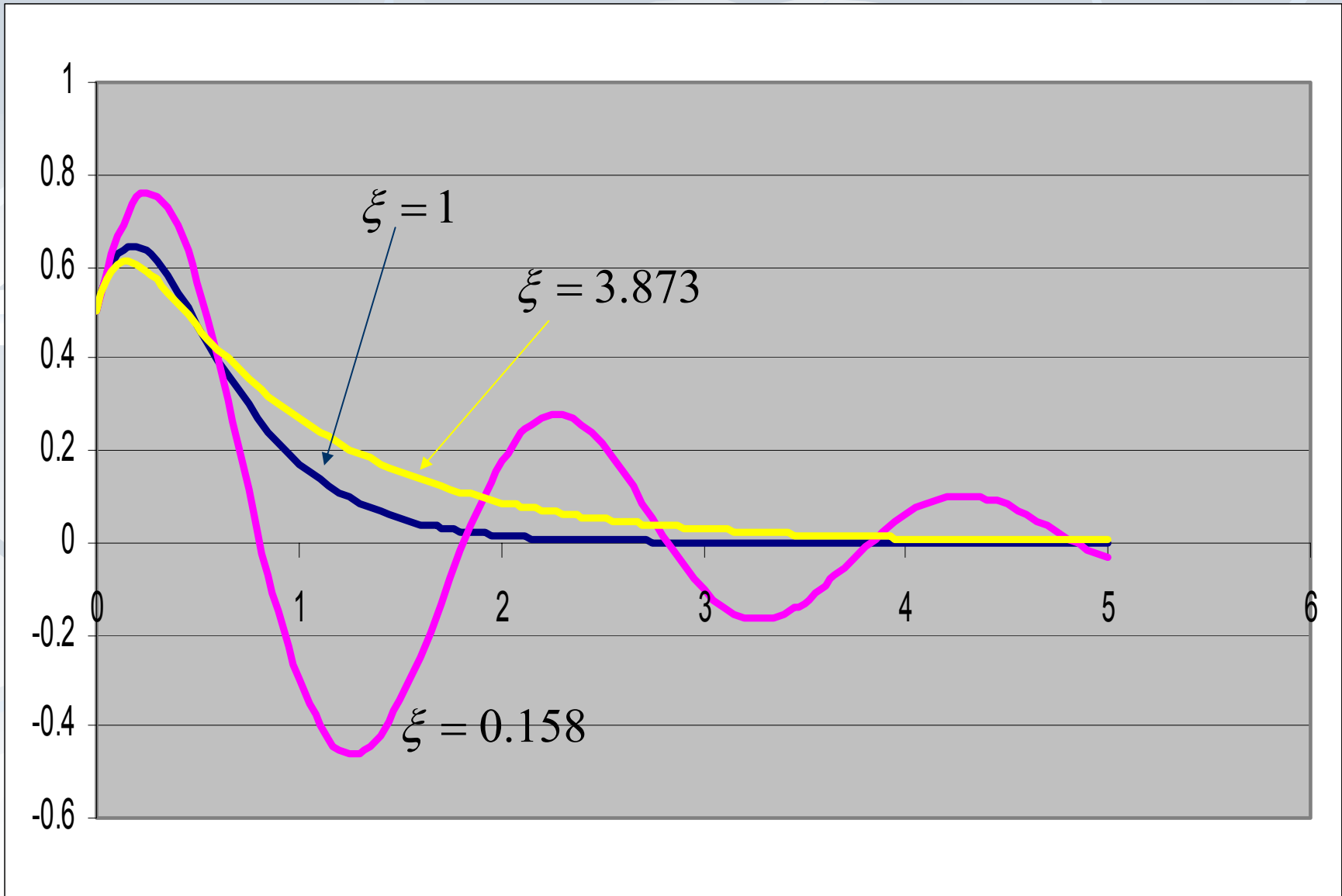
$$A_2 = \frac{1}{2} \left(x_0 - \frac{v_0 + \xi \omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}} \right) = \frac{\omega_n x_0 \left(\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi \right) - v_0}{2 \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

پاسخ

$$x(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}} \left\{ \left[\omega_n x_0 (\sqrt{\xi^2-1} + \xi) + v_0 \right] e^{(\omega_n\sqrt{\xi^2-1})t} + \left[\omega_n x_0 (\sqrt{\xi^2-1} - \xi) - v_0 \right] e^{-(\omega_n\sqrt{\xi^2-1})t} \right\}$$



$$x_0 = 0.5, \quad v_0 = 2, \quad m = 1 \quad k = 10 \quad c = 10, \quad \xi = 3.873$$

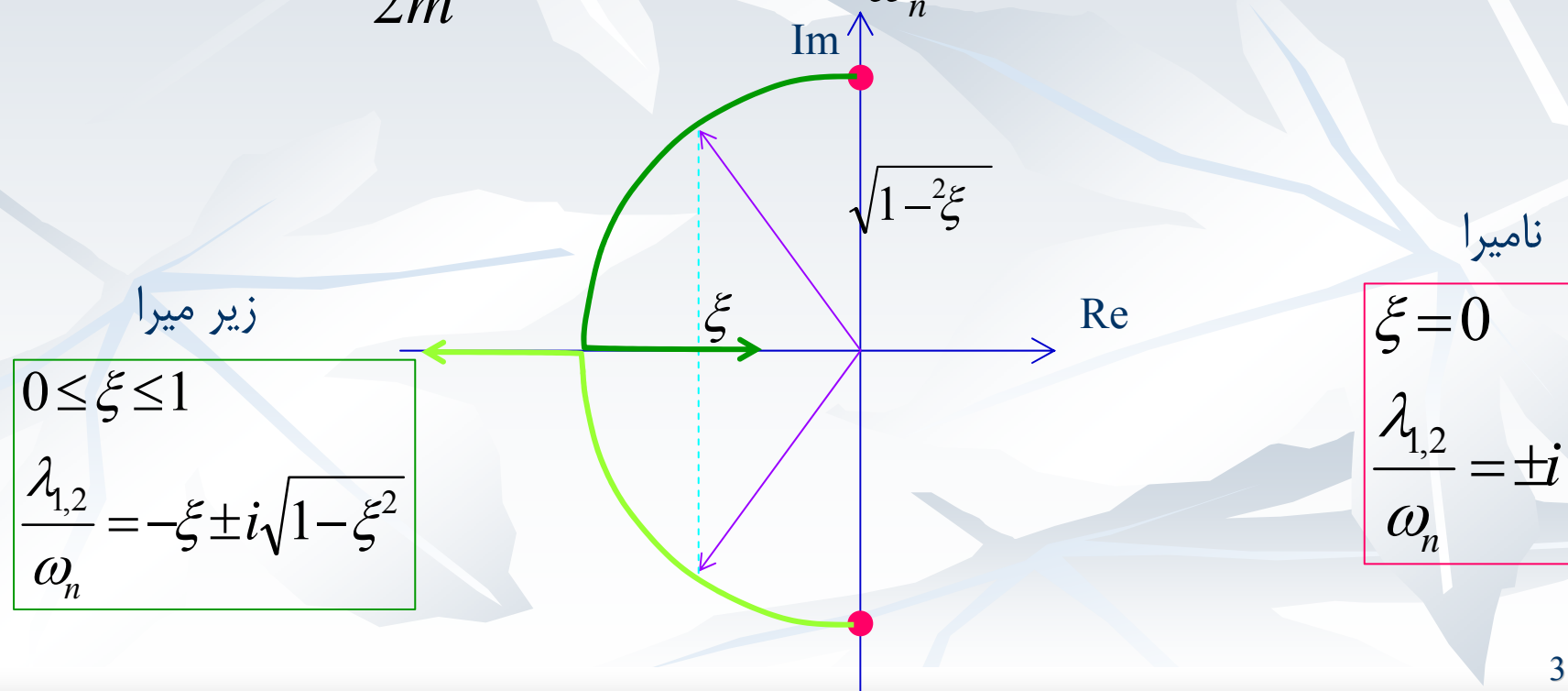


مکان هندسی ریشه ها Root locus

■ مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه در کنترل دارای کاربرد می باشد:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

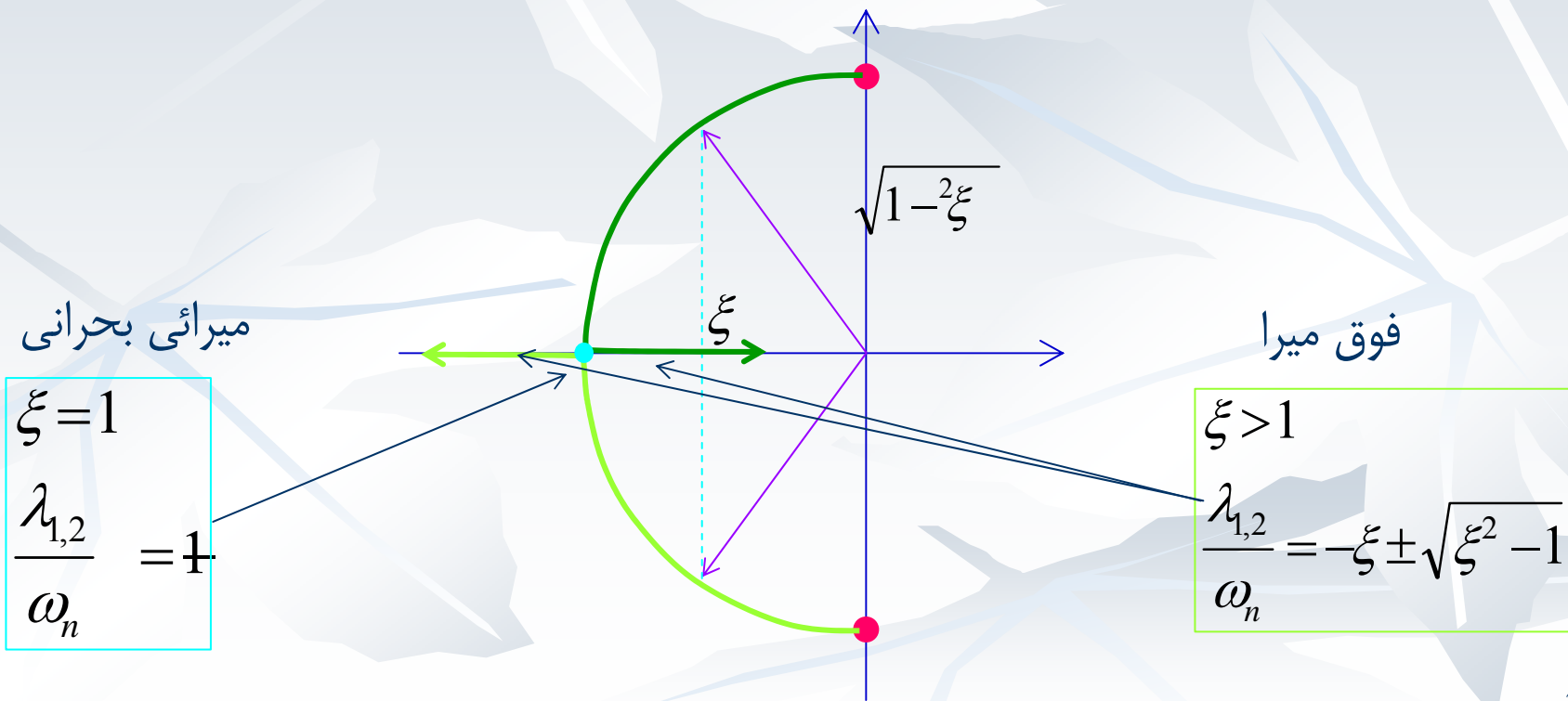
$$\frac{\lambda_{1,2}}{\omega_n} = \left[-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right]$$



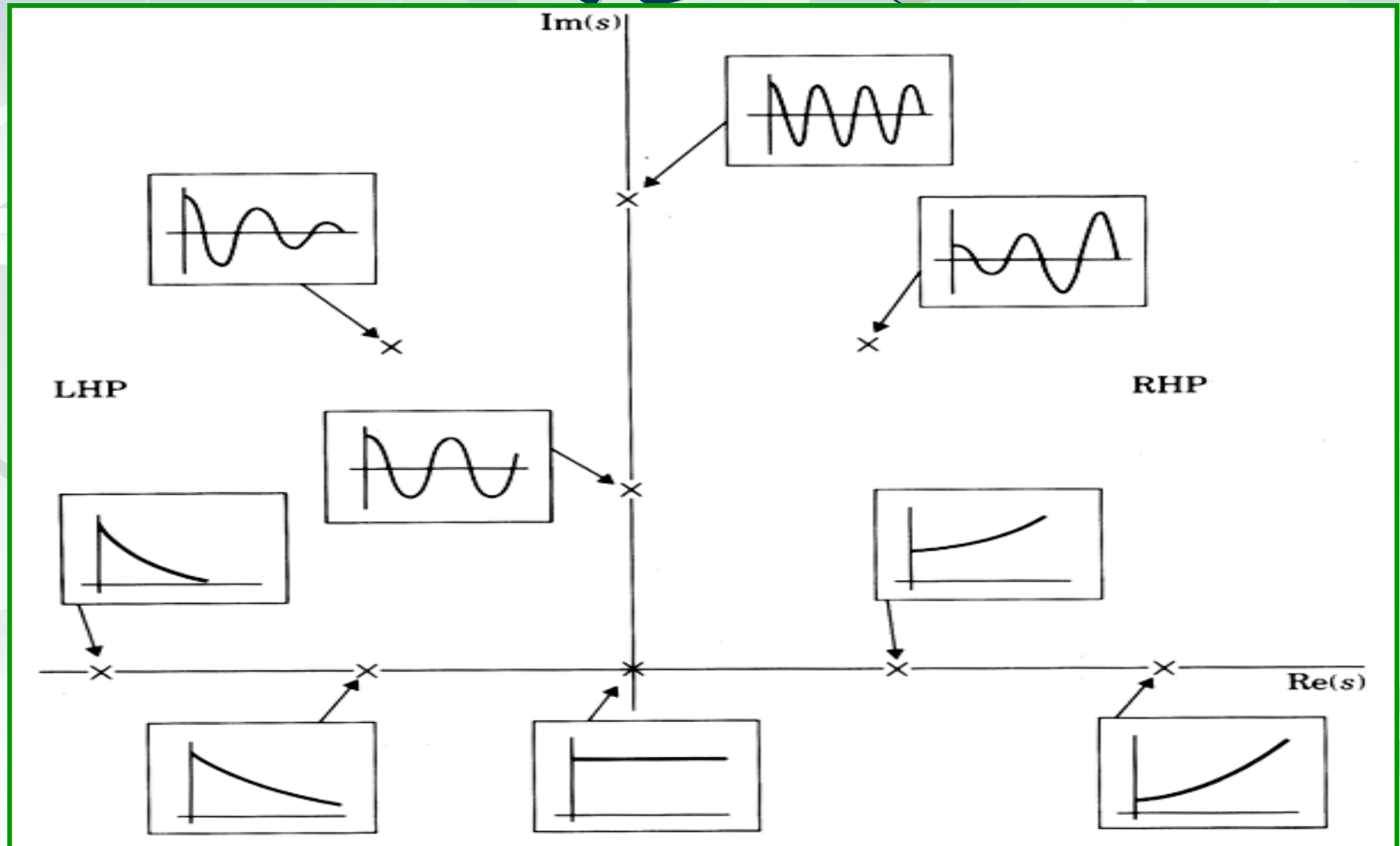
مکان هندسی ریشه ها Root locus

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\omega_n} = \left[-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right]$$



مکان هندسی ریشه ها

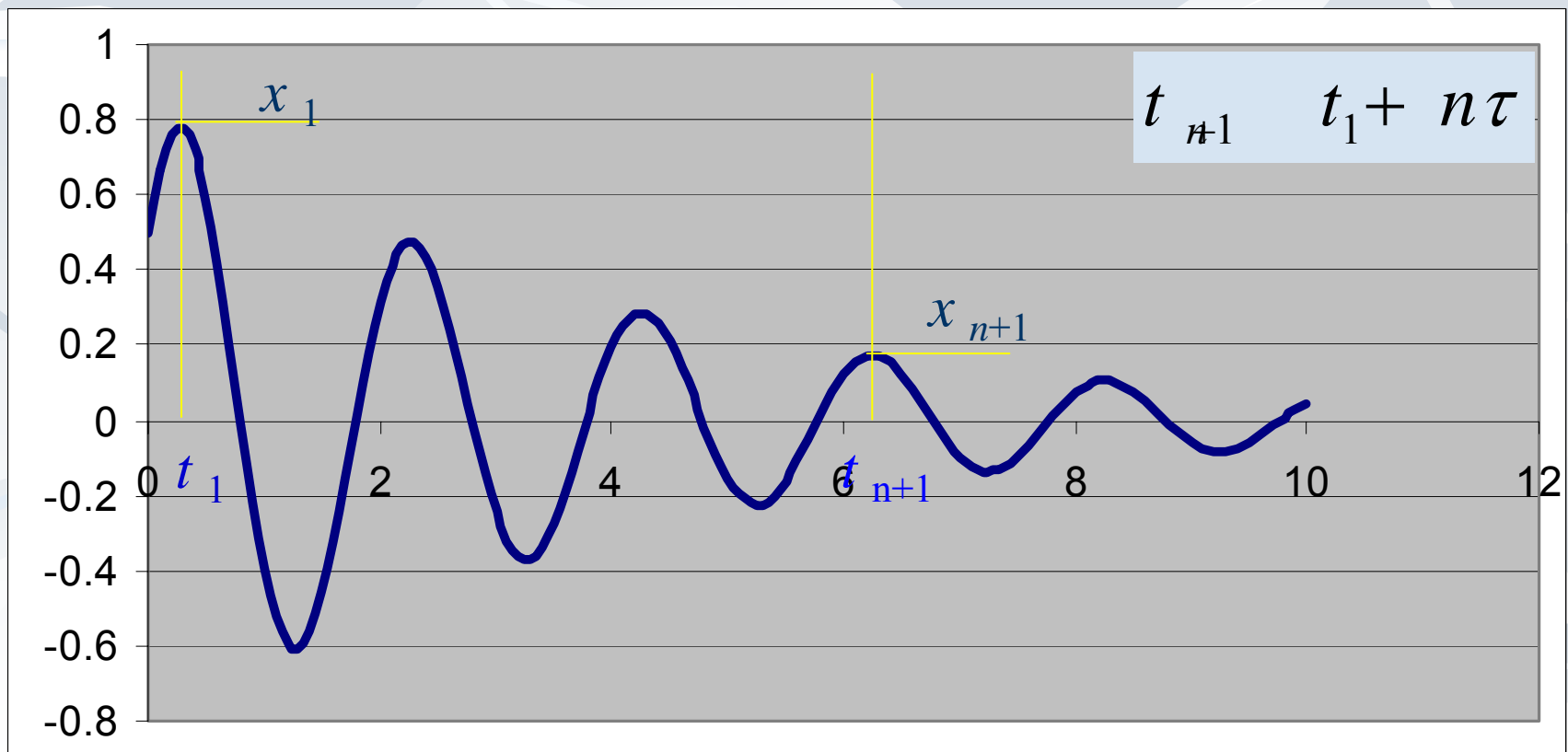


بعضی از مقادیر نسبت میرائی

	ξ
Automobile shock absorbers	0.1-0.5
Rubber	0.04
Riveted steel structures	0.03
Concrete	0.02
Wood	0.003
Cold rolled steel	0.0006
Cold rolled aluminum	0.0002
Phosphor bronze	0.00007

کاهش لگاریتمی

■ روشی تجربی برای اندازه گیری نسبت میرائی و ضریب میرائی:



کاهش لگاریتمی

$$x_1 = X e^{-\xi \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi) \quad \blacksquare \text{ دامنه ارتعاش در زمان } t_1$$

$$\blacksquare \text{ دامنه ارتعاش در زمان } t_{n+1}$$

$$x_{n+1} = X e^{-\xi \omega_n t_{n+1}} \cos(\omega_d t_{n+1} - \phi)$$

$$t_{n+1} = t_1 + n\tau = t_1 + n \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$x_{n+1} = X e^{-\xi \omega_n (t_1 + n2\pi/\omega_d)} \cos\left(\omega_d \left(t_1 + n \frac{2\pi}{\omega_d}\right) - \phi\right)$$

$$= X e^{-\xi \omega_n t_1} e^{-\xi \omega_n (n2\pi/\omega_d)} \cos(\omega_d t_1 + 2n\pi - \phi)$$

$$= X e^{-\xi \omega_n t_1} e^{-\left(2n\pi \xi / \sqrt{1-\xi^2}\right)} \cos(\omega_d t_1 + 2n\pi - \phi)$$

کاهش لگاریتمی

■ نسبت دو دامنه:

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{Xe^{-\xi \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 - \phi)}{Xe^{-\xi \omega_n t_1} e^{-\left(2n\pi \xi / \sqrt{1-\xi^2}\right)} \cos(\omega_d t_1 + 2n\pi - \phi)} = e^{\left(2n\pi \xi / \sqrt{1-\xi^2}\right)}$$

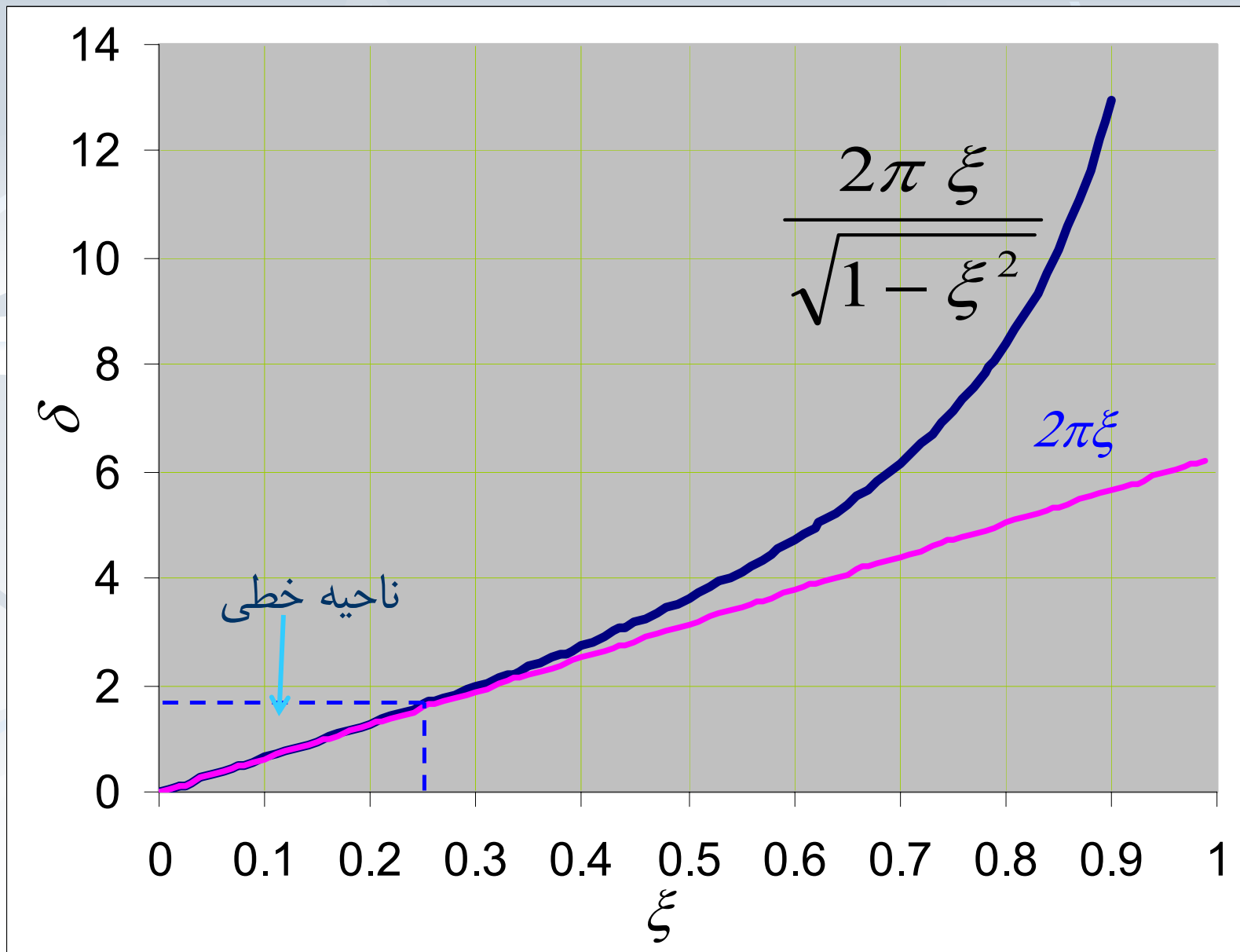
■ با لگاریتم گرفتن از دو طرف معادله:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right) = \frac{2n\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}\right) = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

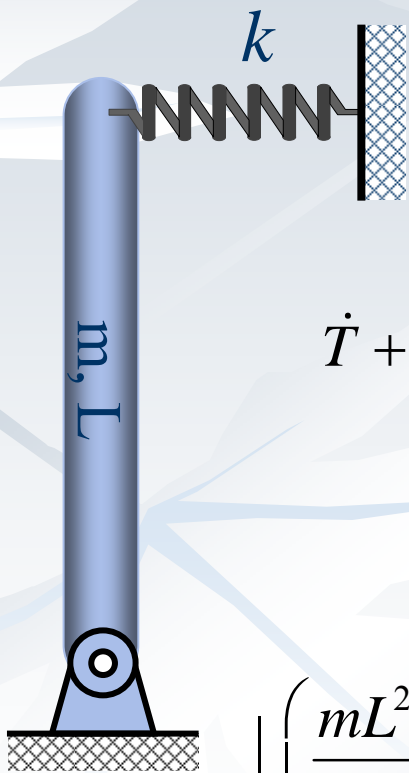
■ با داشتن نسبت دامنه ها از این معادله می توان ξ را محاسبه کرد.

کاهش لگاریتمی



پایداری Stability

■ سیستم مقابل را در نظر بگیرید:



$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{mL^2}{3} \right) \dot{\theta}^2 \quad U = \frac{1}{2} k(L\theta)^2 + mg \frac{L}{2} (\cos \theta - 1)$$

$$\dot{T} + \dot{U} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{mL^2}{3} \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k(L\theta)^2 + mg \frac{L}{2} (\cos \theta - 1) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{mL^2}{3} \right) 2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{1}{2} k(L^2 2\theta\dot{\theta}) - mg \frac{L}{2} \dot{\theta}(\sin \theta) = 0$$

$$\left(\frac{mL^2}{3} \right) \ddot{\theta} + k(L^2 \theta) - mg \frac{L}{2} \sin \theta = \left(\frac{mL^2}{3} \right) \ddot{\theta} + (kL^2 - mg \frac{L}{2}) \theta = 0$$

پایداری Stability



$$\underbrace{\left(\frac{mL^2}{3} \right)}_{m_{eq}} \ddot{\theta} + \underbrace{\left(kL^2 - mg \frac{L}{2} \right)}_{k_{eq}} \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{kL^2 - mgL/2}{\frac{mL^2}{3}}} = \sqrt{\frac{3(kL - mg/2)}{mL}}$$

■ در صورتی ارتعاش وجود دارد که ω_n عدد حقیقی باشد

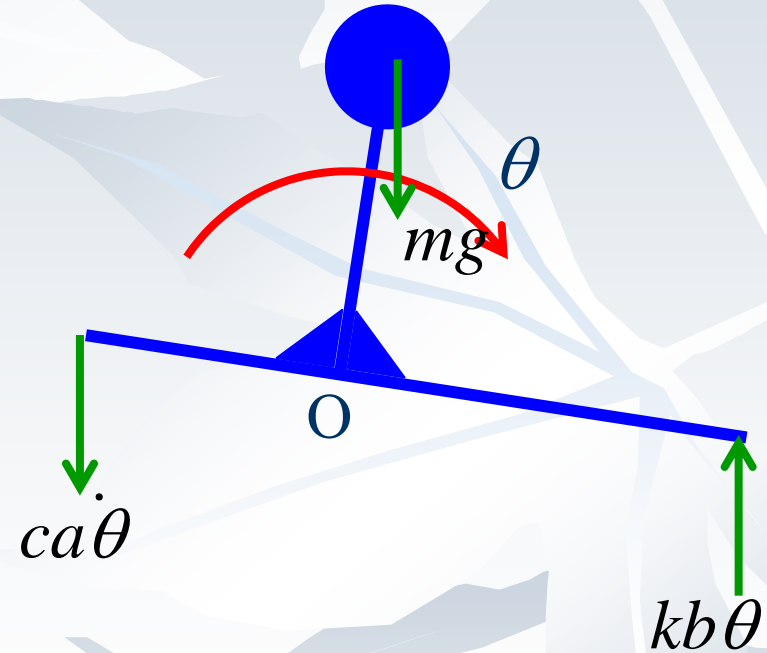
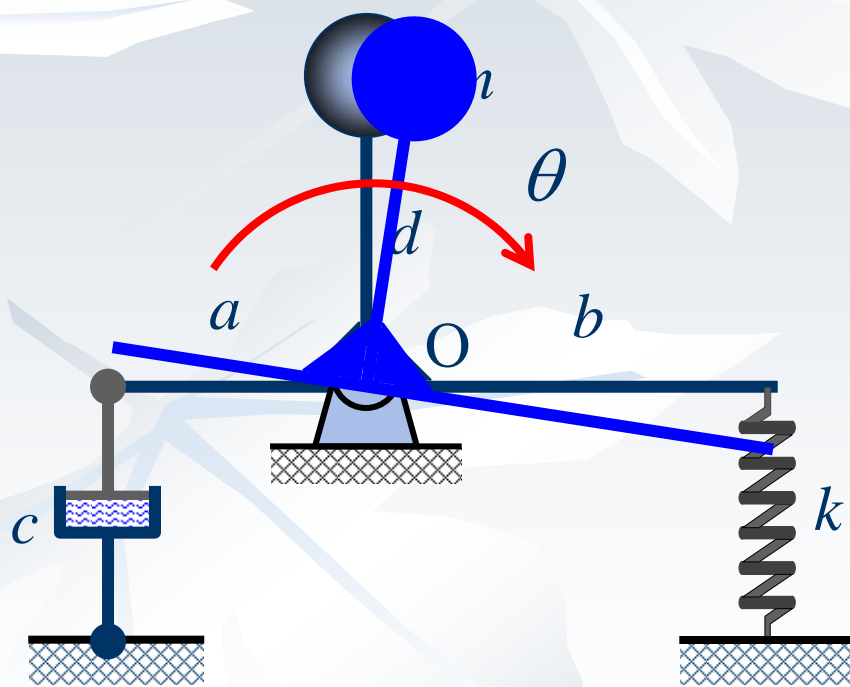
$$(kL - mg) = k_{eq} > 0$$

■ برای داشتن شرایط پایدار ارتعاشات

$$k_{eq} > 0, \quad c_{eq} > 0$$

مثال

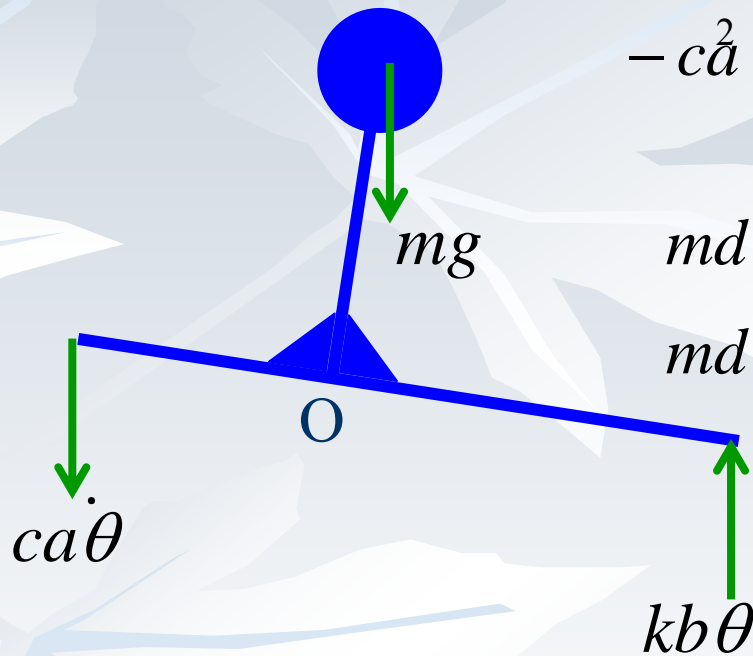
■ معادله حرکت سیستم مقابل را بدست آورید



$$\sum M_o = J_o \ddot{\theta}$$

$$-ca^2 \ddot{\theta} - kb^2 \theta + mgd \sin \theta = m \dot{d}^2 \ddot{\theta}$$

مثال



$$-ca \ddot{\theta} - kb^2 \theta + mgd \sin \theta = m \ddot{a} \dot{\theta}$$

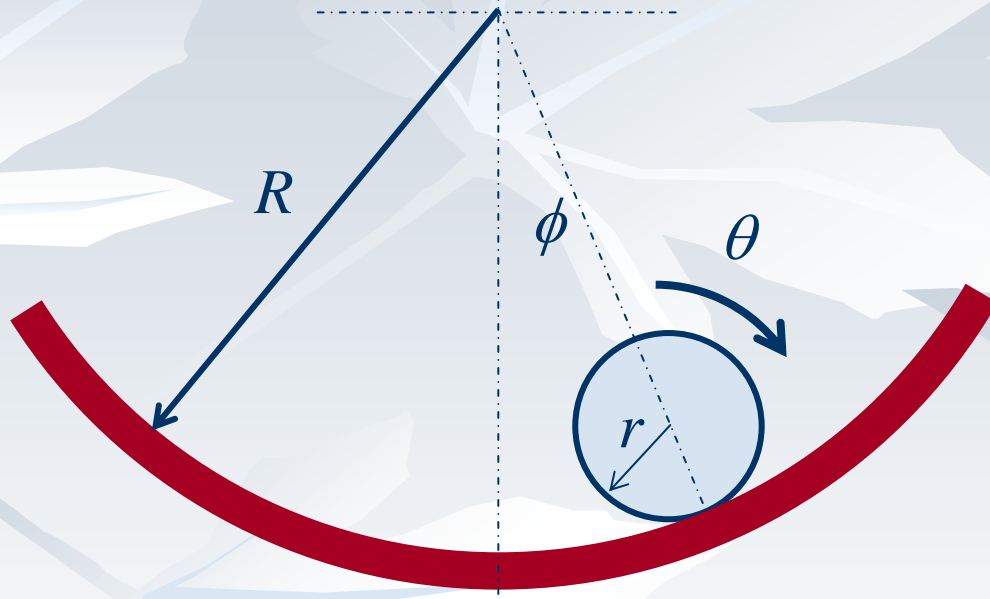
$$md^2 \ddot{\theta} + ca^2 \dot{\theta} + kb^2 \theta - mgd \sin \theta = 0$$

$$md^2 \ddot{\theta} + ca^2 \dot{\theta} + (kb^2 - mgd) \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{kb^2 - mgd}{md^2}}, \quad c_c = 2\sqrt{m_{eq} k_{eq}} = 2\sqrt{md^2 (kb^2 - mgd)}$$

$$\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{ca^2}{2\sqrt{md^2 (kb^2 - mgd)}}, \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

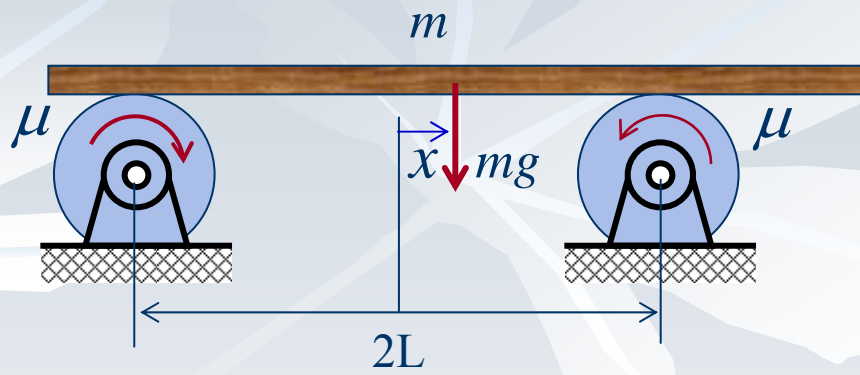
مثال



$$T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

$$U = mg?$$

مثال



داری سیستم میرائی

■ در یک سیستم ارتعاشی میرا چون نیروی خارجی غیر از وزن و فنر وجود دارد در نتیجه:

$$\Delta T + \Delta U = W_{1 \rightarrow 2} = \Delta W$$

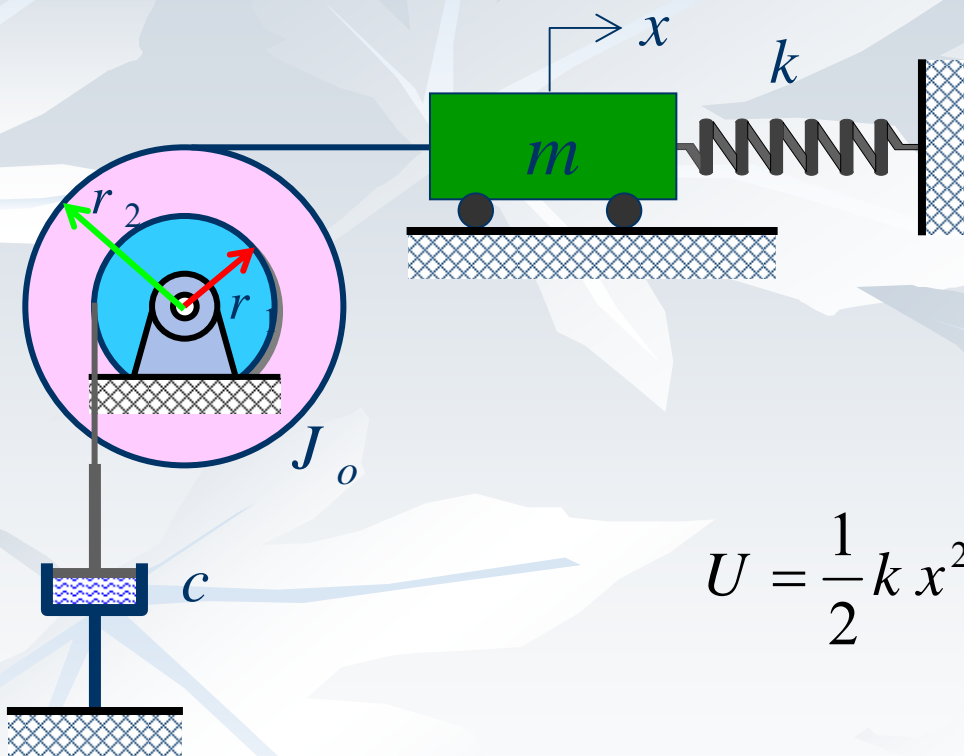
■ و اگر طرفین معادله بر Δt تقسیم و Δt به صفر میل داده شود:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} = P$$

■ یعنی مجموع نرخ تغییر انرژی پتانسیل و جنبشی معادل توان نیروی اعمالی است. توان نیز برای نیرو و کویل به صورت زیر تعریف می

$$P_F \quad \vec{F} \cdot \vec{v} \quad P_M \quad \vec{M} \cdot \vec{\omega} \quad P = P_F + P_M \quad \text{شود:}$$

روش انرژی برای سیستم داری میرائی



■ انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_o \left(\frac{\dot{x}}{r_2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[m + \left(\frac{J_o}{r_2^2} \right) \right] \dot{x}^2$$

■ انرژی پتانسیل:

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

■ توان میراگر:

$$P = \vec{F}_D \cdot \vec{v} = -c (r_1 \dot{\theta}) (r_1 \dot{\theta}) = -c \left(r_1 \frac{\dot{x}}{r_2} \right)^2 = -c \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{x}^2$$

روش انرژی برای سیستم داری میرایی

■ لذا:

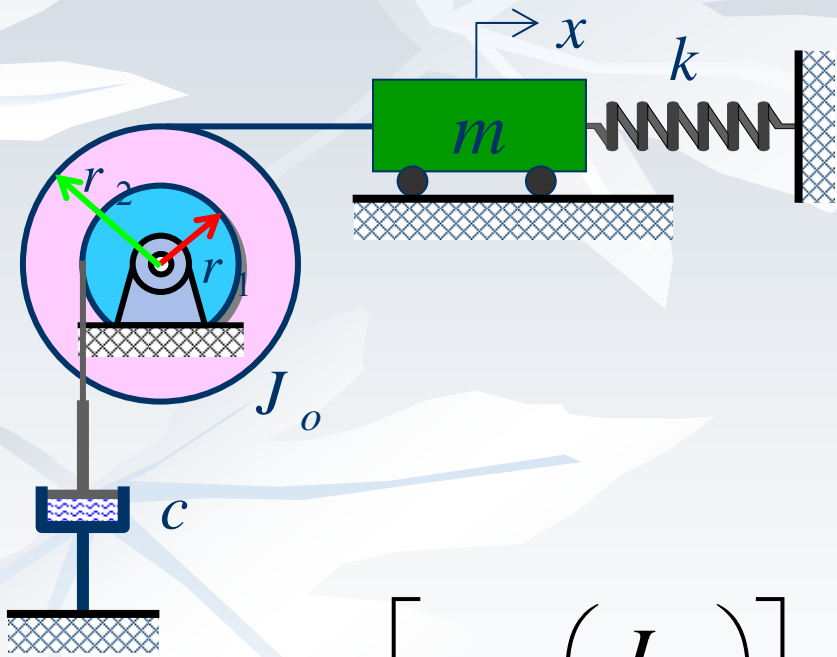
$$\dot{T} + \dot{U} = P$$

$$\dot{T} = \frac{1}{2} \left[m + \left(\frac{J_o}{r_2^2} \right) \right] 2\ddot{x} = \left[m + \left(\frac{J_o}{r_2^2} \right) \right] \ddot{x} \quad \dot{U} = \frac{1}{2} k 2x \dot{x} = kx\dot{x}$$

$$P = -c \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{x}^2 \quad \dot{T} + \dot{U} = \left[m + \left(\frac{J_o}{r_2^2} \right) \right] \ddot{x} + kx\dot{x} = -c \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{x}^2$$

$$\left[m + \left(\frac{J_o}{r_2^2} \right) \right] \ddot{x} + c \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{x} + kx = 0$$

مثال



- برای مثال قبل اگر فرکانس طبیعی 5Hz و $m=10\text{kg}$ و $J_o=5\text{kg.m}^2$ اگر $r_1=10\text{cm}$ و $r_2=25\text{cm}$ باشند، با یک جابجائی اولیه مشخص شود که بعد از ۱۰ سیکل دامنه ۸۰٪ کاهش پیدا کرده، مطلوب است مقدار k و c

$$\left[m + \left(\frac{J_o}{r_2^2} \right) \right] \ddot{x} + c \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{x} + kx = 0$$

حل

$$m_{eq} = \left[m + \left(\frac{J_o}{r_2^2} \right) \right] = 10 + \frac{5}{0.25^2} = 90 \text{ kg}$$

$$c_{eq} = c \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 0.16c$$

■ فرکانس طبیعی:

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \cdot 5 = 10\pi = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow k_{eq} = 90 \times 100^2 \pi = 88826 \text{ N/m}$$

■ کاهش لگاریتمی

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{X_1}{X_{n+1}} \right) = \frac{2\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \delta = \frac{1}{10} \ln \left(\frac{1}{0.2} \right) = 0.161$$

$$\delta = 0.161 = 2\pi \xi \Rightarrow \xi = \frac{0.161}{2\pi} = 0.0256$$

■ چون ξ کوچک است:

$$\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{0.16c}{2m_{eq}\omega_n} = \frac{0.16c}{2 \times 90 \times 10\pi} = 0.0256 \Rightarrow c = 904.8 \approx 905 \text{ N.s/m}$$

روش کار مجازی

■ وقتی که یک سیستم دینامیکی در حال تعادل دینامیکی باشد، جابجائی مجازی باعث تخییرتی مجازی در انرژیها و کارنیروهایی غیر فنر و وزن می شود.

$$\delta T + \delta U = \delta W$$

$$\delta T = \delta \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 \right] = \frac{1}{2} [m 2 \dot{x} \delta \dot{x} + J_G 2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta}]$$

$$= m \ddot{x} \delta x + J_G \ddot{\theta} \delta \theta$$

$$\delta U = \delta \left[\frac{1}{2} kx^2 + mgy \right] = kx \delta x + mg \delta y$$

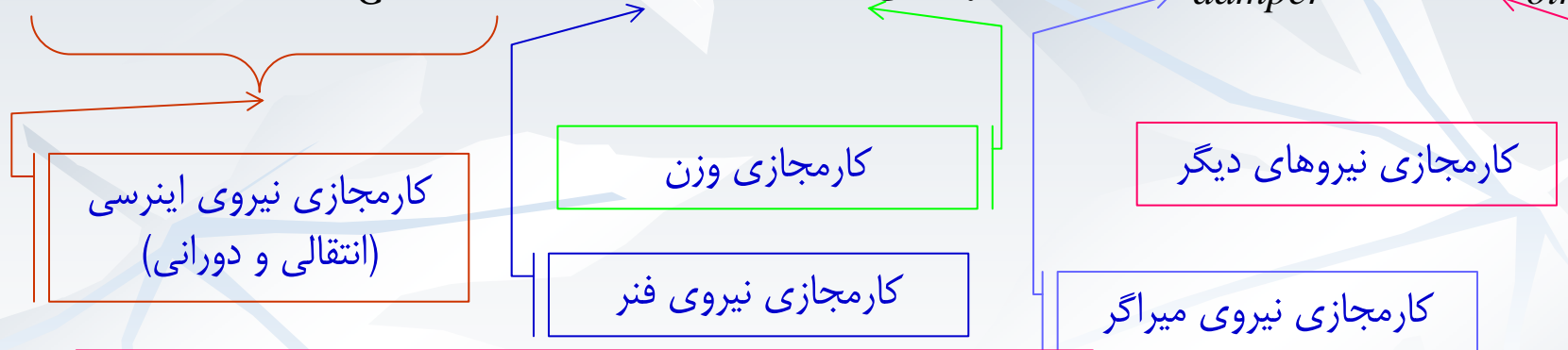
$$\delta W = \delta [W_{damper} + W_{other}] = \delta W_{damper} + \delta W_{other}$$

روش کار مجازی

در نتیجه:

$$\delta T + \delta U = \delta W$$

$$m\ddot{x}\delta x + J_G \ddot{\theta} \delta \theta + kx \delta x + mg \delta y = \delta W_{damper} + \delta W_{other}$$

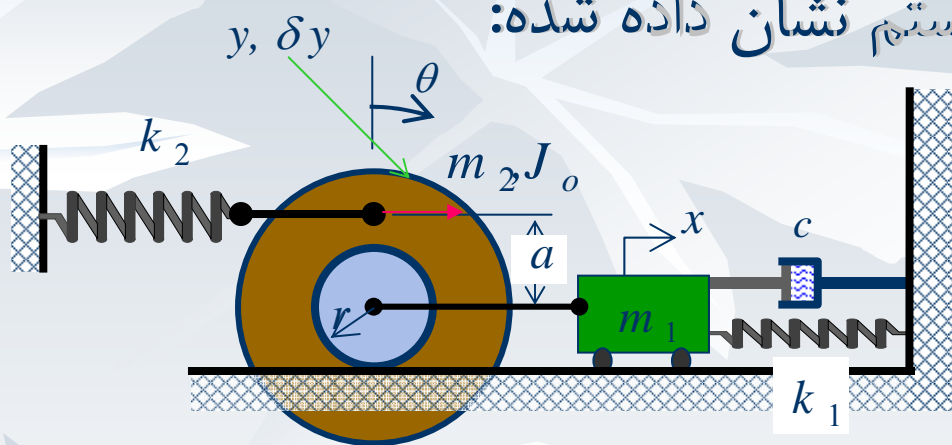


$$\sum_{i=1}^{n1} m_i \ddot{x}_i \delta x_i + \sum_{j=1}^{n2} J_{Gj} \ddot{\theta}_j \delta \theta_j + \sum_{k=1}^{n3} k_k x_k \delta x_k + \sum_{l=1}^{n4} m_l g \delta y_l + \sum_{m=1}^{n5} c_m \dot{x}_m \delta x_m = \sum_{r=1}^{n6} F_r \delta x_r$$

که در حالت کلی:

مثال: روش کار مجازی

■ مطلوب است معادله حرکت سیستم نشان داده شده:



روابط سینماتیکی:

$$\theta = \frac{x}{r}, \quad \delta\theta = \frac{\delta x}{r}, \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{r}, \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$y = (r + a)\theta = \frac{r + a}{r}x, \quad \delta y = \frac{r + a}{r}\delta x,$$

$$\sum_{i=1}^{n1} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = m_1 \ddot{x} \delta x + m_2 \ddot{x} \delta x,$$

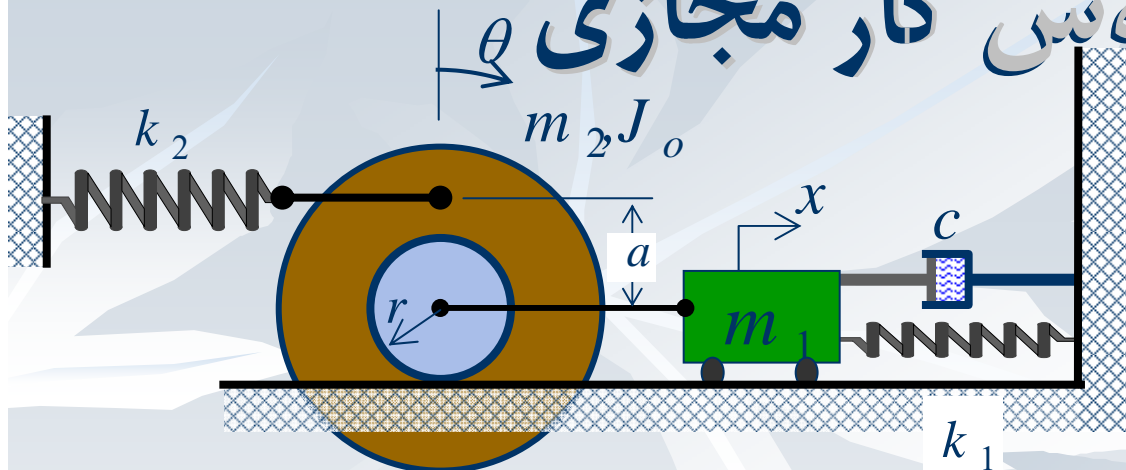
$$\sum_{j=1}^{n2} J_{Gj} \ddot{\theta}_j \delta \theta_j = J_o \ddot{\theta} \delta \theta$$

$$\sum_{k=1}^{n3} k_k x_k \delta x_k = k_1 x \delta x + k_2 y \delta y$$

$$\sum_{m=1}^{n5} c_m \dot{x}_m \delta x_m = c \dot{x} \delta x$$

$$\sum_{l=1}^{n4} m_l g \delta y_l = 0 \quad \sum_{r=1}^{n6} F_r \delta x_r = 0$$

مثال: روش کار مجازی



$$m_1 \ddot{x} \delta x + m_2 \ddot{x} \delta x + J_o \ddot{\theta} \delta \theta + k_1 x \delta x + k_2 y \delta y + c \dot{x} \delta x = 0$$

$$m_1 \ddot{x} \delta x + m_2 \ddot{x} \delta x + J_o \frac{\ddot{x}}{r} \frac{\delta x}{r} + k_1 x \delta x + k_2 \frac{r+a}{r} x \frac{r+a}{r} \delta x + c \dot{x} \delta x = 0$$

$$\left[\left(m_1 + m_2 + \frac{J_o}{r^2} \right) \ddot{x} + c \dot{x} + \left(k_1 + k_2 \left(\frac{r+a}{r} \right)^2 \right) x \right] \delta x = 0$$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J_o}{r^2} \right) \ddot{x} + c \dot{x} + \left(k_1 + k_2 \left(\frac{r+a}{r} \right)^2 \right) x = 0$$

حل

$$\underbrace{\left(m_1 + m_2 + \frac{J_o}{r^2} \right)}_{m_{eq}} \ddot{x} + c \dot{x} + \underbrace{\left(k_1 + k_2 \left(\frac{r+a}{r} \right)^2 \right)}_{k_{eq}} x = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \left(\frac{k_1 + k_2 \left(\frac{r+a}{r} \right)^2}{m_1 + m_2 + \frac{J_o}{r^2}} \right)^{1/2}$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{m_{eq}k_{eq}}} = \frac{c}{2\sqrt{\left(m_1 + m_2 + \frac{J_o}{r^2} \right) \left(k_1 + k_2 \left(\frac{r+a}{r} \right)^2 \right)}}$$

شکل استاندارد معادله حرکت

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\xi = \frac{c}{2m} \frac{1}{\omega_n}$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

$$\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_n^2x = 0$$

میرائی کلمب (اصطکاکی خشک) (Coulomb damping)

- براساس قانون اصطکاکی کلمب: نیروی لازم برای ایجاد لغزش بین دو جسم در تماس متناسب با نیروی عمودی بین آن دو جسم است.
- بنابراین نیروی F بصورت زیر بدست می آید

$$F = \mu N = \mu W = \mu mg$$

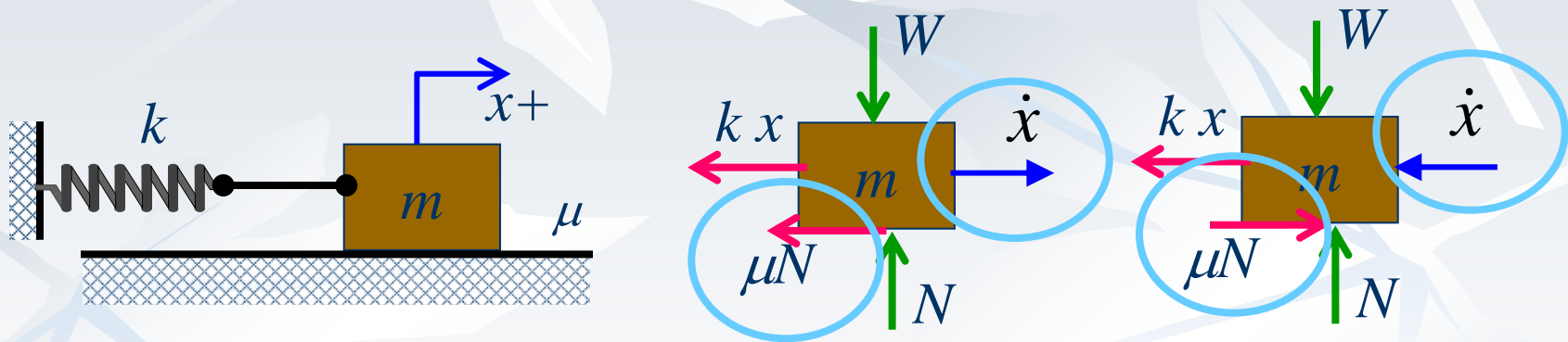
- که N نیروی عمودی و μ ضریب اصطکاکی لغزشی یا جنبشی است.
- میرائی کلمب را گاهی میرائی ثابت *constant damping* نیز می گویند.

μ is usu 0.1 for lubricated metal, 0.3 for nonlubricated metal on metal, 1.0 for rubber on metal

میرائی کلمب

■ معادله حرکت:

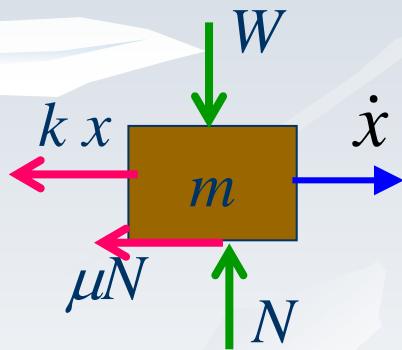
■ یک سیستم یک درجه آزادی با اصطکاک خشک را در نظر بگیرید



■ چون نیروی اصطکاک با جهت سرعت تغییر می کند نیاز است که دو حالت بررسی گردد.

میرائی کلمب

- حالت td مثبت dx/dt و منفی x مثبت است.



- معادله حرکت را می توان چنین نوشت (از شکل)

$$m\ddot{x} + kx = -\mu N$$

- جواب خصوصی و عمومی این معادله:

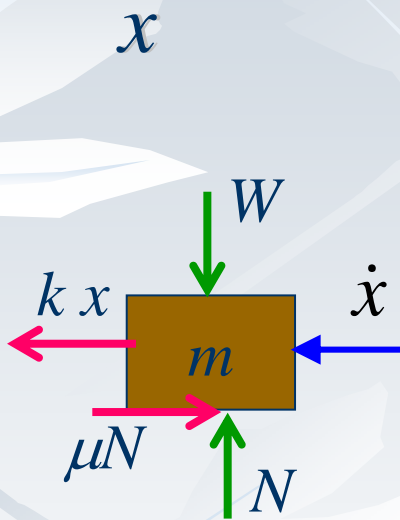
$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t$$

$$\frac{\mu N}{k}$$

است و

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

میرائی کلمب



■ حالت (ب): وقتی که x مثبت و dx/dt منفی و dx/dt منفی هم است.

■ معادله حرکت را می توان چنین نوشت (از شکل)

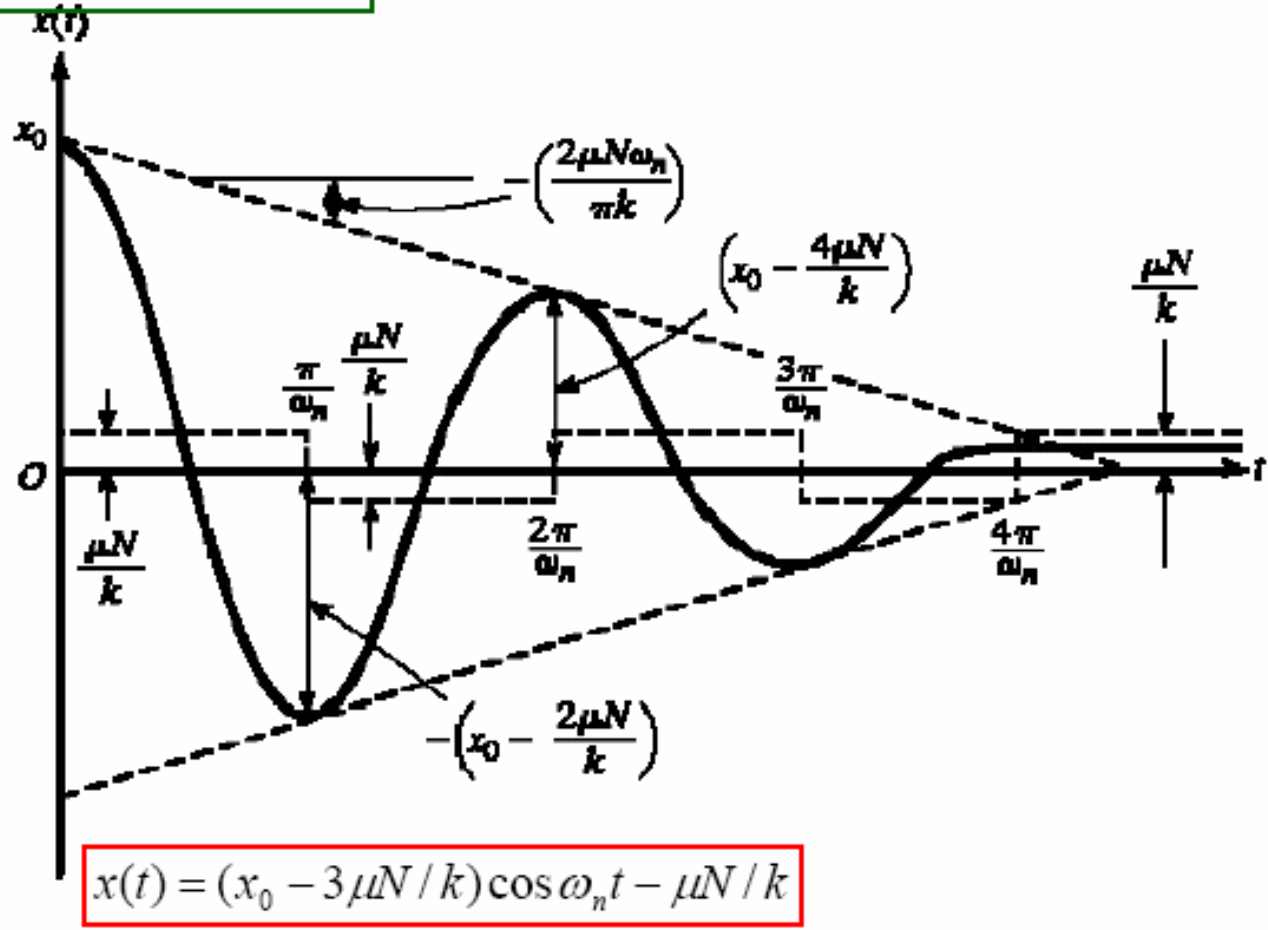
$$m\ddot{x} + kx = \mu N$$

■ جواب خصوصی و عمومی این معادله:

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{k}$$

است

$$x(t) = (x_0 - \mu N / k) \cos \omega_n t + \mu N / k$$



$$x(t) = (x_0 - 3\mu N / k) \cos \omega_n t - \mu N / k$$

Fig. 2.34 Motion of the mass with Coulomb damping

میرائی کلمب

■ با فرض شرط اولیه جابجائی اولیه: $x(0) = x_0$

$$\dot{x}(0) = 0$$

■ چون با رها کردن جرم بدون سرعت اولیه سرعت منفی خواهد بود لذا برای $0 \leq t \leq \pi/\omega_n$:

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{k}$$

وبا اعمال شرایط اولیه: $x_0 = A_3 + \frac{\mu N}{k} \Rightarrow A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{k}, A_4 = 0$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu N}{k} \quad 0 \leq t \leq \pi/\omega_n$$

میرائی کلمب

■ در $t = \pi/\omega_n$ جرم برای لحظه ای متوقف می شود و جهت سرعت

$$x(\pi/\omega_n) = -x_0 + \frac{2\mu N}{k} \quad \text{عکس می شود لذا:}$$

$$\dot{x}(\pi/\omega_n) = 0$$

■ در نتیجه نتیجه طی سیکل پهنای دامنه به $2\mu N/k$ کاهش دامنه داده

است و چون سرعت مثبت است برای $\pi/\omega_n \leq t \leq 2\pi/\omega_n$:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t - \frac{\mu N}{k}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k} \right) \cos \omega_n t - \frac{\mu N}{k}$$

و با اعمال شرایط اولیه:

$$\pi/\omega_n \leq t \leq 2\pi/\omega_n$$

میرائی کلمب

■ این حرکت تاجائی ادامه می یابد که نیروی بازگرداننده فنر قادر به

مقابلہ با نیروی اصطکاک نباشد، یعنی: $x \leq \mu N / k$

■ چون اگر در هر دو سیکل از سیکل کلاسیک دامنہ $2\mu N/k$ است لذا می

چون

را بدست آورد:

$$x_0 - r \frac{2\mu N}{k} \leq \frac{\mu N}{k} \Rightarrow r \geq \frac{kx_0}{2\mu N} - \frac{1}{2}$$



میرائی کلمب

■ مشخصه های سیستم با میرائی کلمب:

حرکت غیر خطی است، در حالیکه حالیکه رانور و میرائی ویسکوز مخطی

■ فرکانس طبیعی پاسخ ارتعاش نسبت به سیستم نامیرا **تغییری نکرده** در حالیکه در میرائی ویسکوز کاهش می یابد.

■ حرکت دارای نوسان است در حالیکه در میرائی ویسکوز می تواند نوسان نداشته باشد.

ویسکوزوز حالیکه در میرائی

نظر تئوری حرکت تا بینهایت ادامه دارد

میرائی کلمب

■ مشخصه های سیستم با میرائی کلمب:

■ در میرائی کلمب دامنه ارتعاش خطی کاهش می یابد، میرائی ویسکوز دامنه بصورت نمائی کاهش می یابد.

ارتعاش دامنه $4\mu N/k$ کاهش می یابد که می توان از آن

شیب پوش منحنی را پیدا کرد. لذا

$$x_m - x_{m+1} = \frac{4\mu N}{k}, \quad t_m - t_{m+1} = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

$$Slope = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\mu N \omega_n}{\pi k}$$

میراثی کلمب: روش انرژی

- با استفاده از کار نیروی اصطکاک در یک نیم سیکل می توان کاهش دامنه در یک نیم سیکل را بدست آورد.
- کار نیروی اصطکاک در یک نیم سیکل:

$$W_F = -F\Delta x = -\mu N(x_m + x_{m+0.5})$$

- تغییر در انرژی جنبشی صفر و تغییر در انرژی پتانسیل:

$$\Delta U = \frac{1}{2}k(x_{m+0.5}^2 - x_m^2) = \frac{1}{2}k(x_{m+0.5} - x_m)(x_{m+0.5} + x_m)$$

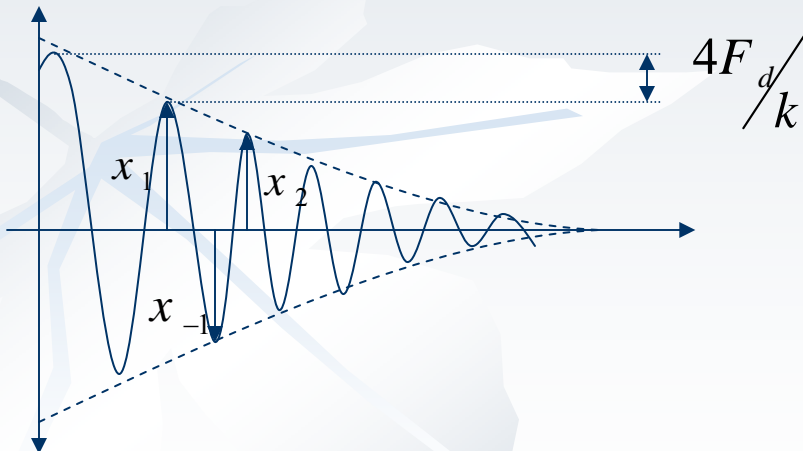
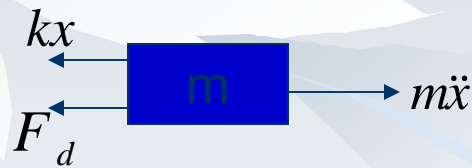
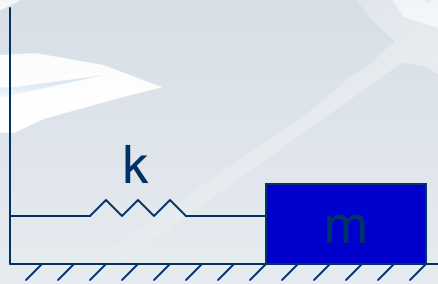
$$\Delta U + \Delta T = W \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k(x_{m+0.5} - x_m)(x_{m+0.5} + x_m) = -\mu N(x_m + x_{m+0.5})$$

$$(x_m - x_{m+0.5}) = \frac{\mu N}{k}$$

Coulomb Damping

$$F_d = \mu N$$

where μ is the coefficient of friction, N is the normal force



$$\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_{-1}^2) - F_d(x_1 + x_{-1}) = 0$$

$$\frac{1}{2}k(x_1 - x_{-1}) = F_d \rightarrow x_1 - x_{-1} = \frac{2F_d}{k}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{4F_d}{k}$$

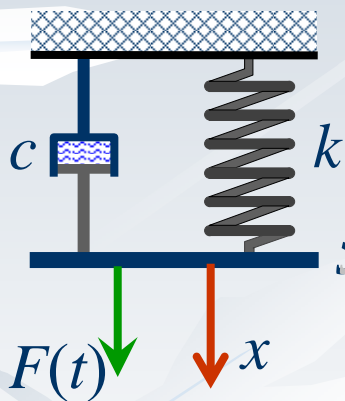
مثال



فروشده‌ییراگ شمه‌یراگر

■ هدف بدست آوردن منحنی نیرو تغییر مکان و کار انجام شده است.

■ فرض کنید سیستم فنر و میراگری به یک میله بدون وزن متصل شده اند.



■ در اثر جابجائی x نیروئی در فنر و میراگر ایجاد می شود

$$F(t) = kx + c\dot{x}$$

■ اگر حرکت هارمونیک فرض شود یعنی: $x(t) = X \sin(\omega t + \phi)$

$$F(t) = kX \sin(\omega t + \phi) + c\omega X \cos(\omega t + \phi)$$

کار انجام شده فنر و میراگر

■ در نتیجه:

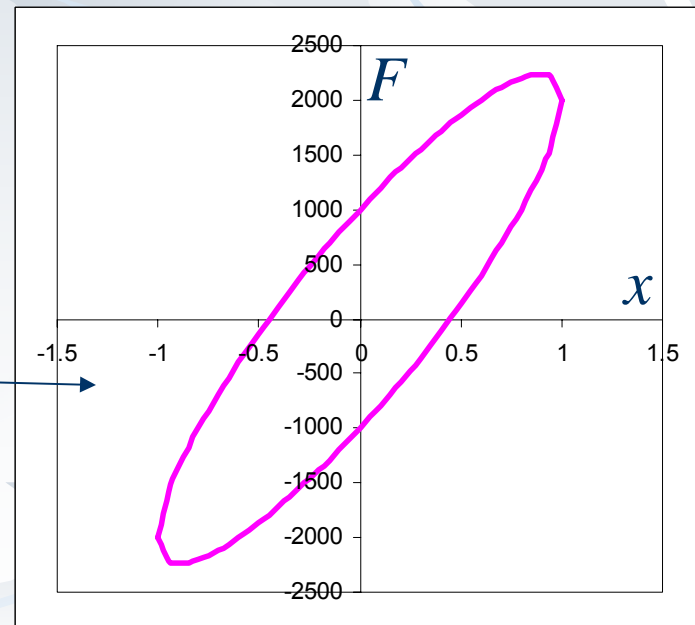
$$F(t) = kX \sin(\omega t + \phi) \pm c\omega \sqrt{X^2 - x^2} \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$F(t) = kx \pm c\omega \sqrt{X^2 - x^2}$$

$$F^2 + k^2 x^2 = c^2 \omega^2 (X^2 - x^2)$$

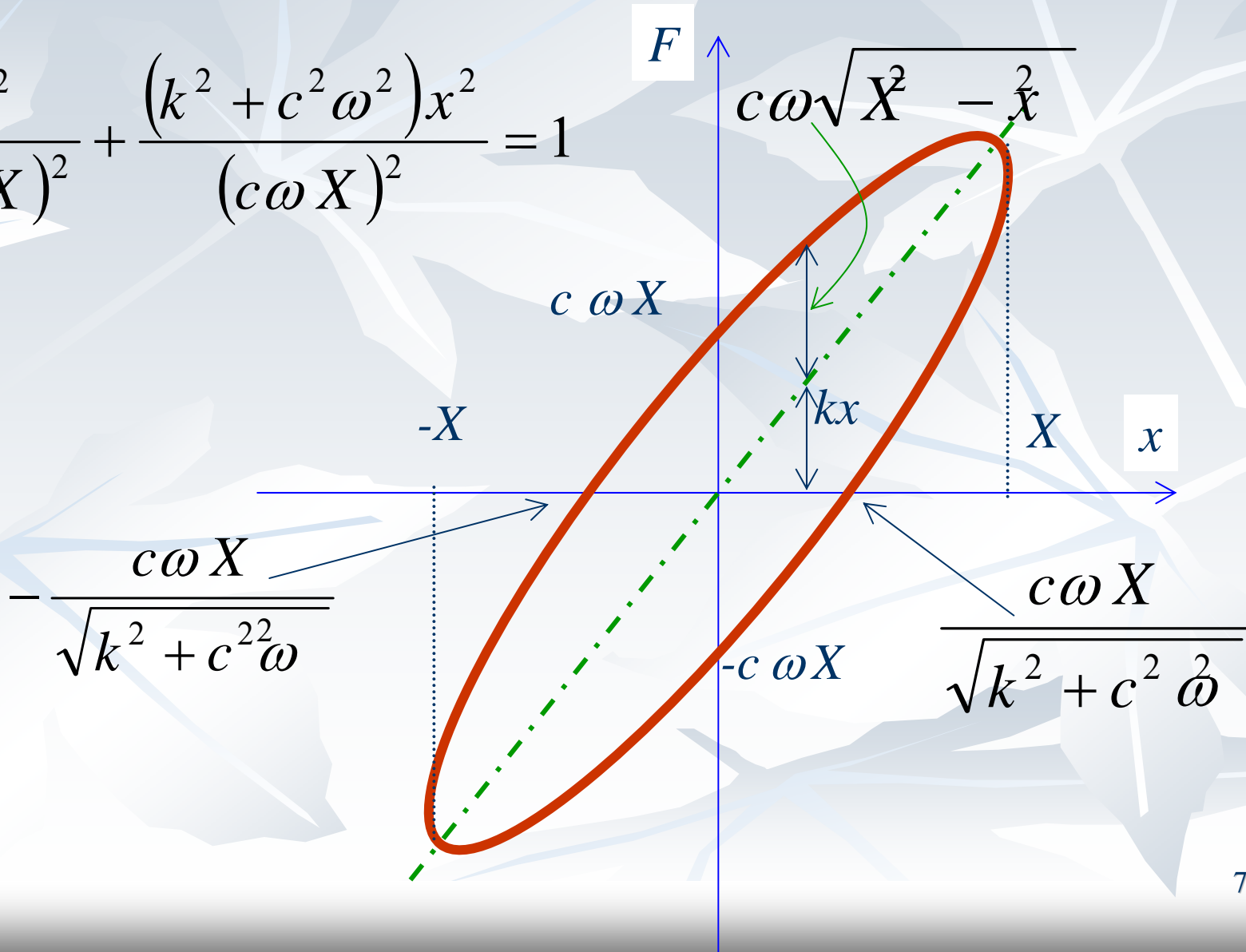
$$\frac{F^2}{(c\omega X)^2} + \frac{(k^2 + c^2 \omega^2)x^2}{(c\omega X)^2} = 1$$

معادله بیضی



کار انجام شده فنر و میراگر

$$\frac{F^2}{(c\omega X)^2} + \frac{(k^2 + c^2\omega^2)x^2}{(c\omega X)^2} = 1$$



کار انجام شده فنر و میراگر

k

$$F = kx$$

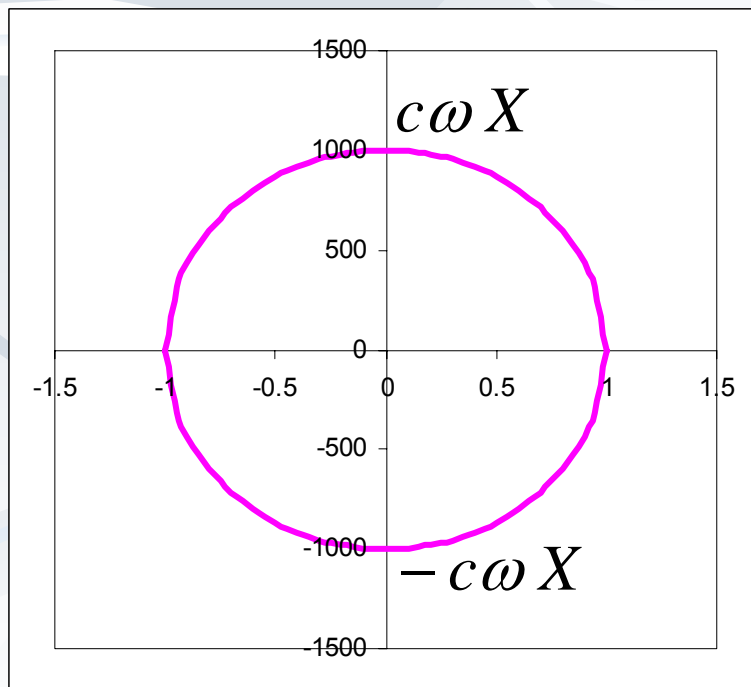
■ اگر میراگر وجود نداشته باشد:
است

■ اگر فنر وجود نداشته باشد:

$$\frac{F^2}{(c\omega X)^2} + \frac{x^2}{X^2} = 1$$

■ که معادله یک بیضی با ابعاد:

$$a = X, \quad b = c\omega X$$



فرتودویراگ شفیراگر

■ برای فتر:

$$W_S = \oint F_S dx = \int_0^{2\pi/\omega} F_S \dot{x} dt = \int_0^{2\pi/\omega} kX \sin(\omega t + \phi) \omega X \cos(\omega t + \phi) dt = 0$$

■ برای میراگر:

$$W_D = \oint P_D dt = \int_0^\tau F_D \dot{x} dt = \int_0^\tau c \dot{x}^2 dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} c \omega^2 X^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt = c \omega^2 X^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(u) \frac{du}{\omega}$$

$$= \frac{c \omega X^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(u) du = \frac{c \omega X^2}{2} \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{2\pi} = c \pi \omega X^2$$

$$\pi ab = \pi c \omega X^2$$

■ مساحت بیضی:

کار انجام شده فنر و میراگر

■ برای فنر و میراگر:

$$W = W_S + W_D = c\pi\omega X^2$$

■ چون فنر مصرف کننده انرژی نیست.

حلقه هیستریزس

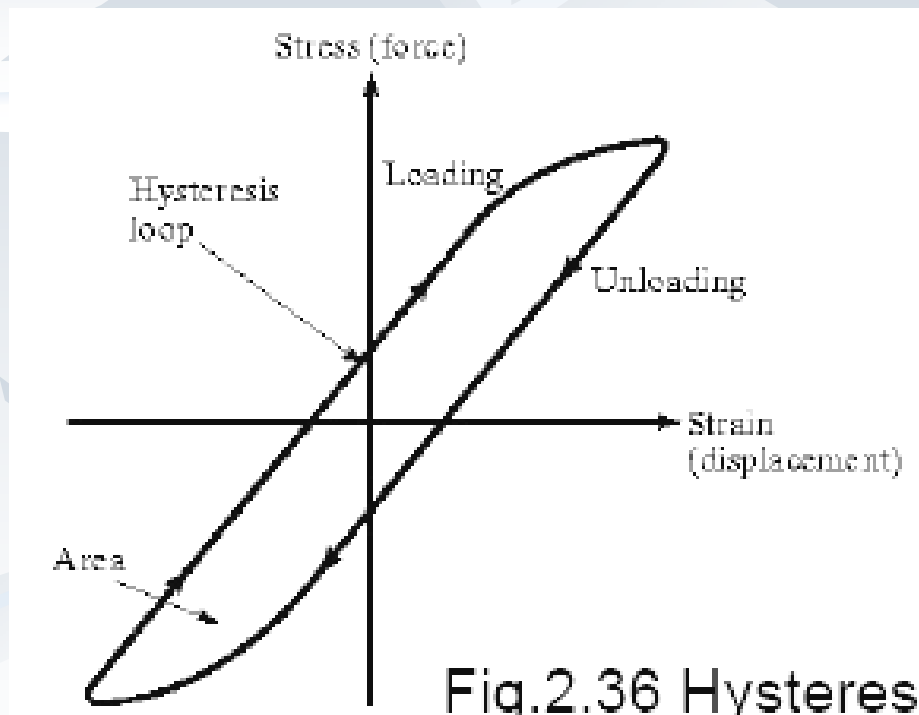
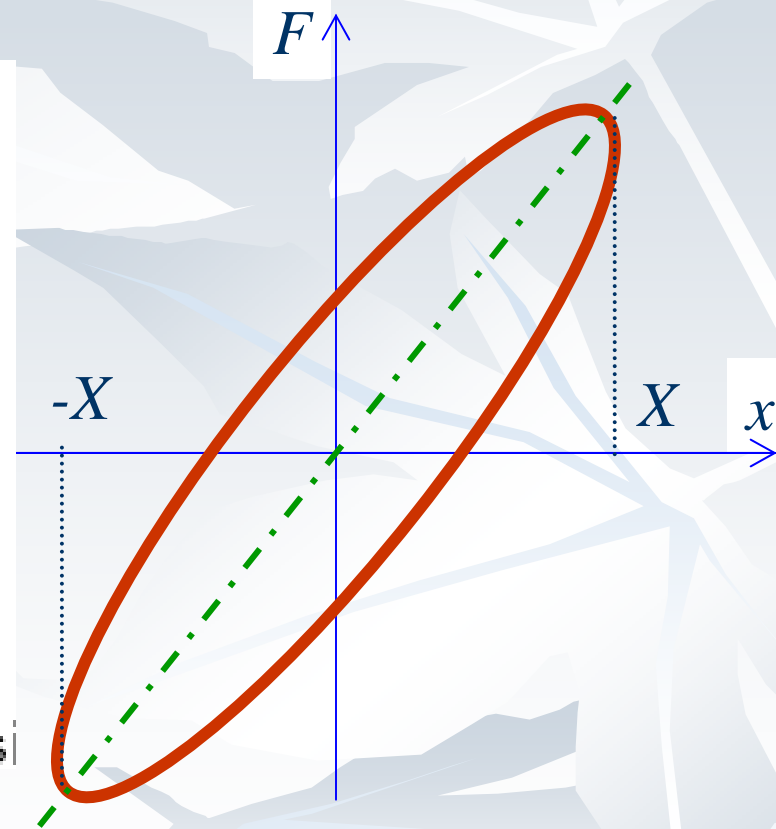
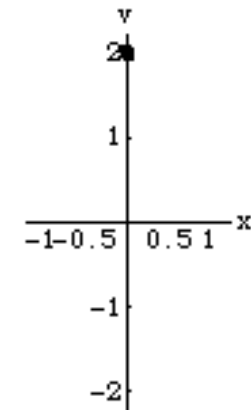
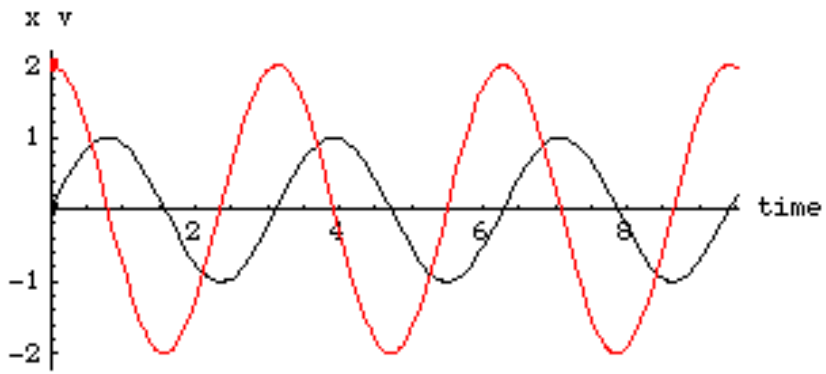
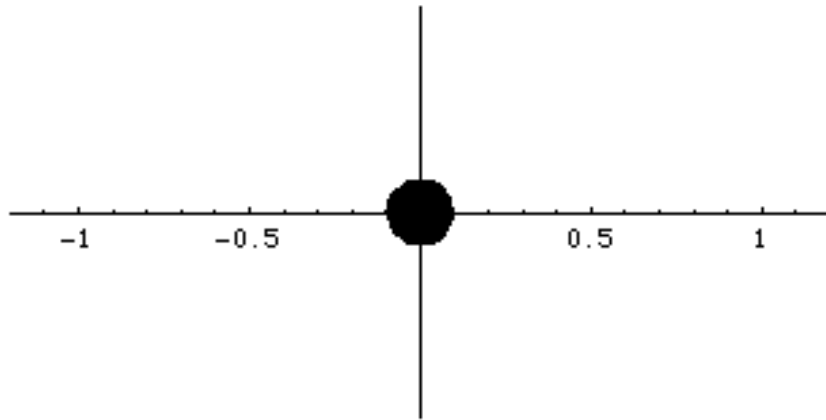


Fig.2.36 Hysteresis



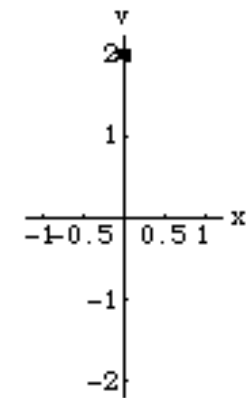
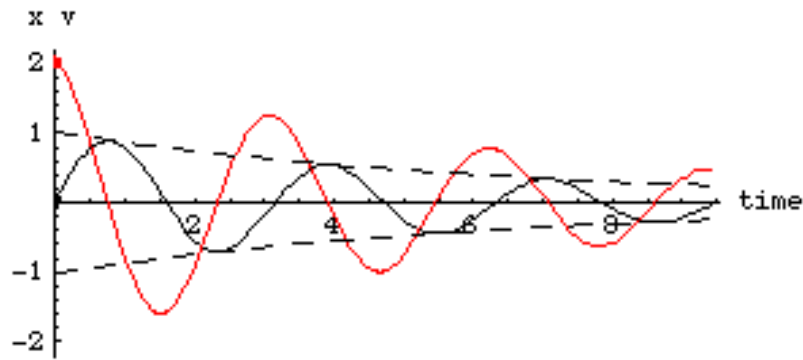
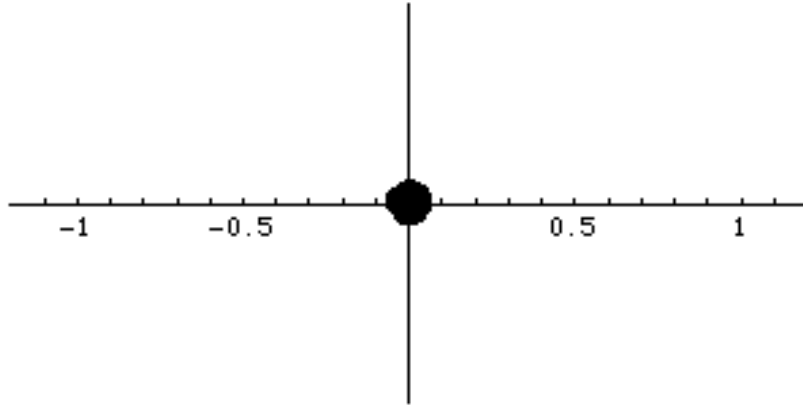
دسرعت جا بجائی سیستم نامیرا

© 2007, Daniel A. Russell



دیرعت جابجائی سیستم میرا

© 2007, Daniel A. Russell



مکانیکی

ارتعاش اجباری با تحریک هارمونیک

سیدیوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

مقدمه

- در سیستم های بحث شده قبلی، بعد از اعمال شرایط اولیه انرژی به سیستم اضافه نمی شود.
- حال انرژی یا نیرو به سیستم اضافه می شود تا ارتعاشات ادامه پیدا کند
- مفاهیم مهم:

(Forcing Force (Forc

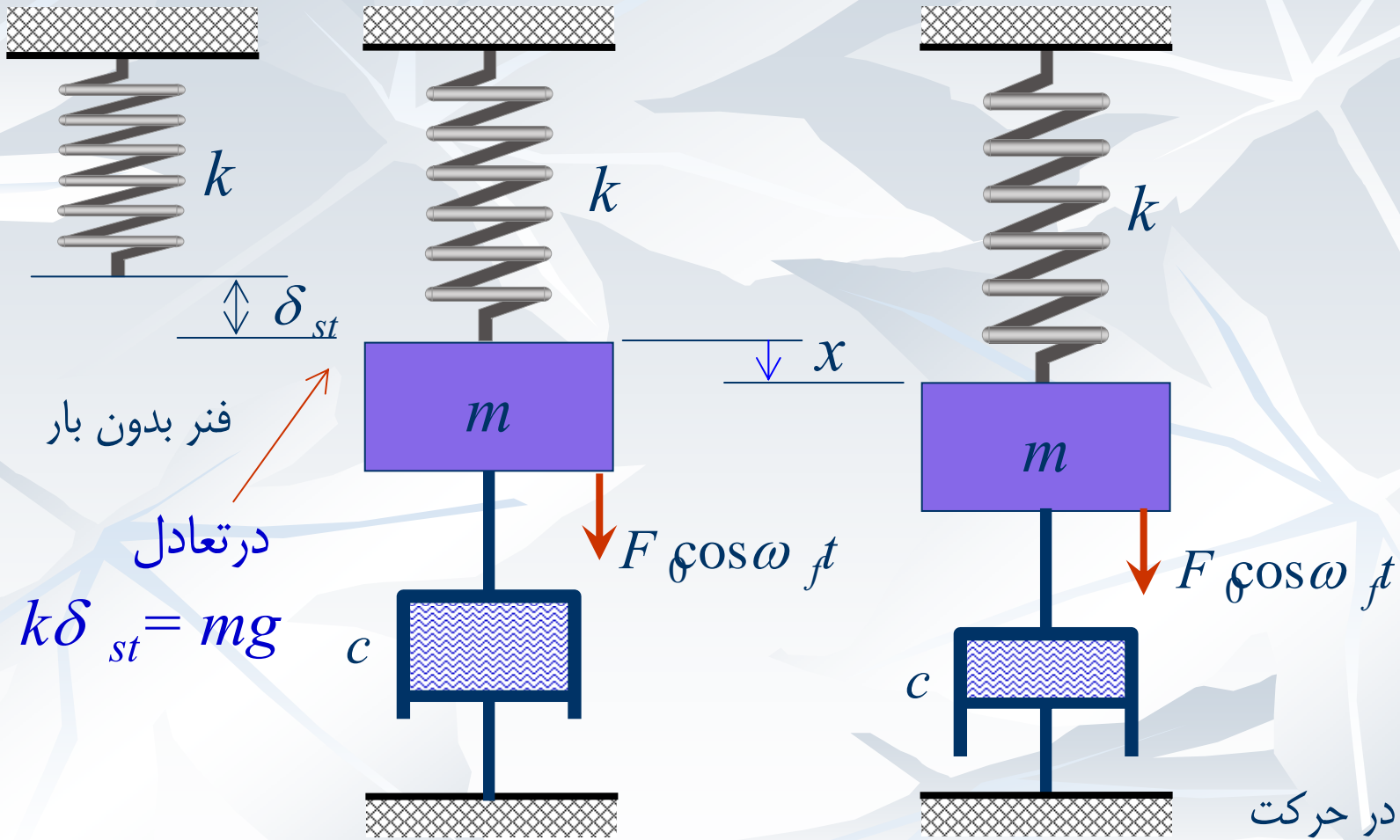
(Forcing displacement (Forcing

Resonance) تشدید ■

(Magnification factor (Magni

Phase angle) زاویه فاز ■

سیستم ارتعاشی با نیروی اجباری



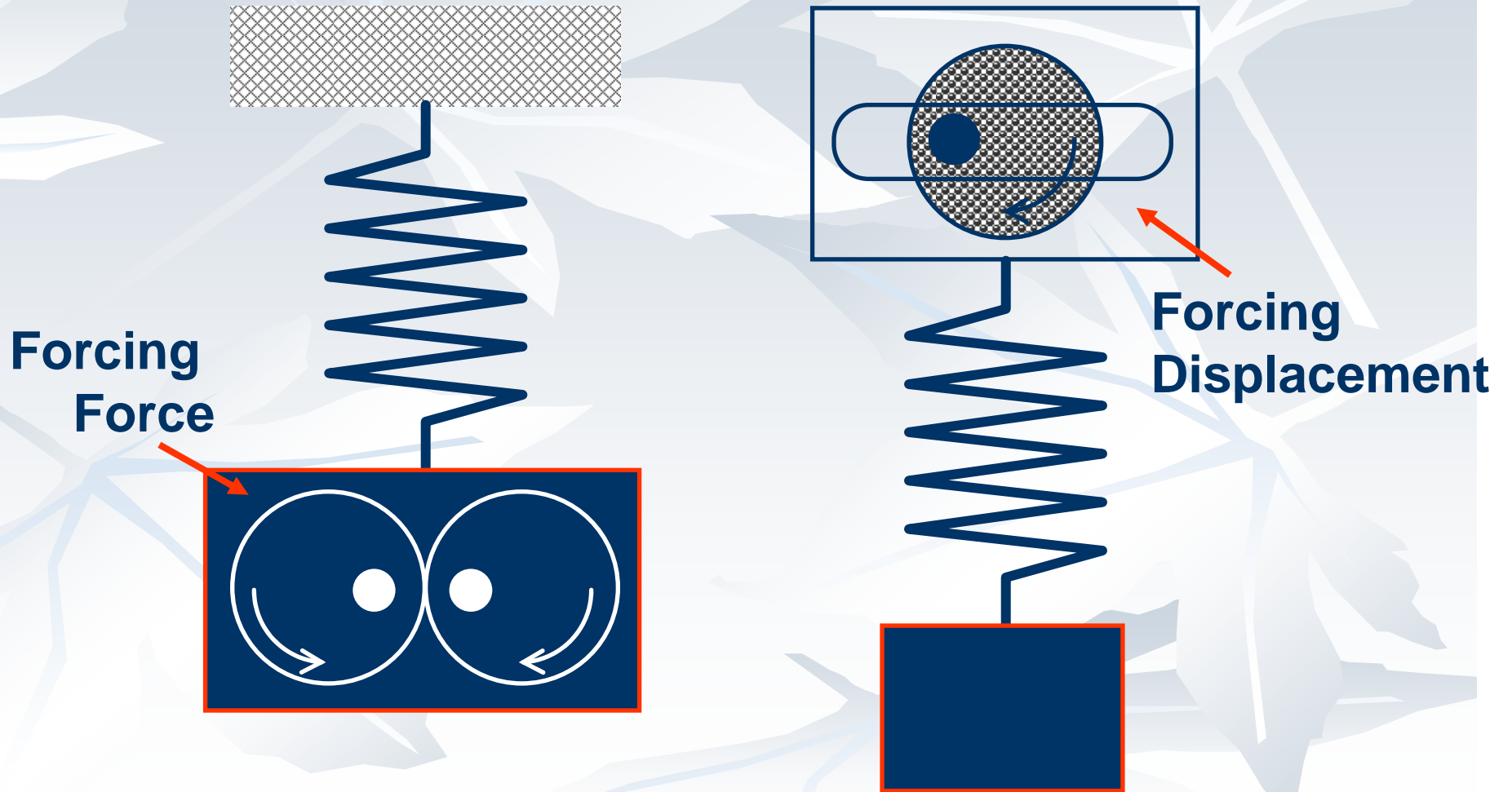
تعادل استاتیکی بدون حرکت

چرا نیروی با تابع هارمونیک (کسینوسی)؟

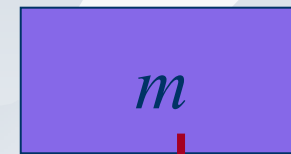
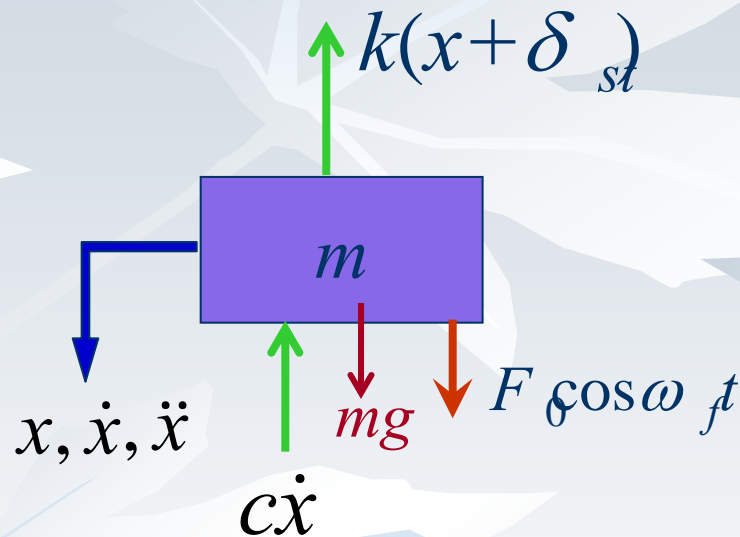
$$F_0 \cos \omega t$$

- در بسیاری از موارد بکاربرده می شود:
- سیستمهای دورانی
- تحریک بوسیله یک سیستم ارتعاشی دیگر
- تحریک بوسیله تابع موج (زلزله، جریان سیال)
- اگر هم تابع هارمونیک نباشد، می توان:
- از سری فوریه می توان برای نمایش توابع دیگر استفاده کرد
- برای هر تابع هارمونیک پاسخ را بدست آورد
- از برهم نهش پاسخها پاسخ به تابع دلخواه بدست می آید.

نپرووی اجباری و جابجائی اجباری



دیاگرام آزاد برای نیروی اجباری



■ معادله حرکت:

$$+\downarrow \sum F : mg - c\dot{x} - k(x + \delta_{st}) + F_0 \cos \omega_f t = m\ddot{x}$$

$$mg = k\delta_{st}$$

$$-c\dot{x} - kx + F_0 \cos \omega_f t = m\ddot{x}$$

معادله حرکت با نیروی اجباری

$$-c\dot{x} - kx + F_0 \cos \omega_f t = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega_f t$$

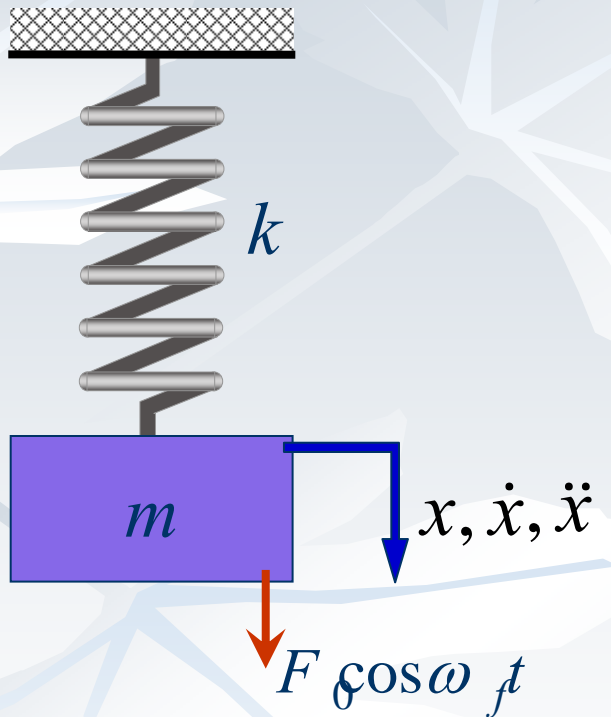
■ که در شکل استاندارد نیز:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t$$

■ ابتدا به بررسی سیستم بدون میرایی پرداخته می شود. $c = \xi = 0$

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega_f t$$

تحریریک هارمونیک بدون میرائی



■ سیستم جرم و فنری را که نیروی هارمونیک

$$F \cos \omega t$$

(یا هر نیروی هارمونیک دیگر) به آن اعمال می شود در نظر بگیرید.

■ ω_f فرکانس نیروی تحریریک است.

■ F_0 دامنه نیروی تحریریک

■ معادله حرکت در شکل استاندارد:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = f_0 \cos \omega t \quad f_0 = \frac{F_0}{m}$$

پاسخ تحریک‌ناهی سیستم‌های مکانیکی نامیرا به اجزای حریک

علمی نظامی (مکانیک) خصوصی جواب خصوصی

■ جواب عمومی: جواب ارتعاش آزاد است:

$$x_g(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

که A و B مقادیر ثابت می باشند

■ جواب خصوصی به صورت مقابل فرض می شود که باید در معادله صدق کند:

$$x_p(t) = X \cos(\omega_f t)$$

پاسخ سیستم نامیبراً به تحریک هارمونیک

ا X بدست

ب $x_p(t) = X \cos(\omega_f t)$ ب خصوصی ω_f ب ω_n f_0 $\cos \omega_f t$

$$\underbrace{-\omega_f^2 X \cos \omega_f t}_{\ddot{x}_p} + \underbrace{\omega_n^2 X \cos \omega_f t}_{\omega_n^2 x_p} = f_0 \cos \omega_f t$$

$$X = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}$$

■ در نتیجه جواب خصوصی

$$x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} \cos(\omega_f t)$$

پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

■ ترکیب جواب خصوصی و عمومی:

$$x(t) = \underbrace{x_p(t)}_{\frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} \cos(\omega_f t)} + \underbrace{x_g(t)}_{A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)}$$
$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} \cos(\omega_f t) + A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

■ ثابتهای انتگرالگیری A و B با اعمال شرایط مرزی بدست می آید.

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} \cos(\omega_f t) + A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega_f f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} \sin(\omega_f t) - \omega_n A \sin(\omega_n t) + \omega_n B \cos(\omega_n t)$$

پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

■ ثابتهای انتگرالگیری A و B با اعمال شرایط مرزی بدست می آید.

$$x_0 = x(0) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} + A \Rightarrow A = x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = \omega_n B \quad B = \frac{v_0}{\omega_n}$$

■ در نتیجه:

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} \cos(\omega_f t) + \left(x_0 - \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} \right) \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} [\cos(\omega_f t) - \cos(\omega_n t)] + x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

پاسخ سیستم نامیرا به تحریک هارمونیک

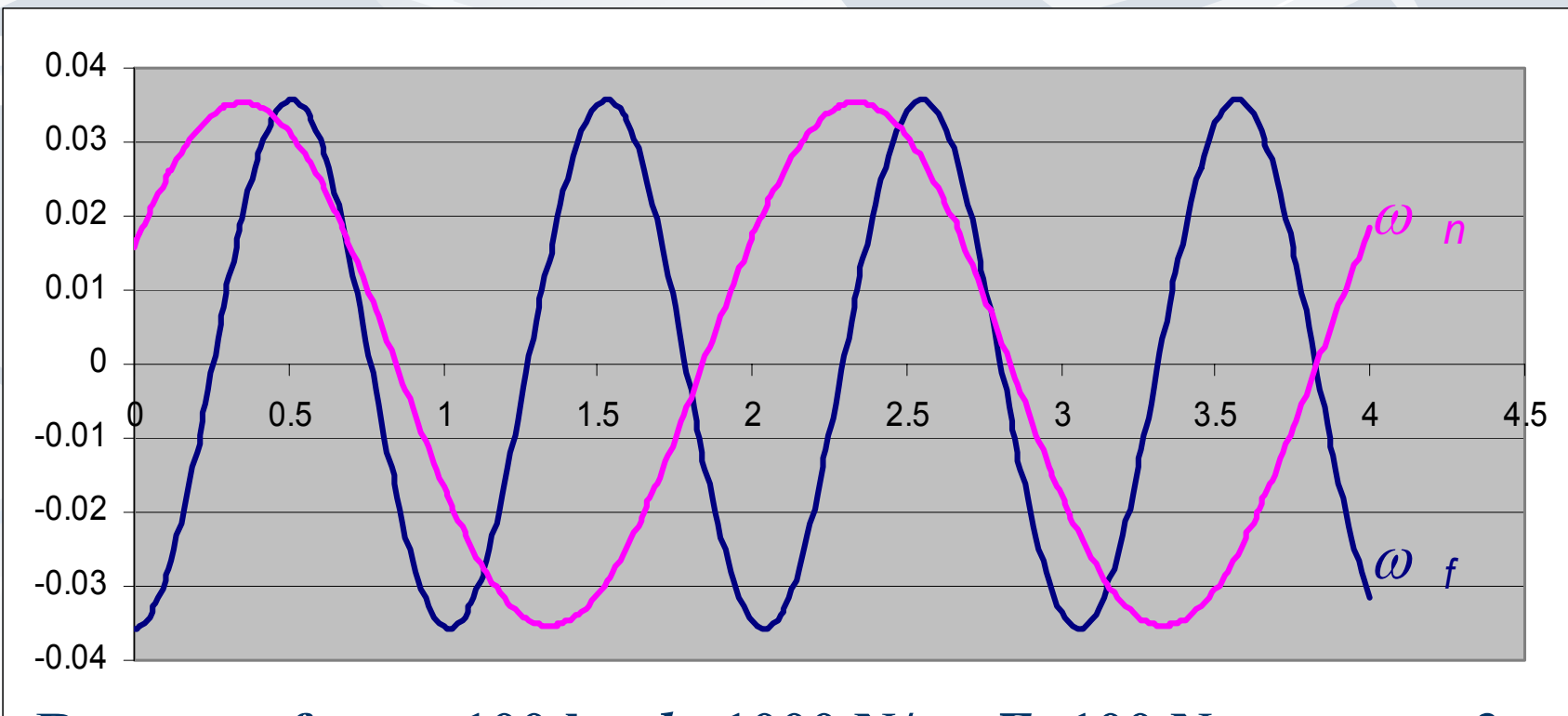
■ این پاسخ:

- در هر دو فرکانس طبیعی ω_n و فرکانس تحریک ω_f ارتعاش می کند.
- زمانی که دامنه ارتعاش بینهایت می شود (تشدید)
- حتی اگر شرایط اولیه معادل صفر است هر دو فرکانس موجودند.

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} [\cos(\omega_f t) - \cos(\omega_n t)] + x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

پاسخ سیستم ناپیرا به تحریک هارمونیک

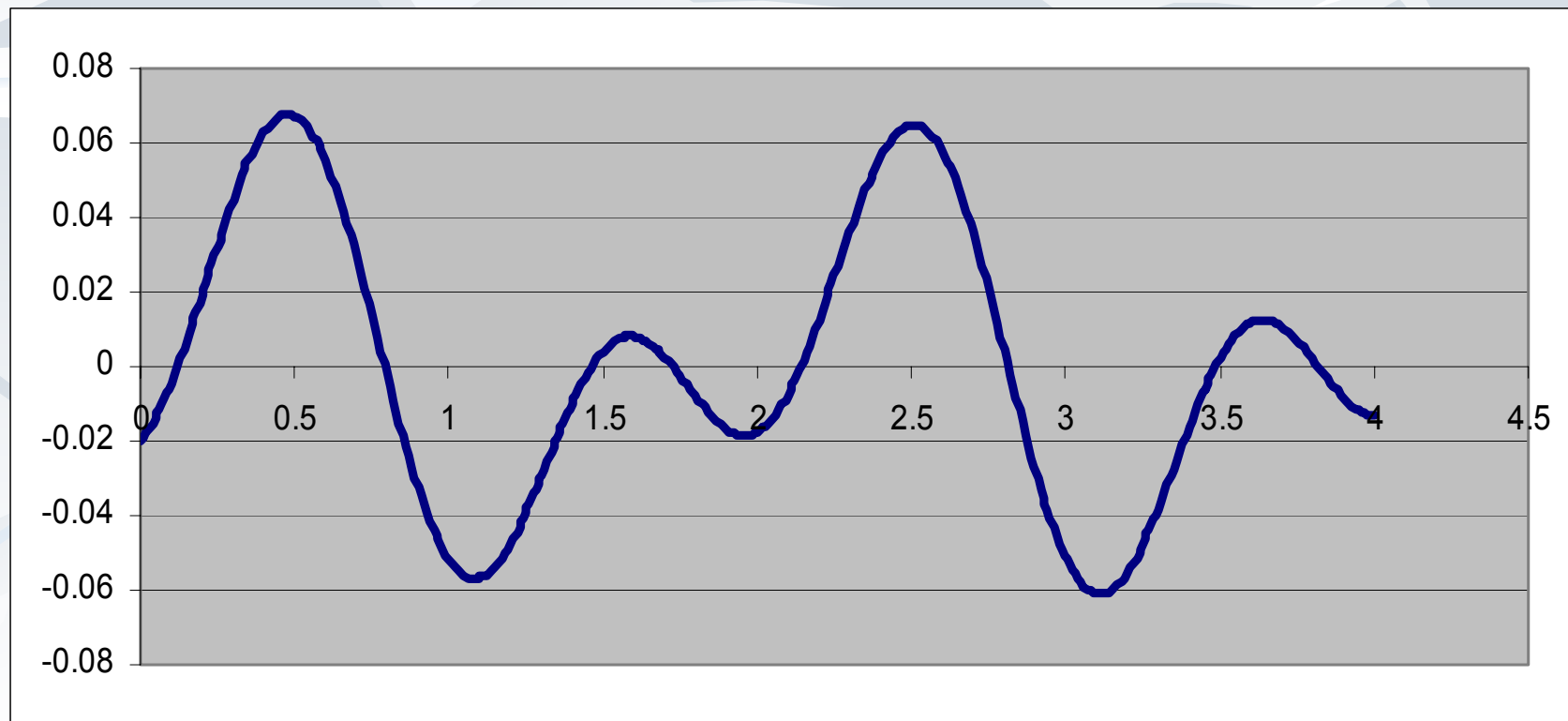
■ پاسخ بافرکانس تحریک و فرکانس طبیعی



**Response for $m=100$ kg, $k=1000$ N/m, $F=100$ N, $\omega_f = \omega_n + 3$
 $v_0 = 0.1$ m/s and $x_0 = -0.02$ m.**

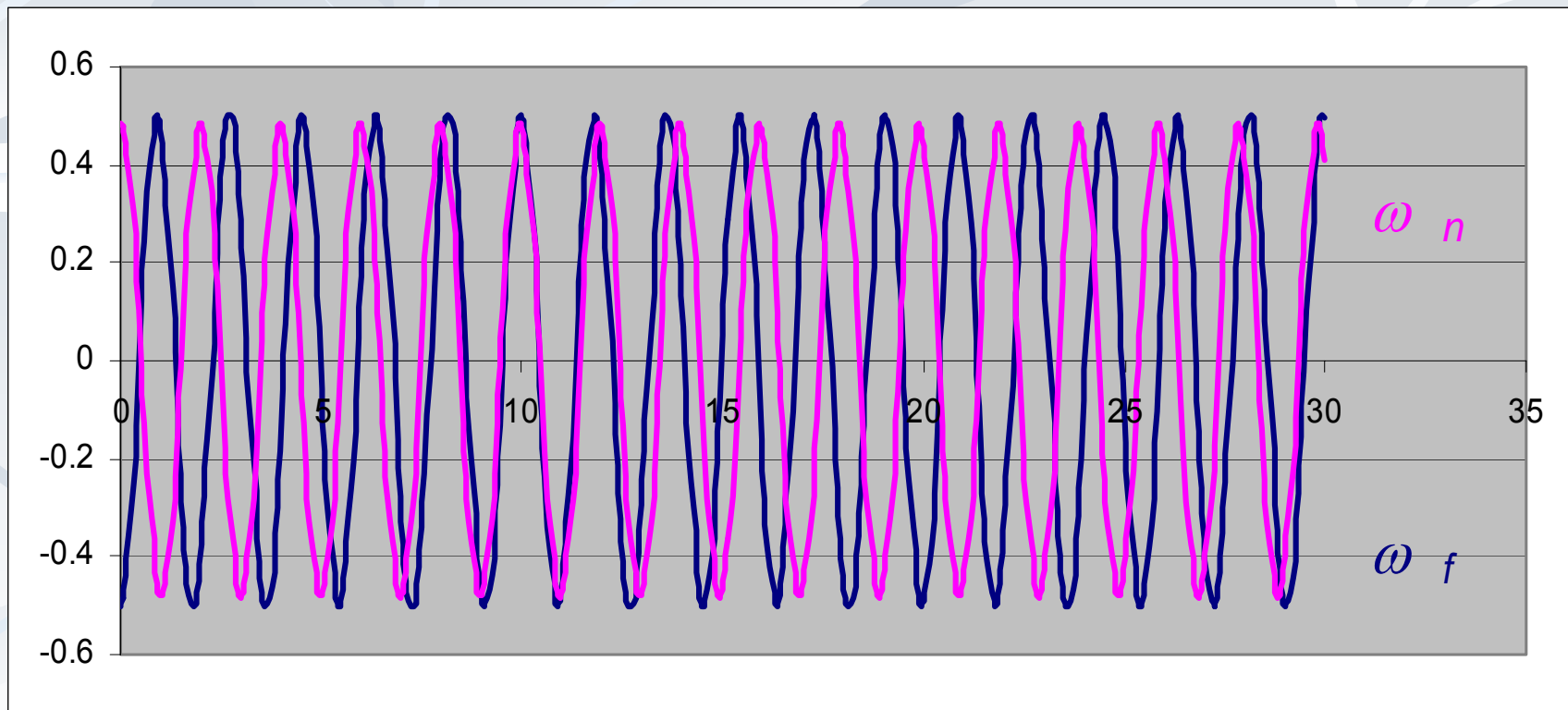
پاسخ سیستم ناپیرا به تحریک هارمونیک

■ پاسخ کلی سیستم که مشخصاً دارای دو فرکانس متفاوت است



**Response for $m=100$ kg, $k=1000$ N/m, $F=100$ N, $\omega_f = \omega_n + 3$
 $v_{\bar{\theta}}=0.1$ m/s and $x_{\bar{\theta}} = -0.02$ m.**

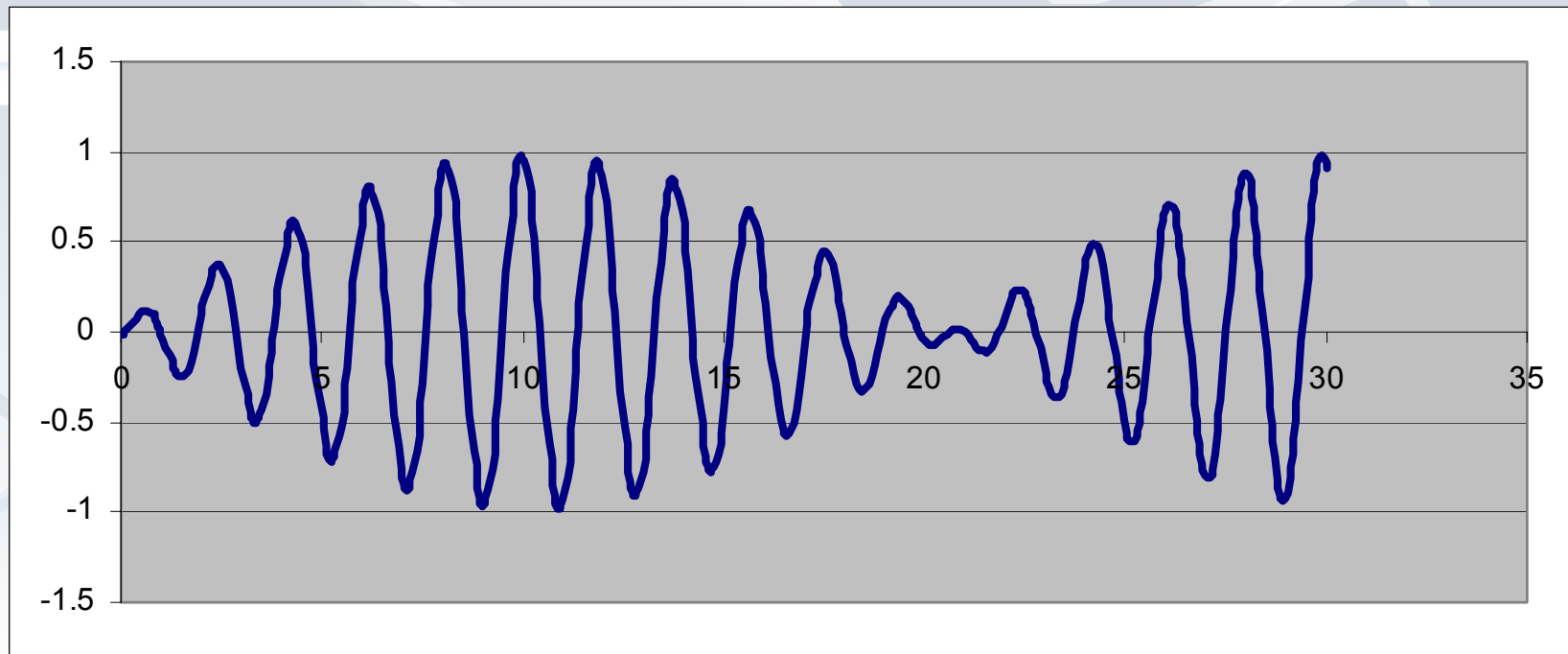
پاسخ سیستم ناپیرا به تحریک هارمونیک



Response for $m=100$ kg, $k=1000$ N/m, $F=100$ N, $\omega_f = \omega_n + 0.3$
 $v_0 = 0.1$ m/s and $x_0 = -0.02$ m.

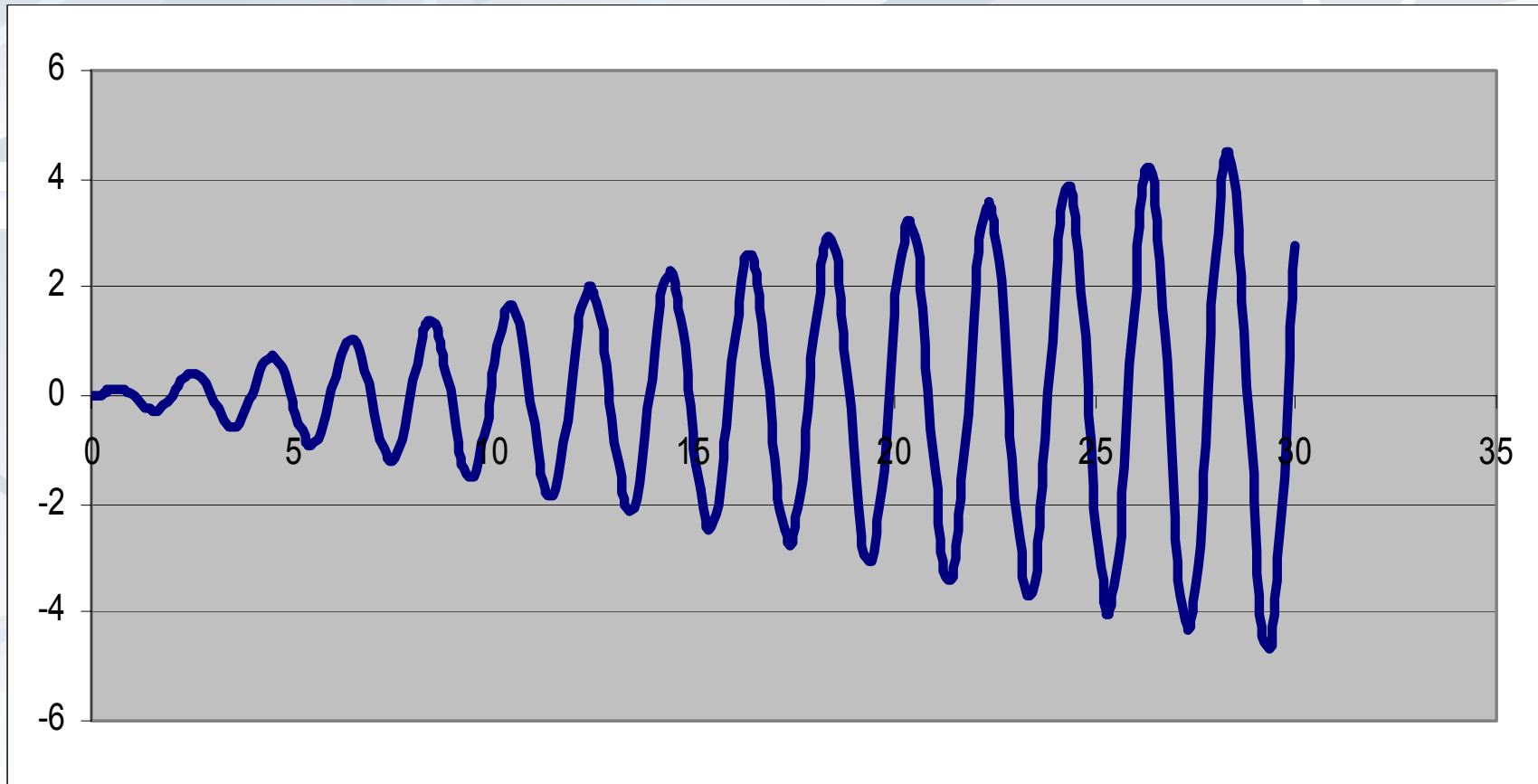
پاسخ سیستم ناپیرا به تحریک هارمونیک

■ پاسخ کلی سیستم



**Response for $m=100$ kg, $k=1000$ N/m, $F=100$ N, $\omega_f = \omega_n + 0.3$
 $v_0 = 0.1$ m/s and $x_0 = -0.02$ m.**

پاسخ سیستم نامیبراً به تحریک هارمونیک



**Response for $m=100$ kg, $k=1000$ N/m, $F=100$ N, $\omega_f \approx \omega_n$
 $\nu_0=0.1$ m/s and $x_0=-0.02$ m.**

شرایط خاص جواب

■ با فرض شرایط اولیه صفر:

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} [\cos(\omega_f t) - \cos(\omega_n t)]$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$$

$$x(t) = \frac{2_0 f}{\omega_n^2 - \omega_f^2} \left[\sin\left(\frac{\omega_f + \omega_n}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_n - \omega_f}{2} t\right) \right]$$

■ حال اگر $\omega_n - \omega_f = 2\varepsilon$ مقدار کوچکی باشد و $\omega_n + \omega_f = 2\omega_n$ باشد
آنگاه:

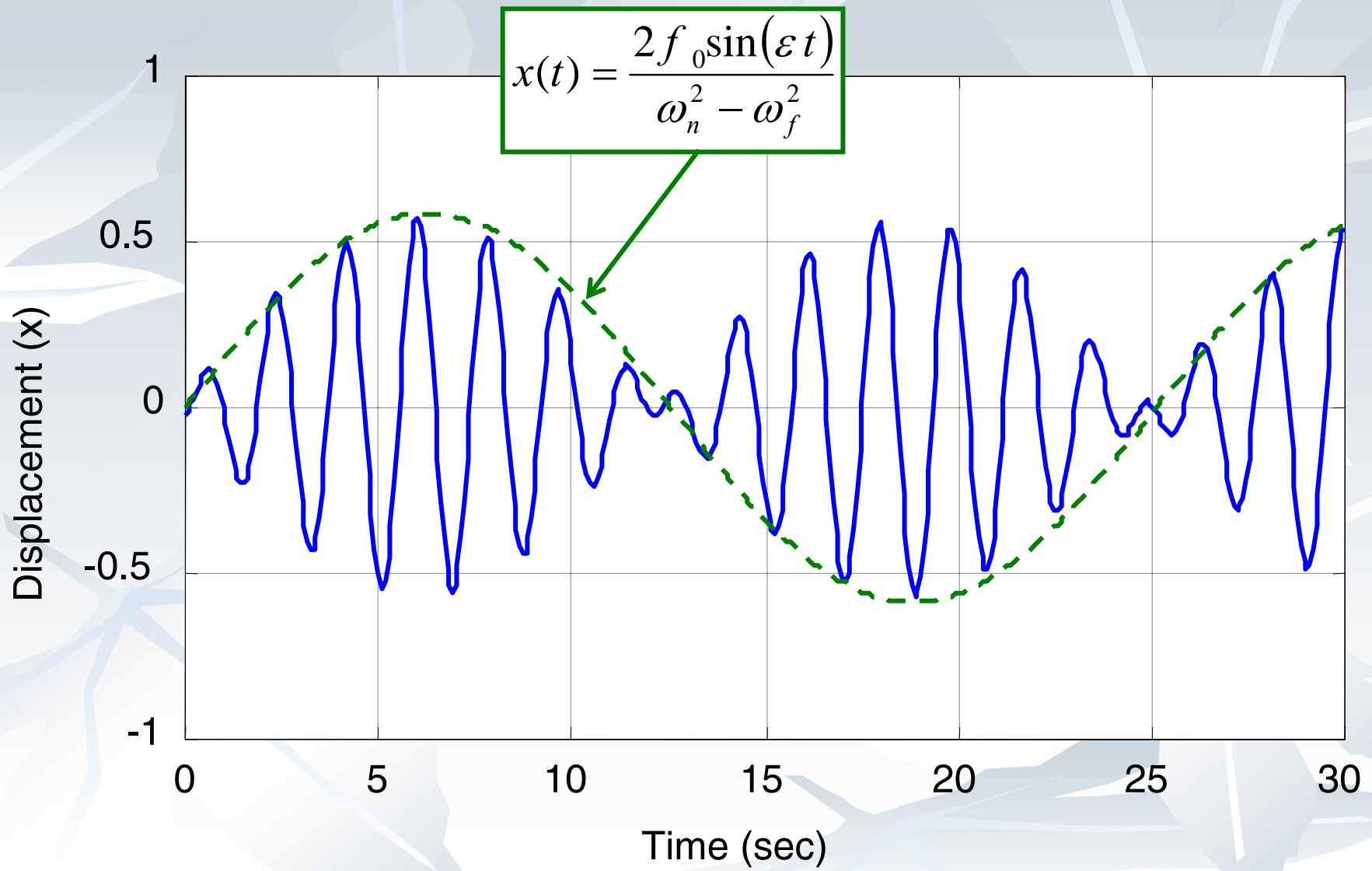
$$x(t) = \frac{2_0 f \sin(\varepsilon t)}{\omega_n^2 - \omega_f^2} [\sin(\omega_n t)]$$

شرایط خاص جواب (تپش)

- در این حالت تپش یا ضربان اتفاق می افتد و دامنه به صورت سینوسی کم و زیاد می شود.
- اگر $\omega_n \rightarrow \omega_f$ در نتیجه ε عدد بسیار کوچکی است و در نتیجه k با خود آن زیاده است.

$$x(t) = \frac{2f_0 \sin(\varepsilon t)}{\omega_n^2 - \omega_f^2} [\sin(\omega_n t)] = \frac{2f_0(\varepsilon t)}{4\omega_n \varepsilon} [\sin(\omega_n t)]$$

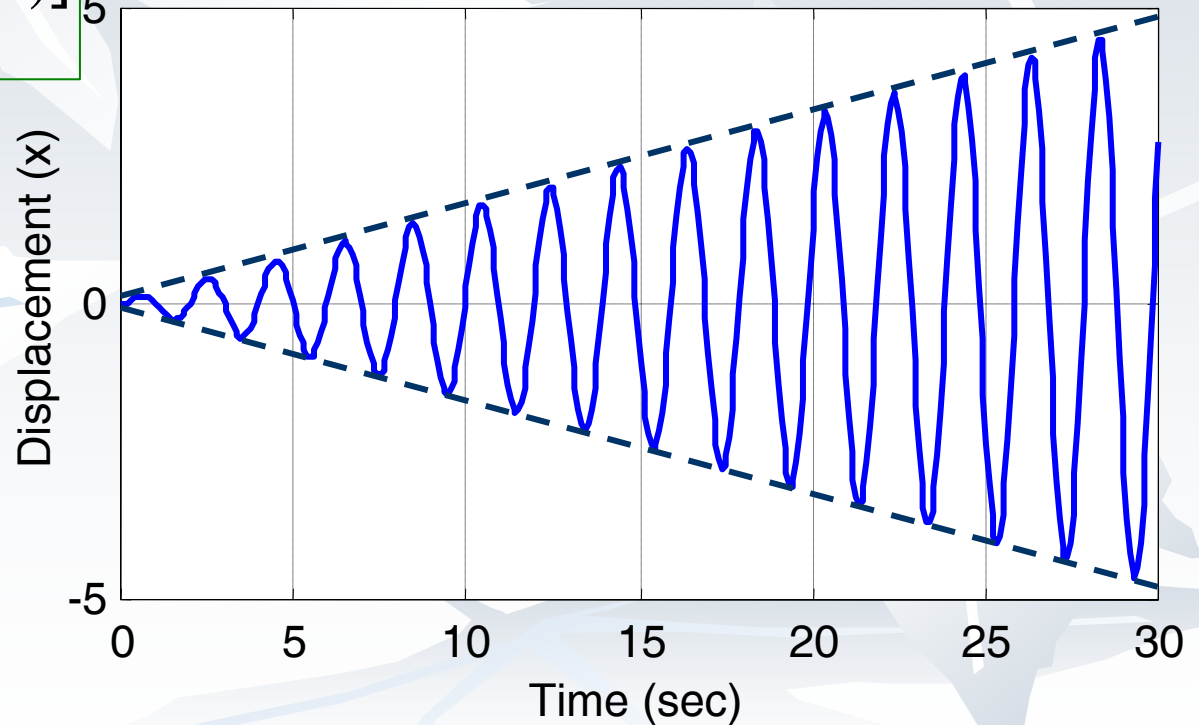
$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_n} t [\sin(\omega_n t)]$$



ڈیبرایط خاص جواب (تشدید)

■ این حالت را تشدید یا رزونانس گویند که دامنه بصورت خطی بسمت بینهایت میل می کند

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_n} t [\sin(\omega_n t)]$$



مقایسه ارتعاش آزاد و اجباری

- اگر ω کانس ω_n باشد، مجموعه دو جمله هارمونیک با فرکانسهای متفاوت می باشد.
 - پاسخ دارای دامنه و فازی است که موثر از نیرو است.
 - برای $\omega_f = \omega_n$ پاسخ تعریف نشده است، چون $\lim_{\omega_f \rightarrow \omega_n} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_f^2} = \infty$ بر تقسیم شده است.
- فرکانس f به فرکانس طبیعی میل کند دامنه جواب خصوصیت بسیار بزرگ شود.

خصوصیت بسیار بزرگ پدیدار می شود، این صورت است و اغلب

دامنه و فاز می نویسند و دامنه را بر حسب فرکانس تحریک ω رسم

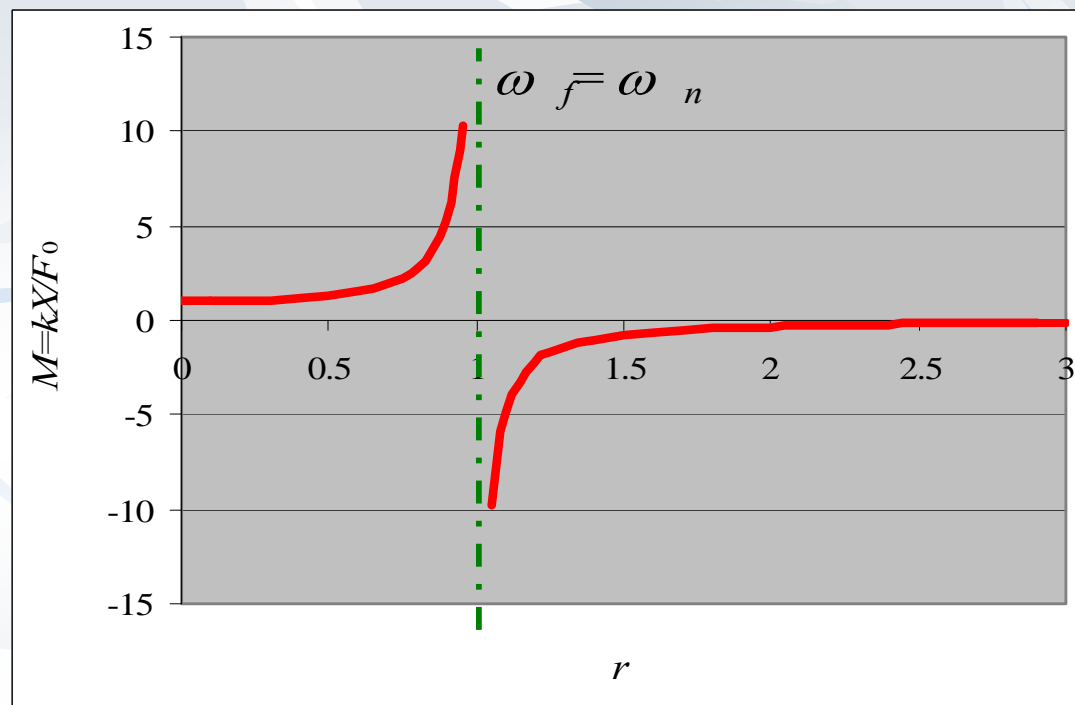
می کنند:

$$x(t) = X \cos(\omega_f t + \phi) \quad X = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2}, \quad \phi = 0$$

ترسییم نمودار بزرگنمایی

■ برای ترسییم نمودار باید از مقادیر بی بعد استفاده کرد لذا:

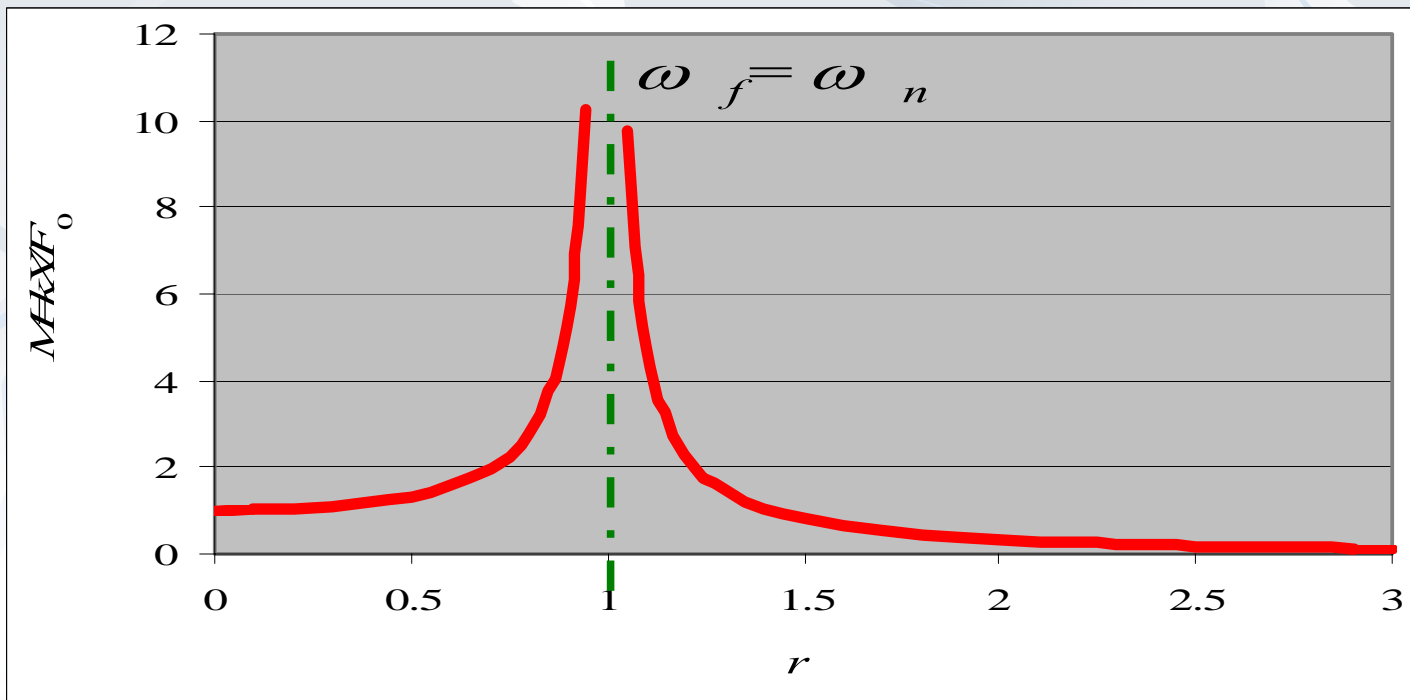
$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \omega_f^2 / \omega_n^2}, \Rightarrow M = \frac{kX}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2} \quad \phi = 0$$



ترسیم نمودار بزرگنمایی

معمولاً این ترسیم ترسیمه و به بلق صورت نقطه ترسیم می شود که:

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{1}{|1 - \omega_f^2 / \omega_n^2|}, \Rightarrow M = \frac{kX}{F_0} = \frac{1}{|1 - r^2|} \quad \phi = \begin{cases} 0 & \omega_f < \omega_n \\ 180 & \omega_f > \omega_n \end{cases}$$



مثال: پاسخ را برای ($m=10 \text{ kg}$, $k=1000 \text{ N/m}$, $F=23 \text{ N}$, $\omega_f=2\omega_n$)
 محاسبه و رسم نمائید. ($x_0=0$, $v_0=0.2 \text{ m/s}$)

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000 \text{ N/m}}{10 \text{ kg}}} = 10 \text{ rad/s}, \quad \omega_f = 2\omega_n = 20 \text{ rad/s}$$

$$f_0 = \frac{F}{m} = \frac{23 \text{ N}}{10 \text{ kg}} = 2.3 \text{ N/kg}, \quad \frac{v_0}{\omega_n} = \frac{0.2 \text{ m/s}}{10 \text{ rad/s}} = 0.02 \text{ m}$$

$$\frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} = \frac{2.3 \text{ N/kg}}{(10^2 - 20^2) \text{ rad}^2 / \text{s}^2} = -7.9667 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$x(t) = 0.02 \sin 10t + 7.667 \times 10^{-3} (\cos 10t - \cos 20t)$$

مثال

10 Hz و
0.01m

کی برفرکانس

رض

م ووفنرچ طائزہ
2000N/m

اندازہ 20 N

باشند، جرم سیستم را محاسبه نمائید.

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} (\cos 20\pi t - \cos \omega_n t) \text{ for zero initial conditions}$$

$$\text{trig identity} \Rightarrow x(t) = \frac{2f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{\omega_n - \omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_n + \omega}{2}t\right)$$

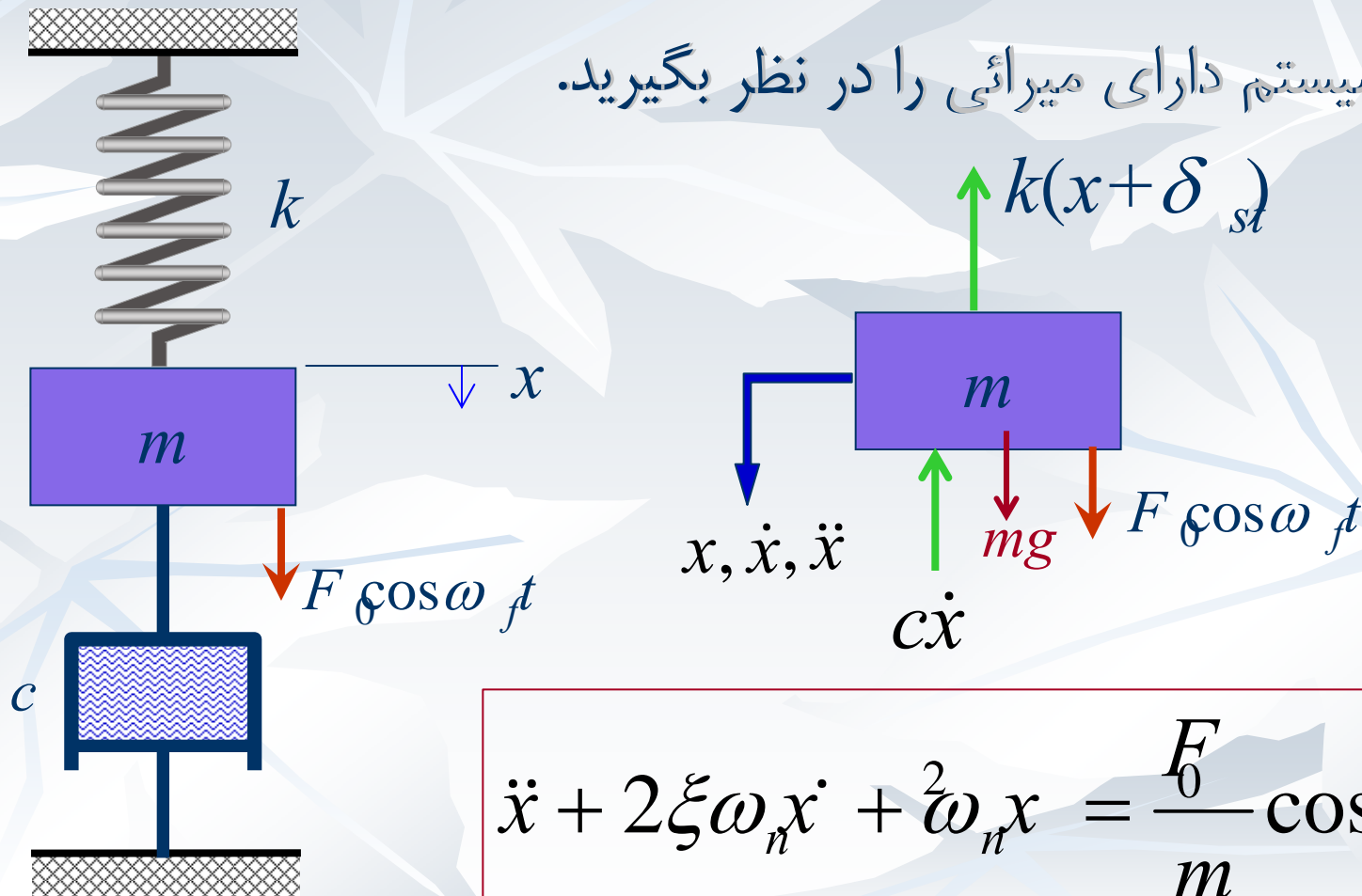
0.1m

$$\Rightarrow \frac{2f_0}{\omega_n^2 - \omega^2} = 0.1 \Rightarrow \frac{2(20/m)}{(2000/m) - (20\pi)^2} = 0.1$$

$$\underline{m = 0.45 \text{ kg}}$$

پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

■ یک سیستم دارای میرائی را در نظر بگیرید.



$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

■ معادله حرکت دارای دو پاسخ خصوصی و عمومی است:

■ پاسخ عمومی: فرض شده $0 < \xi < 1$

$$x_g(t) = e^{-\xi \omega_d t} (A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t))$$

خصوصی: صورتی که مقابل فرقی:

خصوصی به صورت

$$x_p(t) = X \cos(\omega_f t - \phi)$$

■ در نتیجه

$$x_p(t) = X \cos(\omega_f t - \phi) \quad \dot{x}_p(t) = -\omega_f X \sin(\omega_f t - \phi)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega_f^2 X \cos(\omega_f t - \phi)$$

پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

■ با قرار دادن در معادله:

$$\ddot{x}_p + 2\xi\omega_n \dot{x}_p + \omega_n^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t$$

$$-\omega_f^2 X \cos(\omega_f t - \phi) + 2\xi\omega_n [-\omega_f X \sin(\omega_f t - \phi)] + \omega_n^2 [X \cos(\omega_f t - \phi)] = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t$$

$$(\omega_n^2 - \omega_f^2) X \cos(\omega_f t - \phi) - 2\xi\omega_n [\omega_f X \sin(\omega_f t - \phi)] = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t$$

پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

■ استفاده از روابط مثلثاتی:

$$\begin{aligned} & (\omega_n^2 - \omega_f^2)X [\cos(\omega_f t) \cos(\phi) + \sin(\omega_f t) \sin(\phi)] \\ & - 2X\xi\omega_n\omega_f [\sin(\omega_f t) \cos(\phi) - \cos(\omega_f t) \sin(\phi)] = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t \end{aligned}$$

$$(\omega_n^2 - \omega_f^2)X \cos(\phi) + 2X\xi\omega_n\omega_f \sin(\phi) = \frac{F_0}{m} \quad (1)$$

$$(\omega_n^2 - \omega_f^2)X \sin(\phi) - 2X\xi\omega_n\omega_f \cos(\phi) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \times 2\xi\omega_n\omega_f + (2) \times (\omega_n^2 - \omega_f^2) = 2\xi\omega_n\omega_f \frac{F_0}{m}$$

پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

■ استفاده از روابط قبل:

$$(1) \times 2\xi\omega_n\omega_f + (2) \times (\omega_n^2 - \omega_f^2) \Rightarrow$$

$$\left[(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_f)^2 \right] X \sin \phi = 2\xi\omega_n\omega_f \frac{F_0}{m}$$

$$(1) \times (\omega_n^2 - \omega_f^2) - (2) \times 2\xi\omega_n\omega_f \Rightarrow$$

$$\left[(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_f)^2 \right] X \cos \phi = (\omega_n^2 - \omega_f^2) \frac{F_0}{m}$$

پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

■ استفاده از روابط قبل:

$$X^2 = \frac{\left((\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_f)^2 \right) \left(\frac{F_0}{m} \right)^2}{\left((\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_f)^2 \right)^2}$$

$$X = \frac{\left(\frac{F_0}{m} \right)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_f)^2}} = \frac{\left(\frac{F_0}{k} \right)}{\sqrt{\left(1 - \omega_f^2 / \omega_n^2\right)^2 + \left(2\xi\omega_f / \omega_n\right)^2}}$$

$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$r = \frac{\omega_f}{\omega_n}$$

پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

همچنین: ■

$$\left[(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_f)^2 \right] X \sin \phi = 2\xi\omega_n\omega_f \frac{F_0}{m}$$

$$\left[(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_f)^2 \right] X \cos \phi = (\omega_n^2 - \omega_f^2) \frac{F_0}{m}$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi\omega_n\omega_f}{(\omega_n^2 - \omega_f^2)} = \frac{2\xi r}{1 - r^2},$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1 - r^2} \right)$$

پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

پاسخ کلی:

پاسخ گذرا

پاسخ حالت پایدار

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)] + X \cos(\omega t - \phi)$$

X و ϕ

$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r^2)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r^2} \right)$$

پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

■ بدست آوردن A_1 و A_2 :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] + X \cos(\omega_f t - \phi)$$

$$\dot{x}(t) = -\xi\omega_n x(t) + e^{-\xi\omega_n t} [-\omega_d A_1 \sin(\omega_d t) + \omega_d A_2 \cos(\omega_d t)] - \omega_f X \sin(\omega_f t - \phi)$$

$$x(0) = x_0 = A_1 + X \cos(\phi) \Rightarrow A_1 = x_0 - X \cos(\phi)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\xi\omega_n x_0 + \omega_d A_2 + \omega_f X \sin(\phi)$$

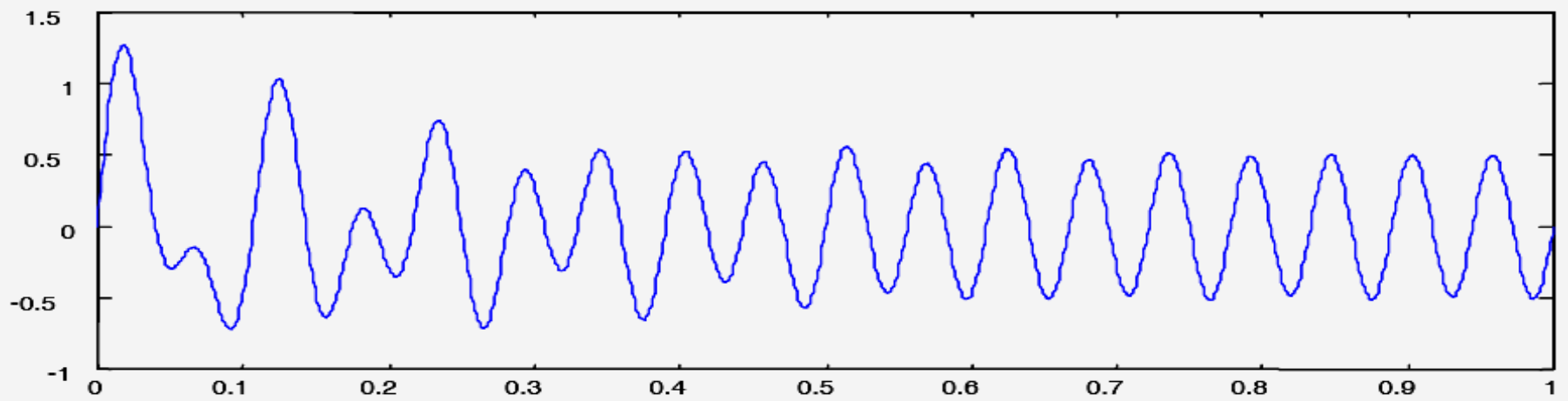
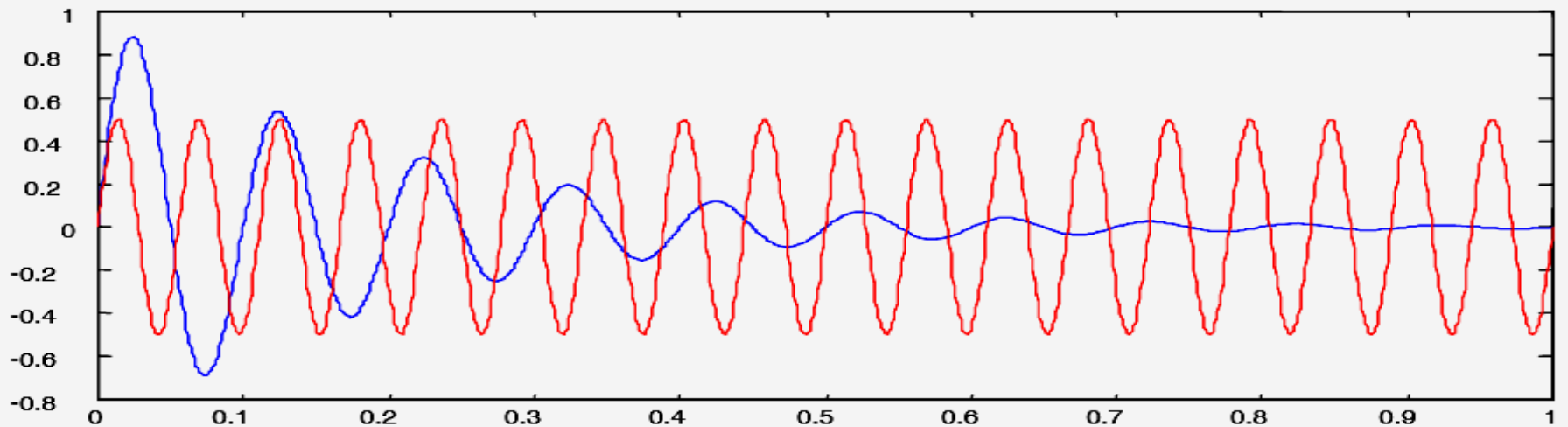
$$\Rightarrow A_2 = \frac{1}{\omega_d} [v_0 + \xi\omega_n x_0 - \omega_f X \sin(\phi)]$$

■ برای شرایط مرزی صفر

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] + X \cos(\omega_f t - \phi)$$

$$A_1 = -X \cos(\phi), \quad A_2 = -\frac{\omega_f}{\omega_d} X \sin(\phi)$$

پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک



پاسخ سیستم میرا به تحریک هارمونیک

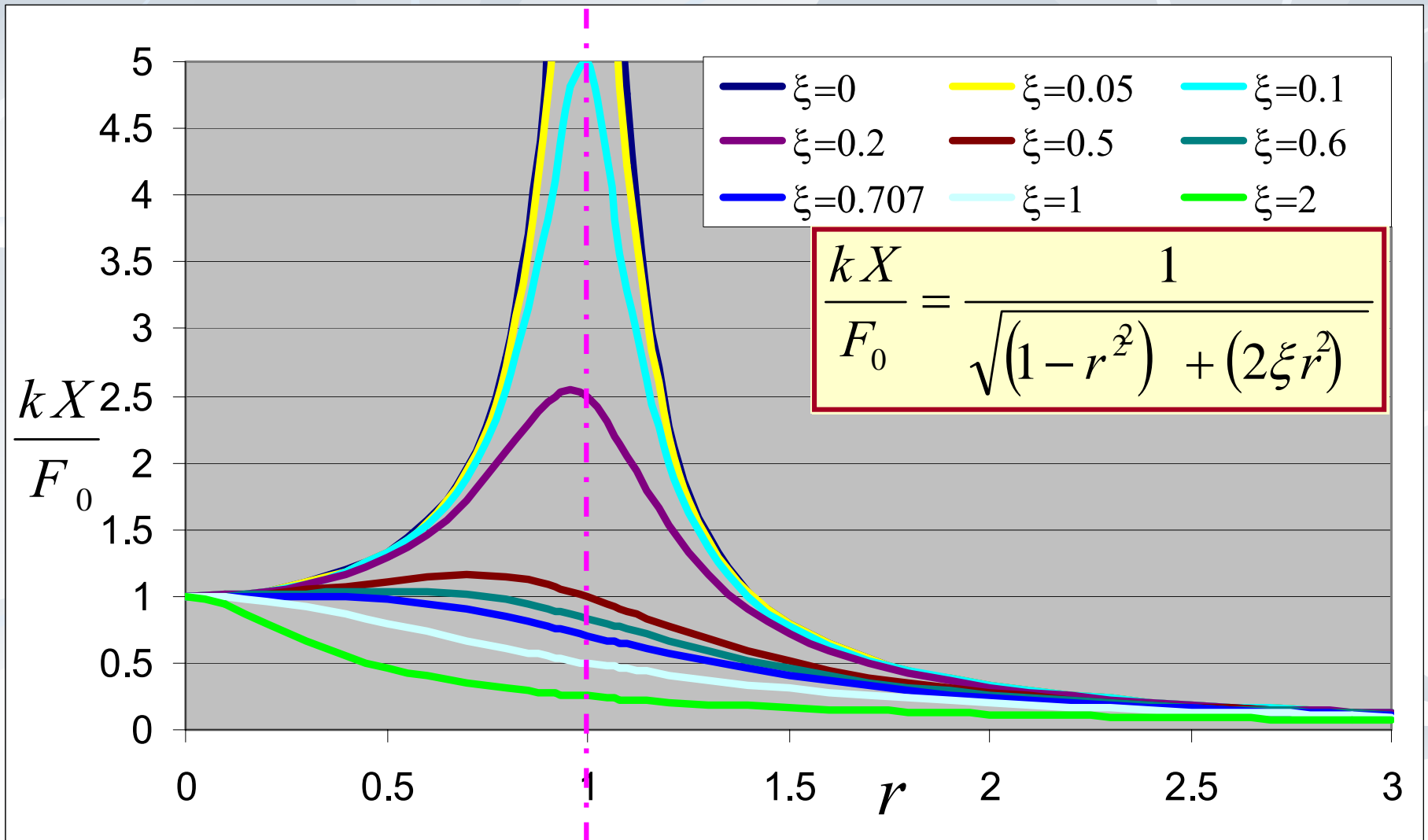
■ بدلیل میرائی بعد از مدتی پاسخ گذرا حذف و فقط پاسخ حالت پایدار باقی می ماند.

$$x(t) = X \cos(\omega t - \phi)$$

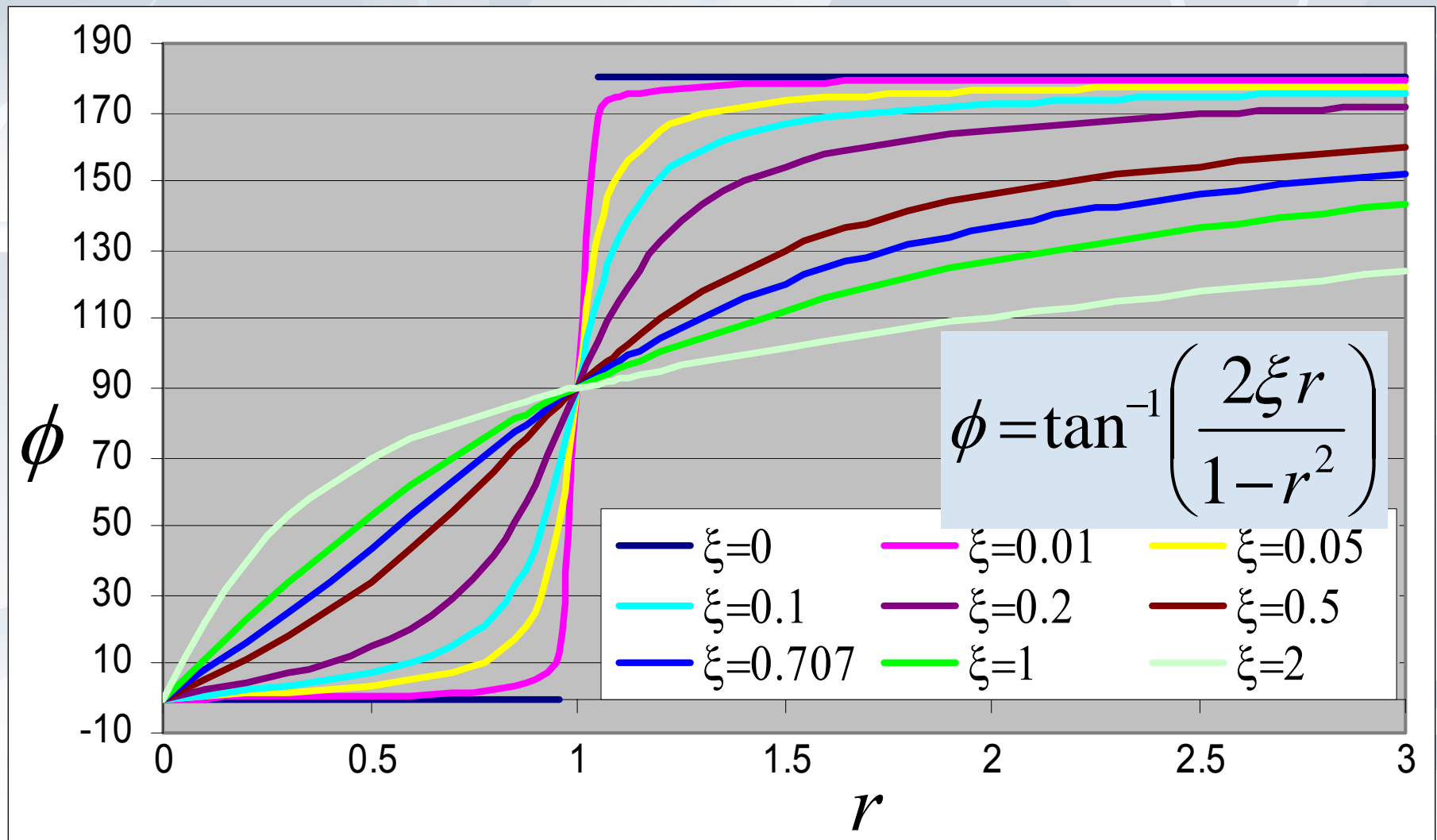
$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$$

نمودار بزرگنمایی



زاویه فاز

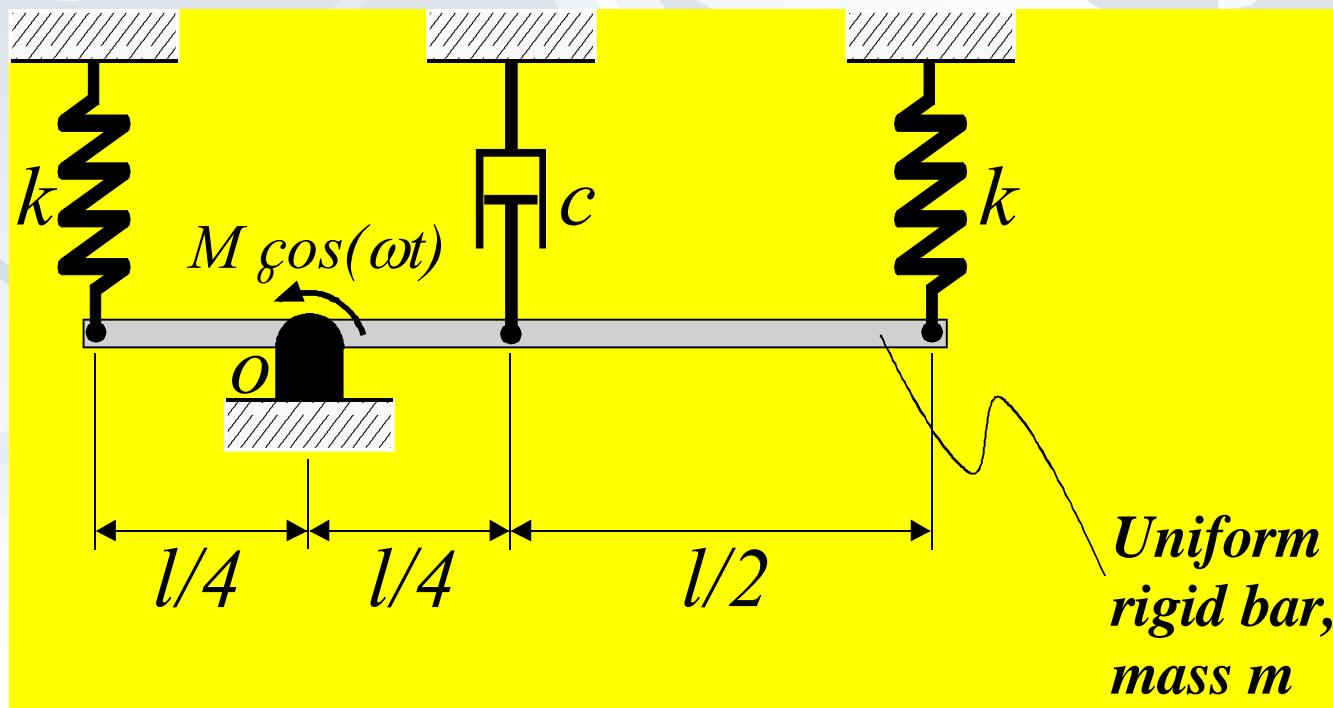


مثال

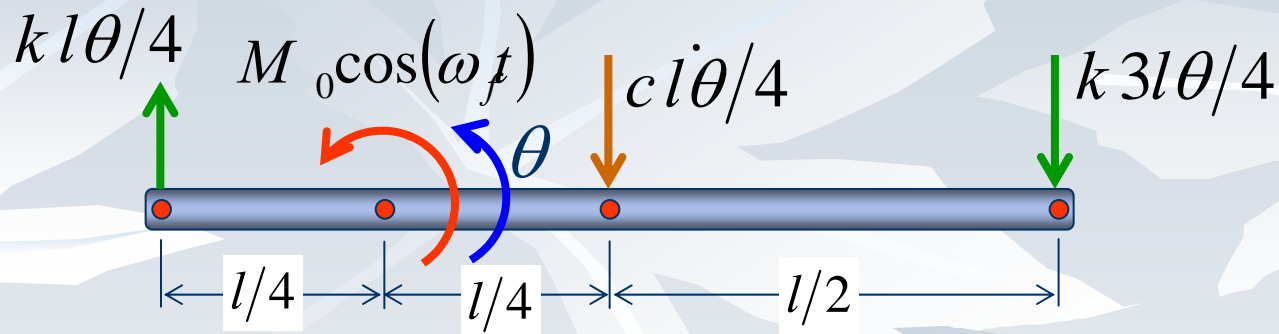
$$l = 1m \quad k = 5000 \text{ N/m} \quad c = 1000 \text{ N} \cdot \text{s/m} \quad m = 10\text{kg}$$

$$M_o = 100 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \omega = 1000 \text{ rpm}$$

معادله حرکت و پاسخ
حالت پایدار؟



مثال

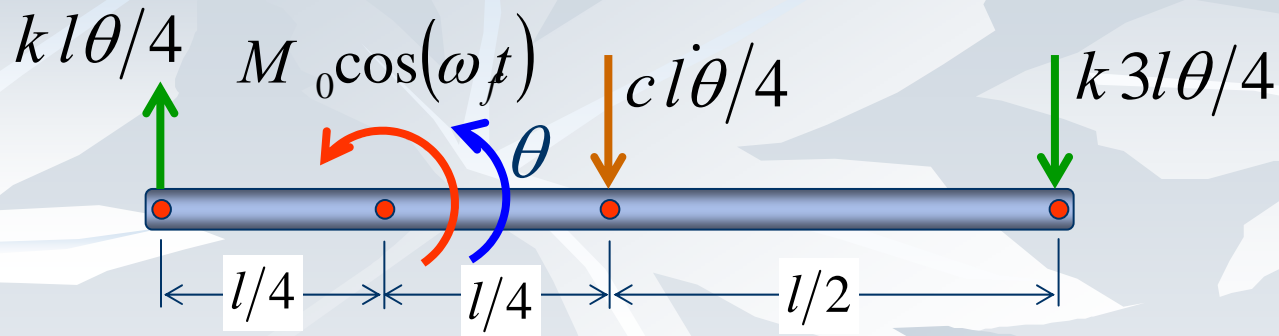


$$\sum M_o^{\leftarrow} = J \ddot{\theta} \quad M_0 \cos(\omega_f t) - \frac{kl}{4} \theta \frac{l}{4} - \frac{cl}{4} \dot{\theta} \frac{l}{4} - \frac{3kl}{4} \theta \frac{3l}{4} = \left(\frac{ml^2}{12} + m \frac{l^2}{16} \right) \ddot{\theta}$$

$$M_0 \cos(\omega_f t) - \frac{10kl^2}{16} \theta - \frac{cl^2}{16} \dot{\theta} = ml^2 \left(\frac{7}{48} \right) \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{7ml^2}{48} \ddot{\theta} + \frac{cl^2}{16} \dot{\theta} + \frac{10kl^2}{16} \theta = M_0 \cos(\omega_f t)$$

مثال

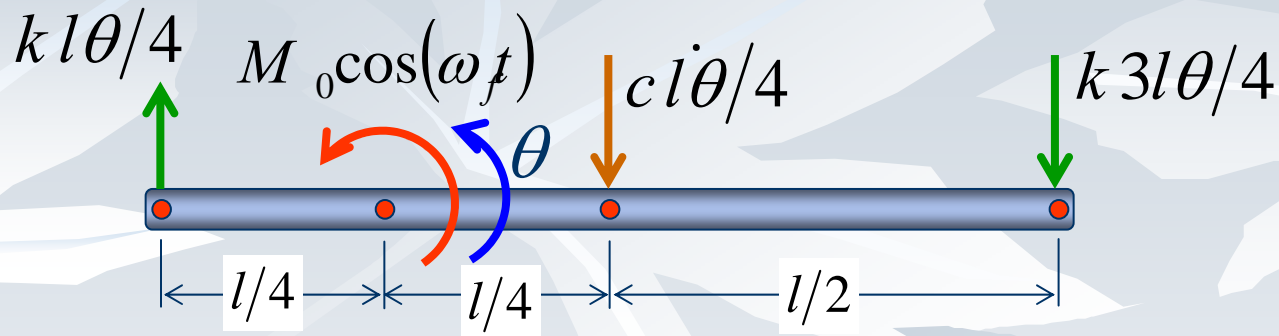


$$\frac{7ml^2}{48} \ddot{\theta} + \frac{cl^2}{16} \dot{\theta} + \frac{10kl^2}{16} \theta = M_0 \cos(\omega_f t)$$

$$k_{eq} = \frac{10kl^2}{16} \quad c_{eq} = \frac{cl^2}{16} \quad m_{eq} = \frac{7ml^2}{48}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{10kl^2/16}{7ml^2/48}} = \sqrt{\frac{30k}{7m}}$$

مثال



$$\ddot{\theta} + \frac{3c}{7m} \dot{\theta} + \frac{30k}{7m} \theta = \frac{48M_0}{7ml^2} \cos(\omega_f t)$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = f_0 \cos(\omega_f t)$$

$$T = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_f)^2}}$$

$$\theta(t) = T \cos(\omega_f t - \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1 - r^2} \right)$$

مثال

$$l = 1m \quad k = 5000 N/m \quad c = 1000 N \cdot s/m \quad m = 10kg$$

$$M_o = 100N \cdot m \quad \omega_f = 1000rpm = \frac{2\pi}{60} 1000 = \frac{2000\pi}{60} = 104.8 \text{ rad / s}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3000}{70} \dot{\theta} + \frac{150000}{70} \theta = \frac{4800}{70} \cos(104.8t)$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = f_0 \cos(\omega_f t) \quad T = \frac{(f_0)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_f^2)^2 + (2\xi\omega_n\omega_f)^2}}$$

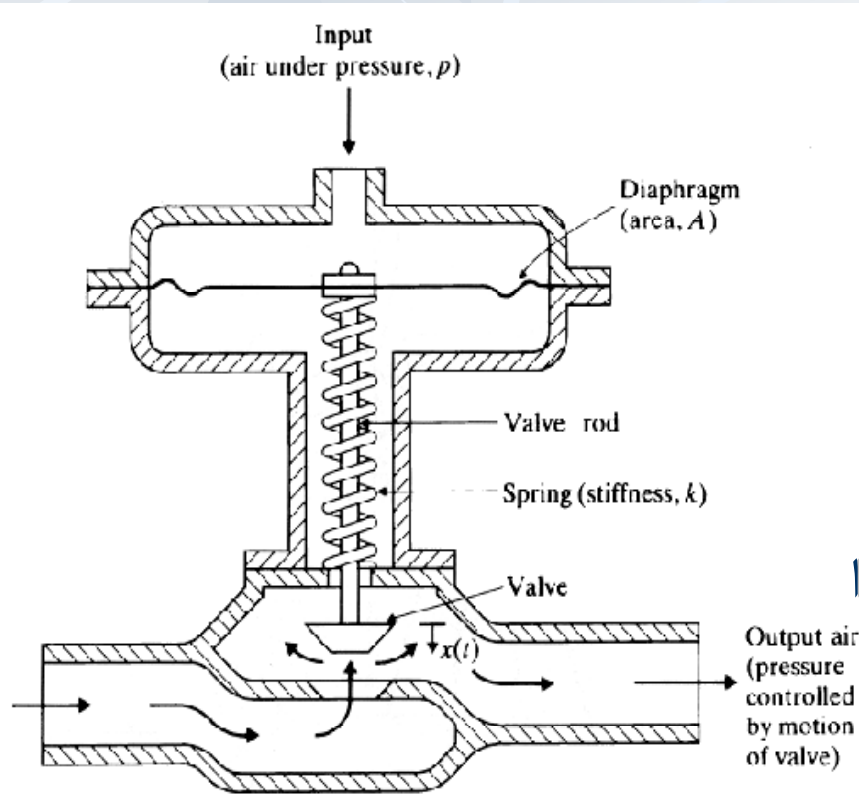
$$\omega_n = \sqrt{150000/70} = 46.29, \quad 2\xi\omega_n = \frac{3000}{70} = 42.86, \quad 2\xi\omega_n\omega_f = 4491.4$$

$$T = \frac{4800/70}{\sqrt{(150000/70 - 104.8^2)^2 + (4491.4)^2}} = 6.92 \times 10^3 \text{ Rad}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{4491.4}{150000/70 - 104.8^2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{4491.4}{150000/70 - 104.8^2} \right) = 153.1^\circ = 2.67 \text{ rad}$$

$$\theta(t) = T \cos(\omega t - \phi) = 6.92 \times 10^3 \cos(104.8t - 2.67)$$

مثال

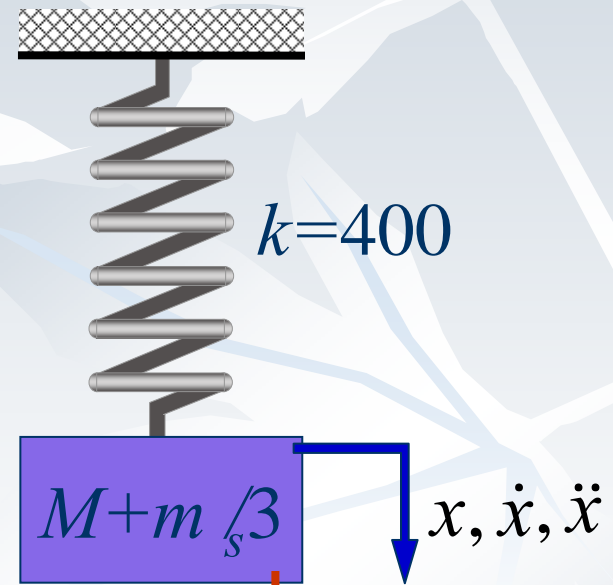
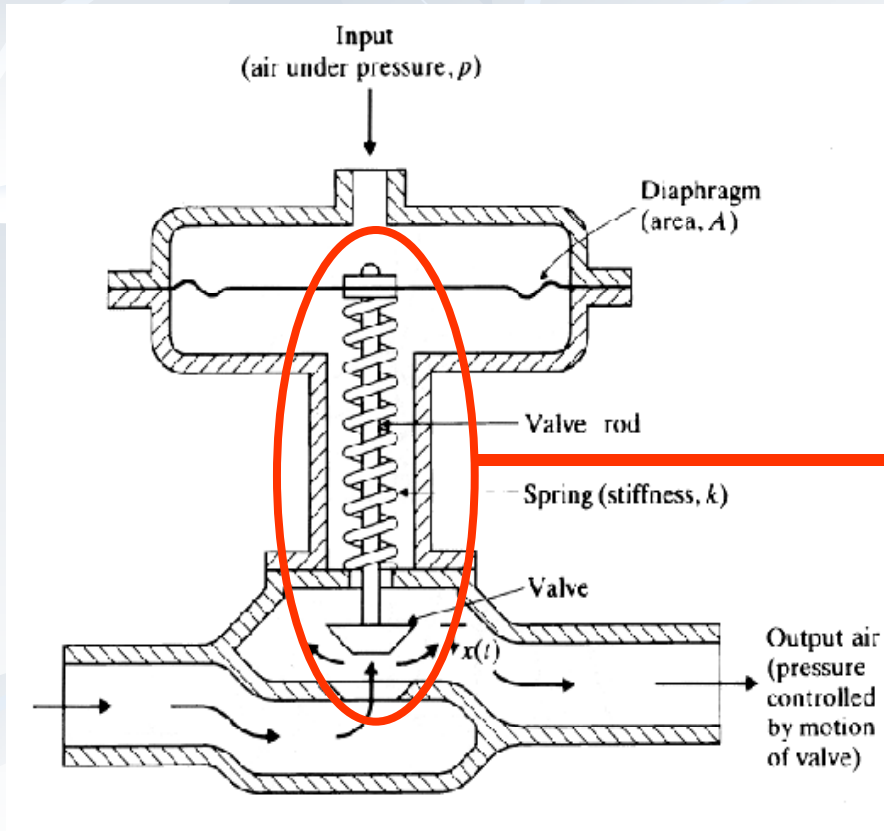


عملگر فنری نشان داده شده با استفاده از فشار هوای متغیر با زمان $p(t)$ بعنوان ورودی از کنترلر پنوماتیکی عمل می کند. تاثیر آن خروجی جابجائی ورودی است. دیافراگم لاستیکی دارای دارای سطح مقطع A است که تحت فشار هوای ورودی و در مقابل فنر k سختی دهد تغییر شکل می دهد. وزن فنر 15 lb شیر 20 lb شیر و 20 است. پاسخ شیر تحت فشار نوسانی هارمونیک $p(t) = p_0 \cos \omega t$ را برای داده های زیر بدست آورید.

$$p_0 = 10 \text{ psi} \quad \omega = 8 \text{ rad/s} \quad A = 100 \text{ in}^2$$

$$k = 400 \text{ lb}_f/\text{in}$$

حل

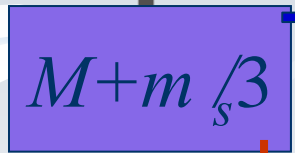


$$p_0 A \cos \omega t = 1000 \cos 8 t$$

$$M + m_{s/3} = \frac{1}{g} [20 + 15/3] = \frac{25}{32.2 \times 12} = 0.0647 \frac{lb \cdot s^2}{in}$$



$k=400$



$$p \cos \omega_f t = 1000 \cos 8t$$

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_n^2 - \omega_f^2} [\cos(\omega_f t) - \cos(\omega_n t)]$$

$$x(t) = \frac{1000 / 0.0647}{400 / 0.0647 - 64} [\cos(8t) - \cos(\sqrt{400 / 0.0647} t)]$$

$$x(t) = 2.526 [\cos(8t) - \cos(78.63 t)]$$

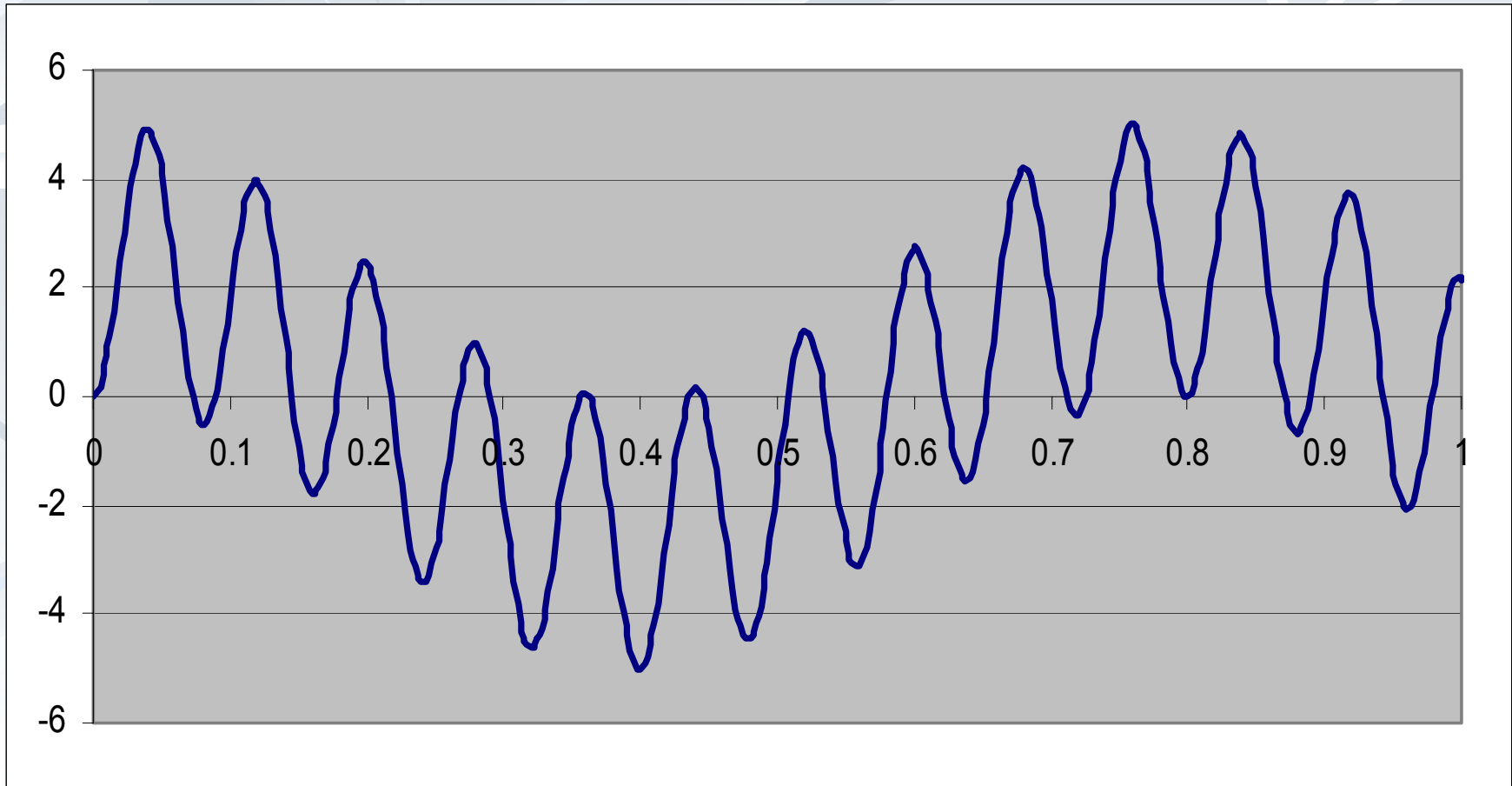
حل

$$M + m_s/3 = \frac{1}{g} [20 + 15/3] = \frac{25}{32.2 \times 12} = 0.0647 \frac{lb \cdot s^2}{in}$$

$$m_{eq} \ddot{x} + k_{eq} x = F_0 \cos \omega_f t$$

$$0.0647 \ddot{x} + 400x = 1000 \cos 8t$$

حل



مقدار بیشینه ضریب بزرگنمایی

- برای بدست آوردن مقدار بیشینه باید نسبت به r از معادله مربوطه مشتق گرفته معادل صفر قرار داد.

$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{kX}{F_0} \right) = 0 \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \right) = - \frac{2(-2r)(1-r^2) + 2 \times 4\xi^2 r}{2\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}^3} = 0$$

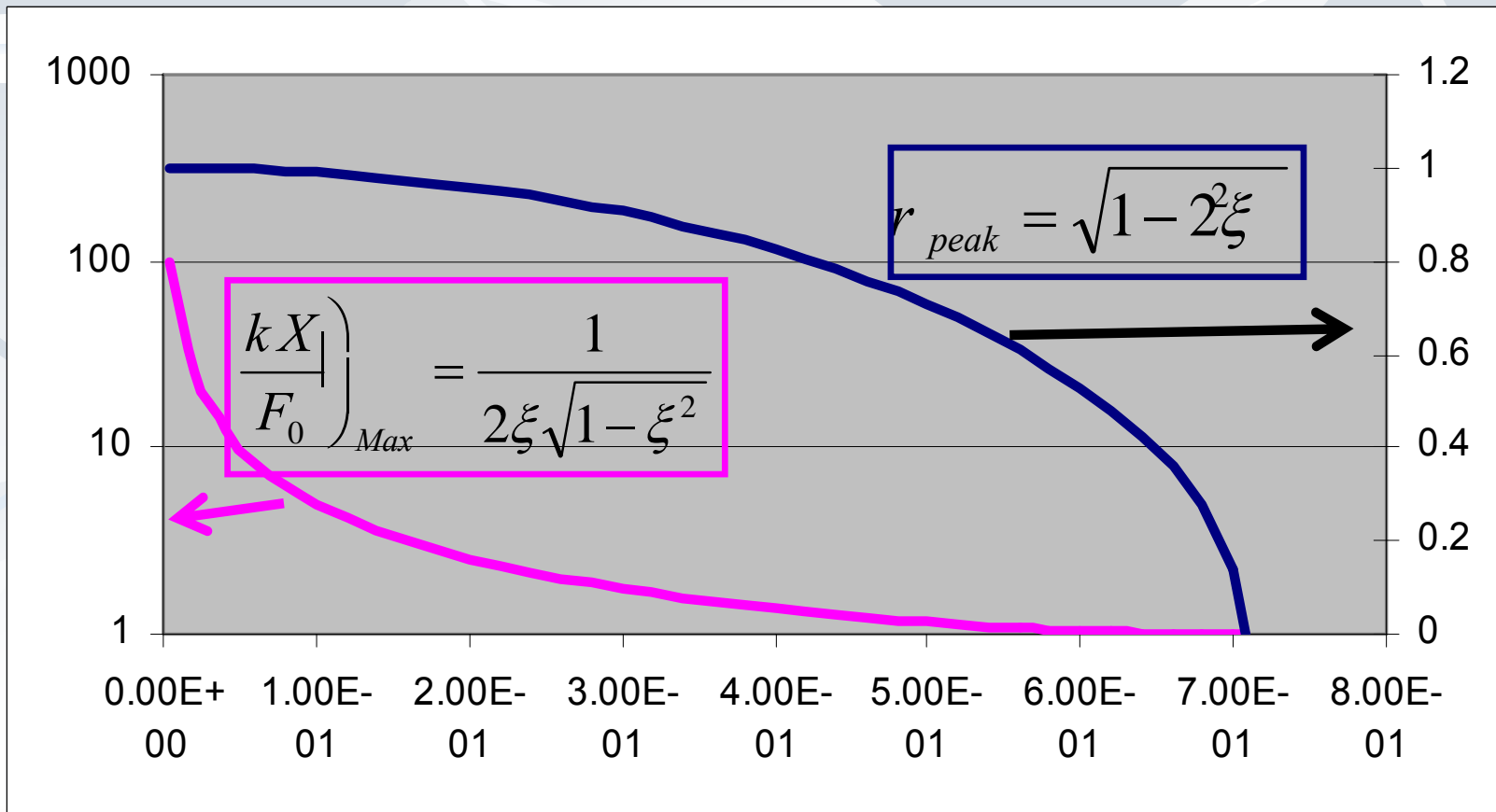
$$-r(1-r^2) + 2\xi^2 r = 0 \quad \begin{cases} r = 0 \\ r^2 = 1 - 2\xi^2 \end{cases} \rightarrow r_{peak} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \xi \leq 1/\sqrt{2}$$

$$\left. \frac{kX}{F_0} \right|_{Max} = \frac{1}{\sqrt{(1-1+2\xi^2)^2 + 4\xi^2(1-2\xi^2)}} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

مقدار بیشترین ضریب بزرگنمایی

$$\left. \frac{kX_1}{F_0} \right)_{Max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$r_{peak} = \sqrt{1-2\xi^2}$$



در باره ضریب بزرگنمایی

■ توجه شود که حتی مقادیر کوچک میرائی ضریب بزرگنمایی را و در نتیجه دامنه پاسخ را به مقدار زیاد کاهش می‌دهد و می‌تواند کاهش دهد.

اتفاق می

افتد.

بزرگنمایی از بزرگنمایی همواره

■ برای نسبت میرائی کمتر کمتر از ضریب ضریب همواره

همواره کمتر از

■ برای نسبت میرائی بیشتر از ضریب بزرگنمایی

نیروی هارمونیکی مختلط

■ فرض کنید نیروی هارمونیکی بصورت مختلط ارائه شود:

$$f(t) = F_0 e^{i\omega_f t}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega_f t}$$

■ لذا:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_f t}$$

■ یا

■ پاسخ خصوصی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر فرض می شود:

$$x(t) = X e^{i\omega_f t} \quad \dot{x}(t) = i\omega_f X e^{i\omega_f t} = \omega_f X e^{i(\omega_f t + \pi/2)}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_f^2 X e^{i\omega_f t} = \omega_f^2 X e^{i(\omega_f t + \pi)}$$

نظریه هارمونیکی مختلط

■ با قرار دادن در معادله حرکت:

$$-m\omega_f^2 X e^{i\omega_f t} + ic\omega_f X e^{i\omega_f t} + kX e^{i\omega_f t} = F_0 e^{i\omega_f t}$$

$$\left[(k - m\omega_f^2) + ic\omega_f \right] X e^{i\omega_f t} = F_0 e^{i\omega_f t}$$

$$\left[(k - m\omega_f^2) + ic\omega_f \right] X = F_0$$

■ $Z(i\omega) = (k - m\omega_f^2) + ic\omega_f$ را امپدانس مکانیکی گویند.

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega_f^2 + ic\omega_f} = \frac{F_0}{k} [H(i\omega)]$$

■ در نتیجه می توان نوشت:
برای جداسازی قسمتهای

حقیقی و موهومی صورت مخرج در مزدوج مخرج ضرب می شود

پاسخ به نیروی هارمونیکی مختلط

$$X = \frac{F_0 (k - m\omega_f^2 - ic\omega_f)}{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}$$

لذا: ■

$$X = F_0 \left[\frac{k - m\omega_f^2}{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2} - i \frac{c\omega_f}{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2} \right]$$

هر عدد مختلط را می توان با مقدار و آرگومان نشان داد. ■

$$Z = x + iy = |Z| e^{Arg(Z)} \quad |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad Arg(Z) = \tan^{-1} \left| \frac{y}{x} \right|$$

پاسخ به نیروی هارمونیکی مختلط

لذا: ■

$$X = |X|e^{-i\phi}$$

$$|X| = F_0 \left[\frac{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}}{\left[(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2 \right]^2} \right] = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{c\omega_f}{k - m\omega_f^2} \right)$$

$$|X| = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1 - r^2} \right)$$

پاسخ به نیروی هارمونیک مختلط

مختلط پاسخ فرکانس (که قبلاً ارائه شد) نیز استفاده می

همچنین از فرکانسی

$$\frac{kX}{F_0} = H(i\omega_f) = \frac{1}{1-r^2 + i2\xi r} \quad H(i\omega_f) = |H(i\omega_f)| e^{i\phi}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$$

$$|H(i\omega_f)| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1-r^2}\right)$$

$$x_P(t) = \frac{F_0}{k} H(i\omega_f) e^{i\omega_f t} = \frac{F_0}{k} |H(i\omega_f)| e^{i(\omega_f t - \phi)}$$

پاسخ به نیروی هارمونیکي مختلط

■ اگر $f(t) = F \cos(\omega_f t)$ باشد، قسمت حقیقی x_p جواب است:

$$x_p(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{F_0}{k} H(i\omega_f) e^{i\omega_f t} \right] = \frac{F_0}{k} |H(i\omega_f)| \operatorname{Re} \left[e^{i(\omega_f t - \phi)} \right]$$

$$x_p(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\omega_f t - \phi)$$

■ اگر $f(t) = F \sin(\omega_f t)$ باشد، قسمت موهومی x_p جواب است:

$$x_p(t) = \operatorname{Im} \left[\frac{F_0}{k} H(i\omega_f) e^{i\omega_f t} \right] = \frac{F_0}{k} |H(i\omega_f)| \operatorname{Im} \left[e^{i(\omega_f t - \phi)} \right]$$

$$x_p(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\omega_f t - \phi)$$

استفاده دیگر از نمایش مختلط (دیاگرام فازوری)

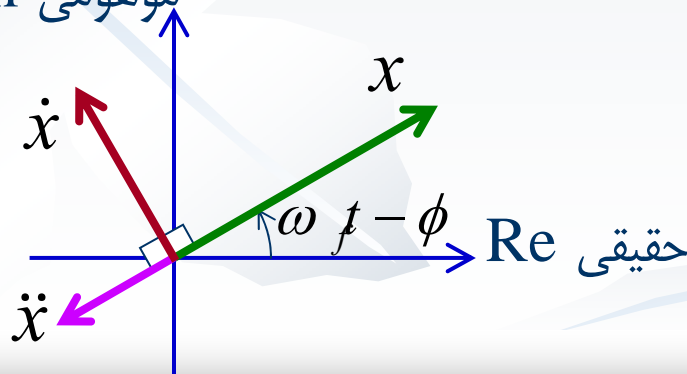
■ همانگونه که قبلاً گفته شد، نمایش مختلط پاسخ حالت پایدار و مشتقاتش عبارتند از:

$$x(t) = Xe^{i\omega_f t} = |X|e^{i(\omega_f t - \phi)}$$

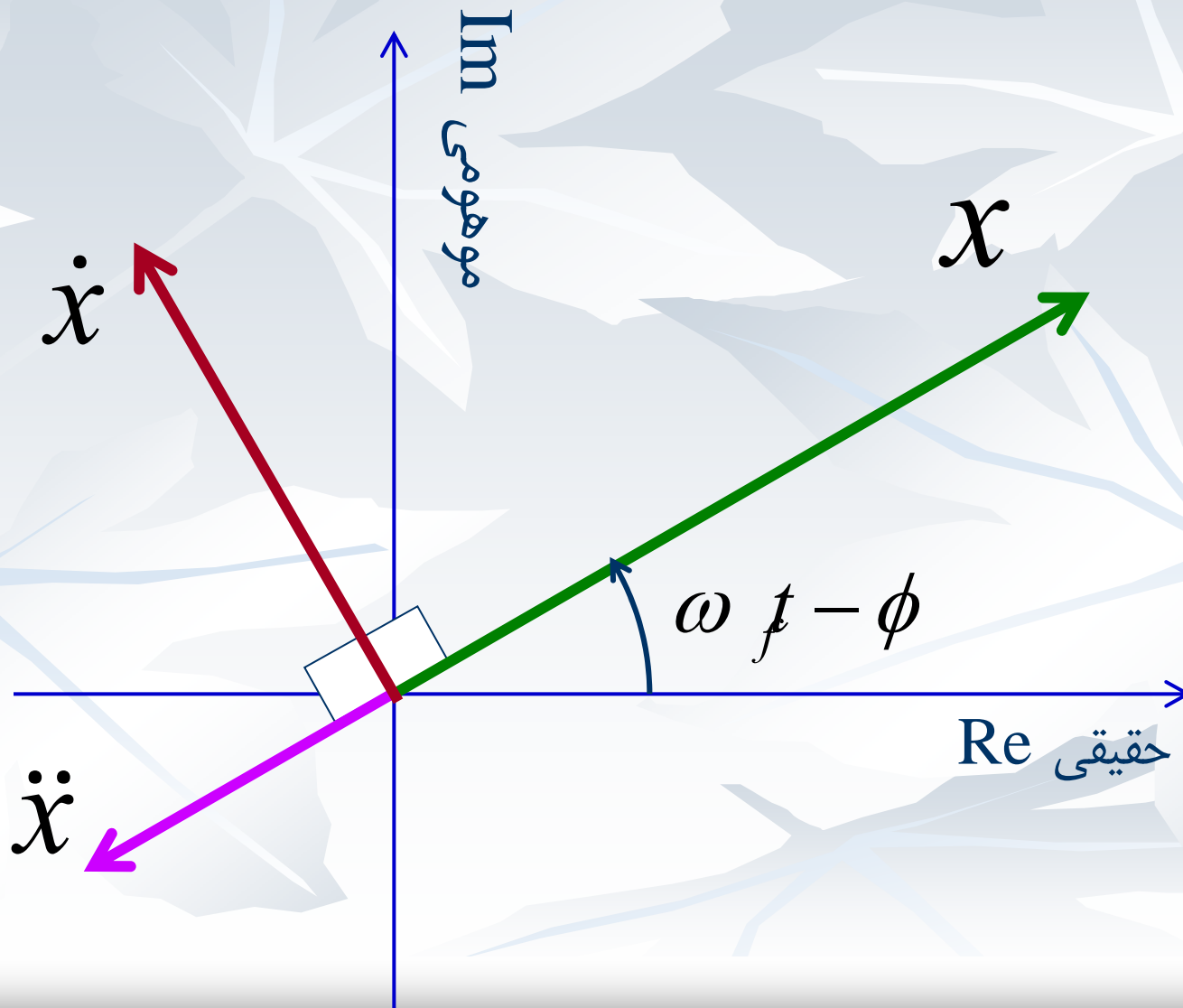
$$\dot{x}(t) = i\omega_f Xe^{i\omega_f t} = \omega_f Xe^{i(\omega_f t + \pi/2)} = \omega_f |X|e^{i(\omega_f t - \phi + \pi/2)}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_f^2 Xe^{i\omega_f t} = \omega_f^2 Xe^{i(\omega_f t + \pi)} = \omega_f^2 |X|e^{i(\omega_f t - \phi + \pi)}$$

■ نمایش هر کدام از اینها برداری در صفحه مختلط است:



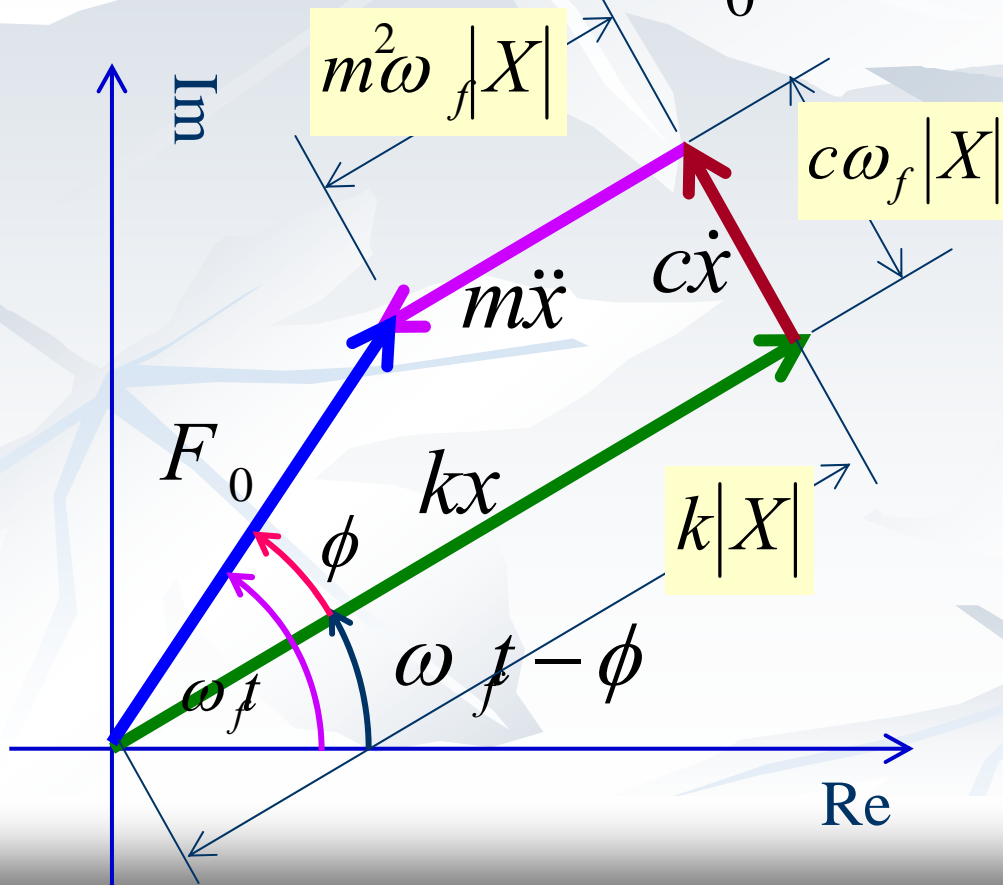
دیگرام فازوری



دیگرام فازوری

■ حال معادله حرکت را در نظر بگیرید، و هر جمله آن را به عنوان یک بردار در نظر بگیرید:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega_f t}$$

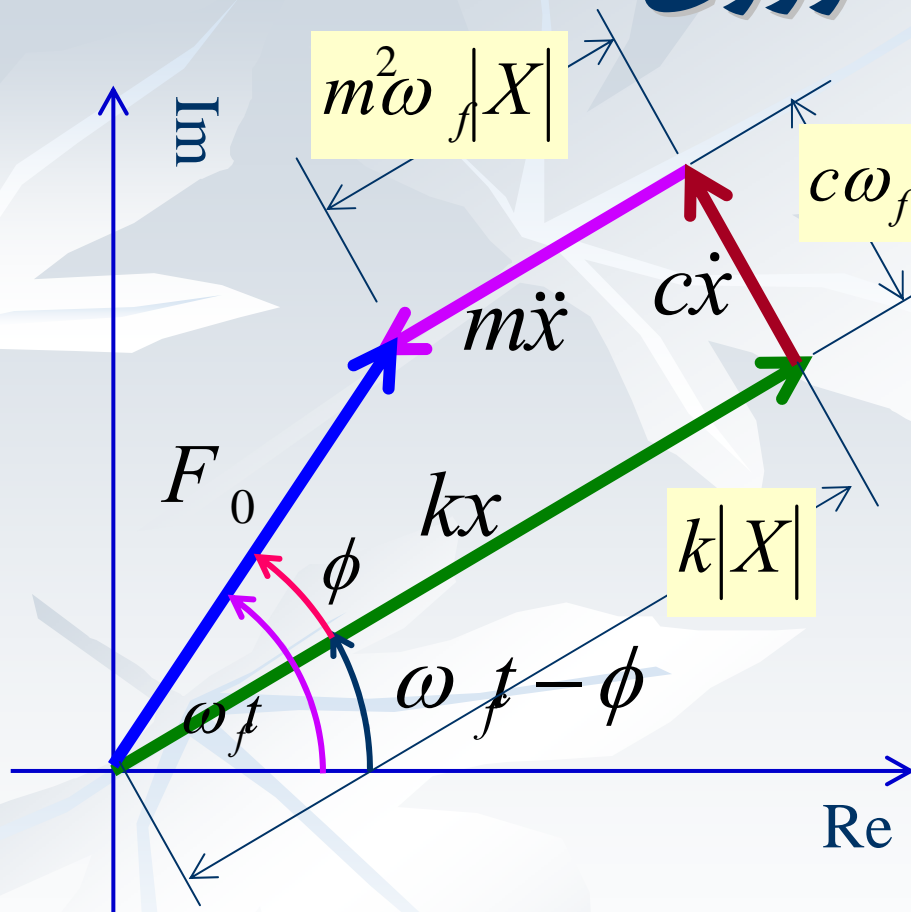


$$\tan \phi = \frac{c\omega_f |X|}{k|X| - m\omega_f^2 |X|}$$

$$= \frac{c\omega_f}{k - m\omega_f^2}$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi r}{1 - r^2}$$

دیگرام فازوری



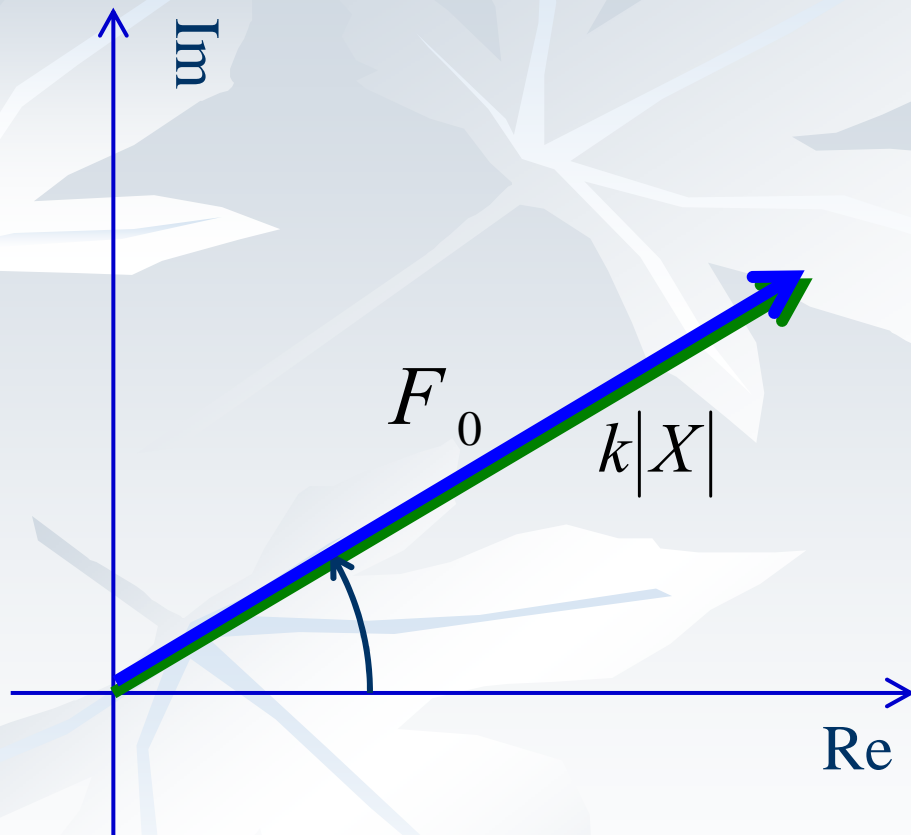
$$F_0^2 = (k - m\omega_f^2)^2 |X|^2 + (c\omega_f)^2 |X|^2$$

$$|X| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}}$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi r}{1 - r^2}$$

$$\frac{k|X|}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

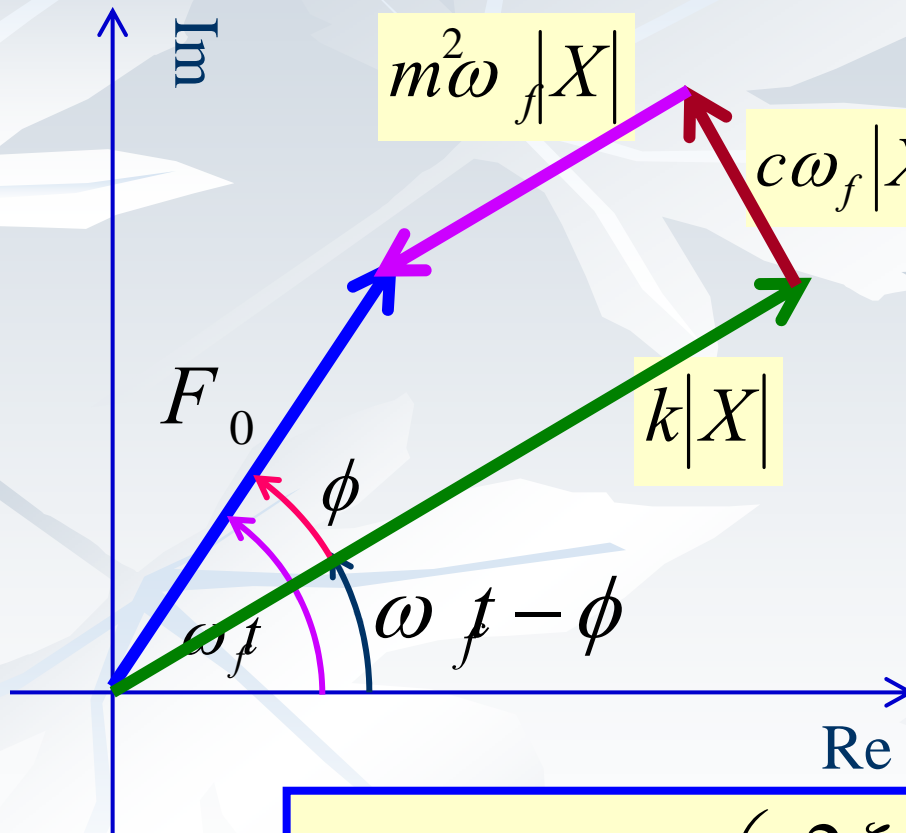
اشکال مختلف دیگرام فازوری: ۱) $\omega_f=0$



$$\frac{k|X|}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = 1$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi r}{1-r^2} = 0$$

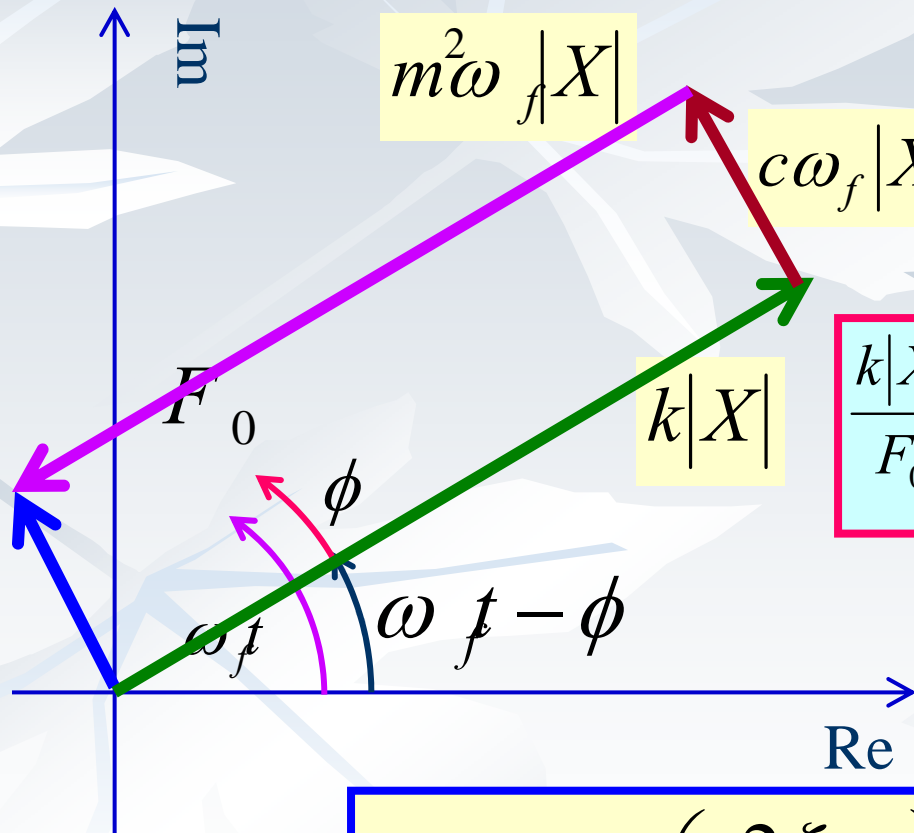
اشکال مختلف دیگر فازوری: ۲ $\omega_f < \omega_n$



$$\frac{k|X|}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} > 1$$

$$0 < \phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r^2} \right) < 90$$

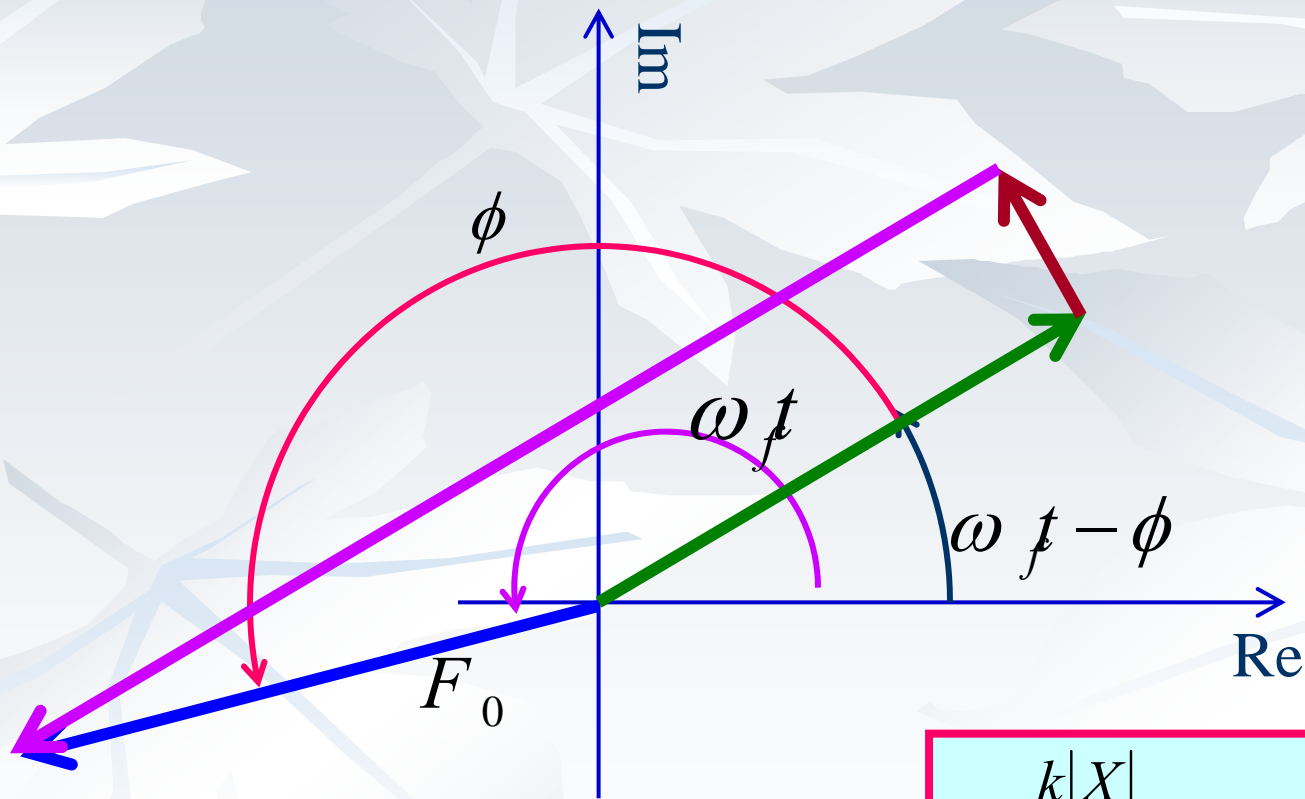
اشکال مختلف دیگر فازوری: ۲ $\omega_f = \omega_n$



$$\frac{k|X|}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{k}{c\omega_f} = \frac{1}{2\xi}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r^2} \right) \Big|_{r=1} = 90$$

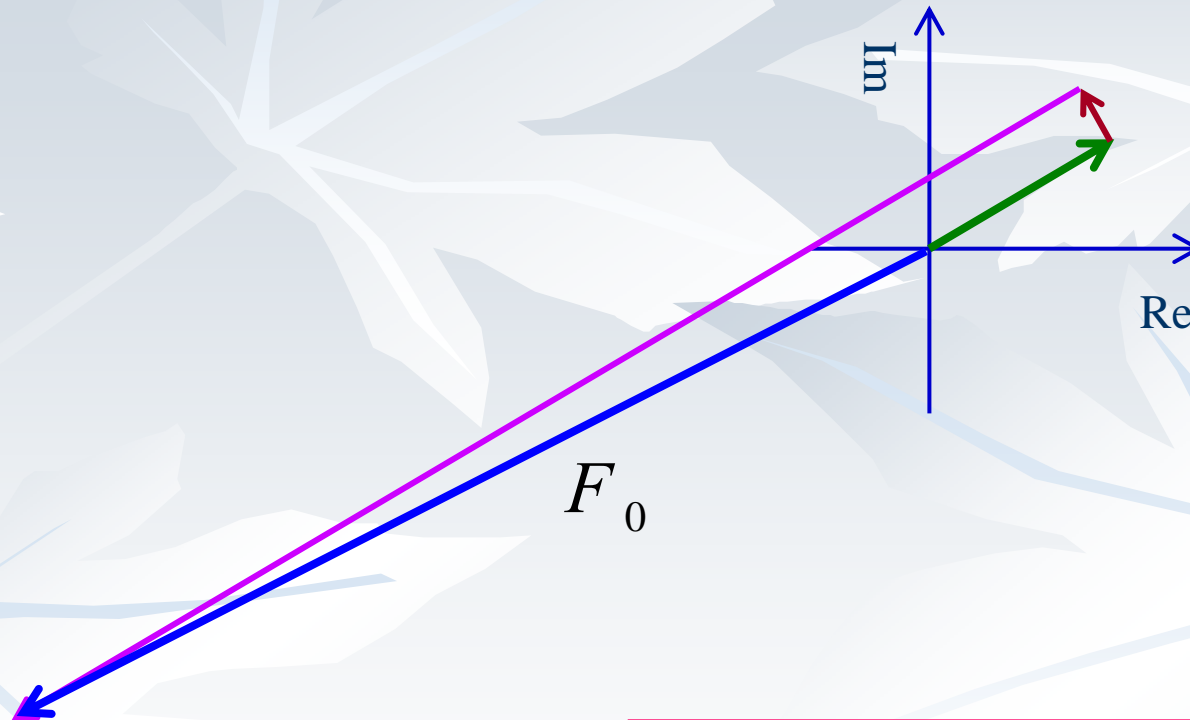
اشکال مختلف دیگر فازوری: ۲ $\omega_f > \omega_n$



$$90 < \phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r^2} \right) < 180$$

$$0 < \frac{k|X|}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} < \infty$$

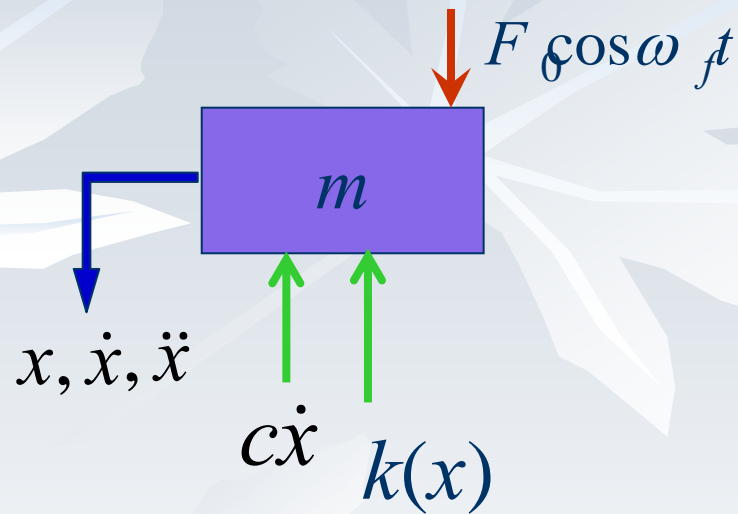
اشکال مختلف دیگر فازوری: ۲ $\omega_f \gg \omega_n$



$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r} \right) \rightarrow -180$$

$$\frac{k|X|}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \rightarrow 0$$

نیروی انتقال یافته به پایه



■ نیرو از طریق فنر و میراگر به پایه منتقل می گردد.

■ این نیرو در مقاومت پایه و سروسدا و طراحی یک فونداسیون مناسب اهمیت خواهد داشت.

$$F(t) = F_s(t) + F_D(t) = kx + c\dot{x}$$

$$F(t) = kX \cos(\omega t - \phi) - c\omega_f X \sin(\omega t - \phi)$$

نیروی انتقال یافته به پایه

$$F(t) = kX \cos(\omega_f t - \phi) - c\omega_f X \sin(\omega_f t - \phi) = F_T \cos(\omega_f t - \psi)$$

$$\begin{aligned} & kX [\cos(\omega_f t) \cos(\phi) + \sin(\omega_f t) \sin(\phi)] - c\omega_f X [\sin(\omega_f t) \cos(\phi) - \cos(\omega_f t) \sin(\phi)] \\ &= F_T [\cos(\omega_f t) \cos(\psi) + \sin(\omega_f t) \sin(\psi)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (k \cos(\phi) + c\omega_f \sin(\phi))X \cos(\omega_f t) + (k \sin(\phi) - c\omega_f \cos(\phi))X \sin(\omega_f t) \\ &= F_T [\cos(\omega_f t) \cos(\psi) + \sin(\omega_f t) \sin(\psi)] \end{aligned}$$

نیروی انتقال یافته به پایه

$$\left. \begin{aligned} F_T \cos(\psi) &= (k \cos(\phi) + c\omega_f \sin(\phi))X \\ F_T \sin(\psi) &= (k \sin(\phi) - c\omega_f \cos(\phi))X \end{aligned} \right\}$$

$$F_T^2 = X^2 \left(k^2 \cos^2(\phi) + (c\omega_f)^2 \sin^2(\phi) + 2k \cos(\phi) c\omega_f \sin(\phi) \right) \\ + X^2 \left(k^2 \sin^2(\phi) + (c\omega_f)^2 \cos^2(\phi) - 2k \sin(\phi) c\omega_f \cos(\phi) \right)$$

$$F_T^2 = X^2 \left(k^2 + (c\omega_f)^2 \right)$$

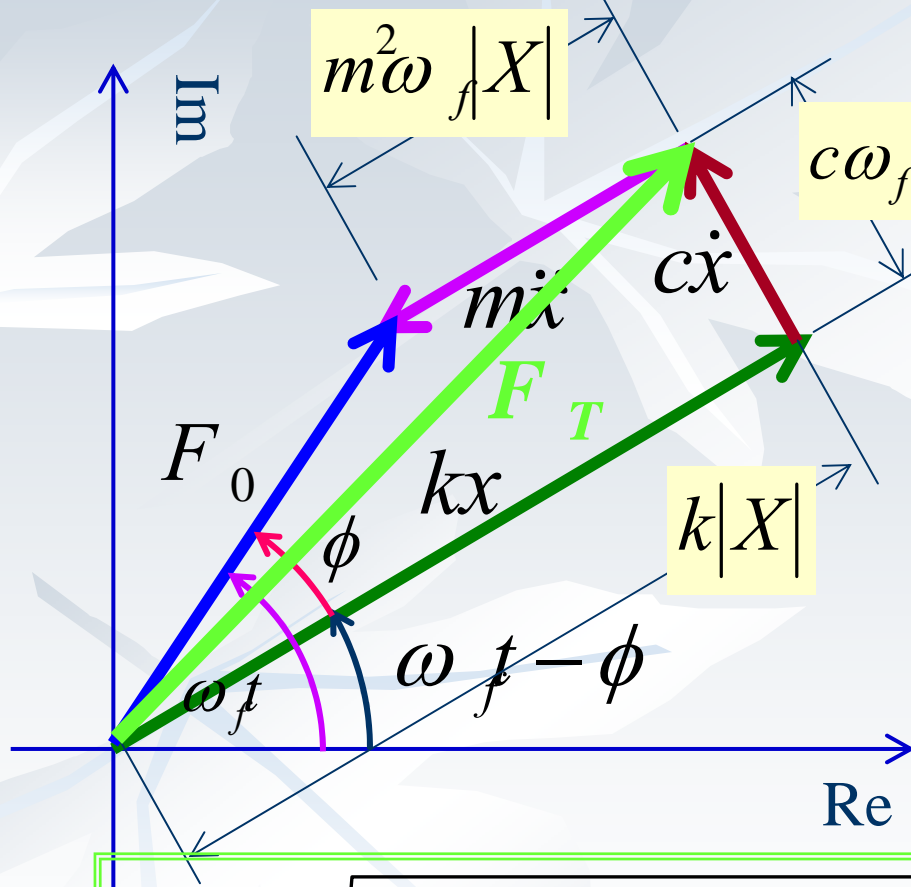
نیروی انتقال یافته به پایه

$$F_T^2 = k^2 X^2 \left(1 + \left(\frac{c\omega_f}{k} \right)^2 \right)$$

$$F_T = kX \sqrt{1 + (2\xi r)^2} = F_0 \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{F_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

نیروی انتقال یافته دیاگرام فازوری



$$F_0^2 = (k - m\omega_f^2)^2 |X|^2 + (c\omega_f)^2 |X|^2$$

$$|X| = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}}$$

$$F_T = \sqrt{k^2 |X|^2 + (c\omega_f)^2 |X|^2}$$

$$= \frac{F_0 \sqrt{k^2 + (c\omega_f)^2}}{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}}$$

$$\frac{F_T}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r^2)^2}}$$

مکانیکی

ارتعاش اجباری با تحریک هارمونیک
(Base Excitation Base)

سیدیوسف احمدی بروغنی

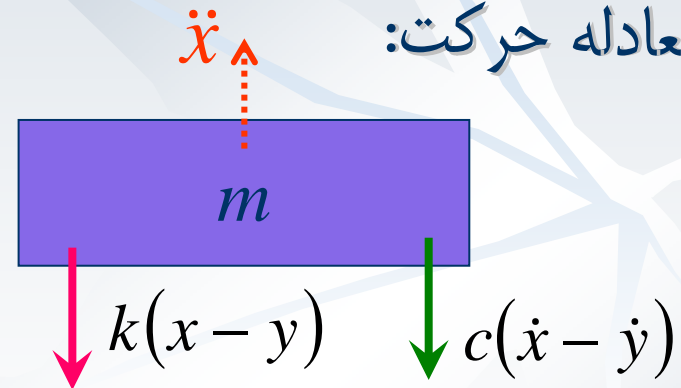
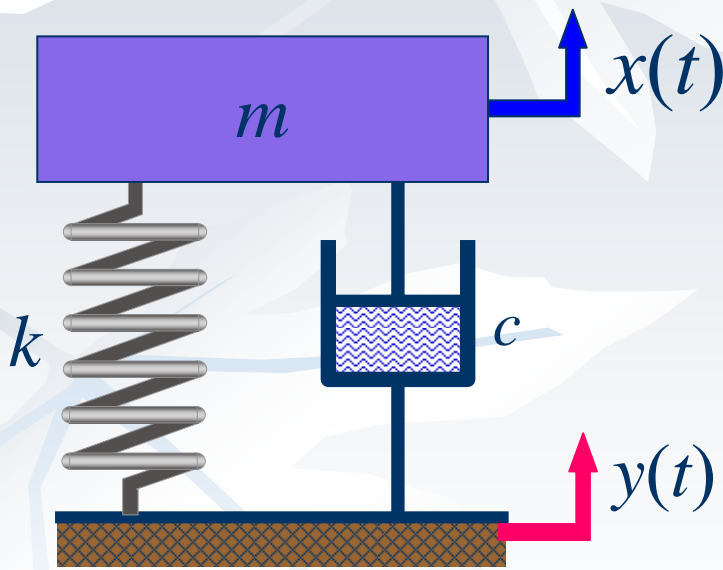
استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

تحریریک پایه Base Excitation

■ در بعضی از مسائل ارتعاشی حرکت پایه باعث ارتعاش جسم می شود که تحت عنوان تحریریک پایه یا جابجائی اجباری شناخته می شوند.

■ معادله حرکت:



$$m\ddot{x} = -k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}$$

$$m\ddot{x} + k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = 0$$

تحریریک پایه هارمونیک

■ اگر تحریریک پایه به صورت هارمونیک باشد: $y(t) = Y_b \sin(\omega_b t)$

■ آنگاه: $m\ddot{x} = -k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y})$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY_b \sin \omega_b t + c\omega_b Y_b \cos \omega_b t$$

■ این معادله به شکل زیر نوشته می شود:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A \sin(\omega_b t - \alpha)$$

$$A = Y_b \sqrt{k^2 + (c\omega_b)^2} \quad \alpha = \tan^{-1} \left(-\frac{c\omega_b}{k} \right)$$

■ حال برای آن حلی ارائه می گردد

پاسخ تحریک پایه هارمونیک

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A \sin(\omega_b t - \alpha)$$

■ برای بدست آوردن پاسخ:

$$x_p(t) = X \sin(\omega_b t - \alpha - \phi_1)$$

■ در نتیجه:

$$X = \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega_b^2)^2 + (c\omega_b)^2}},$$

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{c\omega_b}{k - m\omega_b^2} \right)$$

■ حال اگر $\phi = \alpha + \phi_1$

پاسخ تحریک پایه هارمونیک

■ در نتیجه

اتحاد مثلثاتی

$$\tan \phi = \frac{\tan \alpha + \tan \phi_1}{1 - \tan \alpha \tan \phi_1} = \frac{-\frac{c\omega_b}{k} + \frac{c\omega_b}{k - m\omega_b^2}}{1 - \left(-\frac{c\omega_b}{k}\right)\left(\frac{c\omega_b}{k - m\omega_b^2}\right)} = \frac{\frac{(k - k + m\omega_b^2)c\omega_b}{(k - m\omega_b^2)k}}{\frac{(k - m\omega_b^2)k + (c\omega_b)^2}{(k - m\omega_b^2)k}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{cm\omega_b^3}{k(k - m\omega_b^2) + (c\omega_b)^2} \right)$$

پاسخ تحریک پایه هارمونیک

$$X = \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega_b^2)^2 + (c\omega_b)^2}}, \quad A = Y_b \sqrt{k^2 + (c\omega_b)^2}$$

$$\frac{X}{Y_b} = \frac{\sqrt{k^2 + (c\omega_b)^2}}{\sqrt{(k - m\omega_b^2)^2 + (c\omega_b)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{cm\omega_b^3}{k(k - m\omega_b^2) + (c\omega_b)^2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r^3}{(1 - r^2) + (2\xi r)^2} \right)$$

پاسخ تحریک پایه هارمونیک

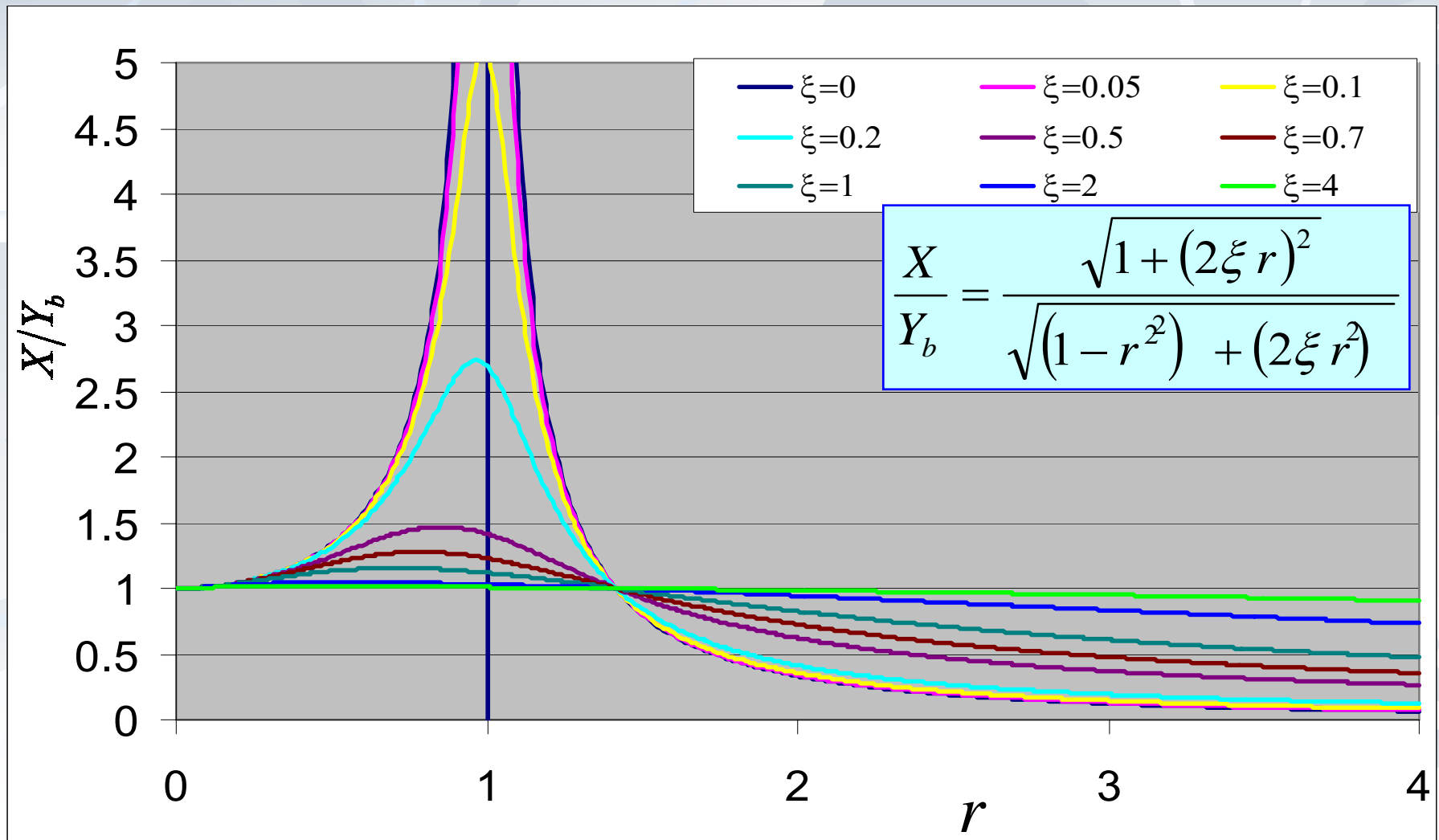
$$\left. \frac{X}{Y_b} \right|_{r=0} = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \Big|_{r=0} = 1 \quad \phi_{r=0} = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r^3}{(1-r^2)+(2\xi r)^2} \right) \Big|_{r=0} = 0 \quad r=0 \quad \blacksquare$$

$$\left. \frac{X}{Y_b} \right|_{r=1} = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \Big|_{r=1} = \frac{\sqrt{1+4\xi^2}}{2\xi} \quad \phi_{r=1} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{2\xi} \right) \quad r=1 \quad \blacksquare$$

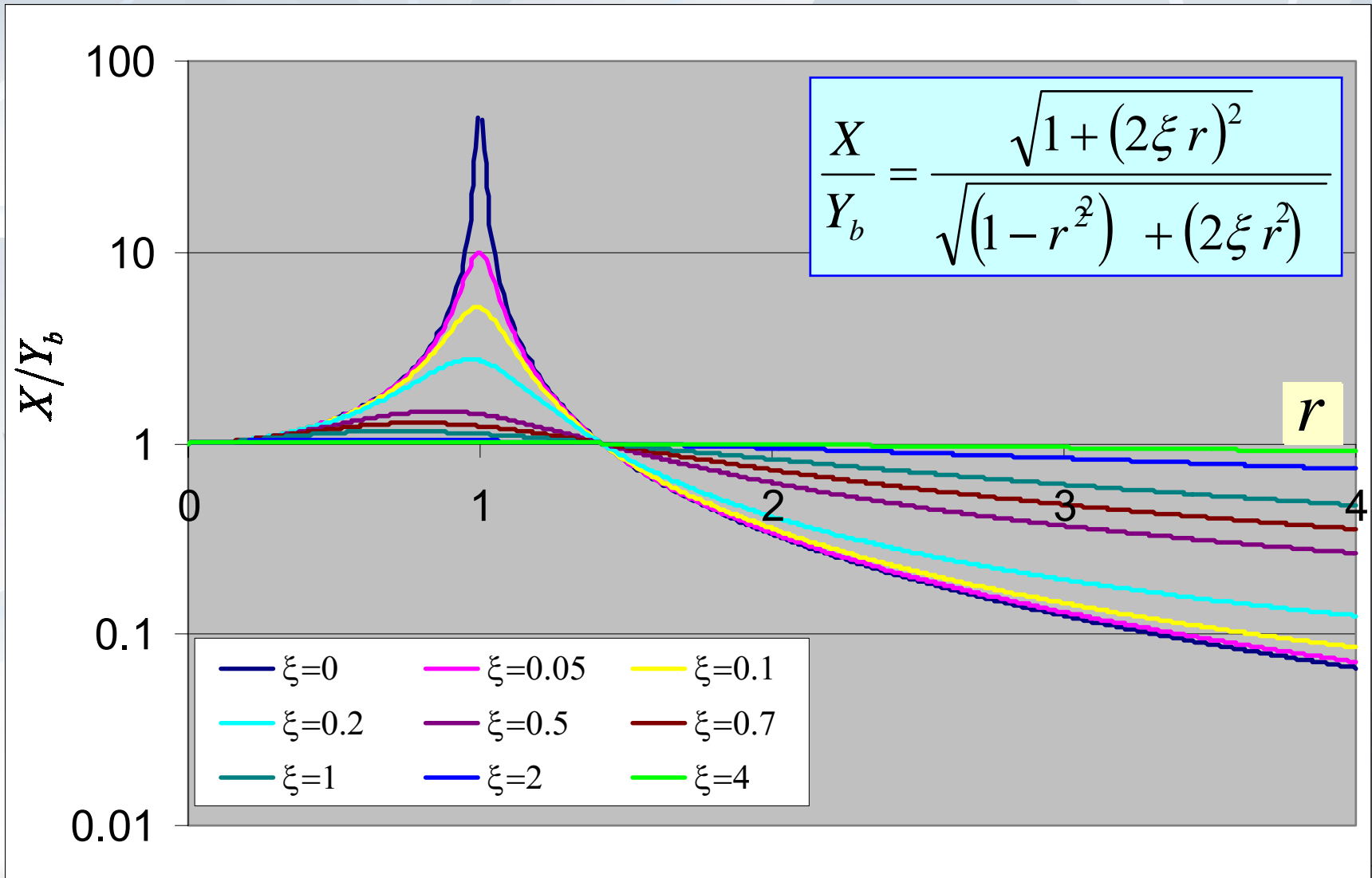
$$\left. \frac{X}{Y_b} \right|_{r=\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1+8\xi^2}}{\sqrt{1+8\xi^2}} \Big|_{r=\sqrt{2}} = 1 \quad \phi_{r=\sqrt{2}} = \tan^{-1} \left(\frac{4\sqrt{2}\xi}{8\xi^2-1} \right) \quad r=\sqrt{2} \quad \blacksquare$$

$$\left. \frac{X}{Y_b} \right|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\sqrt{1+(2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0 \quad \phi_{r \rightarrow \infty} = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r^3}{(1-r^2)+(2\xi r)^2} \right) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 90 \quad r \rightarrow \infty \quad \blacksquare$$

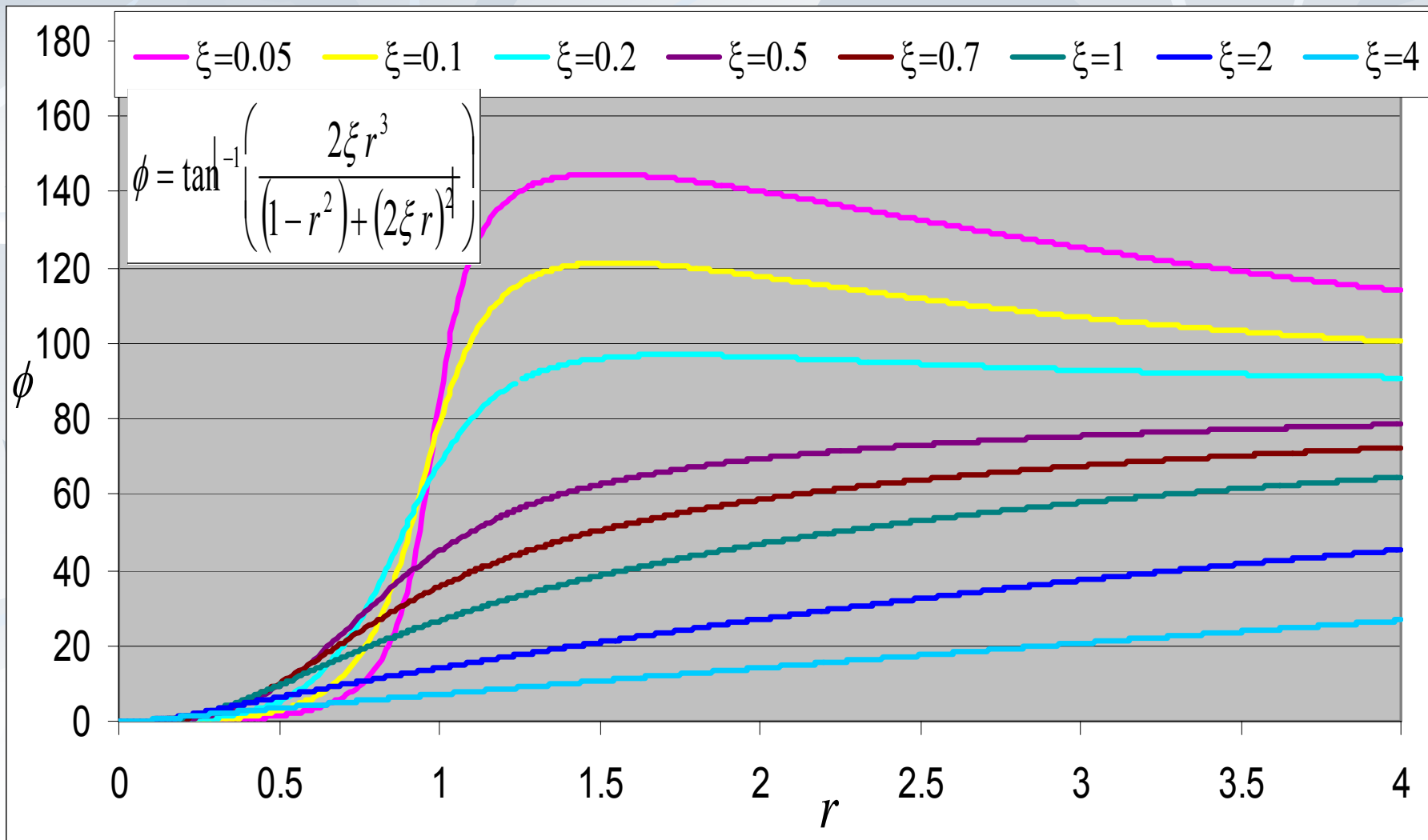
دامنه پاسخ خصوصی (ضریب انتقال T_d)



دامنه پاسخ خصوصی (ضریب انتقال T_d)



زاویه فاز



ضریب انتقال بیشینه

$$\frac{X}{Y_b} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{X}{Y_b} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2(4\xi^2 r) \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} - [2(-2r)(1 - r^2) + 2 \times 4\xi^2 r] \sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{2\sqrt{1 + (2\xi r)^2} \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = 0$$

$$(2\xi^2 r) [(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2] + [(1 - r^2)r - 2\xi^2 r] [1 + (2\xi r)^2] = 0$$

$$(-2r^2 + r^4)(2\xi^2) + (1 - r^2) [1 + (2\xi r)^2] = 0$$

$$1 - r^2 - 2\xi^2 r^4 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8\xi^2}}{4\xi^2}$$

$$r_{Peak} = \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 8\xi^2}} - 1}{2\xi}$$

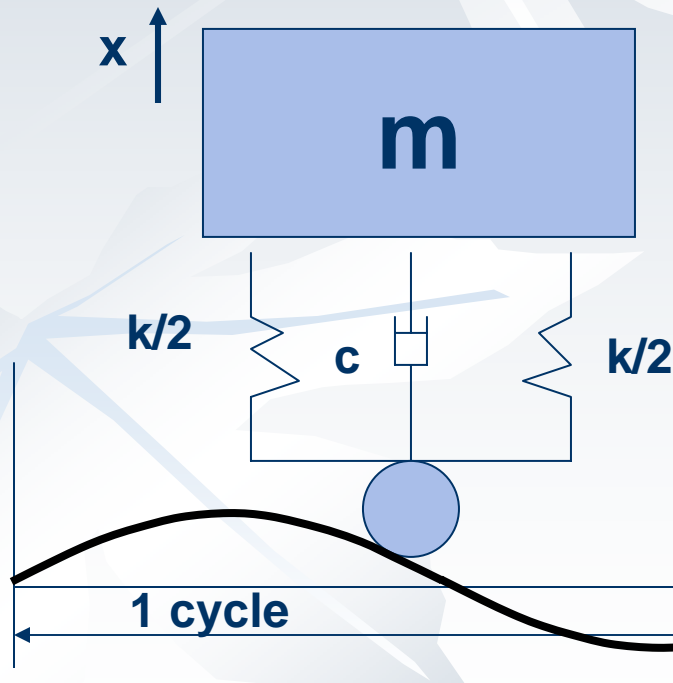
مثال

■ شکل وسیله نقلیه ای را روی یک جاده ناهموار نشان می دهد. فرض شده که وسیله دارای یک درجه آزادی در جهت قائم است. همچنین چرخ از جاده جدا می شود و ششم نیرو سد چرخ 250kg و

با بار 1000kg است. $K=400\text{kN/m}$

و نسبت میرایی در زمان پربودن وسیله 0.5 است. اگر سرعت 90km/hr و

طول طول جاده 5m و دامنه Y باشد نسبت دامنه حرکت را در حالت پر و خالی بدست آورید.



$$\frac{X}{Y_b} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

■ نسبت دامنه

■ داده ها:

$$\omega_b = \frac{2\pi}{\tau} \xi_{full} = 0.5$$

$$v = 90 \text{ km/hr} = 25 \text{ m/s}$$

$$\tau = \frac{L}{v} = \frac{5}{25} = 0.2 \text{ sec}$$

$$\omega_b = \frac{2\pi}{0.2} = 31.42 \text{ rad/s}$$

■ در حال پربودن وسیله:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{full}}} = \sqrt{\frac{400000}{1000}} = 20 \text{ rad/s} \quad r = \frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{31.42}{20} = 1.571 \quad \xi = 0.5$$

$$c = 2\sqrt{km} \xi = 2\sqrt{4 \times 10^8} \times 0.5 = 20000 \text{ N.s/m}$$

ادامه

■ در نتیجه نسبت دامنه در حال پر بودن

$$\frac{X}{Y_b} = \sqrt{\frac{1 + (2 \times 0.5 \times 1.571)^2}{(1 - 1.571^2)^2 + (2 \times 0.5 \times 1.571)^2}} = 0.866$$

■ در حالت بدون بار

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{empt}}} = \sqrt{\frac{400000}{250}} = 40 \text{ rad/s} \quad r = \frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{31.42}{40} = 0.785$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{20000}{2\sqrt{4 \times 10^5 \times 250}} = 1$$

$$\frac{X}{Y_b} = \sqrt{\frac{1 + (2 \times 1 \times 0.7854)^2}{(1 - 0.7854^2)^2 + (2 \times 1 \times 0.7854)^2}} = 1.326$$

مثال

- سرعت بحرانی اتومبیلی را بدست آورید که در یک جاده با سطح موج سینوسی با طول موج ۱۵ متر و دامنه ۰.۰۷۵ متر حرکت می کند. فنرهای اتومبیل ~~تومبیل~~ ^{تومبیل} تحت ~~تومبیل~~ ^{تومبیل} ۱۲۵ ~~تومبیل~~ ^{تومبیل} متر فشرده شده است. ۵۰ km/hr بدست آورید.

■ حل: فرکانس طبیعی سیستم: $\omega_n = \sqrt{g/\delta} = \sqrt{9.81/0.125} = 8.86 \text{ rad/s}$

- فرکانس حرکت پایه:

$$\begin{matrix} v & 1 \\ 15 & \tau \end{matrix} \quad \tau_b = \frac{15}{v} \Rightarrow \omega_b = \frac{2\pi v}{15}$$

- سرعت بحرانی در تشدید

$$\omega_n = \omega_b \Rightarrow 8.86 = \frac{2\pi v}{15} \Rightarrow v = \frac{15 \times 8.86}{2\pi} = 21.15 \text{ m/s} = 76.14 \text{ km/hr}$$

ادامه

$$v = \frac{50}{3.6} = 13.89 \text{ m/s}$$

■ دامنه در سرعت 50km/hr

$$\omega_b = \frac{2\pi \times 13.89}{15} = 5.818 \text{ rad/s} \quad r = \frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{5.818}{8.859} = 0.657$$

$$\frac{X}{Y_b} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{1}{(1 - 0.657^2)} = 1.758$$

$$X = 1.758 Y_b \quad 0.132 \text{ m} = 13.2 \text{ cm}$$

توصیف مختلط حرکت پایه

چنانچه y به صورت صورت توخندان $y(t) = Y_b e^{i\omega_b t}$

$$m\ddot{x} = -k(x - y) - c(\dot{x} - \dot{y})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y} = kY_b e^{i\omega_b t} + i\omega_b Y_b e^{i\omega_b t}$$

$$x_p = X e^{i\omega_b t}$$

$$\left[k - m\omega_b^2 + ic\omega_b \right] X e^{i\omega_b t} = (k + ic\omega_b) Y_b e^{i\omega_b t}$$

$$\frac{X}{Y_b} = \frac{k + ic\omega_b}{k - m\omega_b^2 + ic\omega_b} = \frac{1 + i2\xi r}{1 - r^2 + i2\xi r}$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

پاسخ

■ ضرب انتقال

$$\frac{X}{Y_b} = \frac{|X|}{Y_b} e^{-i\phi} = \frac{|1 + i2\xi r| e^{i\gamma}}{|1 - r^2 + i2\xi r| e^{i\lambda}} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} e^{i(\gamma - \lambda)}$$

$$\gamma = \tan^{-1}(2\xi r) \quad \lambda = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right) \Rightarrow \phi = \lambda - \gamma$$

$$\tan \phi = \frac{\frac{2\xi r}{1 - r^2} - 2\xi r}{1 + (2\xi r)\left(\frac{2\xi r}{1 - r^2}\right)} = \frac{\frac{2\xi r(1 - 1 + r^2)}{1 - r^2}}{\frac{1 - r^2 + (2\xi r)^2}{1 - r^2}} = \frac{2\xi r^3}{1 - r^2 + (2\xi r)^2}$$

پاسخ

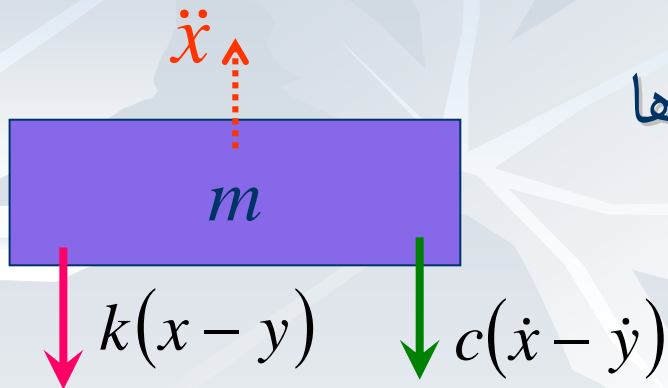
■ در نتیجه، ضریب انتقال:

$$\frac{|X|}{Y_b} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2) + (2\xi r)^2}}$$

■ زاویه فاز:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r^3}{1 - r^2 + (2\xi r)^2} \right)$$

نیروی انتقال یافته از پایه



■ نیروی انتقالی از پایه در بسیاری از کاربردها بخصوص عایق سازی پایه اهمیت دارد

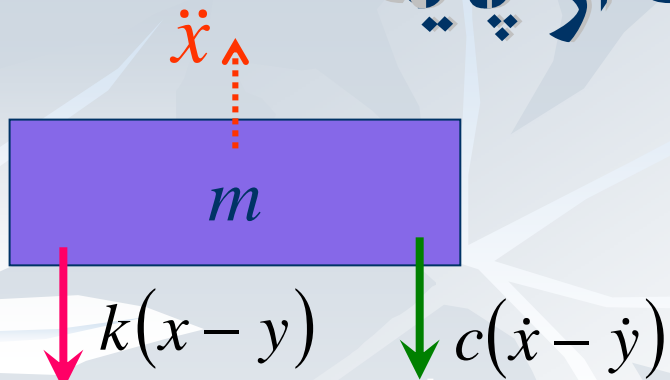
■ نیروی انتقالی از پایه ترکیب نیروی فتر و میراگر می باشد:

$$F_b(t) = k(x - y) + c(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x}$$

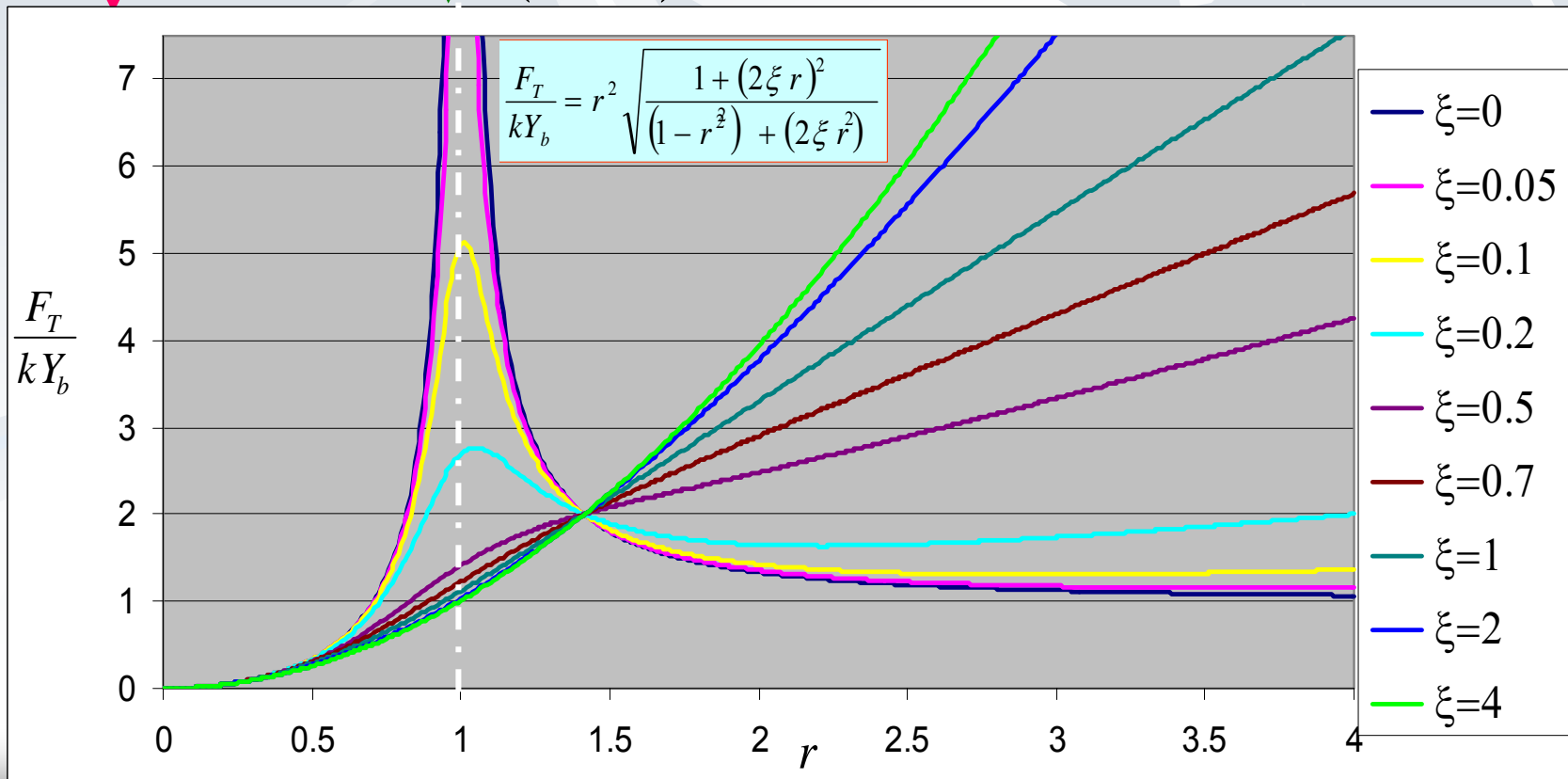
$$F_b(t) = m\omega_b^2 X \sin(\omega_b t - \phi) = F_T \sin(\omega_b t - \phi)$$

$$F_T = m\omega_b^2 X = \frac{m}{k} \omega_b^2 k Y_b \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

نیروی انتقال یافته از پایه

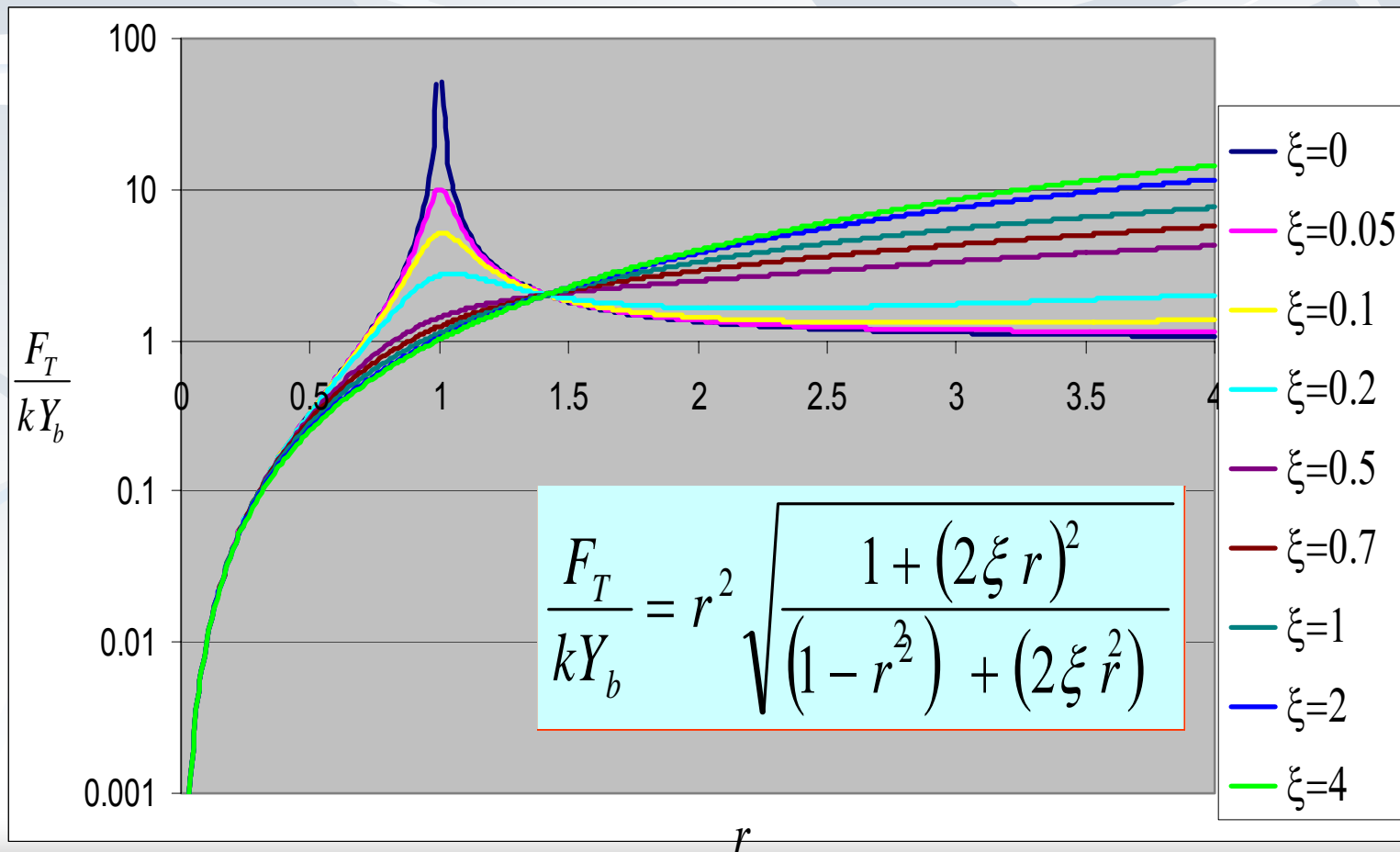


$$\frac{F_T}{kY_b} = r^2 \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$



نمایش لگاریتمی

■ گاهی برای نمایش از ترسیم لگاریتمی برای راحتی استفاده می شود



حرکت نسبی جرم به پایه

■ ی ل نسبی گویا $x-y$ را z بنامیم

$$m(\ddot{x} - \ddot{y}) + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = -m\ddot{y}$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

$$y(t) = Y_b \sin(\omega_b t) \quad \blacksquare$$

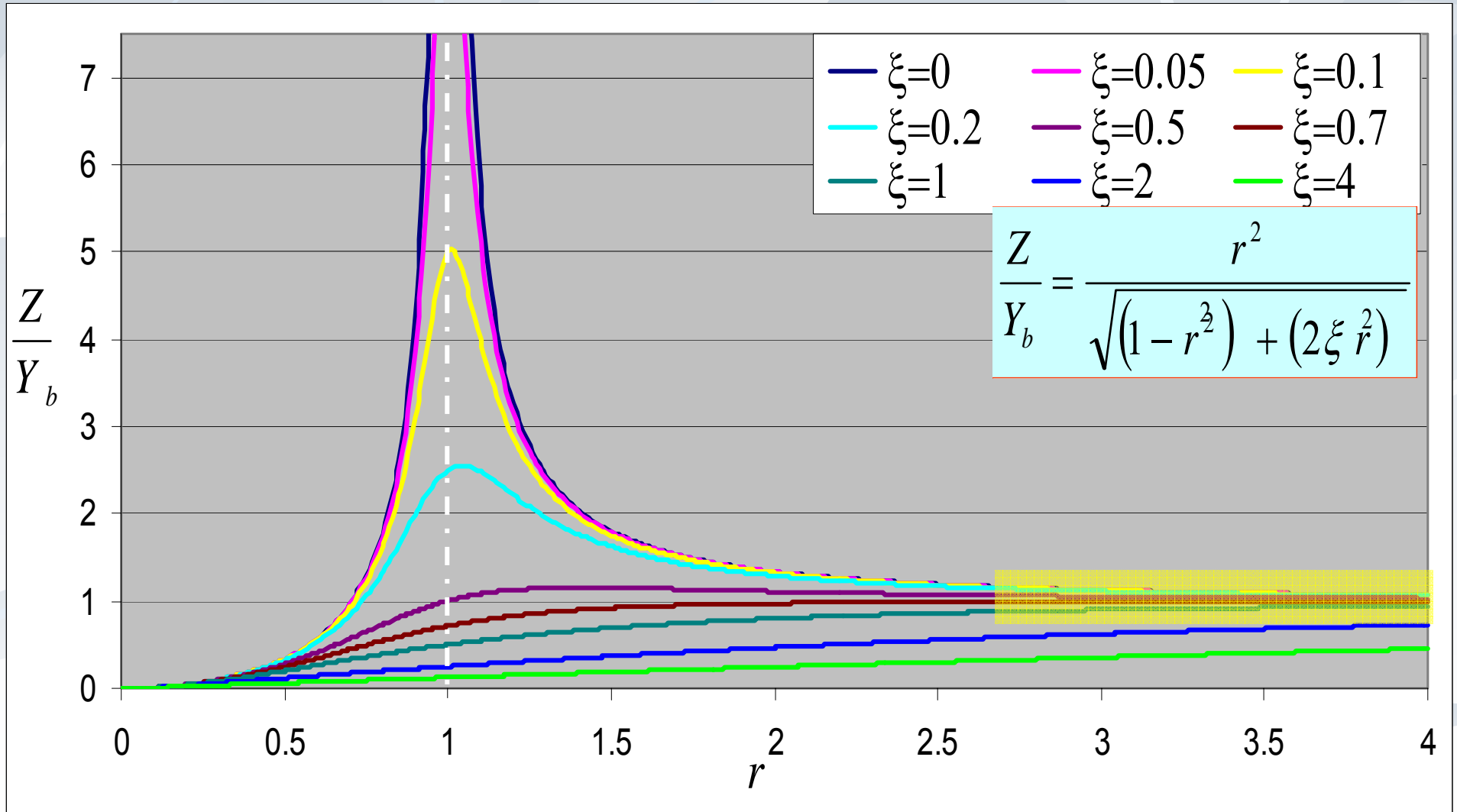
$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m^2 \omega_b^2 Y_b \sin(\omega_b t)$$

■ جوابی به صورت $z(t) = Z \sin(\omega_b t - \psi)$ فرض می شود

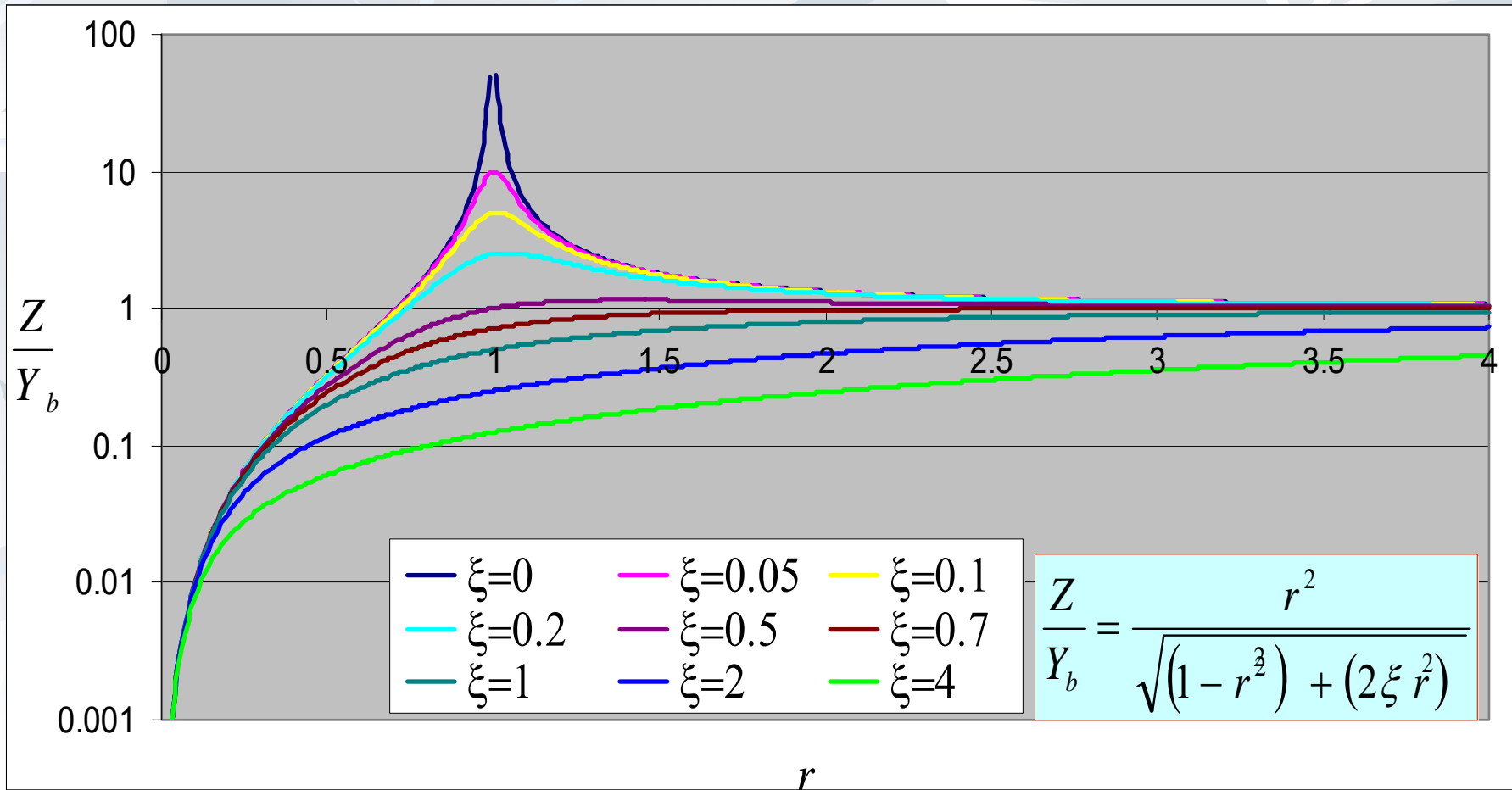
$$\frac{Z}{Y_b} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r^2} \right)$$

حرکت نسبی جرم به پایه

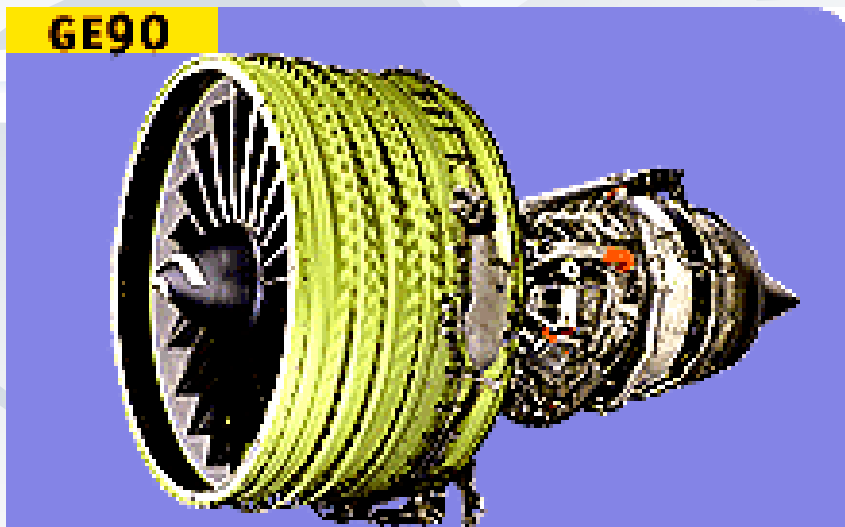


نمایش لگاریتمی



تحریریک توسط بار نامیزان در حال دوران

■ بار نامیزان در بسیاری از ماشین آلات که دارای قسمت در حال دوران هستند وجود دارد.



■ ماشین لباس شویی

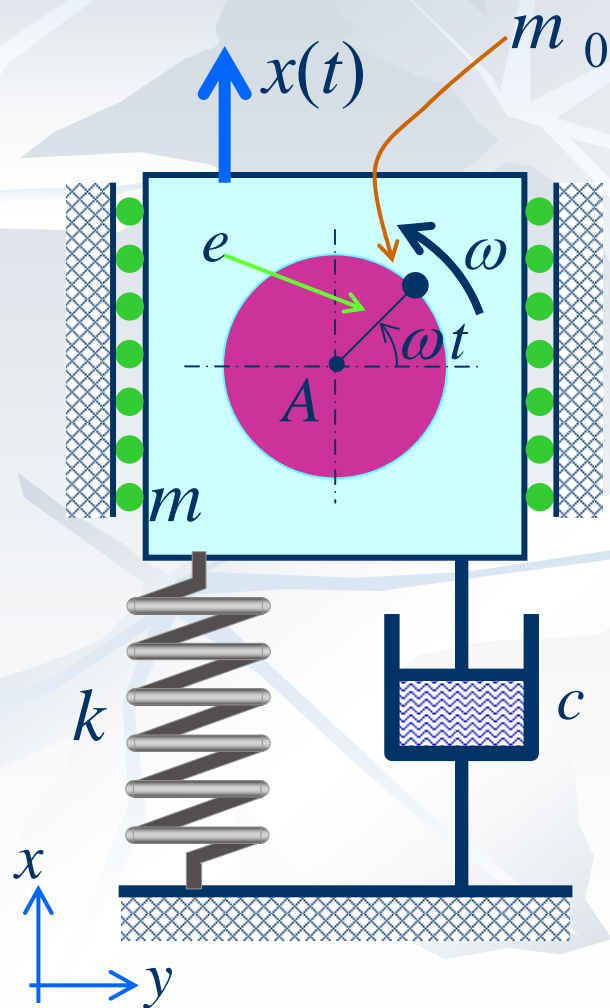
■ چرخ اتومبیل

■ ماشین تراش

■ کولر، دمنده، Fan.....

■ هدف: شناخت ارتعاشات حاصل و اثرات آن و در صورت لزوم کم نمودن تاثیر آن

تحریریک توسط بار نامیزان در حال دوران

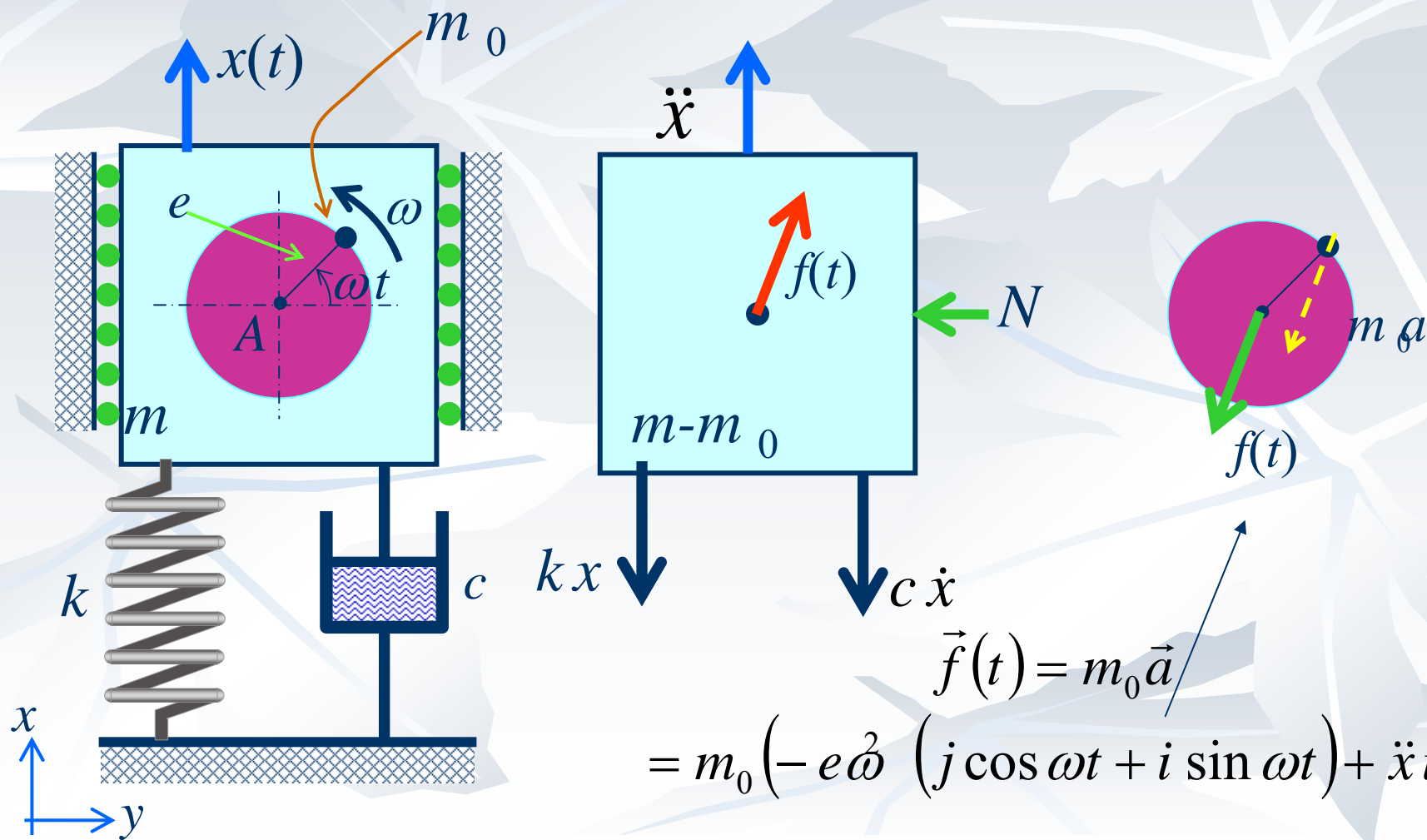


■ ماشینی به جرم کل m را در نظر بگیرید که دارای قسمت در حال دورانی باشد که دارای سرعت زاویه ای ω است.

■ قسمت نامیزان دارای جرم نامیزان m_0 و خروج از مرکز e است.

■ em_0 را مقدار نامیزانی گویند.

تحریریک توسط بار نامیزان در حال دوران



تحریریک توسط بار نامیزان در حال دوران

x :

$$(m - m_0)\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + f_x(t)$$

$$(m - m_0)\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + m_0(e\omega^2(\sin \omega t) - \ddot{x})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0e\omega^2 \sin(\omega t)$$

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi)$$

■ پاسخ حالت پایدار:

$$X = \frac{m_0e\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

تحریریک توسط بار نامیزان در حال دوران

$$X = \frac{\frac{m_0 e}{m} \frac{m}{k} \omega^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}},$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r^2} \right)$$

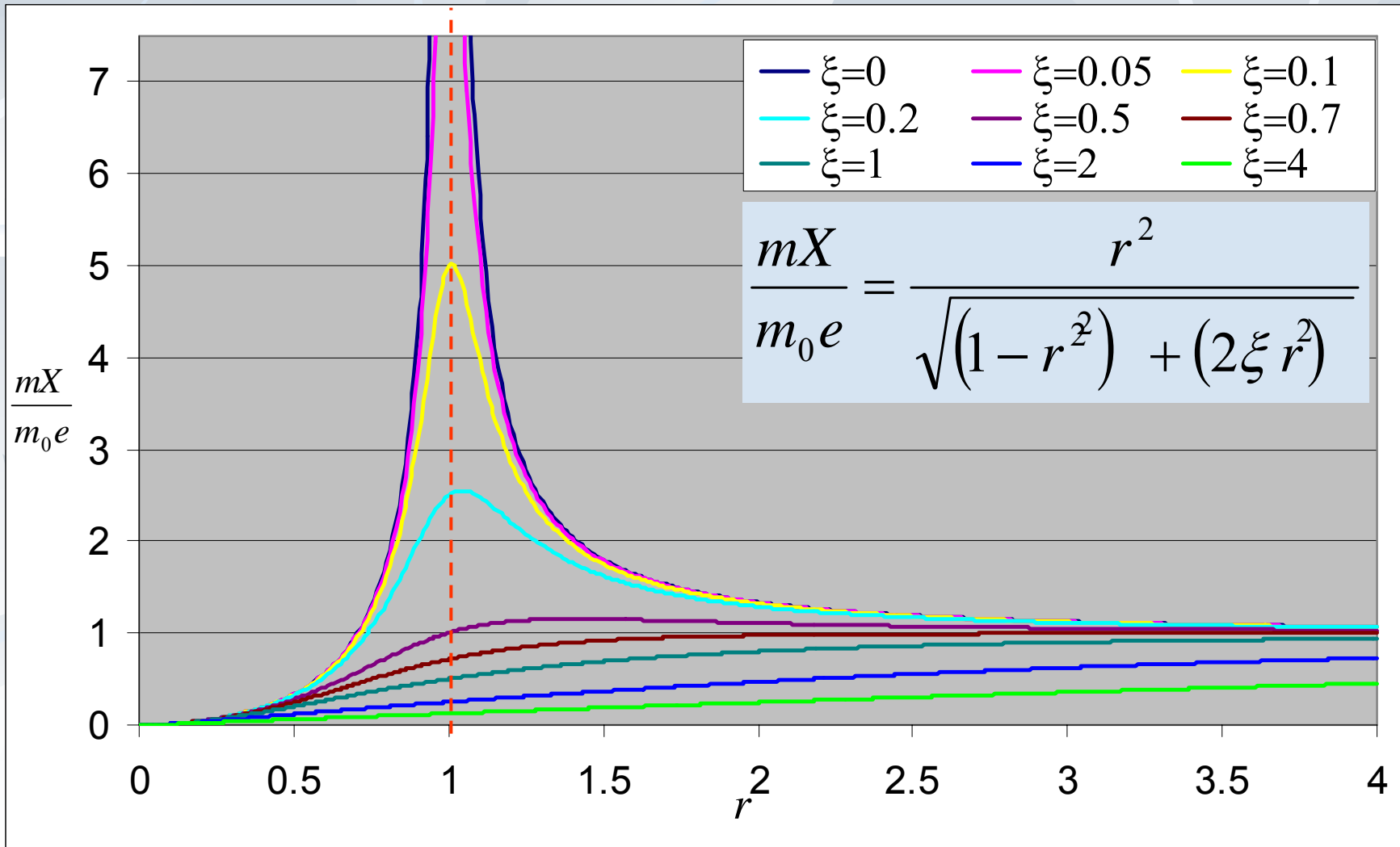
$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}},$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r^2} \right)$$

r	0	1	∞
$\frac{mX}{m_0 e}$	0	$1/2\xi$	1

■ که همان رابطه Z/Y است.

منحنی تغییرات X



مقدار بیشینه دامنه

$$\frac{mX}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{mX}{m_0 e} \right) = \frac{2r\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} - r^2 \frac{2(-2r)(1-r^2) + 2 \times 4\xi^2 r}{2\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{mX}{m_0 e} \right) = \frac{2r[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2] - r^2[(-2r)(1-r^2) + 4\xi^2 r]}{\left(\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}\right)^3} = 0$$

$$2r(1-r^2)^2 + 8\xi^2 r^3 + 2r^3(1-r^2) - 4\xi^2 r^3 = 0, \quad r = 0$$

$$(1-r^2) + 2\xi^2 r^2 = 0 \Rightarrow 1 = r^2(1-2\xi^2) \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}}$$

$$\left. \frac{mX}{m_0 e} \right|_{Max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

نیروی منتقل شده به پایه

میزاگر طریق منفرد ویراگر

باشد ■ باشد و این نیز میسر است ■ منتقل شده پایه $F_D(t) = kx + c\dot{x}$ پایه $F_S(t)$

$$F_T^2 = X^2 \left(k^2 + (c\omega_f)^2 \right) \quad X = \frac{m_0 e \omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$F_T = X \sqrt{k^2 + (c\omega_f)^2}$$

$$\frac{F_T}{m_0 e \omega^2} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

مثال

1000kg ج ماشین بی 1000kg ی
2450N ی 1500rpm در فرکانس

ت ز و مؤرد از خون ثیا ی تغییر مکان است و نسبت میرائی تخمین زده شده

■ مطلوب است:

- الف نیروی منتقل شده به فونداسیون
- ب دامنه ارتعاش ماشین
- ج اختلاف فاز نیروی منتقل شده نسبت به نیروی خارجی

$$m = 1000 \text{ kg}, F = 2450 \text{ N}, N = 1500 \text{ rpm},$$

$$\delta = 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}, \xi = 0.2$$

We use,

$$TR = \frac{\sqrt{(1 + (2\xi\omega/\omega_n)^2)}}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}$$

$$\text{Also } TR = F_{tr}/F$$

$$\omega = 2\pi N/60 = 157.08 \text{ rad/sec.}$$

$$\omega_n = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{g/\delta} = \sqrt{9.81/2 \times 10^{-3}} = 70 \text{ rad/sec.}$$

$$m = 1000 \text{ kg}, F = 2450 \text{ N}, N = 1500 \text{ rpm},$$

$$\delta = 2 \text{ mm} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}, \xi = 0.2$$

We use,

$$TR = \frac{\sqrt{(1 + (2\xi\omega/\omega_n)^2)}}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}$$

$$\text{Also } TR = F_{tr}/F$$

$$\omega = 2\pi N/60 = 157.08 \text{ rad/sec.}$$

$$\omega_n = \sqrt{(k/m)} = \sqrt{g/\delta} = \sqrt{9.81/2 \times 10^{-3}} =$$

$$70 \text{ rad/sec.}$$

Subs for ξ , ω , ω_n into expr. for TR

$$TR = 0.325, \text{ as } TR = F_{tr}/F, F_{tr} = \mathbf{797 \text{ N}}$$

The amplitude X is from the relation

$$X = (F/k) / \sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{As } k &= mg/\delta = 1000 \times 9.81/2 \times 10^{-3} \\ &= 4.905 \times 10^6 \text{ N/m.} \end{aligned}$$

That gives $X = 1.21 \times 10^{-4} \text{ m}$

Subs for ξ , ω , ω_n into expr. for TR

$$TR = 0.325, \text{ as } TR = F_{tr}/F, F_{tr} = \mathbf{797 \text{ N}}$$

The amplitude X is from the relation

$$X = (F/k) / \sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_n)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{As } k &= mg/\delta = 1000 \times 9.81/2 \times 10^{-3} \\ &= 4.905 \times 10^6 \text{ N/m.} \end{aligned}$$

That gives $X = 1.21 \times 10^{-4} \text{ m}$

The phase lag of transmitted force wrt F is

$$\begin{aligned}(\Phi - \alpha) &= \tan^{-1} \left(\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right) \\ &= \tan^{-1} (2\xi\omega/\omega_n) \\ &= 125.55^\circ\end{aligned}$$

The phase lag of transmitted force wrt F is

$$\begin{aligned}(\Phi - \alpha) &= \tan^{-1} \left(\frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right) \\ &= \tan^{-1} (2\xi\omega/\omega_n) \\ &= 125.55^\circ\end{aligned}$$

مکانیکی اندازه گیری ارتعاشات

سیدیوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

اندازه گیری ارتعاشات

(Vibrometer

(Velometer

(Accelerometer

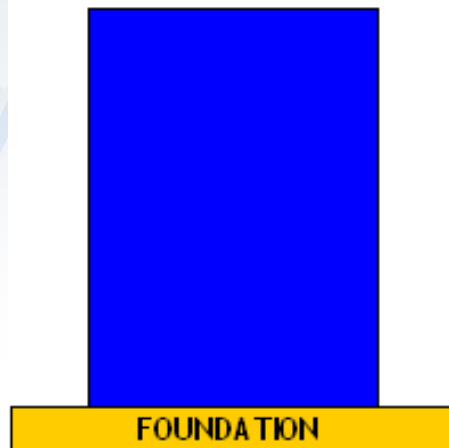
■ نیروهای دینامیکی در یک سیستم ارتعاشی بستگی دارد به:

■ جابجائی ← نیروی فنر

■ سرعت ← نیروی میراگر

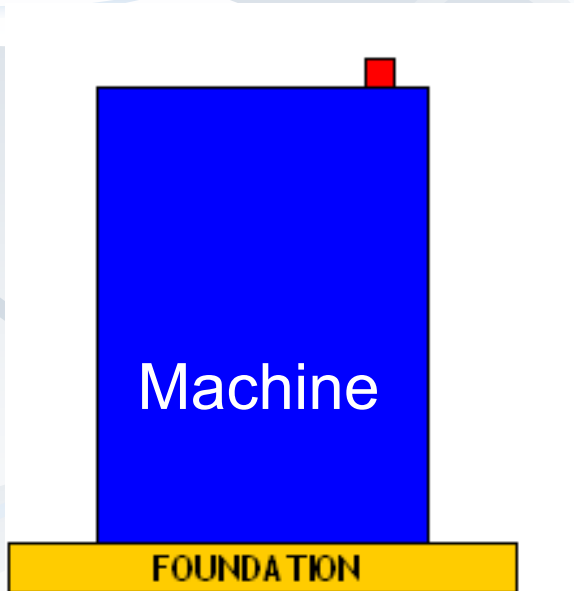
■ شتاب ← نیروی اینرسی

■ لذا لازم است این کمیات اندازه گیری شوند.



اندازه گیری ارتعاشات

■ وسیله اندازه گیری این کمیات به طور کلور ارتعکلی **ism** سنج ارتعاش **ism** نام دارد.

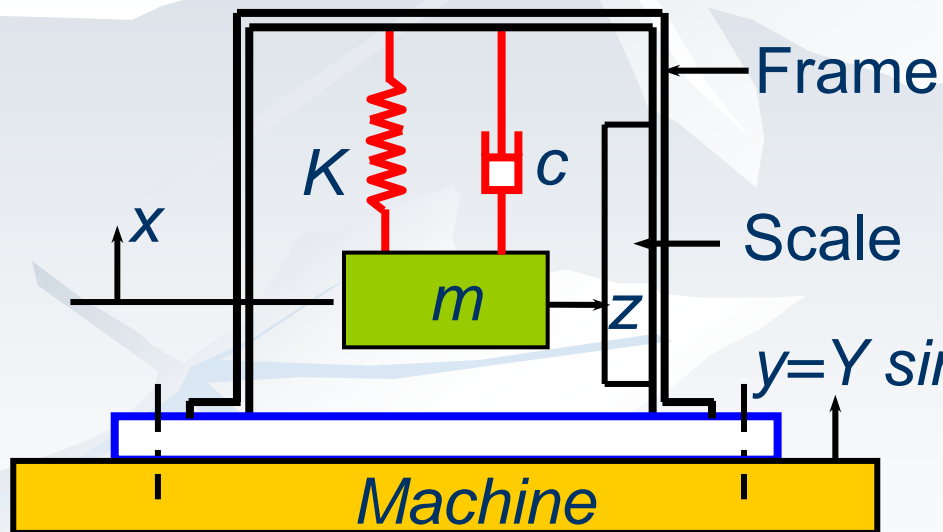


- لازمه مهم چنین دستگاہی نشان دادن یک خروجی است که نشان دهندہ یک ورودی مانند دامنه جابجائی، سرعت یا شتاب سیستم ارتعاشی است.
- دقت این اندازه گیری تا حد ممکن باید خوب باشد.

ارتعاش سنج

m - جرم مرتعش دستگاه
اندازه گیری

Model



c - ضریب میرایی دستگاه
اندازه گیری

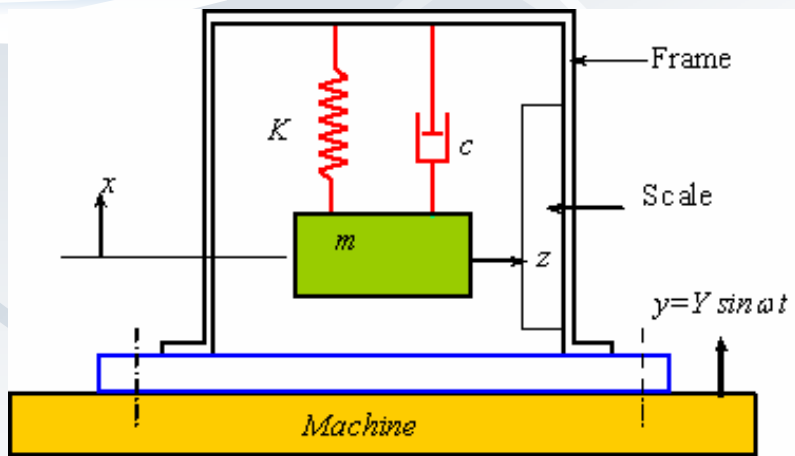
K - ضریب فنریت دستگاه اندازه

X - جابجائی مطلق جرم مرتعش

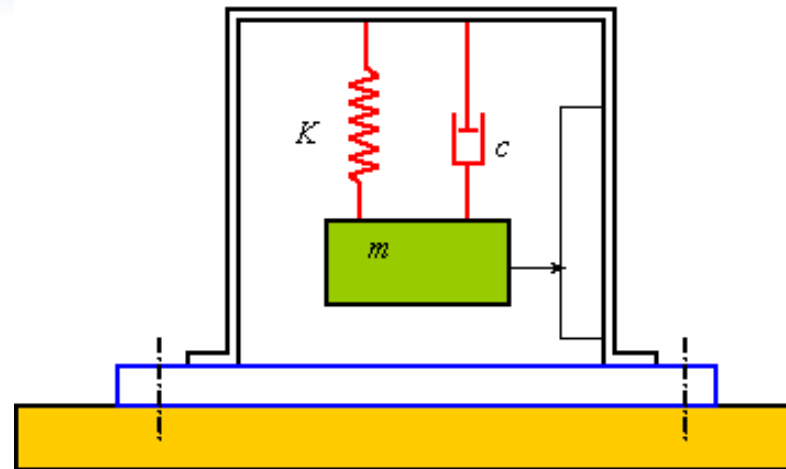
y - تحریک پایه (ارتعاش ماشین
اینجا هارمونیک)

$z = (x - y)$ جابجائی نسبی جرم
مرتعش نسبت به قاب

ارتعاش سنج



Static



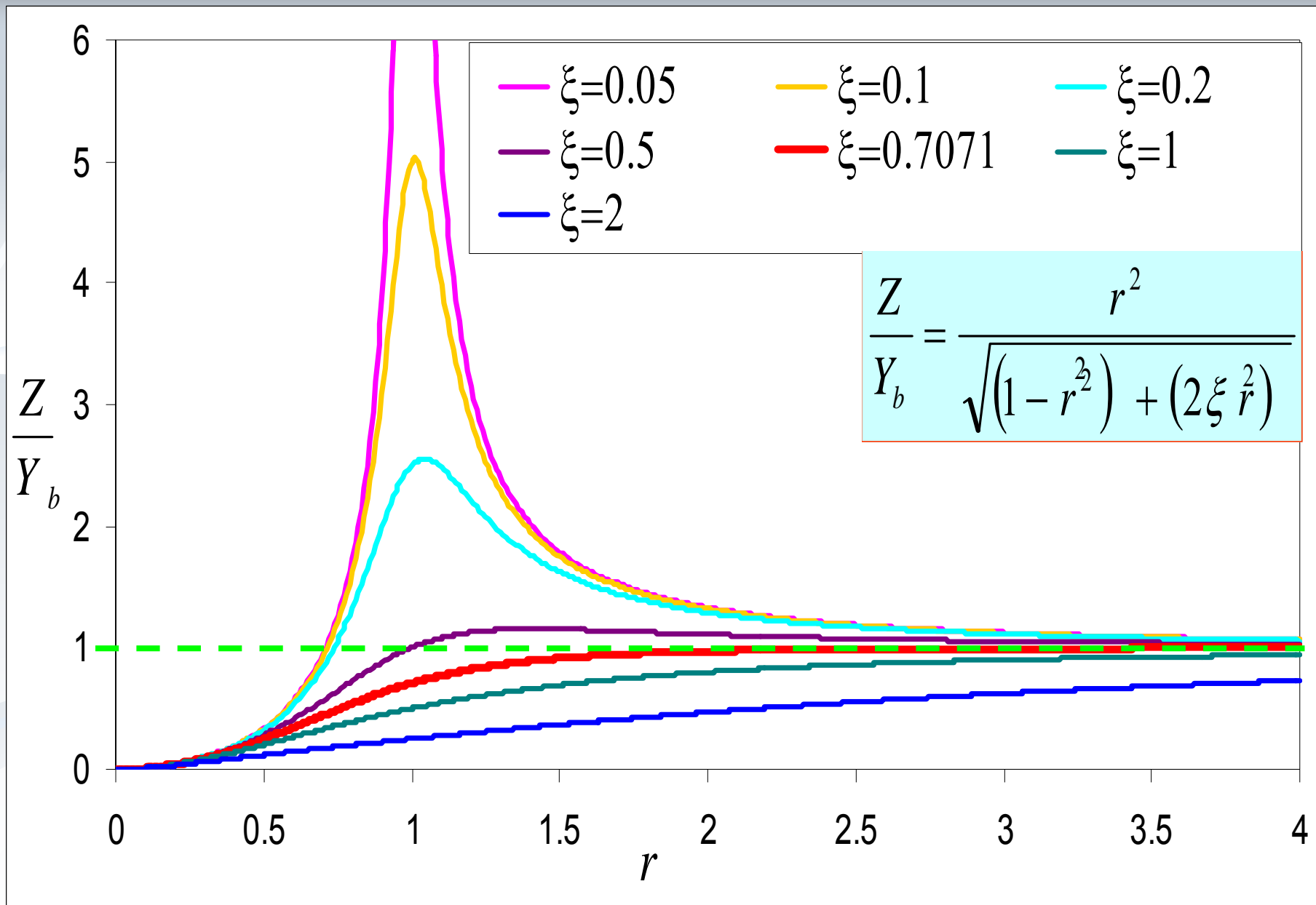
Dynamic

ارتعاش سنج

- ارتعاش سنج وسیله ای است که از تحریک پایه استفاده نموده و جابجائی نسبی را اندازه می گیرد
- پس روابط حاکم همان روابط مربوط به تحریک پایه با حرکت نسبی است.

$$\frac{Z}{Y_b} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2) + (2\xi r^2)}}$$

- زمانی ارتعاش دقیقاً ادقیقا اندازه شود که لاگیری Z/Y_b باشد.
- این زمانی است است $r = 2.5$ باشد



ارتعاش سنج

- هرچه r بیشتر باشد، اندازه گیری دقیقتر است.
- r بیشتر به معنی این است که ارتعاش سنج فرکانسهای بالا را بهتر اندازه می گیرد
- همچنین برای اینکه دامنه اندازه گیری بیشتر باشد ω_{II} دستگاه اندازه گیری باید کمتر باشد.
- در نتیجه جرم مرتعش باید بیشتر باشد یا ضریب فنریت کمتر باشد.
- این دستگاهها معمولاً دارای جرم بزرگی هستند و فضا زیادی لازم دارند
- بدلیل جرم زیاد روی خواص ارتعاشی ماشین موثر می باشند
- بهترین بهترین نسبتی 2 سیگنال است.

سرعت سنجی

$$z(t) = \frac{r^2 Y}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\omega_b t - \phi)$$

$$\dot{y}(t) = \omega_b Y \cos(\omega_b t)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{r^2 Y \omega_b}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cos(\omega_b t - \phi)$$

$$\dot{z}(t) = Y \omega_b \cos(\omega_b t - \phi)$$

■ اگر $Z/Y \approx 1$ باشد:

■ که همان سرعت پایه است با یک اختلاف فاز و ارتباط آن با جابجائی

نسبی نیز: $\dot{z}(t) = \omega \cdot z(t)$

■ لذا با کالیبره کردن دستگاه می توان سرعت را نیز اندازه گرفت.

شتاب سنجی

$$\ddot{z}(t) = -Z\omega_b^2 \sin(\omega_b t - \phi)$$

$$\ddot{y}(t) = -\omega_b^2 Y \sin(\omega_b t)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega_b^2 z(t) = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \left[-\omega_b^2 Y \sin(\omega_b t - \phi) \right]$$

$$-\frac{\omega_b^2}{r^2} z(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \left[-\omega_b^2 Y \sin(\omega_b t - \phi) \right]$$

$$-\omega_b^2 z(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \left[-\omega_b^2 Y \sin(\omega_b t - \phi) \right]$$

شتاب سنجی

$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cong 1$$

■ حال اگر

■ در نتیجه

$$-\omega_n^2 z(t) = -\omega_b^2 Y \sin(\omega_b t - \phi) \quad \ddot{y}(t) = -\omega_b^2 Y \sin(\omega_b t)$$

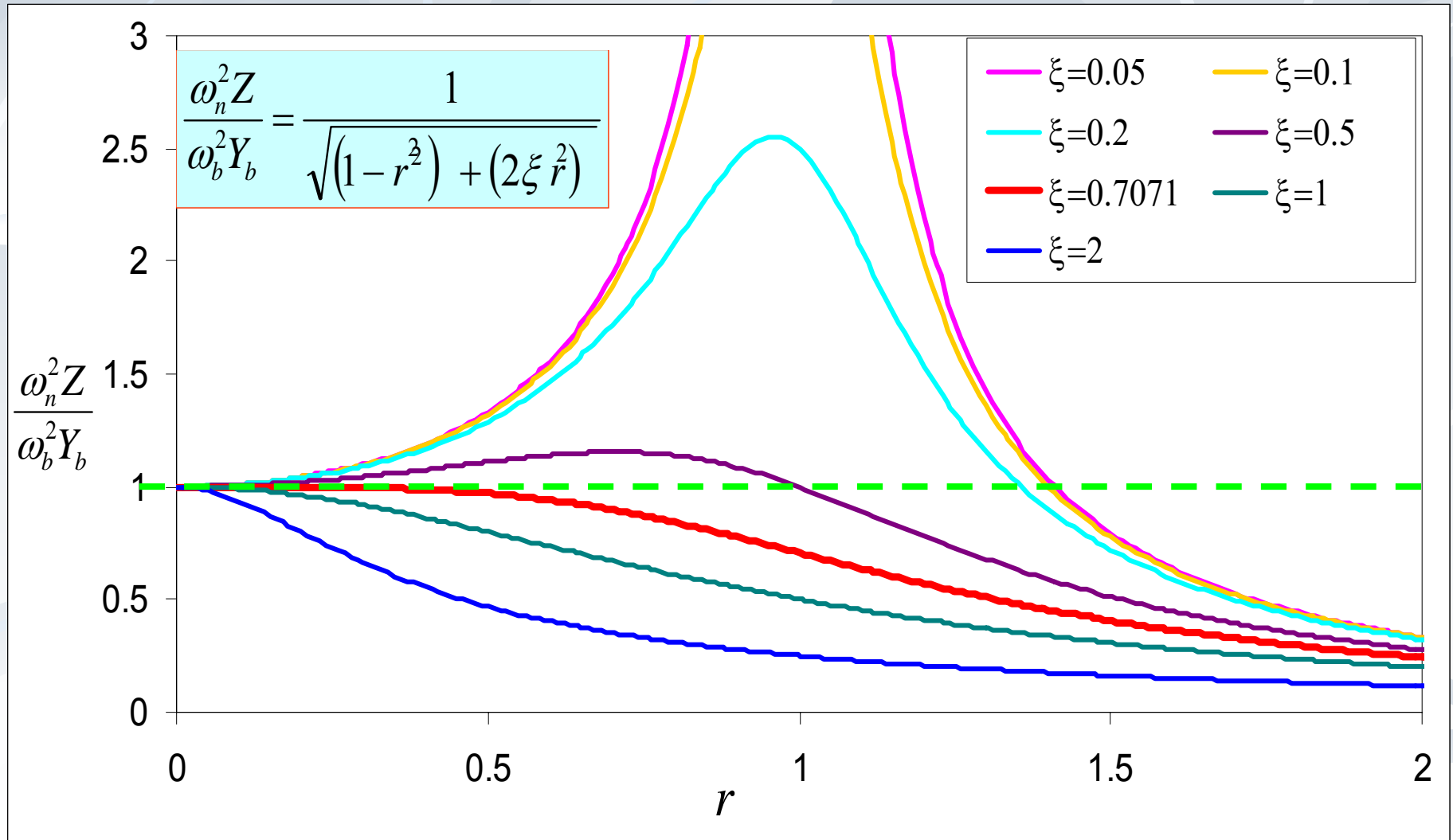
■ و $-\omega_n^2 z(t)$ نشان دهنده شتاب پایه با یک اختلاف فاز است.

■ که با کالیبره کردن دستگاه می توان شتاب را اندازه گرفت

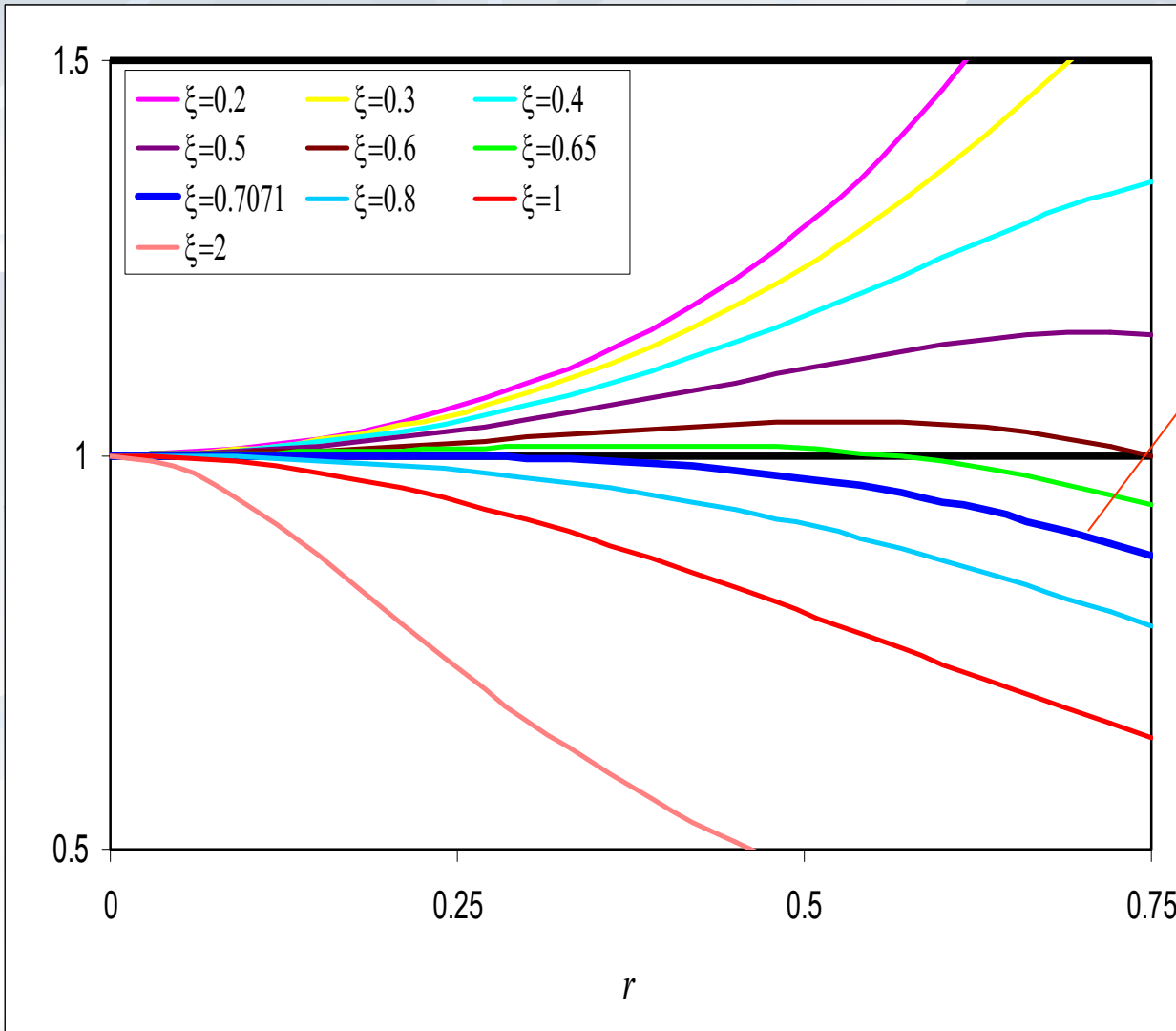
■ اما در چرخه فرکانسی $\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \cong 1$ است؟

■ $r \approx 0$ که

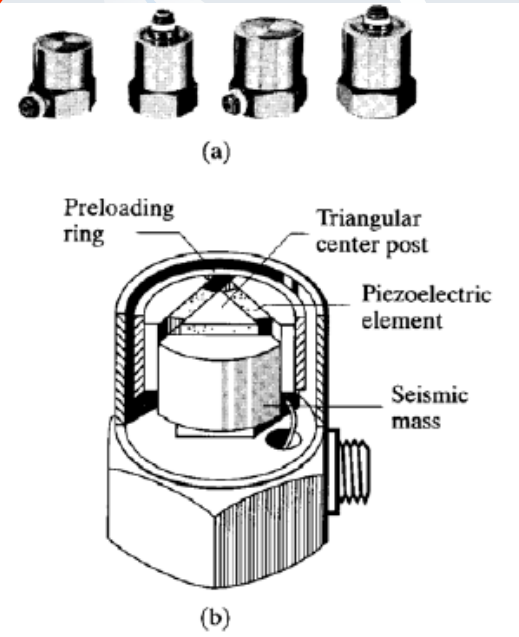
شتاب سنجی



شتاب سنجی



$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$$



شتاب سنجی

عدد کوچکی باشد:

$$0 < r < 0.6$$

■ چون نسبت فرکانس پایه (فرکانس ارتعاشی که باید اندازه گرفته شود) به فرکانس طبیعی دستگاه اندازه گیری کوچک است لذا فرکانس طبیعی سیستم باید بزرگ باشد

■ لذا باید جرم مرتعش کم و سختی فنر زیاد باشد در نتیجه اندازه دستگاه

ک بکند و جندآوری

■ بهترین بهترین نسبت 2 میراوی است.

مثال

■ یک لرزه نگار بر روی ماشینی سوار شده است که دارای سرعت دورانی 1000rpm است. فرکانس طبیعی این لرزه نگار 20rad/s است، لرزه نگار دنگار ارتدामنه ارتفاع 0.5mm را ثبت نموده است. جابجائی، سرعت و شتاب ماشین را حساب کنید. از میرائی صرف نظر کنید.

$$\omega_n = 20 \text{ rad/s}, \quad \xi = 0$$

$$\omega = 1000 \frac{2\pi}{60} = 104.7 \text{ rad/s} \Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{104.7}{20} = 5.24 \text{ rad / s}$$

$$\frac{Z}{Y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{1}{1-r^2} = \frac{5.24^2}{|1-5.24^2|} = 1.038$$

ادامه

$$Y = \frac{Z}{1.038} = \frac{0.5}{1.038} = 0.482 \text{ mm}$$

■ در نتیجه دامنه جابجائی:

$$\omega Y = \frac{\omega Z}{1.038} = \frac{104.7 \times 0.5}{1.038} = 50.43 \text{ mm/s}$$

■ دامنه سرعت:

$$\omega^2 Y = \frac{104.7^2 \times 0.5}{1.038} = 5280.4 \text{ mm/s}^2$$

■ دامنه شتاب:

مثال

■ یک لرزه نگار دارای فرکانس طبیعی 6Hz است. کمترین فرکانسی که می توان بعد از آن دامنه را با 2% خطا اندازه گرفت چیست؟ میرائی را نادیده بگیرید.

$$\frac{Z}{Y} = 1.02 = \frac{r^2}{|1 - r^2|} \Rightarrow 1.02r^2 - 1.02 = r^2$$

$$0.02r^2 = 1.02 \Rightarrow r^2 = \frac{1.02}{0.02} = 51$$

$$r = 7.141 \quad f = rf_n = 7.141 \times 6 = 42.85 \text{ Hz}$$

مثال

■ برای یک لرزه نگار مقدار خطای 2% مشاهده شده است. فرکانس طبیعی لرزه نگار 8Hz است. اگر کمترین فرکانس قابل اندازه گیری 40Hz باشد، مقدار نسبت میرایی را بدست آورید.

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{f}{f_n} = \frac{40}{8} = 5$$

$$\frac{Z - Y}{Y} \times 100 = 2 \Rightarrow \frac{Z}{Y} = 1 + 0.02 = 1.02$$

$$1.02 = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{25}{\sqrt{(-24)^2 + 100\xi^2}}$$

$$24^2 + 100\xi^2 = \left(\frac{25}{1.02}\right)^2 \Rightarrow \xi = 0.497$$

مثال

■ لرزه نگاری دارای فرکانس طبیعی 6 Hz نسبت به 0.25 می باشد. است.
فرکانسی که به 20% خطا می توان اندازه گرفت چیست؟

$$\xi = 0.25$$

$$f_n = 6\text{ Hz} \quad f = ?$$

$$\frac{Z}{Y} = 1.02 = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$1.02^2 [1 + r^4 - 2r^2 + 0.25r^2] = r^4$$

$$(1.02^2 - 1)r^4 - (1.75 \times 1.02^2)r^2 + 1.02^2 = 0$$

$$0.0404 r^4 - 1.8207 r^2 + 1.0404 = 0$$

$$r^2 = \frac{1.8207 \pm \sqrt{1.8207^2 - 4 \times 0.0404 \times 1.0404}}{2 \times 0.0404} = \begin{cases} r = 0.7608 \times \\ r = 6.67 * \end{cases}$$

$$f = r f_n = 6.67 \times 6 = 40.02 \text{ Hz}$$

Numerical problems

Problem-5

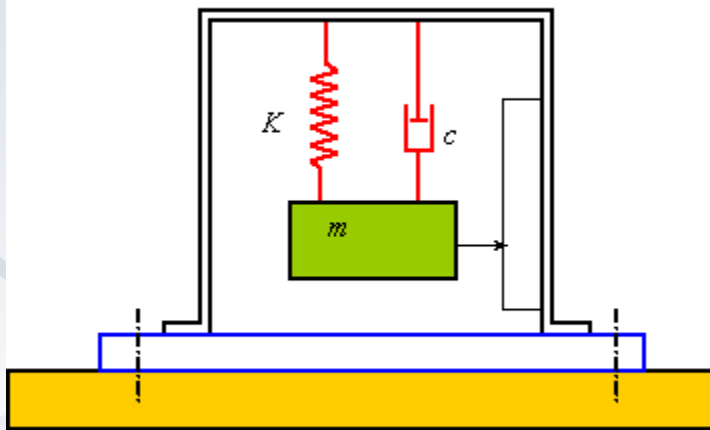
Design a vibrometer for the range of frequency 0-10 Hz.

Given data

$\omega = 10$ Hz maximum frequency for which
vibrometer should be designed

Numerical problems

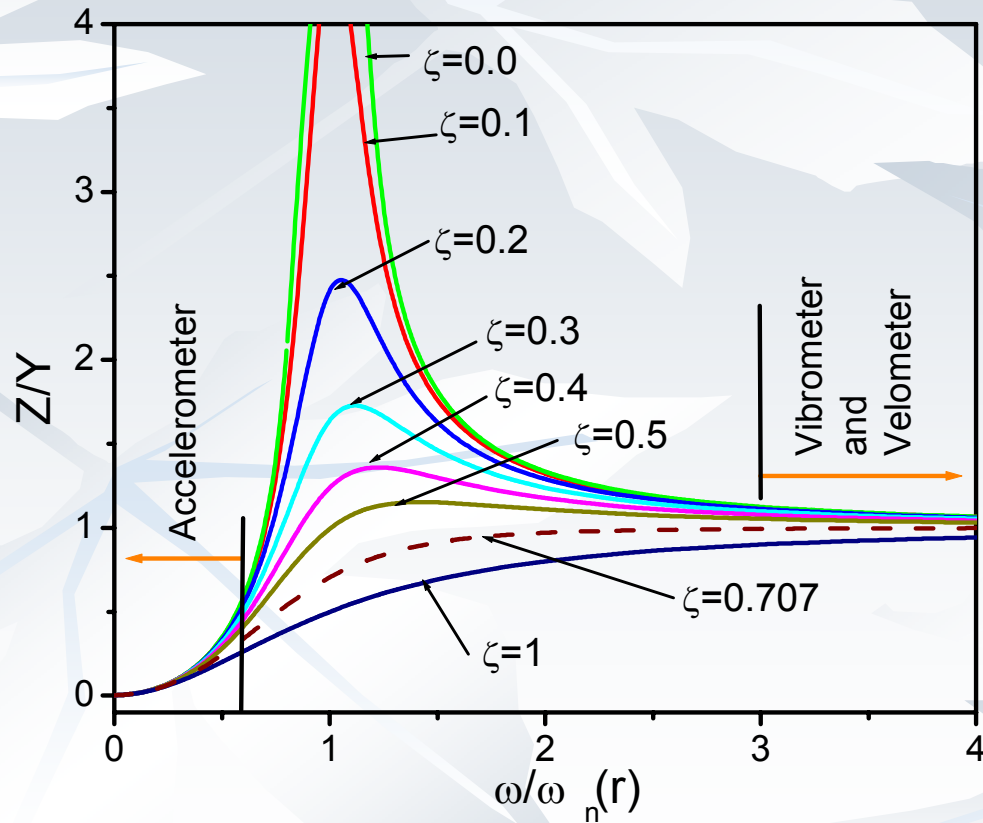
Problem-5



It is required to design stiffness of spring (K), value of damping coefficient (c) and the magnitude of seismic mass (m) for the given requirements

Numerical problems

Problem-5



From theory, it is known that for vibrometer the frequency ratio should be more than 3

Numerical problems

Problem-5

Consider minimum $r = 3$ for the design

$$r = \omega / \omega_n$$

For the given frequency, natural frequency of the instrument should be

$$\omega_{\bar{n}} = \omega / r$$

$$\omega_{\bar{n}} = 10 / 3 = 3.33 \text{ Hz} = 20.92 \text{ rad/sec}$$

Numerical problems

Problem-5

$$\omega_n = \sqrt{K / m}$$

where, K = stiffness of spring and m seismic mass

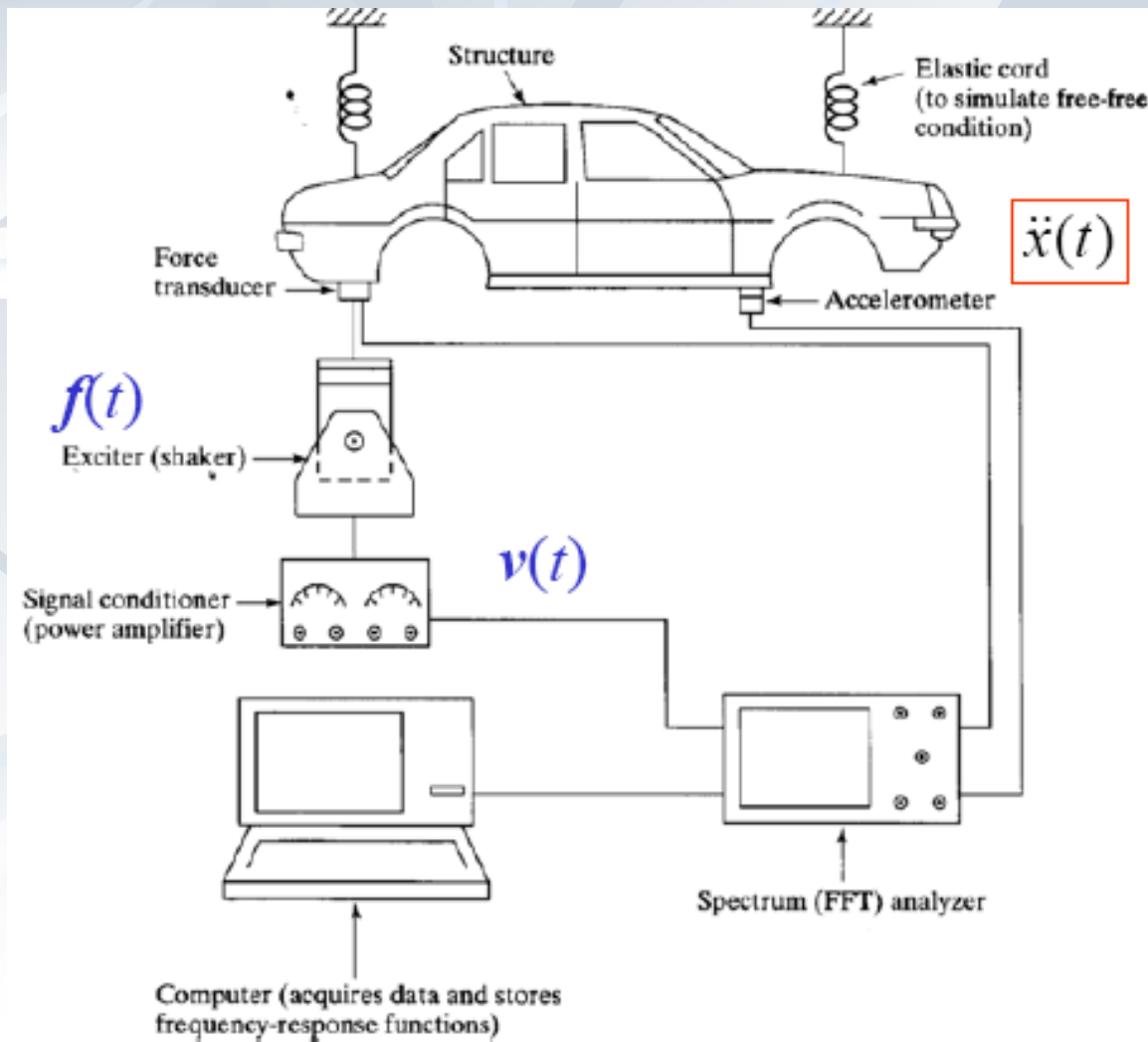
For the fixed value of K magnitude of m can be obtained

We know, $\xi = c / c_c$

and $c_c = 2 m \omega_n$

From above equations, for a particular value of ξ one can estimate the magnitude of damping factor c

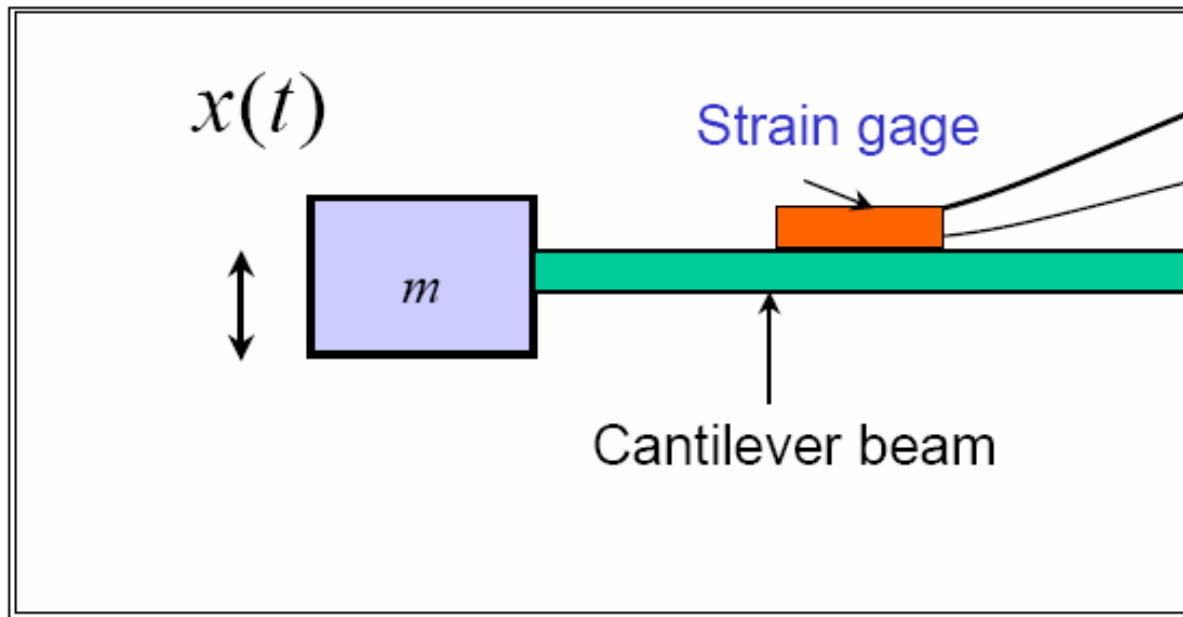
گیری انداز و تجربه انداز تجر بی



■ آنالیز مدال

■ لرزاننده

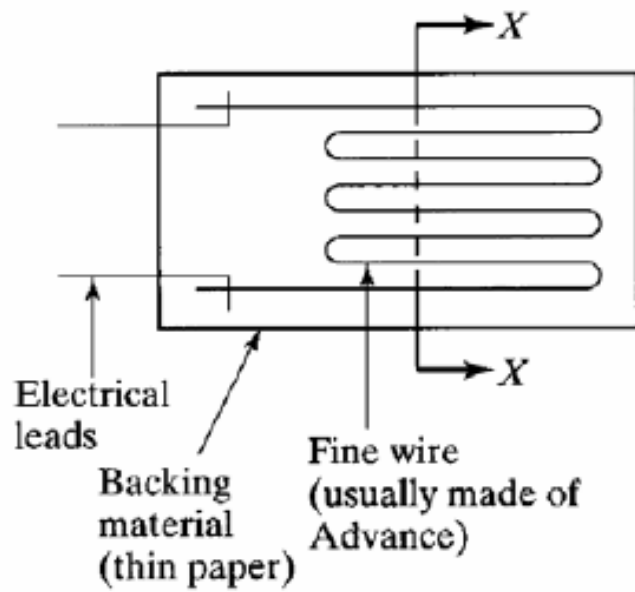




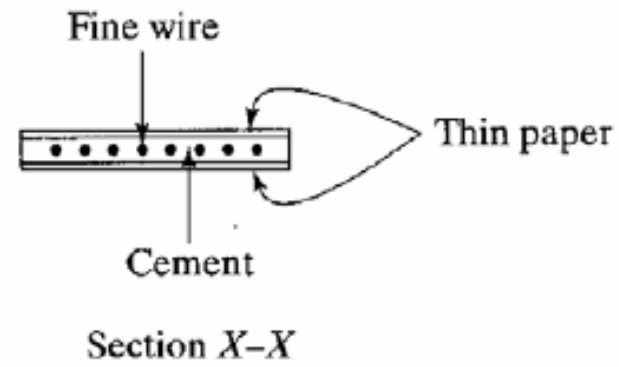
$$\varepsilon = \text{const } x(t)$$

base

■ کرنش سنچ

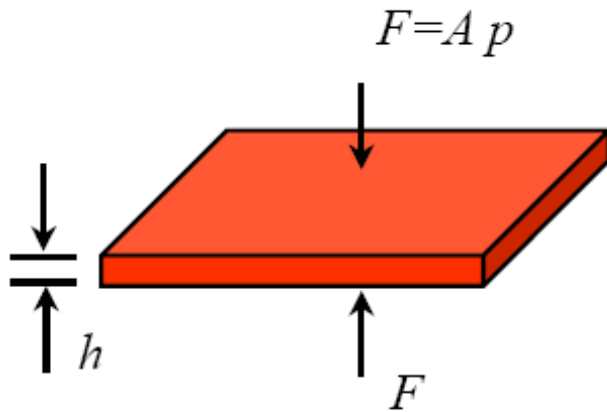


(a)



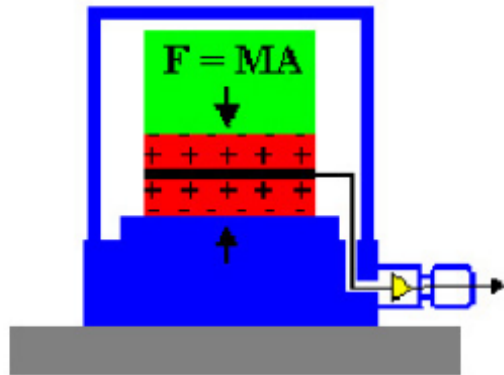
(b)

Piezoelectric transducer

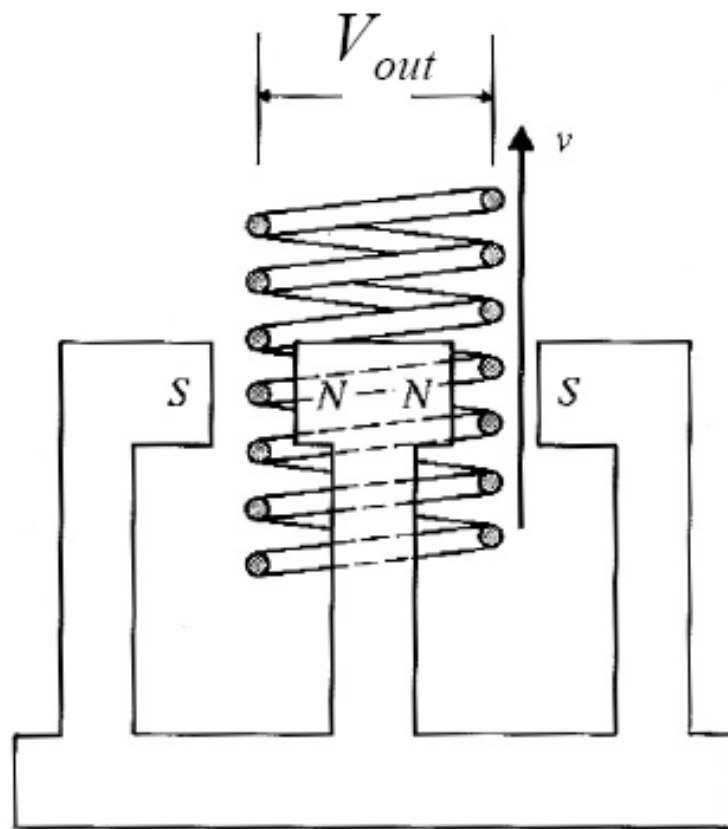


$$Q_x = d F = d A p$$

$$V_{out}(t) = v h p(t)$$



d = piezoelectric constant
 v = voltage sensitivity coeff
 h = thickness of transducer
<http://www.bksv.com/>



Sensor: vel. → Volt

$$V_{out}(t) = B l v(t)$$

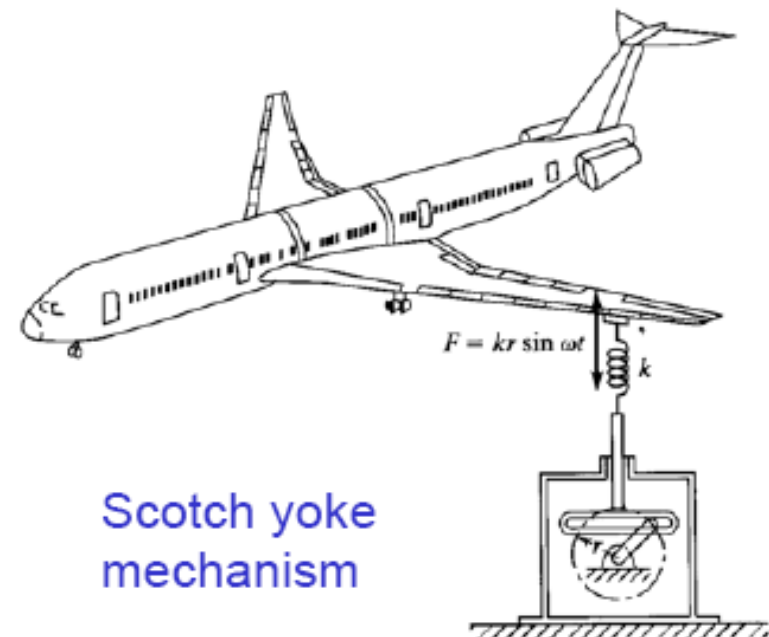
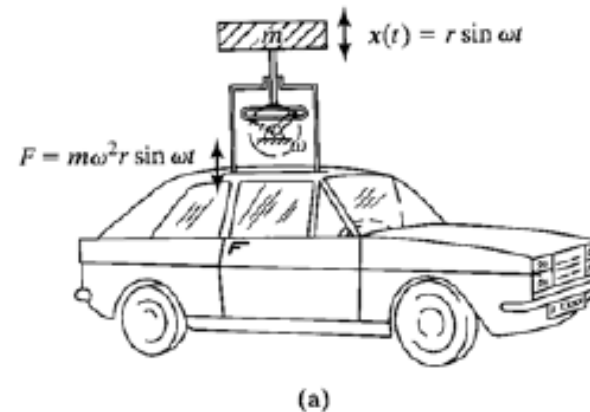
Exciter: I → F

$$B l = V/v = F/I$$

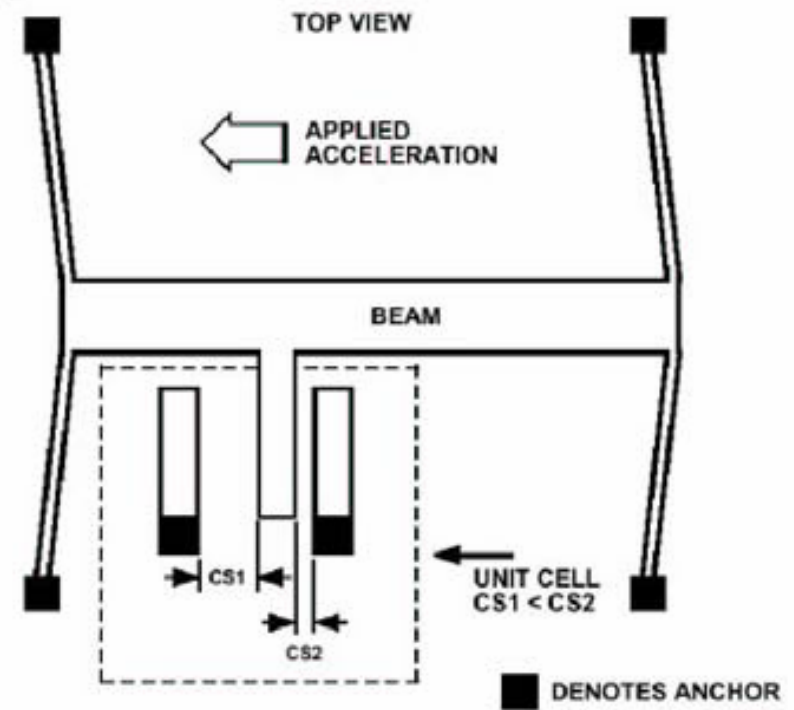
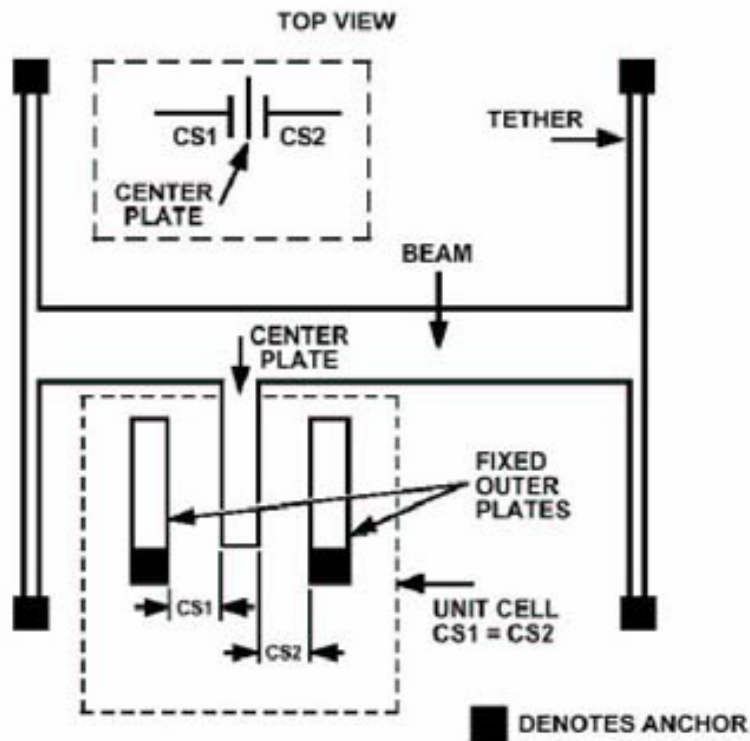
$$F = B l I$$

Mechanical Exciters

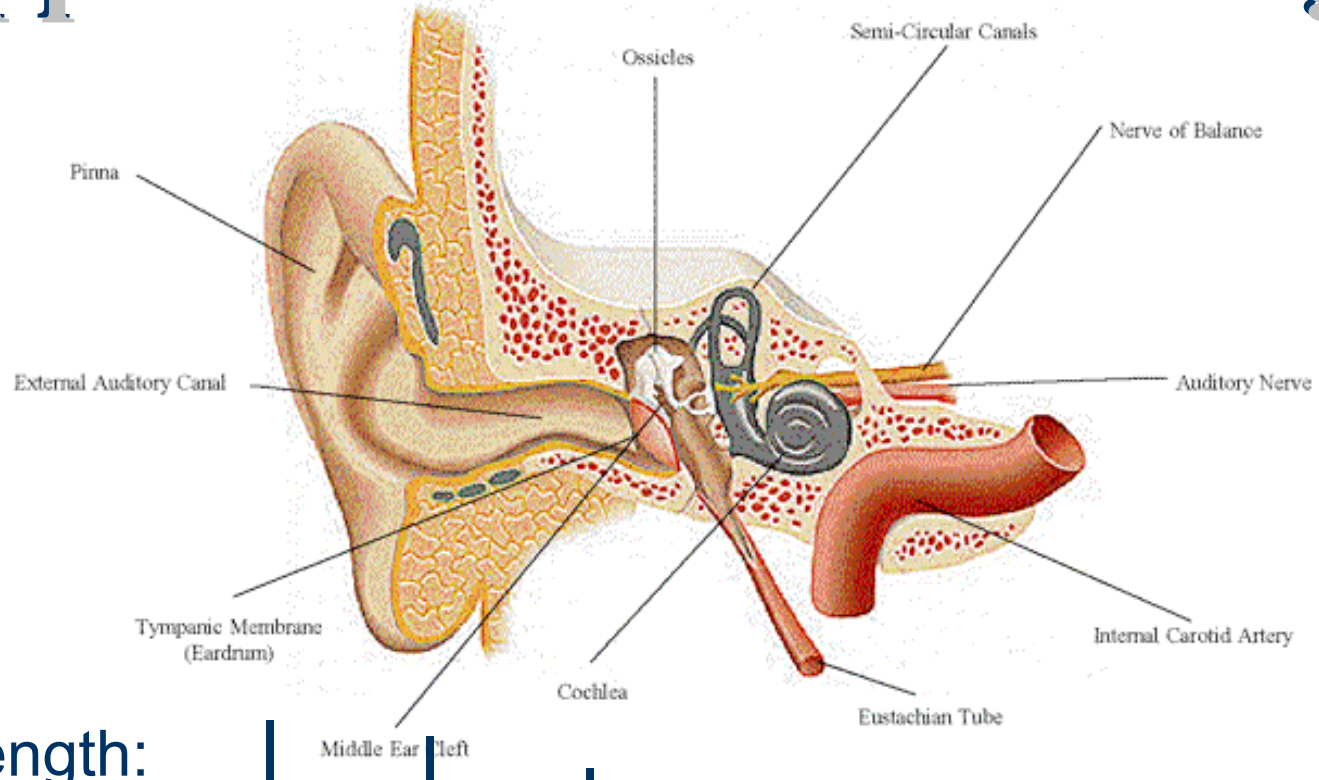
- Force applied as an inertia force:
- Force applied as an elastic spring force:
- Used for frequency < 30 Hz and loads < 700 N



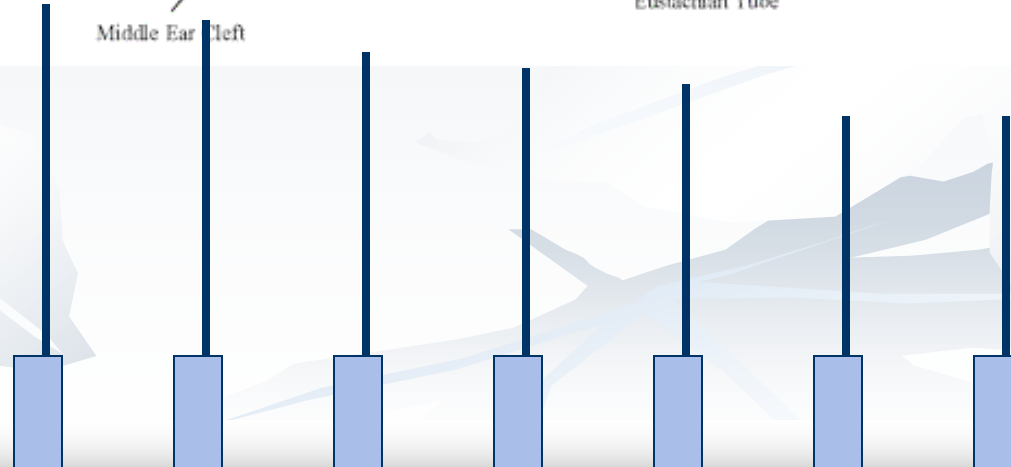
ADXL Differential Capacitive Sensor



Application: Human Hearing



- Diff. Length:
- Resonance @ diff nat. freq.
- Nerves pick up amplitude only

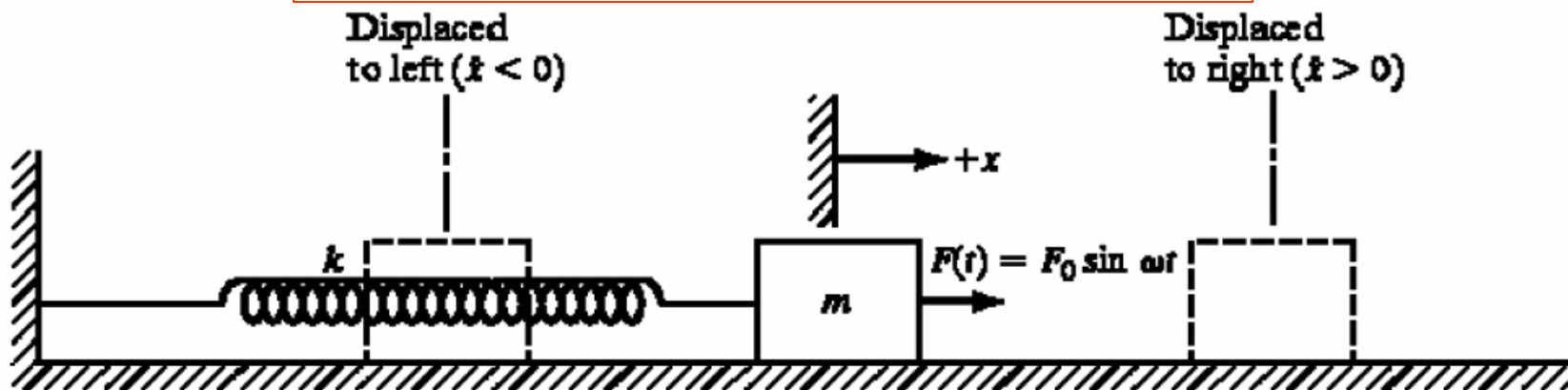


ارتعاش اجباری هارمونیک با میرائی کلمب

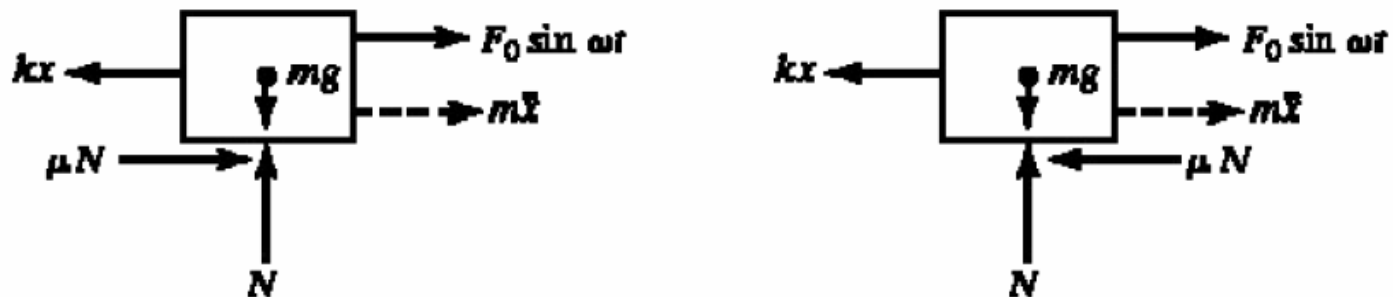
■ معادله حرکت ارتعاش اجباری هارمونیک یک درجه آزادی با میرائی

$$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t) = F_0 \sin \omega t$$

کلمب:



(a)



ارتعاش اجباری هارمونیک با میرائی کلمب

$$m\ddot{x} + kx \pm \mu N = F(t) = F_0 \sin \omega t$$

- حل تحلیلی این معادله دیفرانسیل مشکل می باشد.
- اگر نیروی اصطکاک در مقایسه با دامنه نیرو F_0 بزرگ باشد ممکن است که حرکت جرم ناپیوسته باشد.
- از طرفی اگر نیروی اصطکاک در مقایسه با دامنه نیرو F_0 کوچک باشد حرکت حالت پایدار جرم تقریباً هارمونیک است.
- برای بدست آوردن جواب تقریبی معادله حرکت از میرائی معادل استفاده می شود.

میرائی معادل برای میرائی کلمب

- برای این کار لازم است که انرژی تلف شده از میرائی کلمب با انرژی تلف شده میرائی ویسکوز مساوی قرار داده شود.
- از قبل

$$W_d = \pi c_{eq} X^2 = 2\pi \xi k X^2$$

- در میرائی کلمب

$$F_c = -\text{sign}(\dot{x}) \mu N$$

$$W_c = 2 \int_0^{\pi/\omega} \underbrace{\mu N \dot{x}}_{\text{کار در نیم سیکل}} dt = 2 \int_0^{\pi/\omega} \mu N \omega X \cos(\omega t - \delta) dt$$

میرائی معادل برای میرائی کلمب

لذا: ■

$$W_c = 2\mu N \omega X \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t - \delta) \right]_0^{\pi/\omega}$$
$$= 2\mu N X [\sin(\pi - \delta) - \sin(-\delta)]$$

$$W_c = 4\mu N X$$

$$W_d = \pi c_{eq} \omega X^2$$

$$W_c \quad W_d \quad \Rightarrow \quad c_{eq} \quad \frac{4\mu N}{\pi \omega X}$$

میراثی معادل برای میراثی کلمب

■ از حل معادله حرکت معادل: $m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$

$$c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \omega X} \quad m\ddot{x} + \left(\frac{4\mu N}{\pi \omega X} \right) \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi)$$

$$\underline{\underline{X}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c_{eq}\omega)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi \underline{\underline{X}}} \right)^2}}$$

میرائی معادل برای میرائی کلمب

X می‌باشد

$$X^2 = \frac{F_0^2}{(k - m\omega^2)^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi X}\right)^2} \Rightarrow F_0^2 = (k - m\omega^2)^2 X^2 + \left(\frac{4\mu N}{\pi}\right)^2$$

$$X = \frac{\sqrt{F_0^2 - (4\mu N / \pi)^2}}{(k - m\omega^2)^2} = \frac{F_0}{k} \frac{\sqrt{1 - (4\mu N / \pi F_0)^2}}{1 - (\omega / \omega_n^2)^2}$$

$$4\mu N < \pi F_0$$

■ اگر شرط مقابل برقرار نباشد، این جواب برقرار نیست و نیاز به حل دیگری است

میرائی معادل برای میرائی کلمب

■ اختلاف فاز:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{c_{eq} \omega}{k - m\omega^2} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{4\mu N}{\pi k X}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right)$$

$$X = \frac{F_0}{k} \frac{\sqrt{1 - (4\mu N / \pi F_0)^2}}{1 - (\omega / \omega_n)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{\pm \frac{4\mu N}{\pi F_0}}{\left\{ 1 - \left(\frac{4\mu N}{\pi F_0} \right)^2 \right\}^{1/2}} \right]$$

نکاتی در مورد میرایی کلمب

■ در میرایی دمیگرای بر خلاف برغیرلاقی تشدید در دلزج تشدید $\omega = \omega_n$ اتفاق می افتد

$90^\circ =$ اختلاف ϕ و دامنه ارتعاش بینهایت می شود:

■ انرژی ورودی به سیستم در هر سیکل:

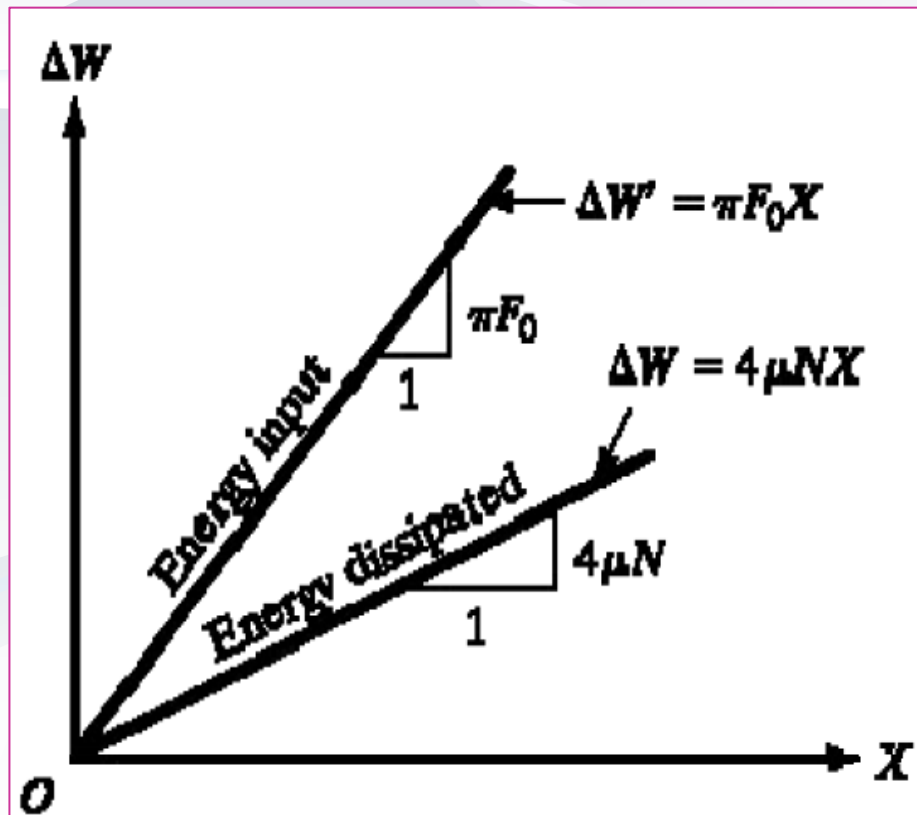
$$W' = \int_{\text{Cycle}} F \cdot dx = \int F \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi/\omega} F_0 \sin \omega t [\omega X \cos(\omega t - \phi)] dt =$$

■ در تشدید $\phi = 90^\circ$ است، لذا:

$$W' = \int_0^{2\pi/\omega} \omega X F_0 \sin^2 \omega t dt = \pi F_0 X$$

تکاتی در مورد میرایی کلمب

$$4\mu N < \pi F_0 \Rightarrow 4\mu NX < \pi F_0 X$$



- یعنی انرژی که در هر سیکل تلف می شود از انرژی ورودی کمتر است لذا دامنه هر لحظه افزایش می یابد.
- در صورت غیر تشدید بودن حرکت:

$$W' = \omega X F_0 \int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t - \phi) dt$$

$$W' = \omega X F_0 \sin \phi$$

- در حقیقت در اینجا اختلاف فاز باعث کنترل دامنه می شود و دامنحنی برهمه منطبق می شوند

میرائی معادل لزجی

■ اهمیت میرائی در سیستمهای مکانیکی محدود نمودن دامنه ارتعاش در تشدید می باشد.

■ اثر میرائی بر دامنه ارتعاش در فرکانسهای بالاتر و پائین تر از فرکانس تشدید در مقایسه با فرکانس تشدید ناچیز است.

■ در حالت تشدید دامنه ارتعاش

$$\left. \frac{Xk}{f_o} \right|_{r=1} = \frac{1}{2\xi}$$

■ این رابطه به راحتی برای دیگر میرائی ها بدست نمی آید

میراثی معادل لزجی

■ **الذکر** علاءت ککما ی الو اللی رزلعی رادیگرمیرائی ط بدست آوریم

- این میراثی معادل در محدوده تشدید قابل قبول می باشد.
- برای بدست آوردن میراثی معادل کار انجام شده توسط نیروی میرا در یک سیکل را با کار معادل میراثی لزجی مساوی قرار می دهیم

$$W_d = \pi c_{eq} X^2 = 2\pi \xi k X^2$$

مثال

■ چنانچه جسمی در یک سیال دارای سرعت بالا باشد نیروی مقاوم با مجذور سرعت متناسب است لذا:

$$F_d = \pm \alpha \dot{x}^2$$

$$x = X \sin(\omega t - \phi)$$

$$\dot{x} = \omega X \cos(\omega t - \phi)$$

$$W_d = \int_{x_1}^{x_2} F_d dx = \int_{x_1}^{x_2} \alpha \dot{x}^2 dx = \int_{t_1}^{t_2} \alpha \dot{x}^2 \frac{dx}{dt} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \alpha \dot{x}^3 dt = 2 \int_0^{\pi/\omega} \alpha \omega^3 X^3 \cos^3(\omega t - \phi) dt$$

مثال

$$W_d = 2 \int_0^{T/\omega} \alpha \omega X^3 \cos^3(\omega t - \phi) dt$$

$$u = \omega t - \phi, \quad du = \omega dt$$

$$\begin{aligned} W_d &= 2\alpha\omega^2 X^3 \int_{-\phi}^{(\pi-\phi)} \cos^3(u) du = 2\alpha\omega^2 X^3 \int_{-\phi}^{(\pi-\phi)} \cos(u)(1 - \sin^2(u)) du \\ &= 2\alpha\omega^2 X^3 \left[\sin(u) - \frac{1}{3} \sin^3(u) \Big|_{-\phi}^{\pi-\phi} \right] \\ &= 2\alpha\omega^2 X^3 \left[\sin(\pi - \phi) - \frac{1}{3} \sin^3(\pi - \phi) - \sin(-\phi) + \frac{1}{3} \sin^3(-\phi) \right] \\ &= 2\alpha\omega^2 X^3 \left[2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{8}{3} \alpha\omega^2 X^3 \end{aligned}$$

مثال

$$W_d = \frac{8}{3} \alpha \omega^2 X^3 = \pi c_{eq} \omega X^2$$

$$c_{eq} = \frac{8}{3\pi} \alpha \omega X \quad \xi_{eq} = \frac{4}{3\pi} \frac{\alpha \omega X}{\sqrt{km}}$$

$$\ddot{x} + 2 \frac{4}{3\pi} \frac{\alpha \omega X}{\sqrt{km}} \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$(\omega_n^2 - \omega^2) X + i \left(\frac{8}{3\pi} \frac{\alpha \omega^2 X}{m} \right) \quad \frac{F}{m} = \frac{0}{m}$$

مثال

$$\left| (\omega_n^2 - \omega^2)X + i \left(\frac{8}{3\pi} \frac{\alpha \omega^2}{m} \right) X^2 \right| = \frac{F_0}{m}$$

حل معادله برای X

$$\left| \left(\frac{8}{3\pi} \frac{\alpha r^2}{m} \right)^2 X^4 + (1 - r^2)^2 X^2 - \left(\frac{F_0}{m \omega_n^2} \right)^2 \right| = 0$$

$$X = \pm \left(\frac{3\pi m}{8\alpha r^2} \right) \sqrt{-\frac{(1 - r^2)^2}{2} + \sqrt{\frac{(1 - r^2)^4}{4} + \left(\frac{8\alpha F_0 r^2}{3\pi m k} \right)^2}}$$

مثال

■ در تشدید $r=1$

$$\left. \frac{Xk}{f_o} \right|_{r=1} = \frac{1}{2\xi}$$

$$X \Big|_{\omega=\omega_n} = \frac{F_0/k}{\frac{8}{3\pi} \frac{\alpha\omega X}{\sqrt{km}}} = \frac{3\pi F_0}{8\alpha\omega_n^2 X}$$

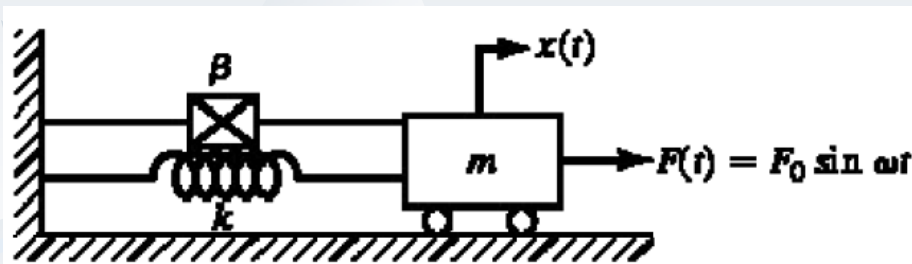
$$X \Big|_{\omega=\omega_n} = \sqrt{\frac{3\pi F_0}{8\alpha\omega_n^2}}$$

میرائی هیستریزس

■ در این نوع میرائی انرژی تلف شده متناسب با توان دوم دامنه حرکت می باشد.

$$W_d = \alpha X^2 \Rightarrow c_{eq} = \frac{\alpha}{\pi \omega}$$

■ شکل نشان دهنده سیستمی با میرائی هیستریزس می باشد.



(a)



(b)

$$m\ddot{x} + \frac{\alpha}{\pi \omega} \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega} \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

میرائی ہیسٹرزس

$$x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi)$$

■ پاسخ حالت پایدار:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{\pi\omega}\right)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\pi k}\right)^2}}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\pi k}$$

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + \beta^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha/\pi}{k - m\omega^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right)$$

■ ہمچنین

سختی مختلط

$$W_d = \alpha X^2 \Rightarrow c_{eq} = \frac{\alpha}{\pi \omega} \Rightarrow m\ddot{x} + \left(k + i\frac{\alpha}{\pi}\right)x = F_0 e^{i\omega t}$$

$$m\ddot{x} + \frac{\alpha}{\pi \omega} \dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

$$m\ddot{x} + k(i + i\beta)x = F_0 e^{i\omega t}$$

$$(k - m\omega^2 + i\beta k)X = F_0$$

$$|X|_{res} = \frac{F_0}{\beta k}$$

$$X = \frac{F_0}{k - m\omega^2 + i\beta k}$$

$$|X|_{res} = \frac{F_0}{2\xi k}$$

$$X = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{k - m\omega^2 + i\beta k}$$

پاسخ ■

پاسخ فرکانسی

■ از پاسخ قبل:

$$H(r) = \frac{kX}{F_0} = \frac{1}{1-r^2+i\beta} = \frac{(1-r^2)-i\beta}{(1-r^2)^2+\beta^2} = u+iv$$

$$u = \frac{(1-r^2)}{(1-r^2)^2+\beta^2}, \quad v = -\frac{\beta}{(1-r^2)^2+\beta^2}$$

$$\begin{aligned} v + \frac{1}{2\gamma} &= -\frac{\beta}{(1-r^2)^2+\gamma^2} + \frac{1}{2\gamma} = \frac{-2\gamma^2 + [(1-r^2)^2 + \gamma^2]}{2\gamma[(1-r^2)^2 + \gamma^2]} \\ &= \frac{[(1-r^2)^2 - \gamma^2]}{2\gamma[(1-r^2)^2 + \gamma^2]} \end{aligned}$$

پاسخ فرکانسی

$$H(r) = \frac{kX}{F_0} = \frac{1}{1-r^2+i\beta} = \frac{(1-r^2)-i\beta}{(1-r^2)^2+\beta^2} = u+iv \quad \blacksquare \text{ از پاسخ قبل:}$$

$$u = \frac{(1-r^2)}{(1-r^2)^2+\beta^2},$$

$$v = -\frac{\beta}{(1-r^2)^2+\beta^2}$$

$$v + \frac{1}{2\beta} = -\frac{\beta}{(1-r^2)^2+\beta^2} + \frac{1}{2\beta} = \frac{-2\beta^2 + (1-r^2)^2 + \beta^2}{2\beta[(1-r^2)^2+\beta^2]}$$

$$= \frac{(1-r^2)^2 - \beta^2}{2\beta[(1-r^2)^2+\beta^2]}$$

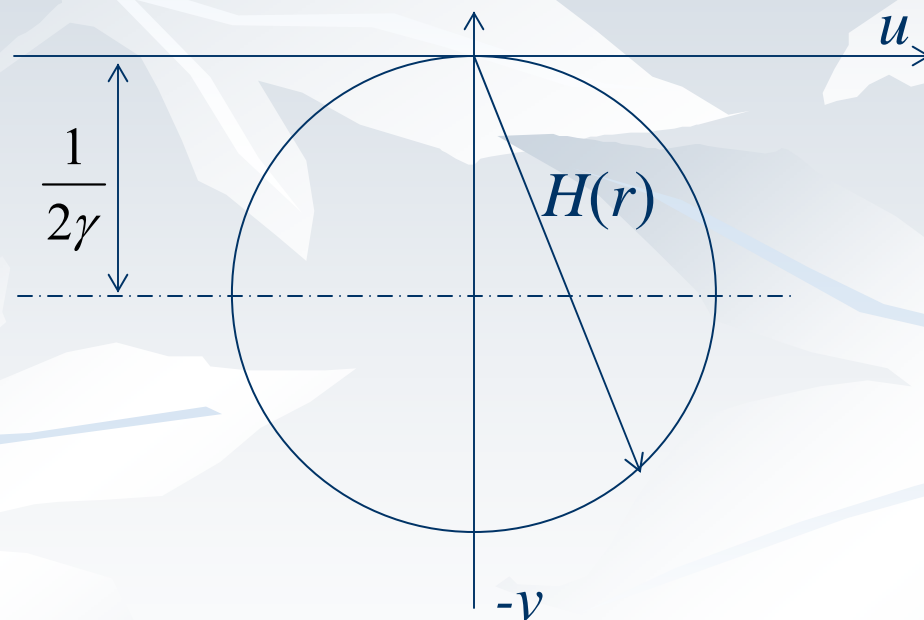
پاسخ فرکانسی

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2\beta}\right)^2 = \left[\frac{(1-r^2)}{(1-r^2)^2 + \beta^2}\right]^2 + \left[\frac{(1-r^2)^2 - \beta^2}{2\beta[(1-r^2)^2 + \beta^2]}\right]^2$$

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2\beta}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\beta}\right)^2$$

■ که معادله دایره ای به شعاع $1/2\beta$ و خروج از مرکز $1/2\beta$

پاسخ فرکانسی



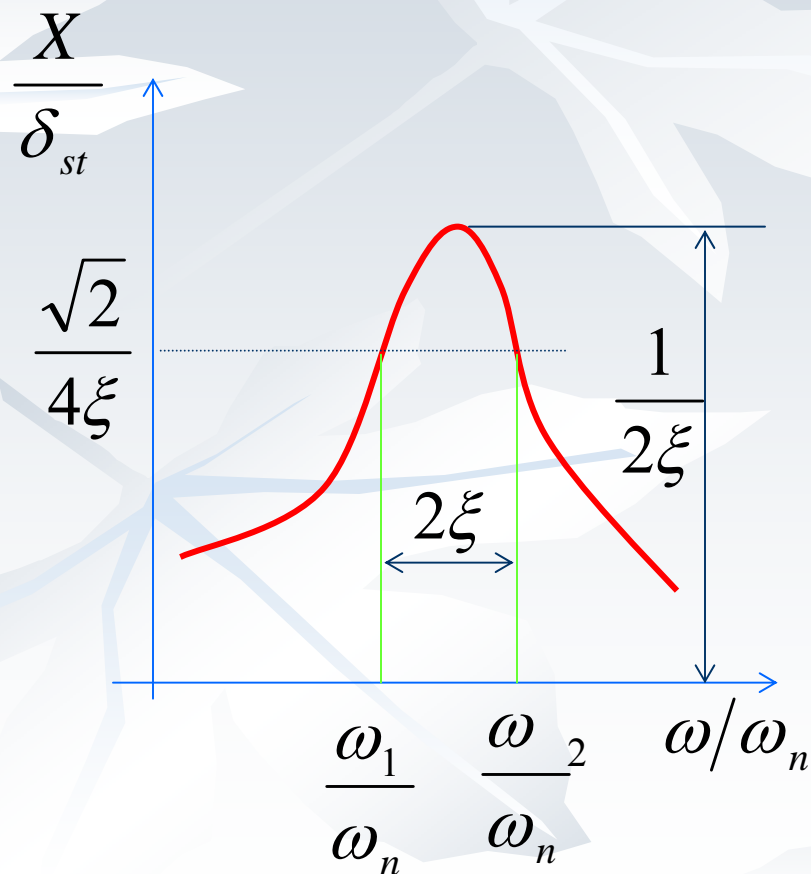
کیفیت تشدید Resonance Quality

■ گاهی تیزی تشدید نیز گفته می شود

■ کیفیت تشدید با میرایی مرتبط است

■ با فرض اینکه نوع میرایی کم و لزج باشد

■ در تشدید



$$X_{res} = \frac{F_0}{2\xi k} = \frac{\delta_{st}}{2\xi}$$

کیفیت تشدید Resonance Quality

■ دو نقطه در دو سمت تشدید پیدا می کنیم که در آن دامنه

$$X = \sqrt{2}/2X_{res} = \sqrt{2} \frac{\delta_{st}}{4\xi}$$

■ این نقاط نصف توان نیز نامیده می شوند.

■ اگر در معادله تشدید قرار داده و به توان دو برسائیم

$$\left| \left(\frac{X}{\delta_{st}} \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\xi} \right)^2 = \frac{1}{(1-r^2) + (2\xi r)^2}$$

کیفیت تشدید Resonance Quality

$$1 + r^4 - 2r^2 + 4\xi^2 r^2 = 8\xi^2$$

■ در نتیجه

$$r^4 + 2(2\xi^2 - 1)r^2 + (1 - 8\xi^2) = 0$$

$$r^2 \neq \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 = (1 - 2\xi^2) \pm \sqrt{4\xi^4 + 1 - 4\xi^2 - 1 + 8\xi^2}$$

$$= (1 - 2\xi^2) \pm 2\xi \sqrt{1 + \xi^2}$$

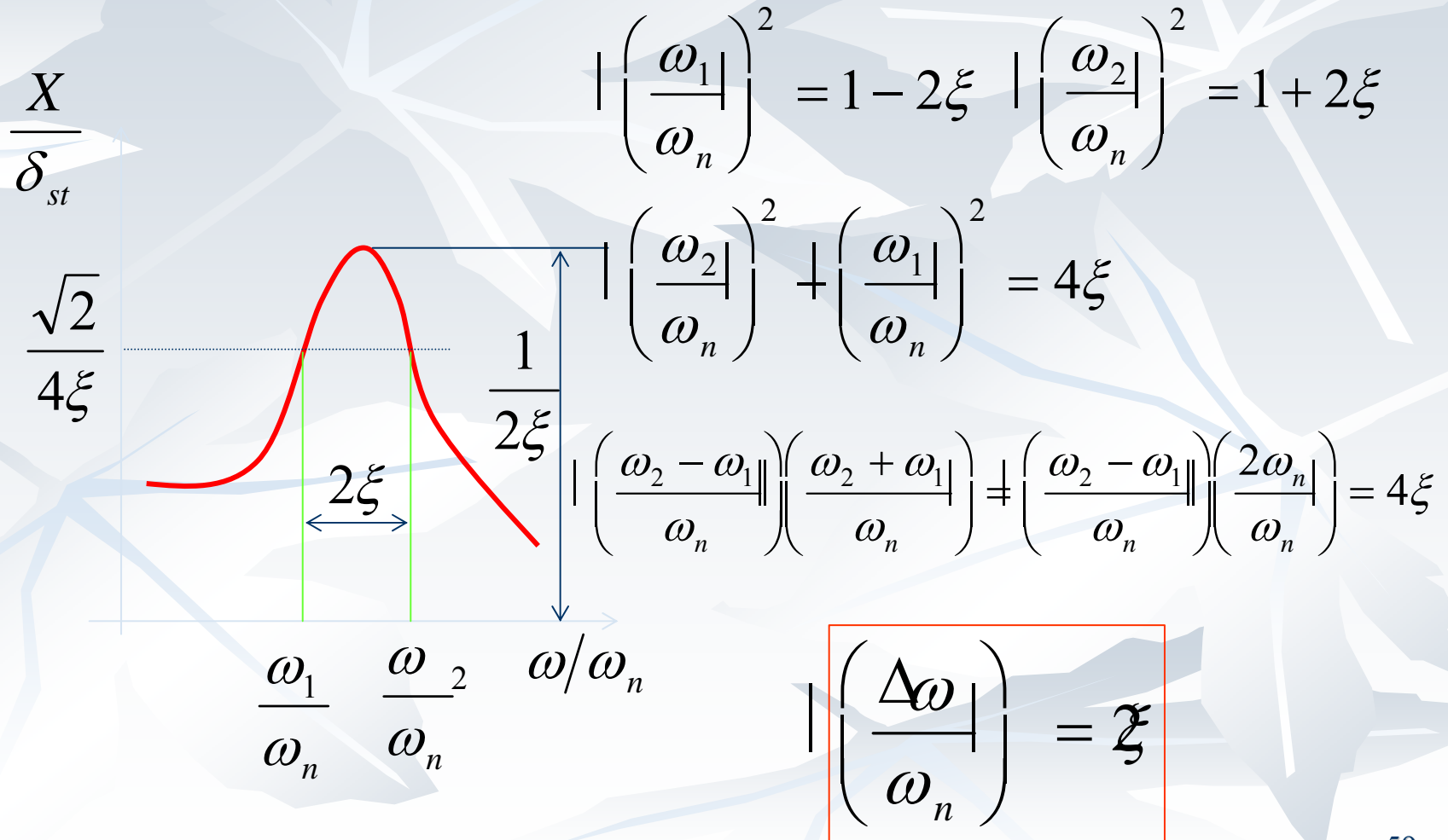
→ ≈ 0

■ برای

$$\hat{r} = 1 \pm 2\xi$$

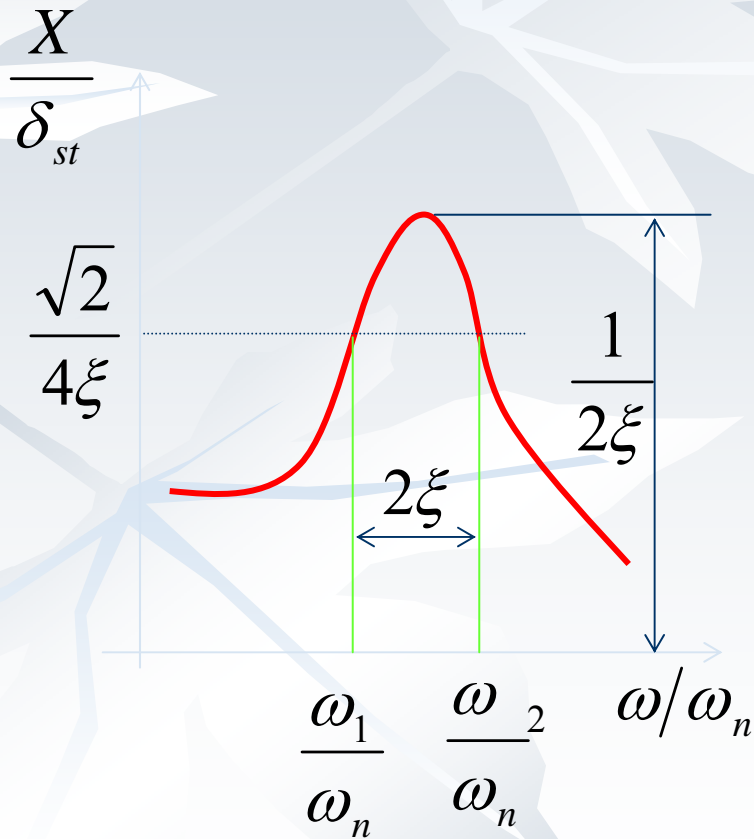
$$\xi \ll 1$$

کیفیت تشدید Resonance Quality



کیفیت تشدید Resonance Quality

دیدن پهنای نلایا شد در ایبا Q نشستن شد



دیدن ددا هوو دید

$$\frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{f_n}{\Delta f} = \frac{1}{2\xi}$$

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

Self-Excitation and Stability Analysis

• Dynamic Stability Analysis

Consider the equation of motion of a single degree of freedom system:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.107)$$

This leads to a characteristic equation

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (3.108)$$

The roots of the equation are:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2} \left[\left(\frac{c}{m} \right)^2 - 4 \left(\frac{k}{m} \right) \right]^{1/2} \quad (3.109)$$

Flutter of turbine blade, flow-induced vibration of pipe, automobile wheel shimmy

Self-excited vibrating system = force is fun of motion variable (x,v,a)

Self-Excitation and Stability Analysis

Let the roots be expressed as

$$s_1 = p + iq, \quad s_2 = p - iq \quad (3.110)$$

where p and q are real numbers so that

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1s_2 = s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (3.111)$$

Hence,

$$\frac{c}{m} = -(s_1 + s_2) = -2p, \quad \frac{k}{m} = s_1s_2 = p^2 + q^2 \quad (3.112)$$

If c & k are positive, then the system is dynamically stable

Ex 3.8 Instability of Spring-Supported Mass on Moving Belt

Consider a **spring-supported mass** on a moving belt, in Fig (a). The **kinetic coefficient of friction** between the mass and the belt varies with the relative (rubbing) velocity, in Fig (b). As rubbing velocity increases, the coefficient of friction first decreases from its static value linearly and then starts to increase. Assuming that the rubbing velocity, v , is less than the transition value, v_Q , the coefficient of friction can be expressed as $\mu = \mu_0 - \frac{a}{W}v$ where a is a constant and $W = mg$ is the weight of the mass. Determine the nature of free vibration about the equilibrium position of the mass.

Ex 3.8 Solution

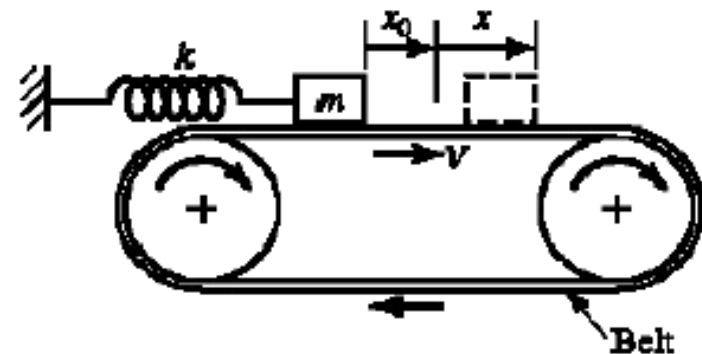
Let the equilibrium position of mass m correspond to an extension of x_0 of the spring. Then,

$$\mu W = kx_0$$

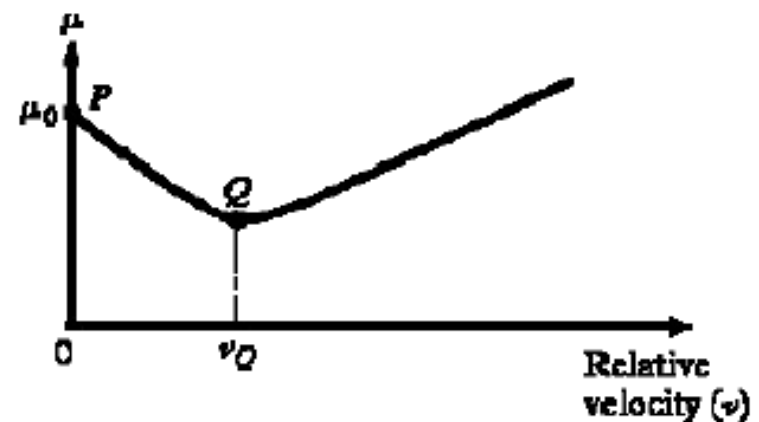
$$x_0 = \frac{\mu W}{k} = \frac{\mu_0 W}{k} - \frac{aV}{k}$$

where V is the velocity of the belt. Hence, the rubbing velocity v is given by:

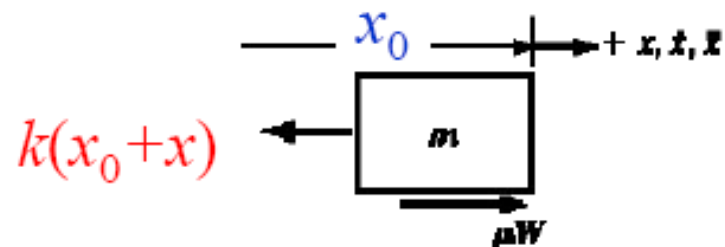
$$v = V - \dot{x}$$



(a)



(b)



(c)

Ex 3.8 Solution

The equation of motion for free vibration is

$$m\ddot{x} = -k(x_0 + x) + \mu W = -k(x_0 + x) + W \left(\mu_0 - \frac{a}{W} (V - \dot{x}) \right)$$

i.e.,
$$m\ddot{x} - a\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{E.1})$$

The solution is given by

$$x(t) = e^{(a/2m)t} \left\{ C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \right\} \quad (\text{E.2})$$

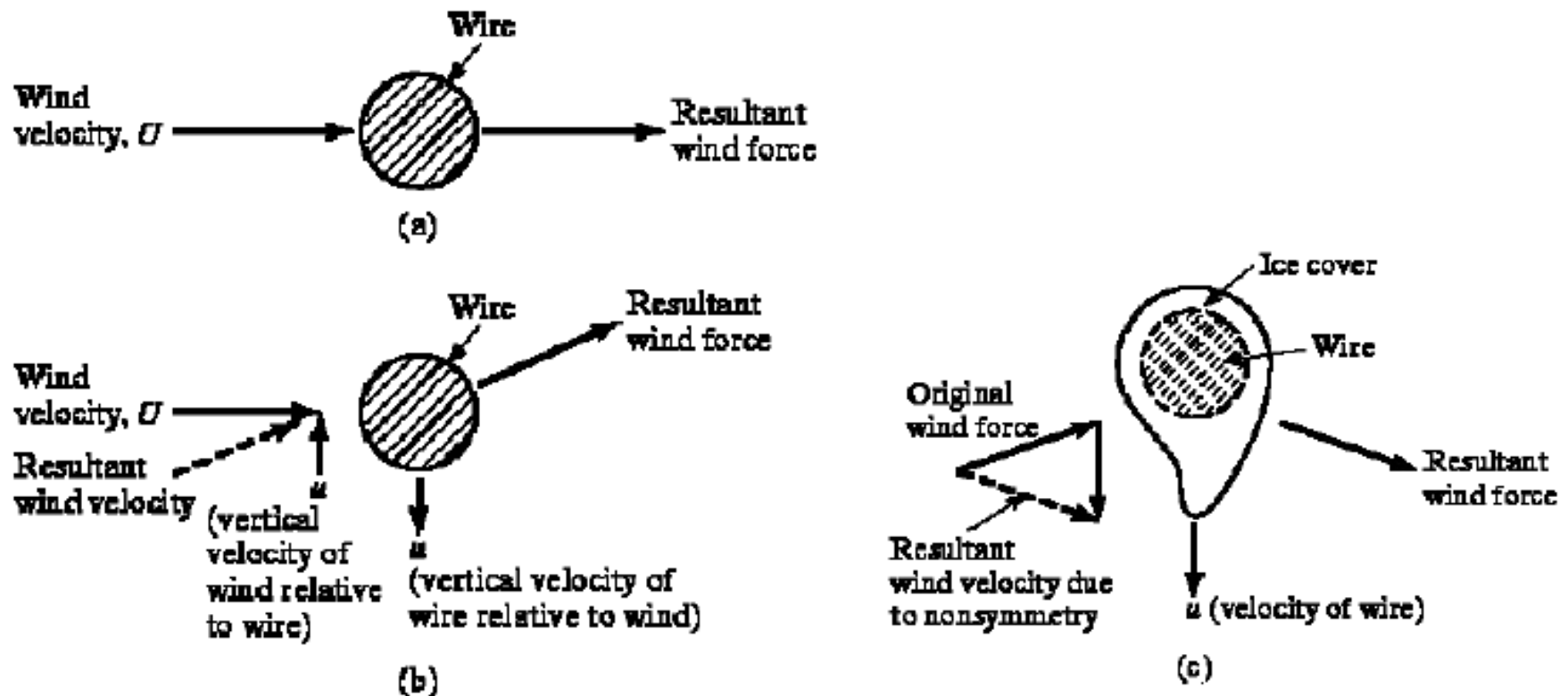
where C_1 and C_2 are constants and,

$$r_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{m} \right)^2 - 4 \left(\frac{k}{m} \right) \right]^{1/2}$$
$$r_2 = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{a}{m} \right)^2 - 4 \left(\frac{k}{m} \right) \right]^{1/2}$$

Self-Excitation and Stability Analysis

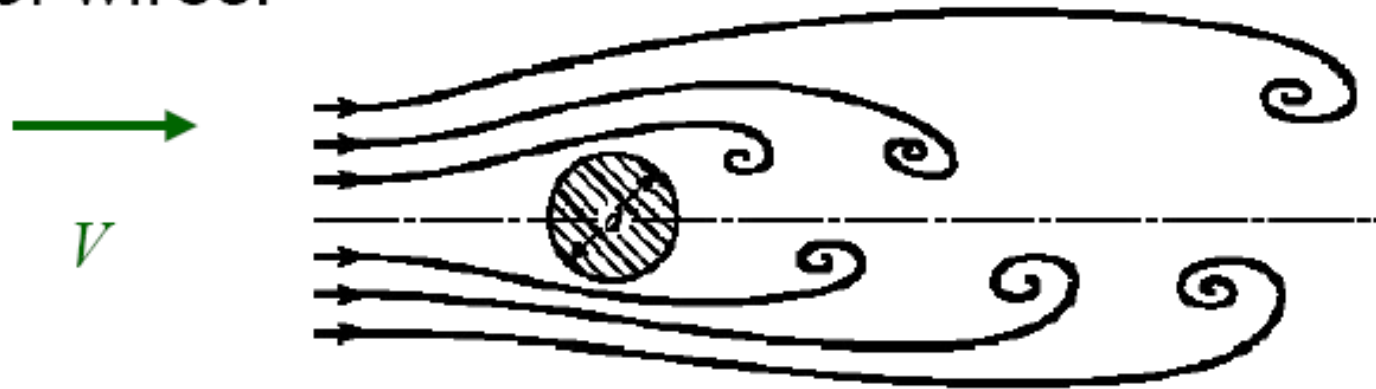
- **Dynamic Instability Caused by Fluid Flow**

The figure illustrates the phenomenon of galloping of wires:



Self-Excitation and Stability Analysis

The figure illustrates the phenomenon of singing of wires:



Experimental data show that regular **vortex shedding** occurs strongly in the range of Reynolds number (Re) from about **60 to 5000**. In this case,

$$\text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} \quad (3.113)$$

http://mec424.group.shef.ac.uk/simulations_cylinder.php

<http://public.lanl.gov/wdaniel/science/turbulence/vortexstreet/single.html>

Self-Excitation and Stability Analysis

For $Re > 1000$, the dimensionless frequency of vortex shedding, expressed as Strouhal number (St), is approximately equal to 0.21.

$$St \equiv \frac{fd}{V} = 0.21 \quad (3.114)$$

where f is the frequency of vortex shedding. The harmonically varying lift force (F) is given by

$$F(t) = \frac{1}{2} c \rho V^2 A \sin \omega t \quad (3.115)$$

where c is a constant ($c = 1$ for a cylinder), A is the projected area of the cylinder perpendicular to the direction of V , ω is circular frequency and t is time.

Ex 3.10 Flow-Induced Vibration of a Chimney

A steel chimney has a height of 2m , an inner diameter 0.75m , and an outer diameter 0.80m . Find the velocity of the wind flowing around the chimney which will induce transverse vibration of the chimney in the direction of airflow.

Ex 3.10 Solution

Approach: Model the chimney as a **cantilever beam** and equate the natural frequency of the transverse vibration of the chimney to the frequency of vortex shedding.

The natural frequency of transverse vibration of a cantilever beam is

$$\omega_1 = (\beta_1 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \quad (\text{E.1})$$

where $\beta_1 l = 1.875104$ (E.2)

For the chimney, $E = 207 \times 10^9 \text{ Pa}$, $\rho_g = 76.5 \times 10^3 \text{ N/m}^3$, $l = 20 \text{ m}$, $d = 0.75 \text{ m}$, $D = 0.80 \text{ m}$,

Ex 3.10 Solution

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(0.80^2 - 0.75^2) = 0.0608685 \text{ m}^2$$

and

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(0.80^4 - 0.75^4) = 0.004574648 \text{ m}^4$$

Thus,

$$\omega_1 = (1.875104)^2 \left\{ \frac{(207 \times 10^9)(0.004574648)}{\left(\frac{76.5 \times 10^3}{9.81} \right) (0.0608685)(20)^4} \right\}^{1/2}$$
$$= 12.415417 \text{ rad/s} = 1.975970 \text{ Hz}$$

Ex 3.10 Solution

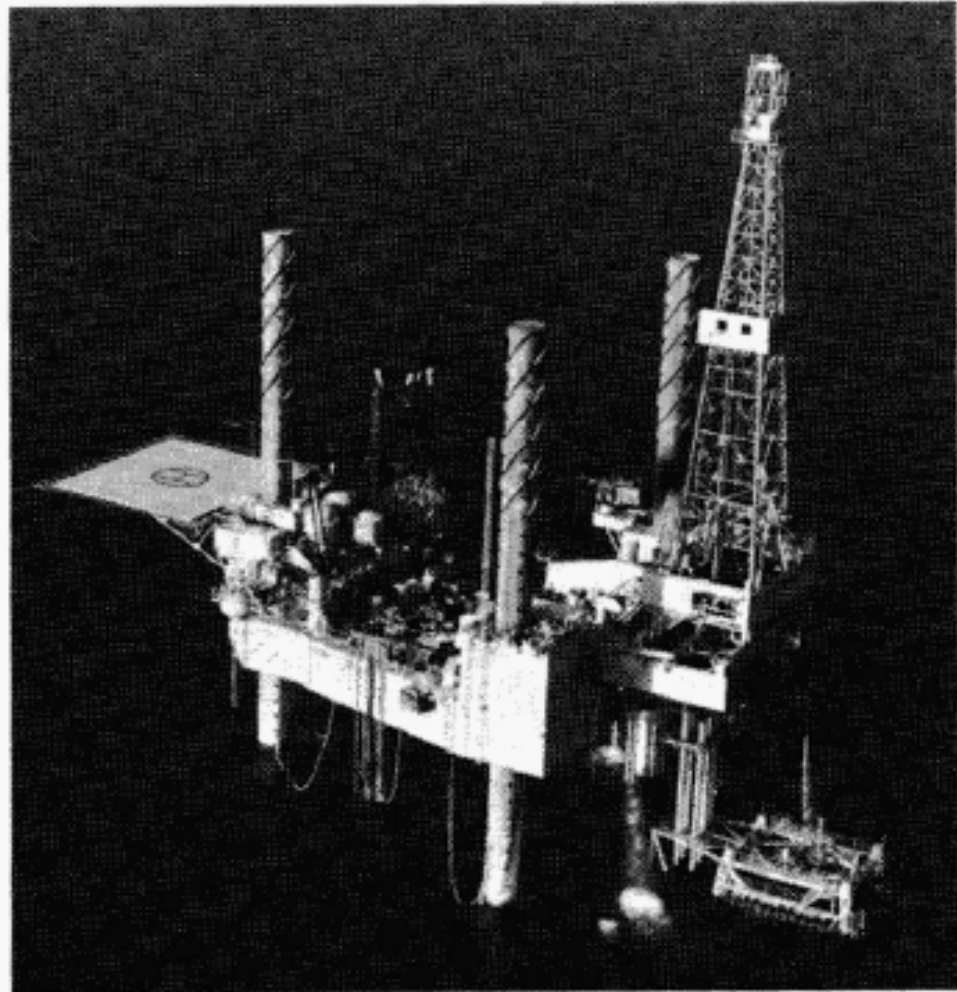
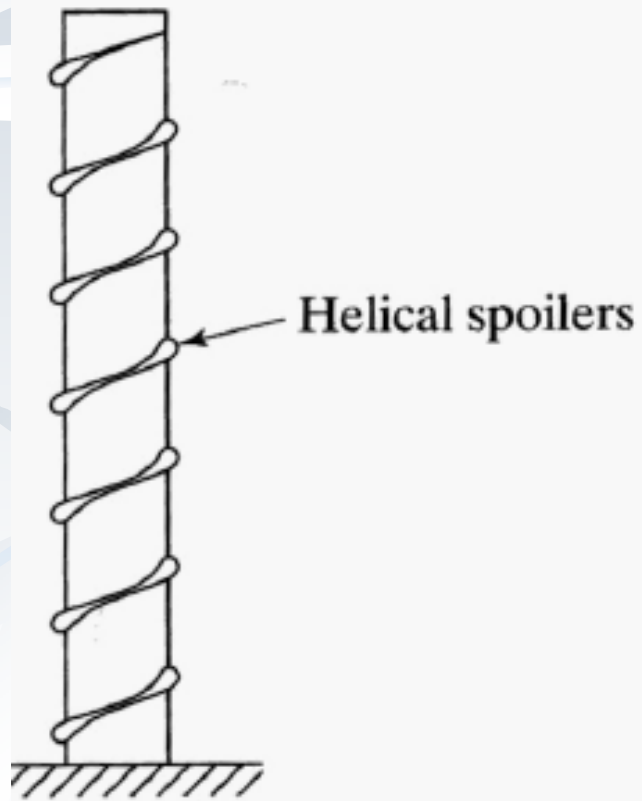
The frequency of vortex shedding is given by Strouhal number:

$$St = \frac{fd}{V} = 0.21$$

The velocity wind (V) which causes resonance can be determined as

$$V = \frac{f_1 d}{0.21} = \frac{1.975970(0.80)}{0.21} = 7.527505 \text{ m/s}$$

Break the vortex pattern





Spoiler in a high-speed racing car to improve the stability

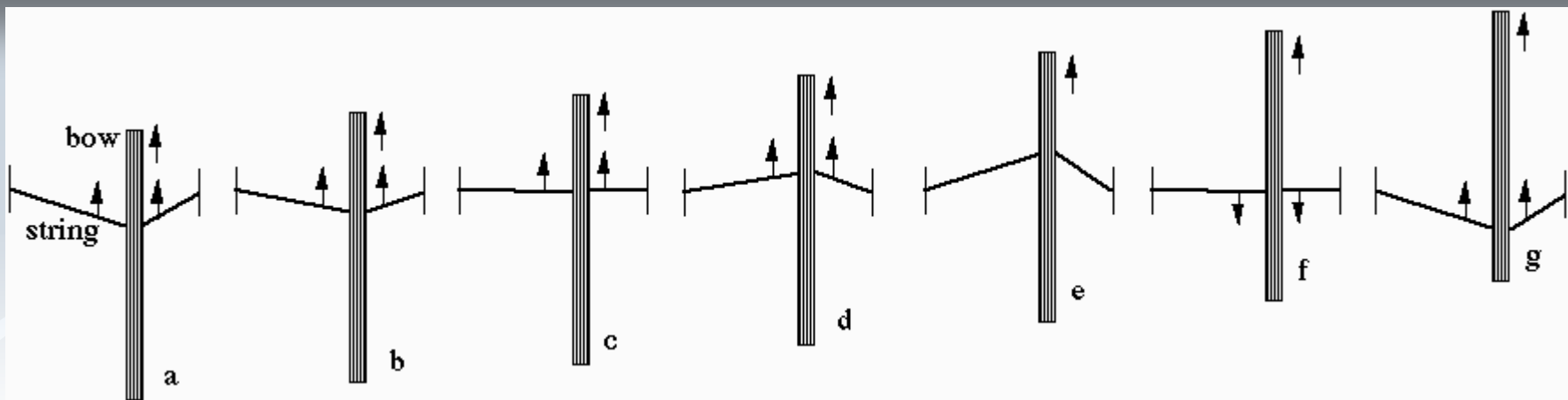


Self-Excited Vibrations

- Actually, there is an additional type of forcing, called a *self-excited vibration*
- Self-excited vibrations always force the system at its natural frequency

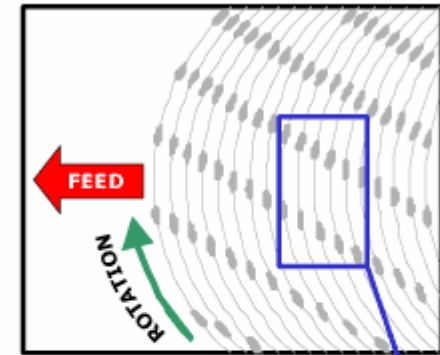
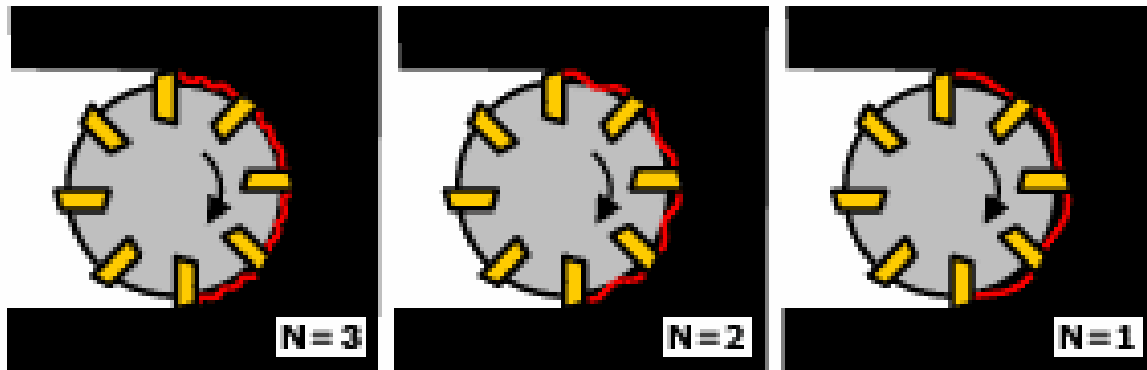
Examples:

- Swingset
- Violin string / bow
- Washboard roads



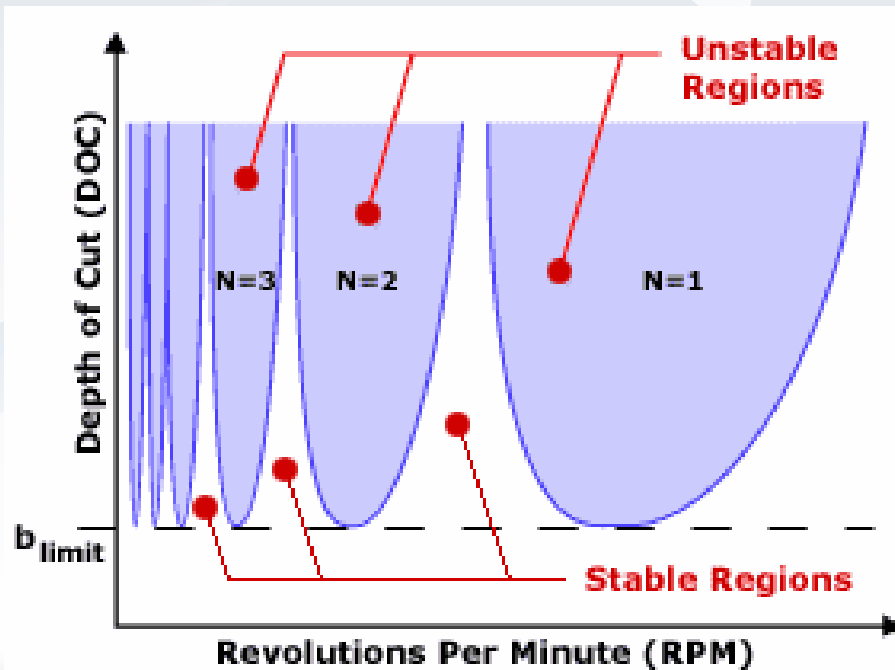
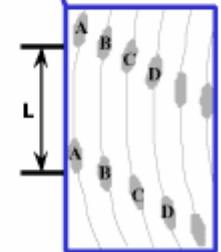
With high static friction, the bow tends to stick to the string (diagram a) and for a little while it drags the string along with it (b,c,d). When the string has been pulled sideways far enough (e), it breaks free of the bow and slides past it easily with very little friction, thanks to the rosin (f). The string doesn't stop when it gets to the straight position because its momentum carries it on until eventually it stops and reverses direction. When it is going at about the same speed and in the same direction as the bow it catches on the bow (g), static friction reigns, and the cycle begins again. Usually the vibration of the string governs the cycle of stick-slip: while the vibration is in the same direction as the bow travel, it sticks and moves with it, when it reverses it slips. Thus *the cycle of stick and slip on the bow has the same period as the vibration of the string*. This might be less than a thousandth of a second for a violin or several hundredths of a second on a double bass. Do not confuse this cycle with the forward and backward motion of the bow: while the player is moving the bow in one direction hundreds of stick-slip cycles may occur.

Self-Excited Vibration Machining Chatter



$$f = \frac{V}{5(L)}$$

f = Vibration Frequency (Hz)
 V = Cutting Speed (ft/min)
 L = Chatter mark spacing (in)



- Vibrations occur at the natural frequency of the cutting tool or the workpiece
- Indicates desirability of very stiff machine tools
- Difficult to machine very thin pieces

ارتعاشات مکانیکی ۸

بارگذاری عمومی

سیدیوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

پاسخ به بارهای متناوب

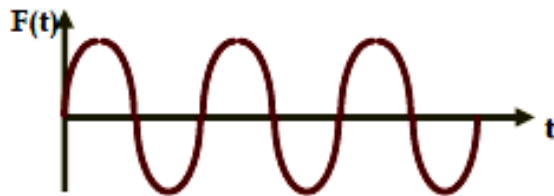
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

$$F(t) = F(t+T)$$

■ معادله حاکم برای بار متناوب:

■ که $F(t)$ بار متناوب است:

1) Harmonic (sin, cos)



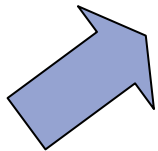
2) Transient



3) Periodic

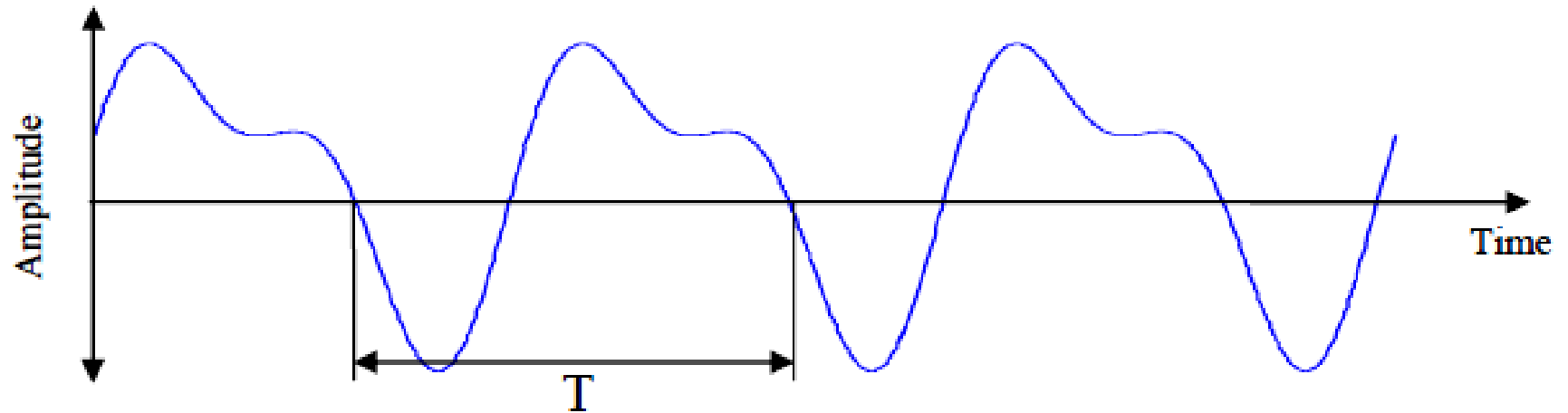


4) Random



**This force can be expressed in terms of its
Fourier Series Coefficients**

انتقال از دامنه زمان به فرکانس



نمایش سری مثلثاتی فوریه:

$$F(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + \dots \\ + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \dots$$

$$\omega = 2\pi / T$$

انتقال از دامنه زمان به فرکانس

■ شرایط وجود سری فوریه یک تابع:

■ : $F(t) = F(t+T)$ تابع متناوب باشد

■ در هر دوره تناوب در صورت وجود به تعداد متناهی ناپیوستگی جود داشته باشد.

9

■ در ناپیوستگی ها تابع کراندار و تعریف شده باشد.

$$\int_0^T |f(t)| dt$$

ضرایب فوریه

سری فوریه تابع $F(t)$ ■

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

که ضرایب فوریه عبارتند از: ■

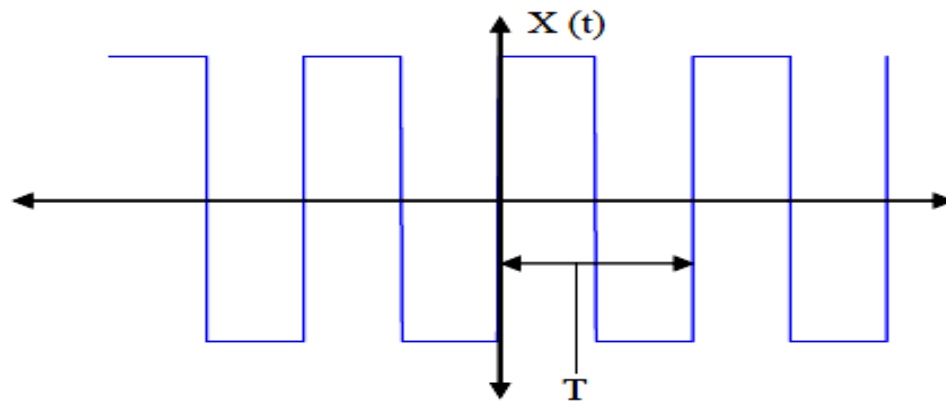
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t) dt$$

مثال

مطلوب است سری فوریه تابع نشان داده شده:



$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T/2 \\ -1 & T/2 < t < T \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = 0, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T (-1) \sin(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \left[\frac{-1}{n\omega} \cos(n\omega t) \right]_0^{T/2} = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

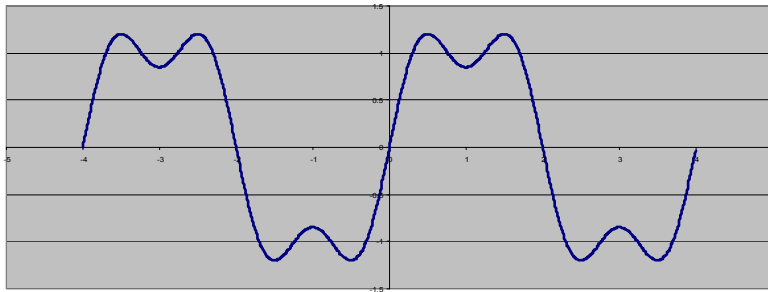
$$b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} 4/n\pi & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases}$$

در نتیجه

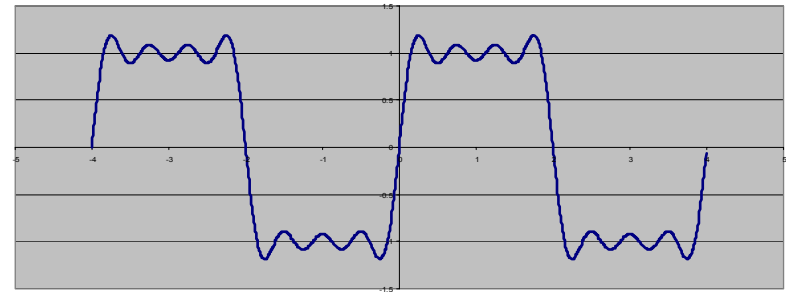
$$b_1 = \frac{4}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4}{5\pi}, \quad b_6 = 0,$$

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5\omega t) + \frac{4}{7\pi} \sin(7\omega t) + \dots \end{aligned}$$

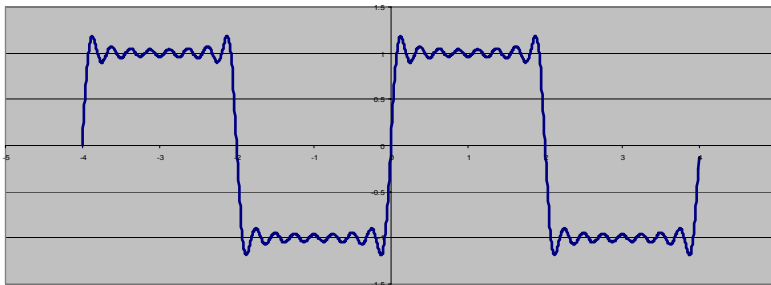
نمایش سری



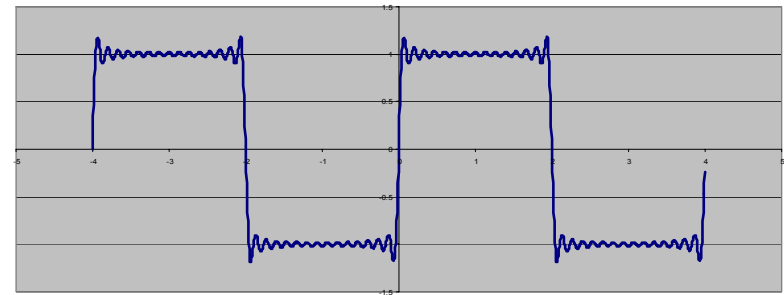
N=3



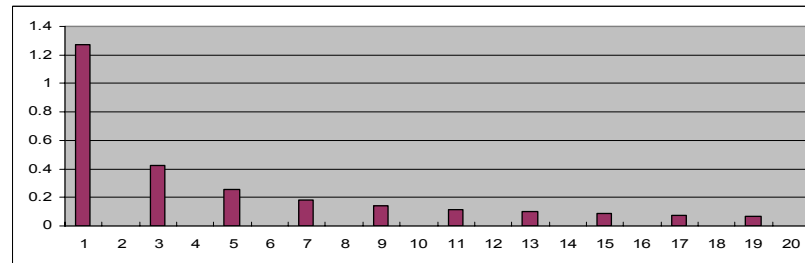
N=7



N=15



N=30



حل معادله حرکت با تحریک متناوب

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t), \quad F(t) = F(t + T)$$

■ اگر نمایش سری فوریه موجود باشد:

$$\omega = 2\pi/T$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

■ با فرض تغییر مکان x بصورت سری فوریه:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega (-A_n \sin(n\omega t) + B_n \cos(n\omega t))$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\omega^2 (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t))$$

ادامه

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = kA_0 \quad \text{با قراردادن در معادله حرکت:}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left((k - m(n\omega)^2) A_n + cn\omega B_n \right) \cos(n\omega t)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left((k - m(n\omega)^2) B_n - cn\omega A_n \right) \sin(n\omega t)$$

$$A_0 = \frac{a_0}{k}$$

$$a_n = (k - m(n\omega)^2) A_n + cn\omega B_n \quad \text{در نتیجه:}$$

$$b_n = (k - m(n\omega)^2) B_n - cn\omega A_n$$

$$A_n = \frac{a_n (k - m(n\omega)^2) - b_n cn\omega}{(k - m(n\omega)^2)^2 + (cn\omega)^2},$$

$$B_n = \frac{b_n (k - m(n\omega)^2) + a_n cn\omega}{(k - m(n\omega)^2)^2 + (cn\omega)^2}$$

$$A_n = \frac{a_n (k - m(n\omega)^2) - b_n c n \omega}{(k - m(n\omega)^2)^2 + (c n \omega)^2}, \quad B_n = \frac{b_n (k - m(n\omega)^2) + a_n c n \omega}{(k - m(n\omega)^2)^2 + (c n \omega)^2}$$

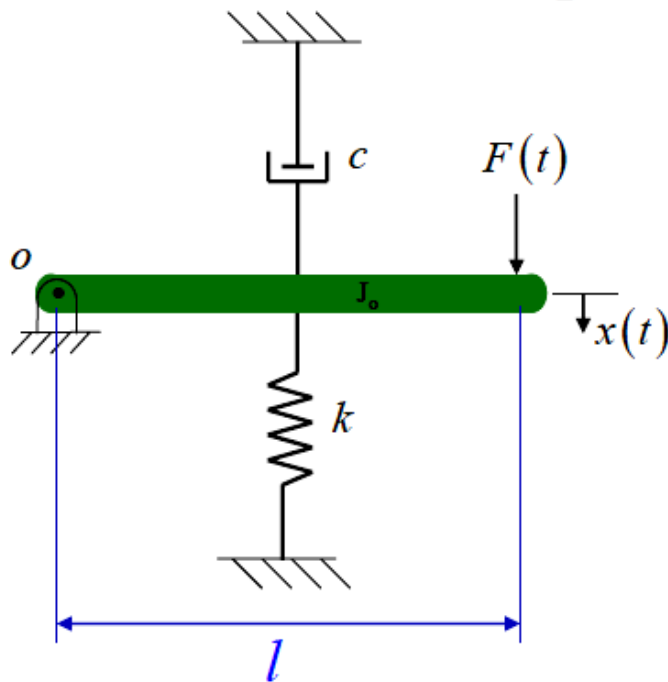
توجه شود که دامنه در $n\omega = \omega_n$ بیشترین مقدار را دارد.

افزایش n در کاهش دامنه هر جمله مؤثر است لذا چند هارمونیک

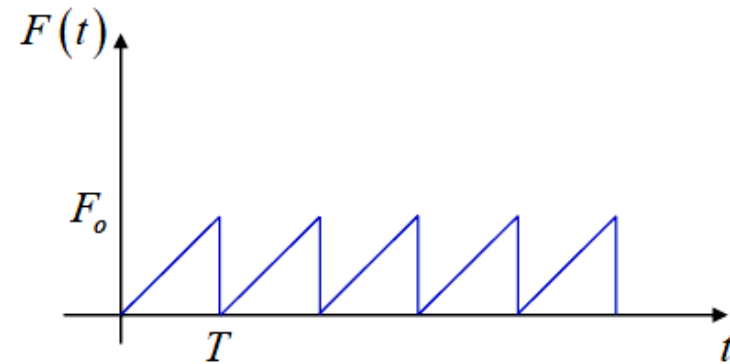
اول (جملات اول) برای توصیف حرکت کافی است.

مثال:

Fourier Series Example



Find $x(t)$



Given:

$$J_o = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad l = 1 \text{ m}$$

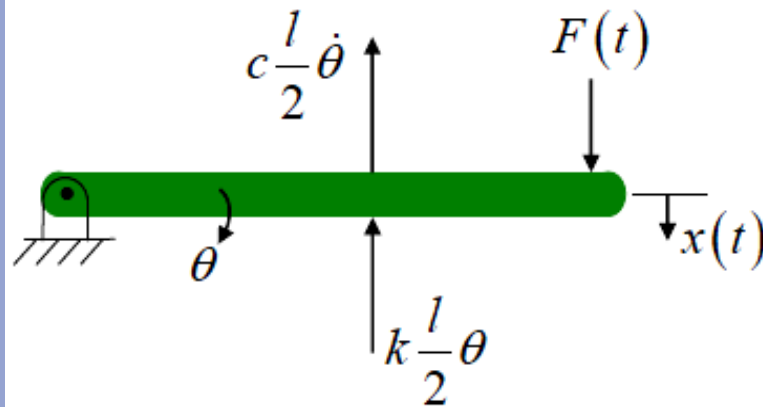
$$c = 40 \frac{\text{N} \cdot \text{sec}}{\text{m}} \quad k = 4000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Initial Conditions:

$$F_o = 10\pi$$

$$T = 1 \text{ sec}$$

Fourier Series Example: FBD & EOM



$x = l\theta$ for small angles

$$\sum M_0 = J_0 \ddot{\theta}$$

$$-\frac{kl^2}{4}\theta - \frac{cl^2}{4}\dot{\theta} + F(t)l = J_0 \ddot{\theta}$$

$$J_0 \ddot{\theta} + \frac{cl^2}{4}\dot{\theta} + \frac{kl^2}{4}\theta = F(t)l$$

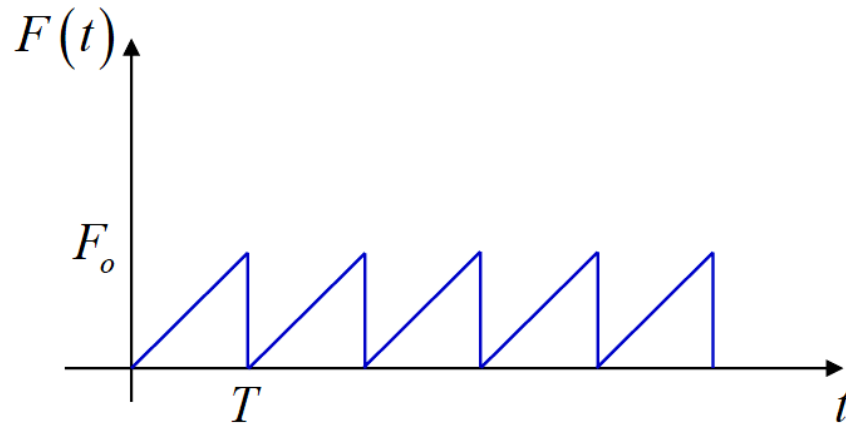
$$\theta = \frac{x}{l}$$

$$\frac{J_0}{l}\ddot{x} + \frac{cl}{4}\dot{x} + \frac{kl}{4}x = F(t)l$$

$$\frac{J_0}{l^2}\ddot{x} + \frac{c}{4}\dot{x} + \frac{k}{4}x = F(t)$$

سری فوریه بار

بار متناوب است:



$$F(t) = \left(\frac{F_0}{T}\right)t \quad 0 \leq t < T$$

ضرایب فوریه:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{F_0}{T} (t) dt = \frac{F_0}{T^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{F_0}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2F_0}{T^2} \int_0^T t \cos(n\omega t) dt = \frac{2F_0}{T^2} \left[\frac{t \sin(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} \right]_0^T$$

$$= \frac{2F_0}{T^2} \left[\frac{\cos(2n\pi) - 1}{(n\omega)^2} \right] = 0$$

ادامه

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2F_0}{T^2} \int_0^T t \sin(n\omega t) dt = \frac{2F_0}{T^2} \left[-\frac{t \cos(n\omega t)}{n\omega} + \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^2} \right]_0^T$$
$$= -\frac{2F_0}{T^2} \left[\frac{T^2 \cos(2n\pi)}{(2n\pi)} \right] = -\frac{F_0}{n\pi}$$

در نتیجه: ■

$$a_0 = \frac{F_0}{2}, \quad a_n = 0, \quad b_n = -\frac{F_0}{n\pi}$$

برای مقادیر داده شده: ■

$$J_o = 10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad l = 1 \text{ m} \quad F_o = 10\pi$$
$$c = 40 \frac{\text{N} \cdot \text{sec}}{\text{m}} \quad k = 4000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad T = 1 \text{ sec}$$

$$\frac{J_o}{l^2} \ddot{x} + \frac{c}{4} \dot{x} + \frac{k}{4} x = F(t) \Rightarrow 10\ddot{x} + 10\dot{x} + 1000x = 5\pi - 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi t)}{n}$$

ضرایب پاسخ

$$10\ddot{x} + 10\dot{x} + 1000x = 5\pi - 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi t)}{n}$$

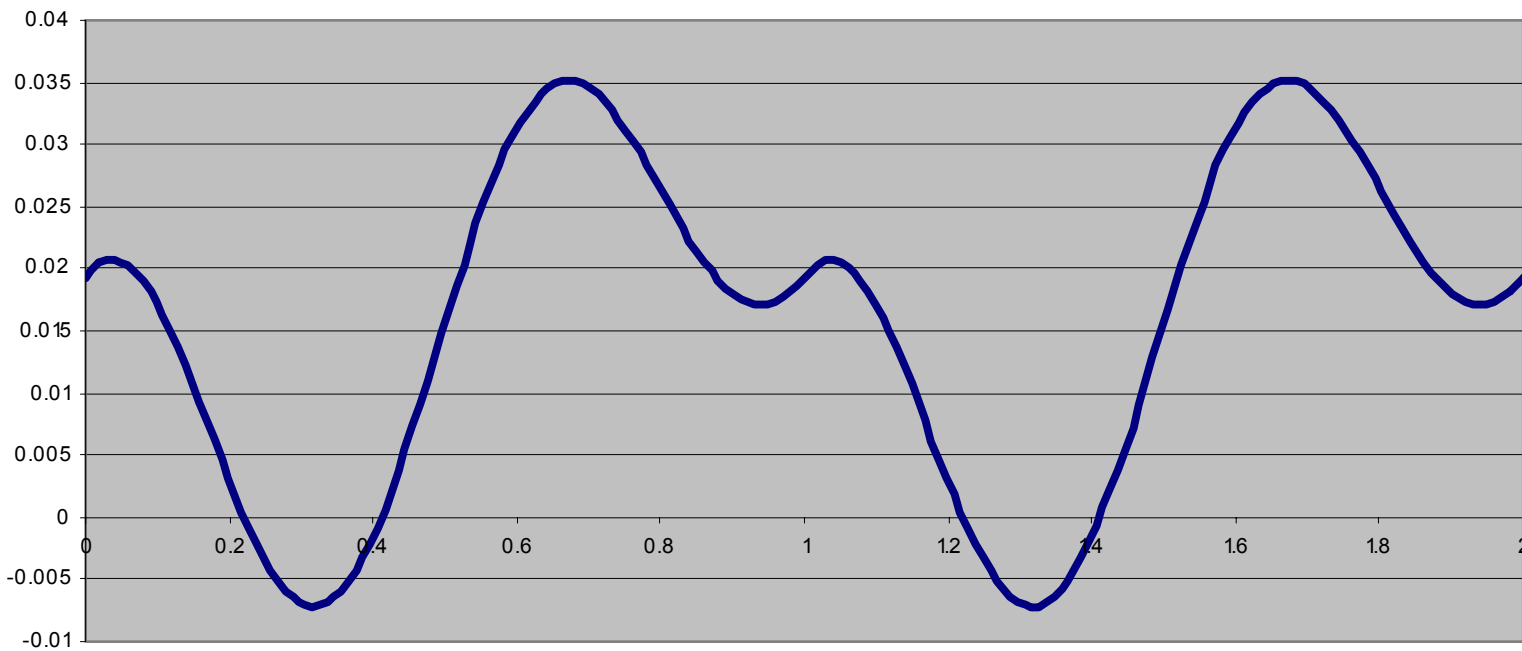
$$A_0 = \frac{a_0}{k} = \frac{5\pi}{1000}$$

$$A_n = \frac{a_n (k - m(n\omega)^2) - b_n cn\omega}{(k - m(n\omega)^2)^2 + (cn\omega)^2} = -\frac{200\pi}{(1000 - 10(2n\pi)^2)^2 + (20n\pi)^2}$$

$$B_n = \frac{b_n (k - m(n\omega)^2) + a_n cn\omega}{(k - m(n\omega)^2)^2 + (cn\omega)^2} = -\frac{10(1000 - 10(2n\pi)^2)}{n(1000 - 10(2n\pi)^2)^2 + (20n\pi)^2}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$$

پاسخ: ■



تحریریک پایه با جابجائی متناوب

■ در صورتی که تحریریک پایه به صورت متناوب باشد، با داشتن شرایطی امکان حل معادله دیفرانسیل است:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky + c\dot{y}, \quad y(t) = y(t + T)$$

■ با توجه به وجود مشتق y سری فوریه y باید مشتق پذیر باشد.

■ در صورتی که تحریریک پایه هارمونیک باشد نیز می توان سمت راست معادله را به صورت سری فوریه با دو جمله لحاظ نمود.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = kY \sin(\omega t) + c\omega Y \cos(\omega t)$$

b_1

a_1



بارگذاري عمومي

General loading



شی { ییادآوری برجهنهن

■ اگر x_1 و x_2 هر دو جواب یک معادله دیفرانسیل خطی باشند آنگاه:

$$x = ax_1 + bx_2$$

نیز جواب است.

■ اگر x_1 جواب خصوصی معادله

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f_1$$

و x_2 جواب خصوصی معادله

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f_2$$

است آنگاه $x = x_1 + x_2$ جواب خصوصی معادله:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f_1 + f_2$$

هـ چراکاورنظا

$$G_1 + \int_1^2 F dt = G_2$$

■ قانون بقاء اندازه حرکت خطی:

■ در اثر اعمال ضربه بر روی سیستم جرم و فنر که ابتدا ساکن بوده

و در اثر ضربه تحریک می شود

$$mv(t_0^-) + F\Delta t = mv(t_0^+)$$

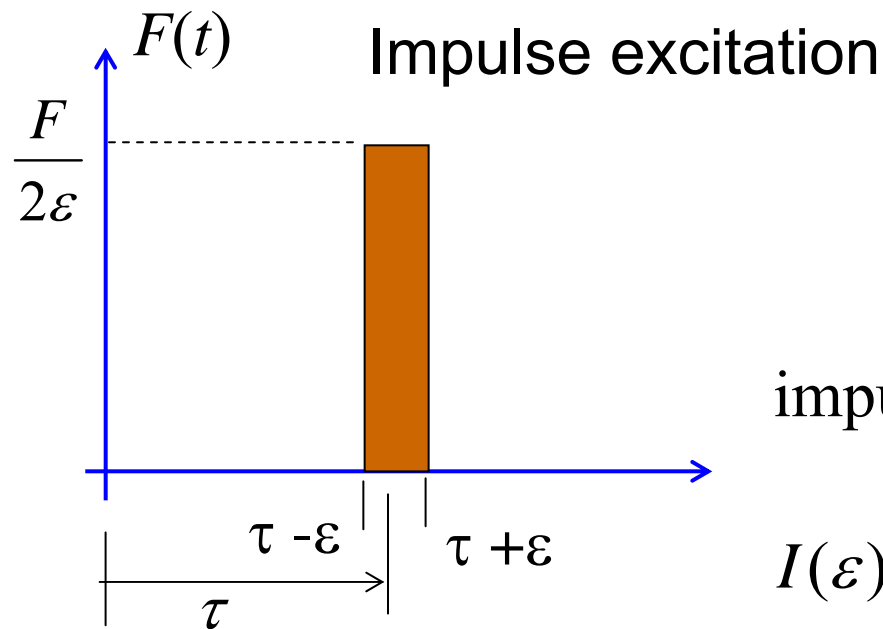
قبل از برخورد =

بعد از برخورد

■ در نتیجه:

$$mv_0 = F \Rightarrow v_0 = \frac{F}{m} = \frac{F\Delta t}{m}$$

ضربه (یادآوری)



ϵ is a small positive number

ضربه = سطح زیر منحنی

$$\text{impulse force} = \int F(t)dt = F\Delta t$$

$$I(\epsilon) = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} F(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)dt \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$= \frac{F}{2\epsilon} 2\epsilon = F \quad \text{ضربه}$$

تابع دلتای دیراک

■ تابع دلتای دیراک به صورت زیر تعریف می شود:

ضربه معادل

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

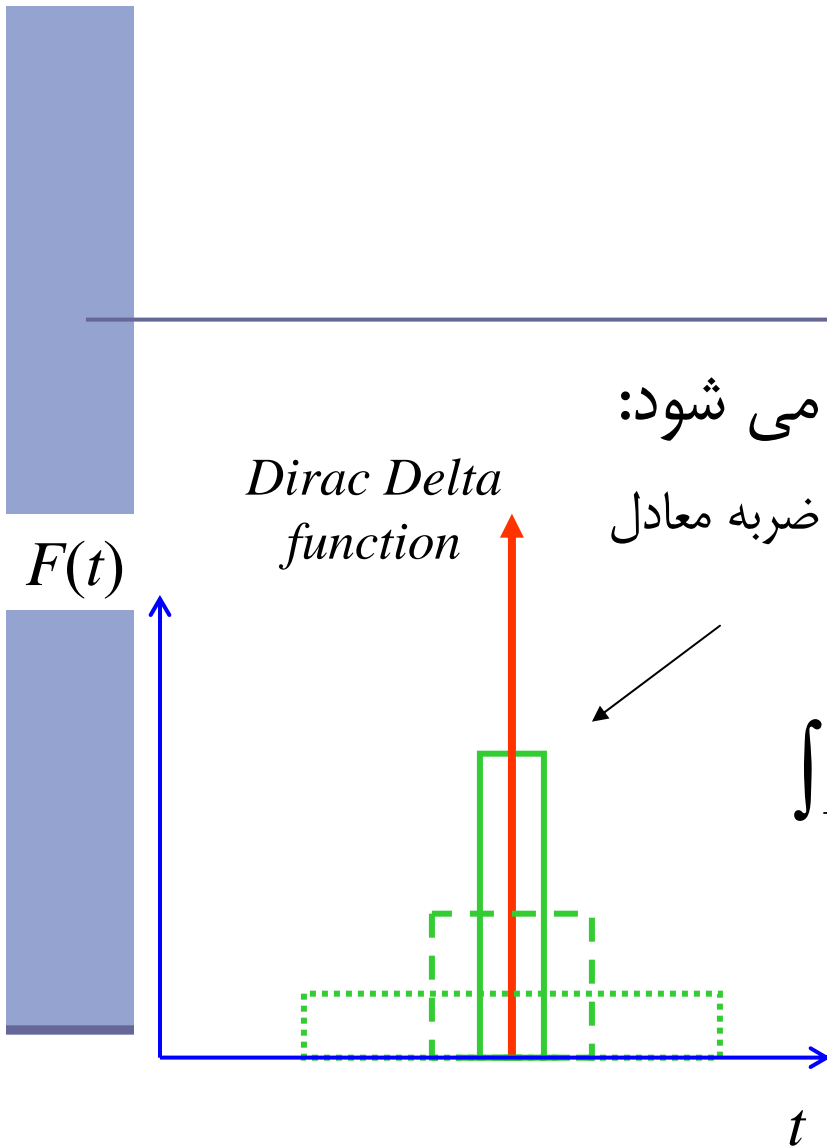
■ خواص:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

■ تابع ضربه:

$$F(t - \tau) = 0, \quad t \neq \tau$$

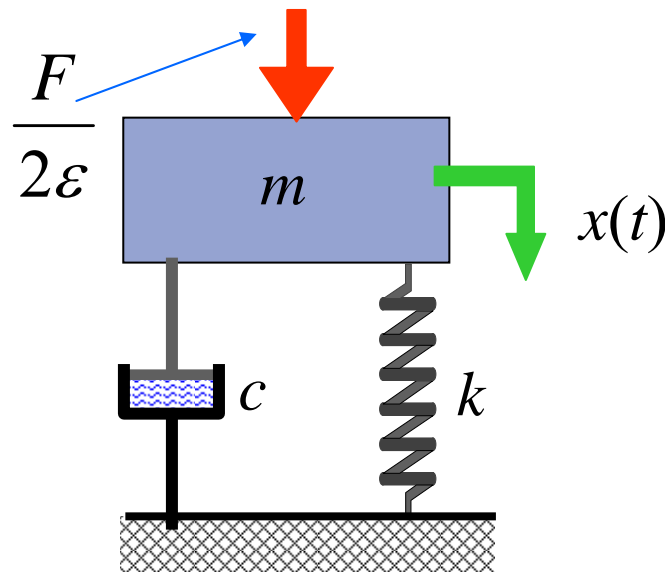
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t - \tau) dt = F \quad \text{if} \quad F = 1 \Rightarrow F(t - \tau) = \delta(t - \tau)$$



ضربه بر روی یک سیستم زیر میرا

می دانیم که پاسخ ارتعاش آزاد میرا با شرایط اولیه x_0 و v_0 :

$$x(t) = e^{-\xi \omega_n t} \left(x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\xi \omega_n x_0 + v_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right)$$



ضربه بر روی یک سیستم زیر میرا

■ چنانچه ضربه بدون شرایط اولیه در $t=0$ اعمال گردد:

$$v_0 = \frac{F}{m}, \quad x_0 = 0$$

$$x(t) = F \frac{e^{-\xi \omega_d t}}{m \omega_d} \sin(\omega_d t) \quad t \geq 0$$

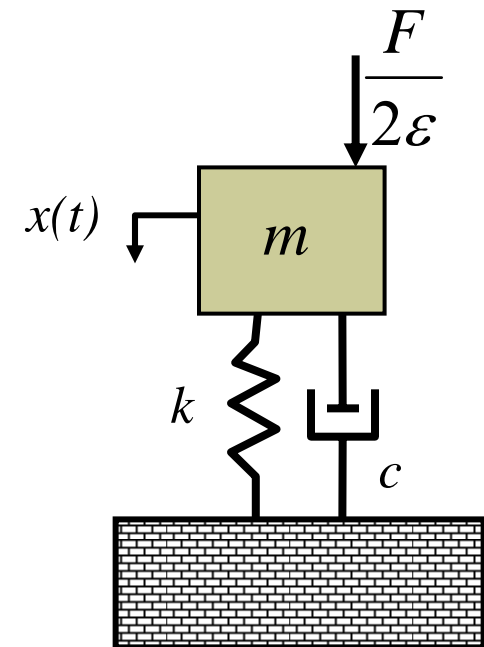
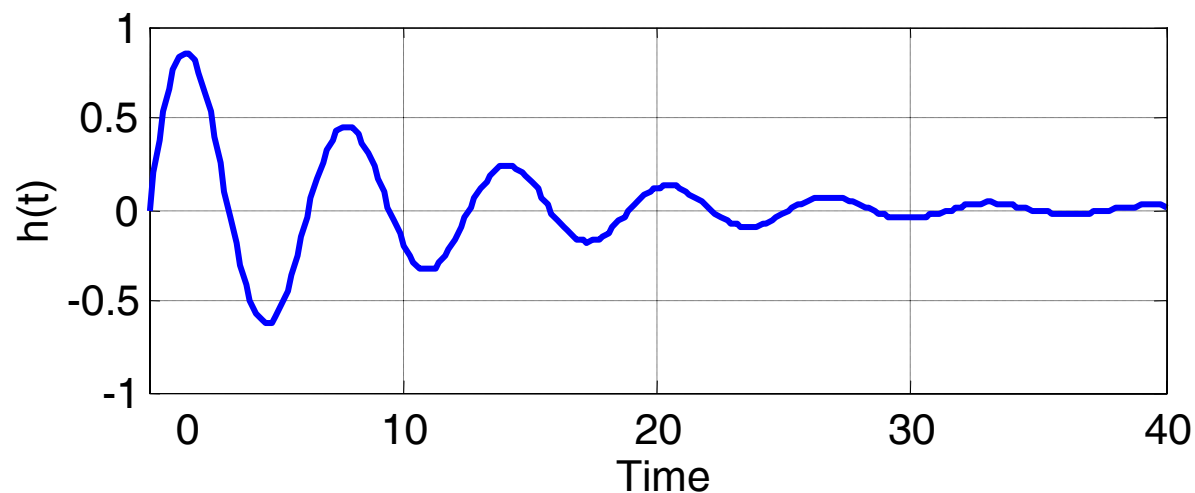
■ پاسخ به ضربه واحد:

$$x(t) = F g(t) \quad g(t) = \frac{e^{-\xi \omega_d t}}{m \omega_d} \sin \omega_d t$$

ضربه بردوی یک سیستم زیر میرا

$$x(t) = \frac{Fe^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t \quad (\text{response with zero I.C.})$$

$$x(t) = Fg(t), \quad \text{where } g(t) = \underbrace{\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t}_{\text{impulse response function}}$$



ضربه بر روی یک سیستم زیر میرا

■ اگر ضربه در زمان $t = \tau$ اعمال شده باشد:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ F \frac{e^{-\xi \omega_n (t - \tau)}}{m \omega_d} \sin \omega_d (t - \tau) & t \geq \tau \end{cases}$$

■ با تعریف تابع هویساید:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$x(t) = FH(t - \tau) \frac{e^{-\xi \omega_n (t - \tau)}}{m \omega_d} \sin \omega_d (t - \tau)$$

ضربه بر روی یک سیستم زیر میرا

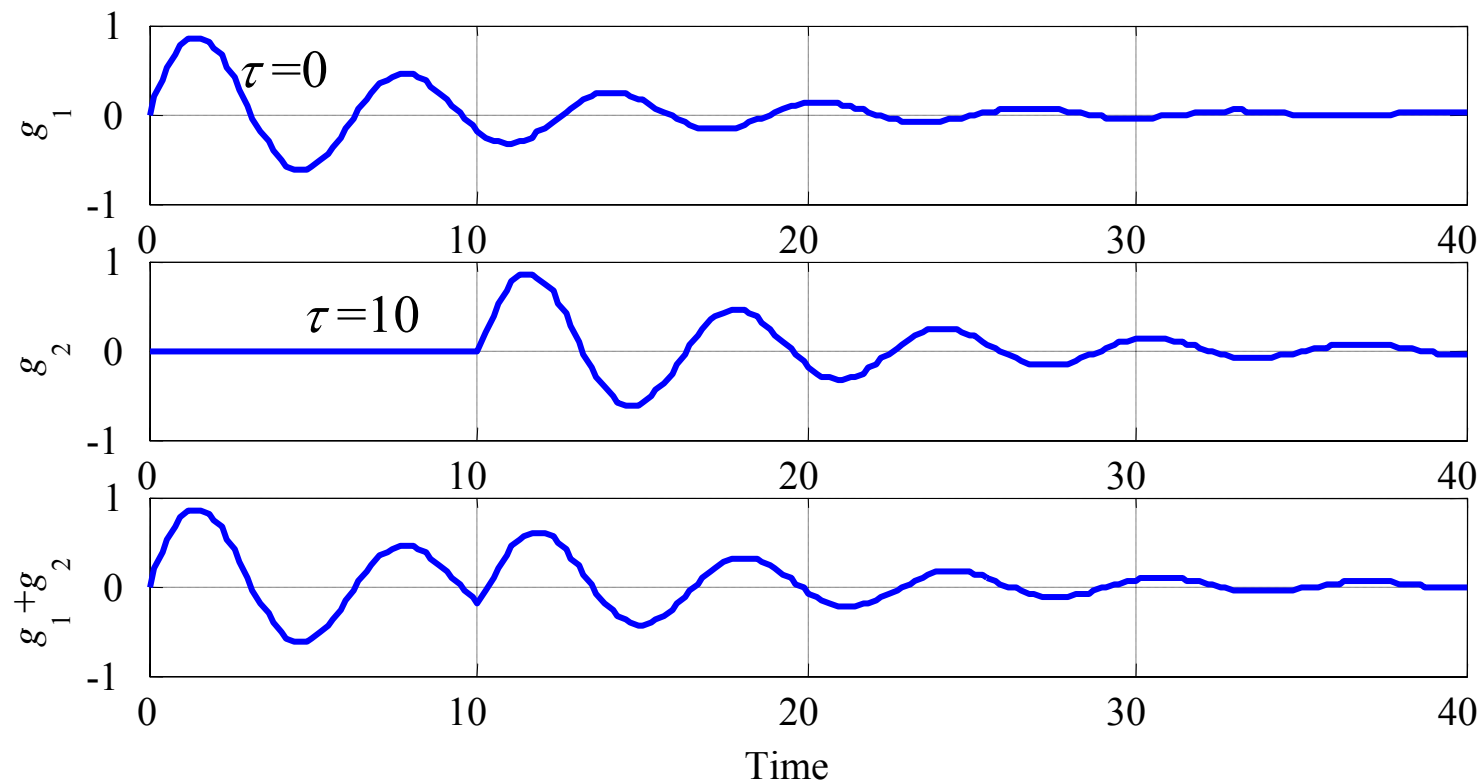
■ که در نتیجه:

$$g(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d} \sin \omega_d(t - \tau) & t \geq \tau \end{cases}$$

$$g(t - \tau) = H(t - \tau) \frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d} \sin \omega_d(t - \tau)$$

ضربه بر روی یک سیستم زیر میرا

اگر دو ضربه در زمانهای متفاوتی اعمال گردد، پاسخ به ضربه واحدشان:



پاسخ به ضربه واحد برای سیستم نامیرا

$$g(t - \tau) = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - \tau)$$

مثال: دو ضربه متوالی با شرایط اولیه صفر

به یک سیستم میرا با شرایط زیر در زمان $t=0$ ضربه ای به اندازه $2\text{N}\cdot\text{s}$ اعمال می گردد. مطلوب است پاسخ سیستم:

$$m = 1 \text{ kg}, \quad c = 0.5 \text{ kg/s}, \quad k = 4 \text{ N/m}$$

$$F = 2 \text{ N}\cdot\text{s}, \quad \omega_n = 2, \quad \xi = 0.125 \quad \omega_d = 2\sqrt{1 - 0.125^2} = 1.984$$

$$x_1(t) = \frac{2e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = 1.008e^{-0.25t} \sin(1.984t), t > 0$$

■ اگر به همین سیستم ضربه ای واحد $F = 1N.s$ در زمان $t = \tau$ اعمال گردد پاسخ عبارت است از:

$$x_2(t) = \begin{cases} 0.504e^{-0.25(t-\tau)} \sin(1.984(t-\tau)) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

مثال: دو ضربه متوالی با شرایط اولیه صفر

■ حال اگر ضربه در دو زمان بصورت متوالی اعمال گردد:

$$F(t) = 2\delta(t) + \delta(t - \tau)$$

$$x_1(t) = \frac{2e^{-\xi\omega_d t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = 1.008e^{-0.25t} \sin(1.984t), t > 0$$

$$x_2(t) = 0.504e^{-0.25(t-\tau)} \sin(1.984(t-\tau)), t > \tau$$

$$x(t) = x_1 + x_2$$

$$= \begin{cases} 1.008e^{-0.25t} \sin(1.984t) & 0 < t < \tau \\ 1.016e^{-0.25t} \sin(1.984t) + 0.504e^{-0.25(t-\tau)} \sin(1.984(t-\tau)) & t > \tau \end{cases}$$

مثال اعمال ضربه با شرایط اولیه:

■ فرض کنید که شرایط اولیه برای سیستم اعمال شده است و جرم دارای شرایط اولیه $x_0 = 1 \text{ mm}$, $\dot{x}_0 = -1 \text{ mm/s}$ است.

■ در این حالت باید جواب همگن را با اعمال شرایط اولیه بدست آورد و سپس پاسخ به ضربه را اضافه کرد

دو ضربه با شرایط اولیه

■ معادله حاکم با شرایط مرزی

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = \delta(t) - \delta(t - 4), x_0 = 1 \text{ mm}, \dot{x}_0 = -1 \text{ mm/s}$$

$$(\omega_n = 2 \text{ rad/s}, \zeta = 0.5, \omega_d = \sqrt{3} \text{ rad/s})$$

■ جواب عمومی (همگن) که با اعمال شرایط اولیه

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{v_0 + x_0 \zeta \omega_n}{\omega_d} \sin \omega_d t + x_0 \cos \omega_d t \right]$$

$$= e^{-t} \left[\frac{-1 + 1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t + \cos \sqrt{3}t \right]$$

$$= e^{-t} \cos \sqrt{3}t$$

پاسخ به ضربه اول

Treat $\delta(t)$ as $x_0 = 0$ and $v_0 = 1, 0 < t < 4$

$$x_I(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[\frac{v_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t} \sin \sqrt{3}t \quad 0 < t < 4$$

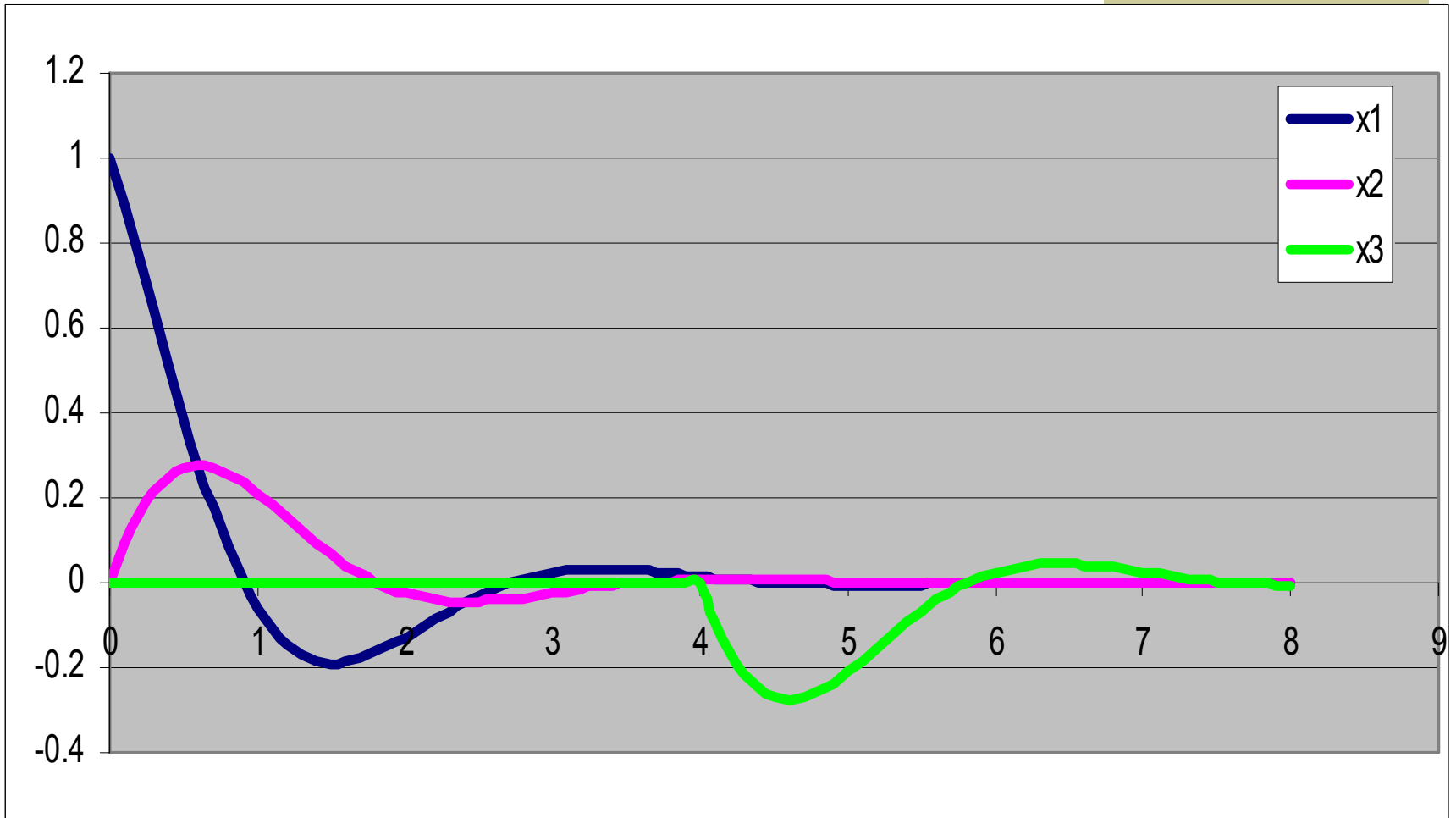
پاسخ کلی برای $0 < t < 4$

$$\begin{aligned}x_1(t) &= x_h(t) + x_I(t) \\ &= e^{-t} \left(\cos \sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t \right), 0 \leq t < 4\end{aligned}$$

پاسخ به ضربه دوم

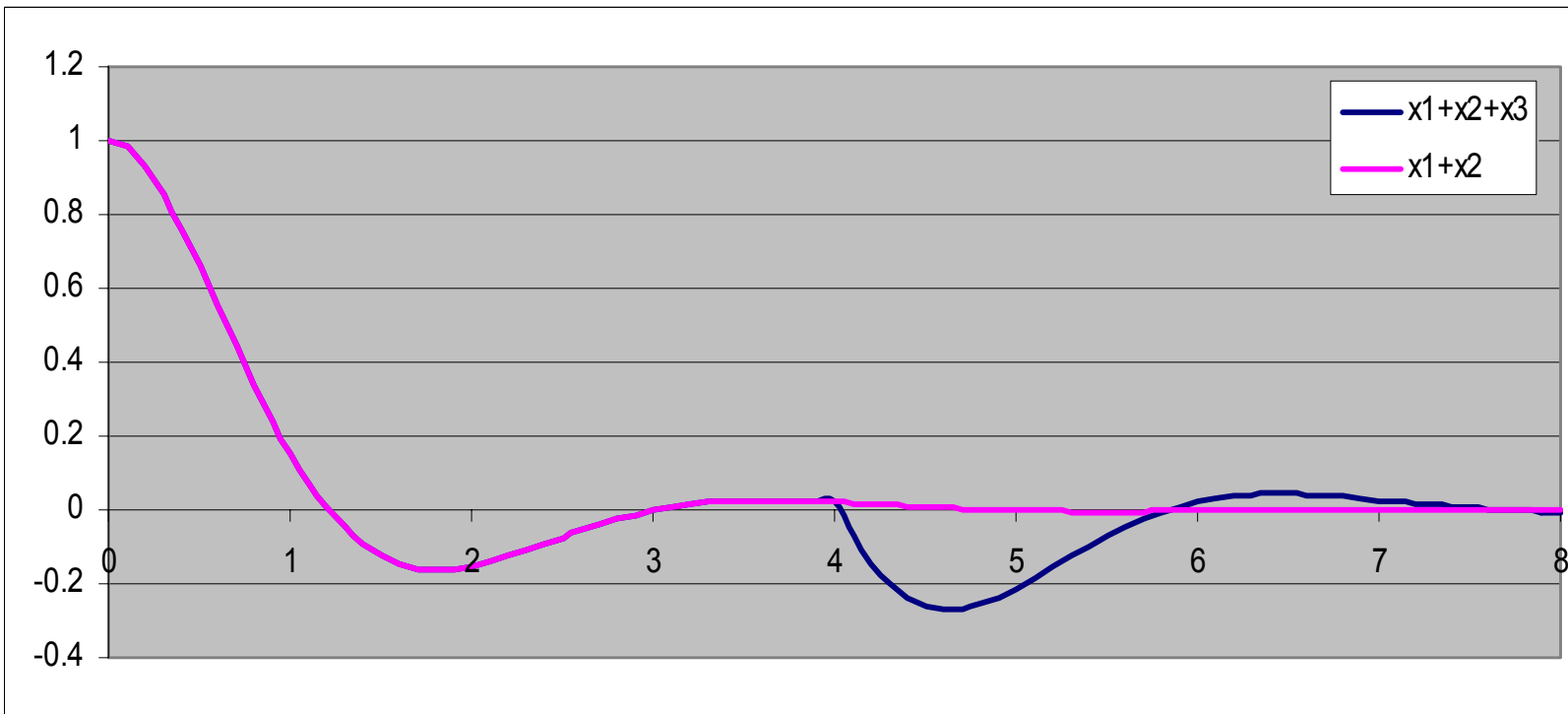
$$x_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} e^{-t+4} \sin \sqrt{3}(t-4), \quad t > 4$$

$$= -H(t-4) \frac{e^{-t+4}}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}(t-4)$$



پاسخ کلی

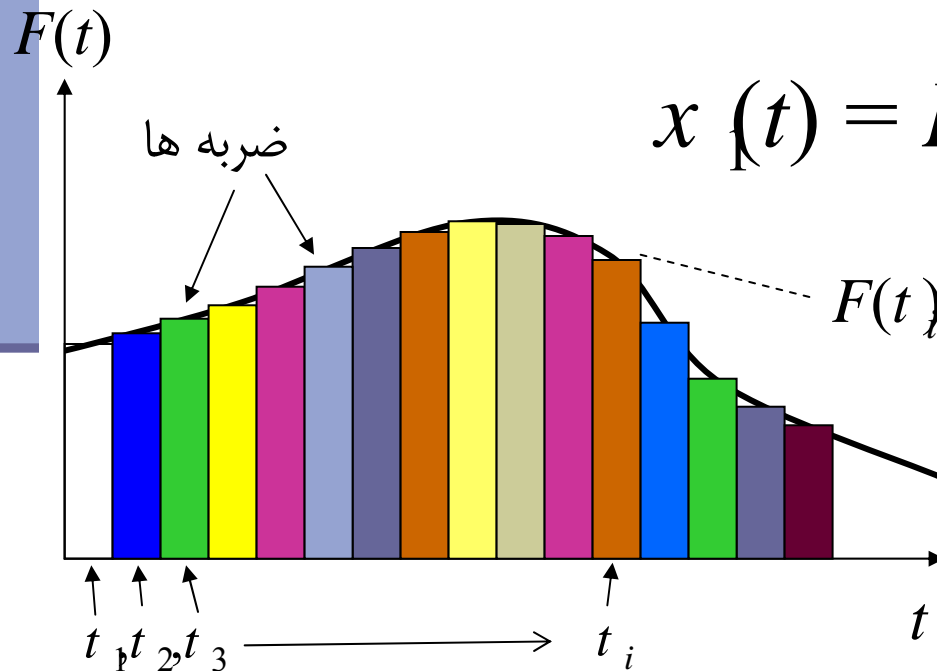
$$x(t) = e^{-t} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t}_{\text{frist impulse}} + \underbrace{\cos \sqrt{3}t}_{\text{initial condition}} \right) - \underbrace{\frac{e^{-t+4}}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}(t-4)H(t-4)}_{\text{second impulse}}$$



پاسخ به نیروی ورودی اختیاری

نیروی اعمالی به صورت یک سری ضربه ها در زمان t_i با مقدار $F(t) \Delta t$ در نظر گرفته می شود:

پاسخ در زمان t بدلیل ضربه در t_1



$$x_1(t) = H(t-t_1) F(t_1) \Delta t g(t-t_1)$$

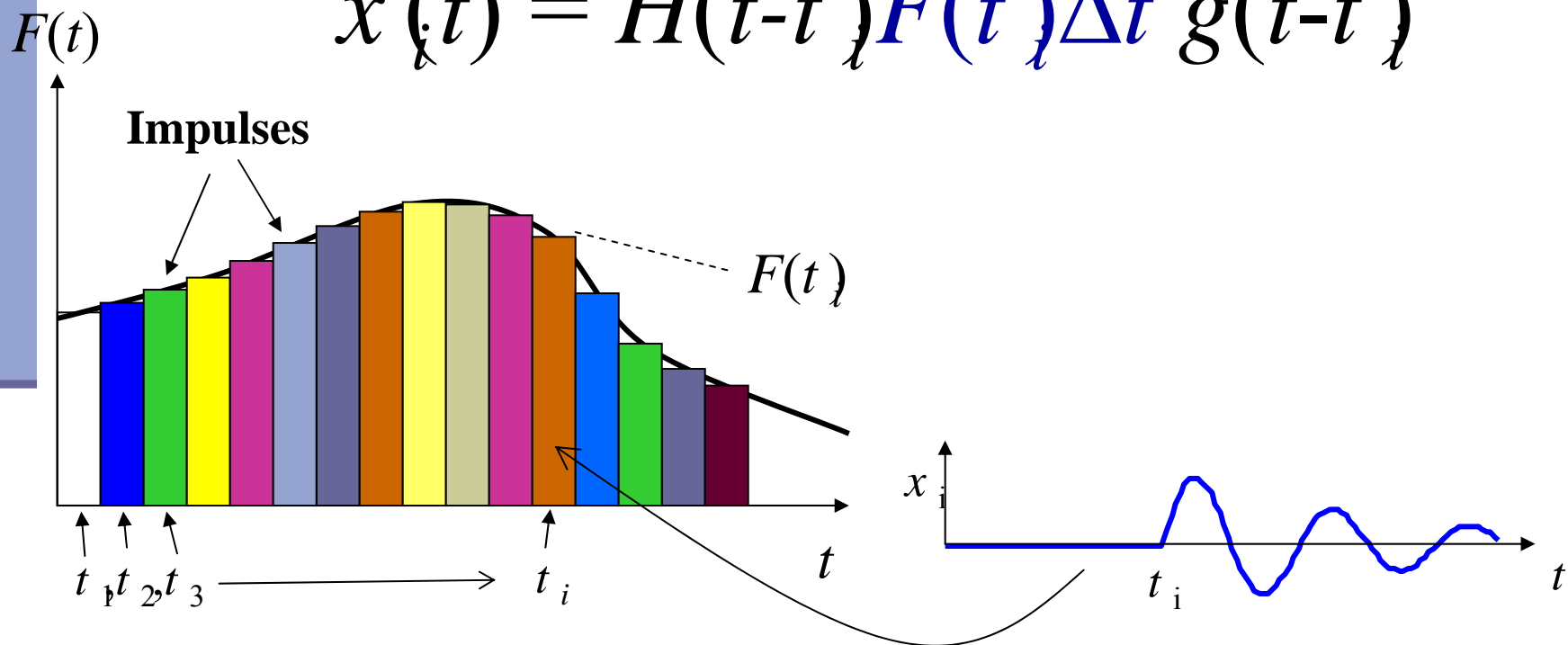
پاسخ در زمان t_2

$$x_2(t) = H(t-t_2) F(t_2) \Delta t g(t-t_2)$$

پاسخ به نیروی ورودی اختیاری

پاسخ در زمان t بدلیل ضربه در t_i

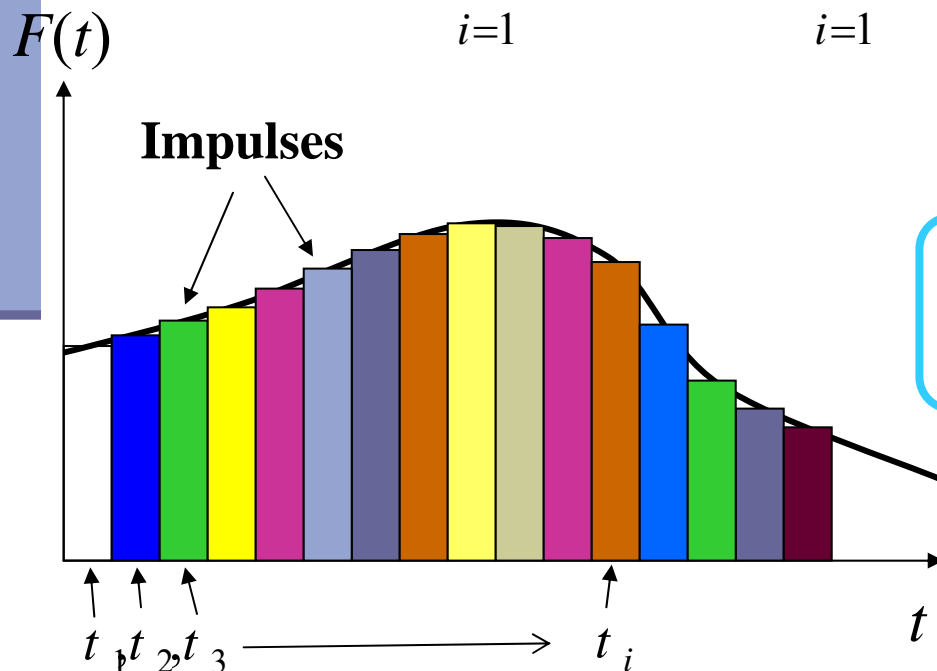
$$x(t) = \int H(t-t_i) F(t_i) \Delta t g(t-t_i)$$



پاسخ به نیروی ورودی اختیاری

پاسخ کلی به نیروها در زمان $t = t_k$ مجموع جوابهای مربوط به ضربه های قبل از آن است.

$$x(t_k) = \sum_{i=1}^k x_i(t_k) = \sum_{i=1}^k H(t - t_i) F(t_i) \Delta t g(t - t_i)$$



$$\Delta t \rightarrow 0, t_i \rightarrow \tau$$

$$x(t) = \int F(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

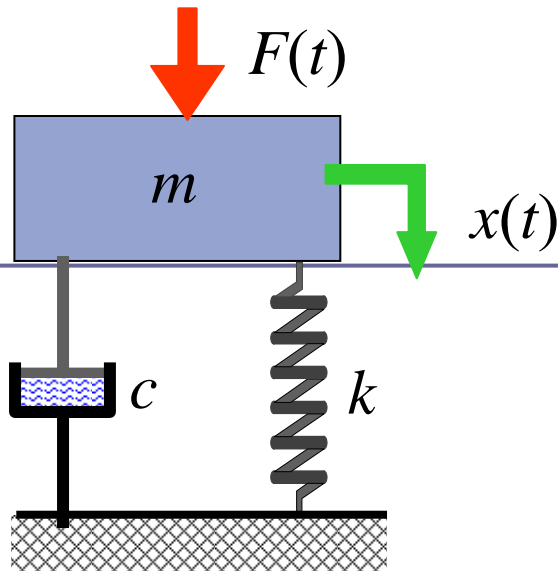
انتگرال کانولوشن

خواص انتگرال کانولوشن

$$x(t) = \int F(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int F(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

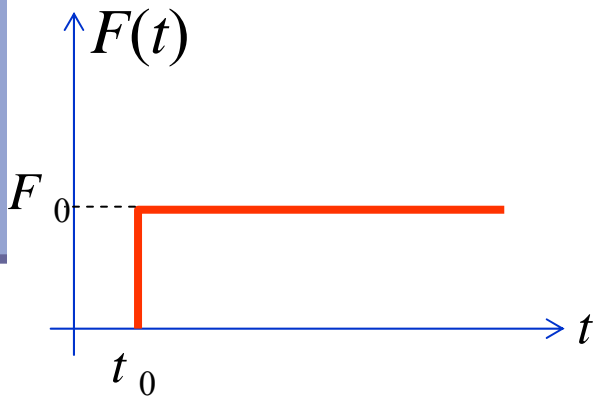
$$\alpha = t - \tau \Rightarrow \tau = t - \alpha, \quad d\tau = -d\alpha$$

مثال ۱: بار پله ای



■ معادله حرکت:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ F_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t F(\tau) g(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t F_0 \frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d} \sin \omega_d(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{F_0}{m\omega_d} \int_0^{t-t_0} e^{-\xi\omega_n u} \sin \omega_d u du \end{aligned}$$

مثال ۱: بار پله ای

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_d} \int_0^{t-t_0} e^{-\xi\omega_n u} \sin \omega_d u \, du$$

پاسخ: برای $t > t_0$ ■

$$= \frac{F_0}{m\omega_d} \left[\frac{e^{-\xi\omega_n u} (-\xi\omega_n \sin \omega_d u - \omega_d \cos \omega_d u)}{(\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right]_0^{t-t_0}$$

$$= \frac{F_0}{k\omega_d} \left[e^{-\xi\omega_n(t-t_0)} (\xi\omega_n \sin \omega_d(t-t_0) - \omega_d \cos \omega_d(t-t_0)) + \omega_d \right]$$

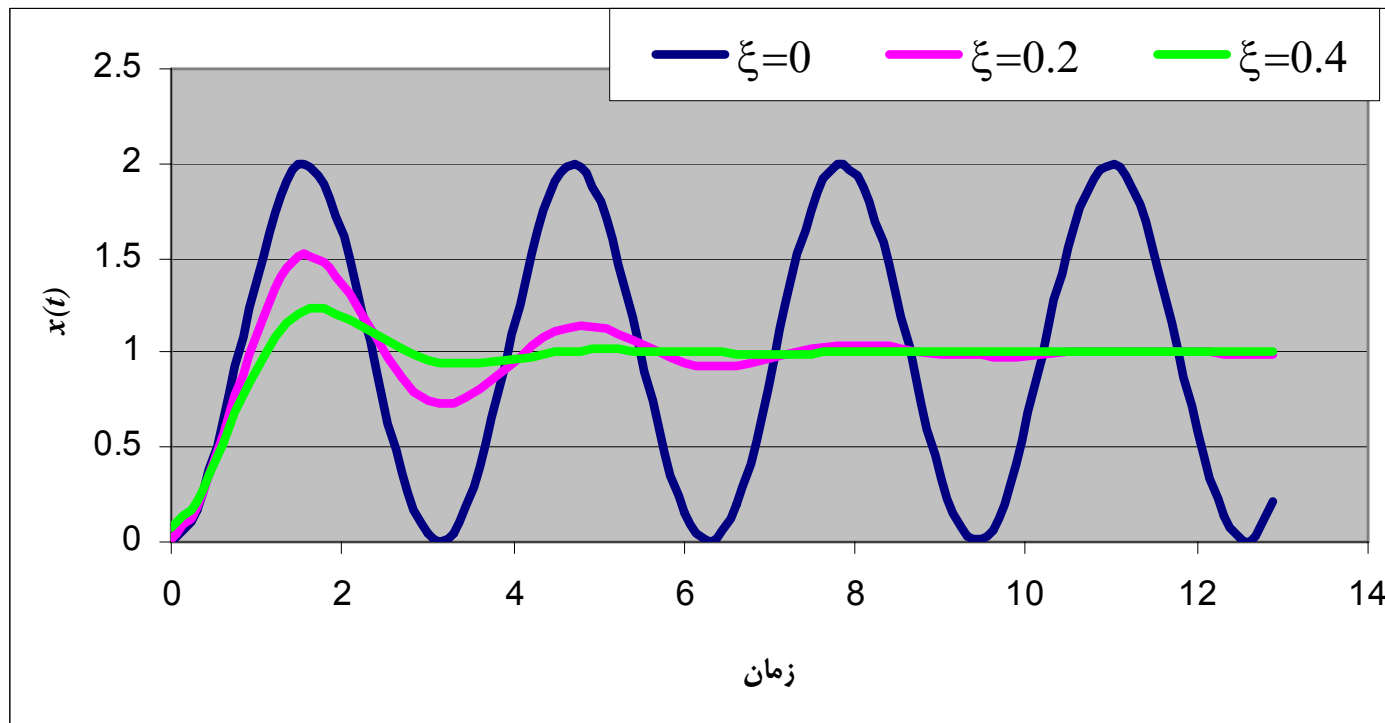
$$= \frac{F_0}{k} \left[1 - e^{-\xi\omega_n(t-t_0)} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d(t-t_0) + \cos \omega_d(t-t_0) \right) \right]$$

$$= \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d(t-t_0) - \phi)) \right] \quad | \quad \phi = ?$$

مثال ۱: بار پله ای

پاسخ: برای $t > t_0$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d t - \phi)) \right] \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$



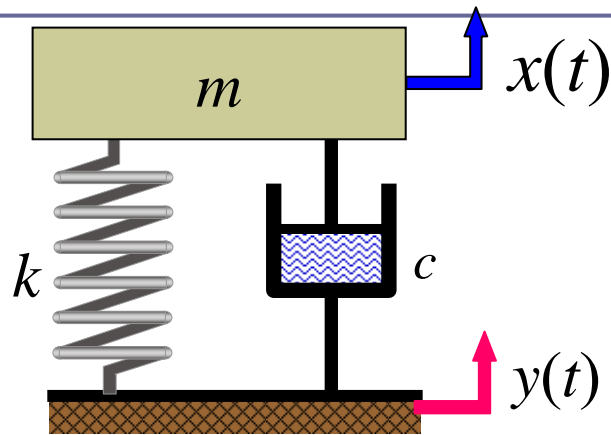
O.S.

پاسخ سیستم بدون میرائی:

پاسخ یک سیستم نامیرا به بار پله ای که از نقطه $t = t_0$ شروع شود:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_d (t - t_0)] & t \geq t_0 \end{cases}$$

پاسخ به تحریک پایه



در تحریک پایه معادله حرکت بصورت:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky(t) + c\dot{y}(t)$$

یا

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}(t)$$

در نتیجه:

$$x(t) = \int_0^t [ky(\tau) + c\dot{y}(\tau)] \frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{m\omega_d} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

$$z(t) = - \int_0^t \ddot{y}(\tau) \frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{\omega_d} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

مثال:

■ فرض کنید سرعت پایه بصورت $\dot{y}(t) = v_0 H(t) e^{-t/t_0}$ داده شده باشد برای یک سیستم نامیرا مطلوب است پاسخ نسبی Z سیستم.

■ حل: برای یک سیستم نامیرا

$$z(t) = \frac{-1}{\omega_n} \int_0^t \ddot{y}(\tau) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

$$\dot{y}(t) = v_0 H(t) e^{-t/t_0} \Rightarrow \ddot{y}(t) = v_0 \left(\delta(t) e^{-t/t_0} - \frac{H(t)}{t_0} e^{-t/t_0} \right)$$

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \int_0^t \left(\delta(\tau) e^{-\tau/t_0} - \frac{H(\tau)}{t_0} e^{-\tau/t_0} \right) \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

مثال:

$$z(t) = -\frac{v_0}{\omega_n t_0} \left[t_0 \sin \omega_n t - \int_0^t e^{-\tau/t_0} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau \right]$$

ادامه: ■

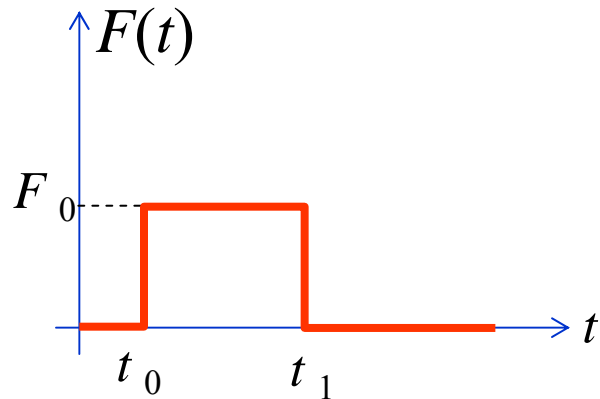
$$= -\frac{v_0}{\omega_n t_0} \left[t_0 \sin \omega_n t - e^{-t/t_0} \int_0^t e^{u/t_0} \sin \omega_n u du \right]$$

$$= -\frac{v_0}{\omega_n t_0} \left[t_0 \sin \omega_n t - e^{-t/t_0} \left[\frac{e^{u/t_0} (1/t_0 \sin \omega_n u - \omega_n \cos \omega_n u)}{1/t_0^2 + \omega_n^2} \right]_0^t \right]$$

$$= -\frac{v_0}{\omega_n t_0} \left[t_0 \sin \omega_n t - e^{-t/t_0} \frac{e^{t/t_0} (1/t_0 \sin \omega_n t - \omega_n \cos \omega_n t) + \omega_n}{1/t_0^2 + \omega_n^2} \right]$$

$$= \frac{v_0 t_0}{1 + t_0^2 \omega_n^2} \left[e^{-t/t_0} - \omega_n t_0 \sin \omega_n t - \cos \omega_n t \right]$$

پاسخ یک سیستم نامیرا به یک ضربه مستطیلی



الف) روش انتگرالی:

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_0^t F(\tau) \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau$$

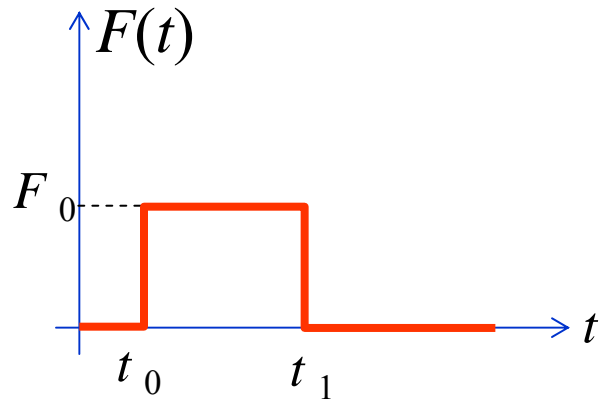
برای $0 < t < t_0$ نیرو صفر است و $x(t) = 0$

برای $t_0 \leq t < t_1$ نیرو ثابت است و

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \int_{t_0}^t \sin \omega_n (t - \tau) d\tau = \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^{t-t_0} \sin \omega_n u du$$

$$= \left[-\frac{F_0}{m\omega_n^2} \cos \omega_n u \right]_0^{t-t_0} = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n (t - t_0)]$$

پاسخ یک سیستم نامیرا به یک ضربه مستطیلی



■ برای $t_1 < t$ نیرو مجدداً صفر است

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{F_0}{m\omega_n} \int_{t_0}^{t_1} \sin \omega_n (t - \tau) d\tau = -\frac{F_0}{m\omega_n} \int_{t-t_0}^{t-t_1} \sin \omega_n u du \\ &= \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n (t - t_1) - \cos \omega_n (t - t_0)]\end{aligned}$$

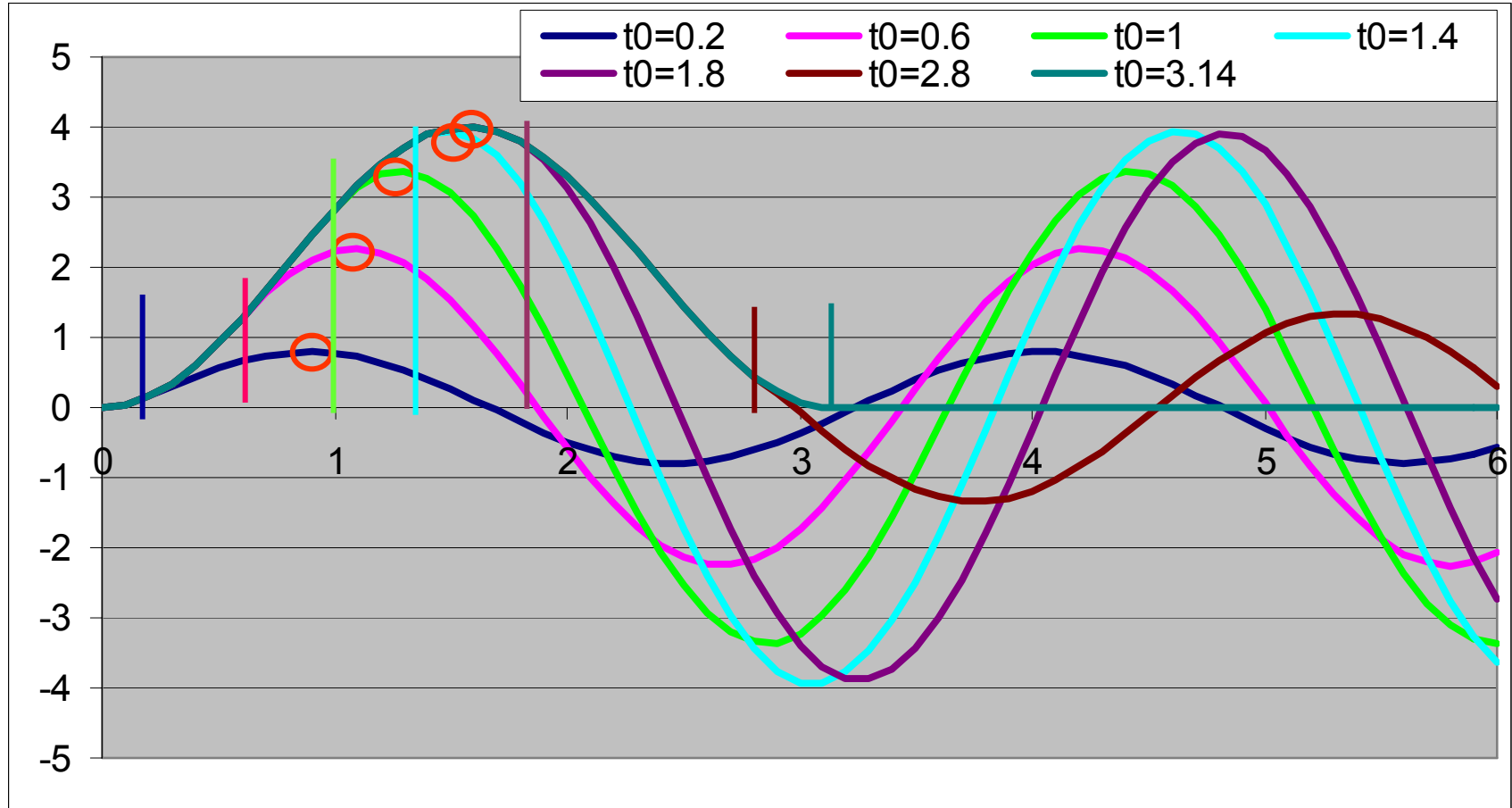
حل کلی (با در نظر گرفتن شرایط اولیه)

$$x(t) = \begin{cases} \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t & t < t_0 \\ \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t + \frac{F_0}{m\omega_n^2} [1 - \cos \omega_n (t - t_0)] & t_0 < t < t_1 \\ \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t + \frac{F_0}{m\omega_n^2} [\cos \omega_n (t - t_1) - \cos \omega_n (t - t_0)] & t > t_1 \end{cases}$$

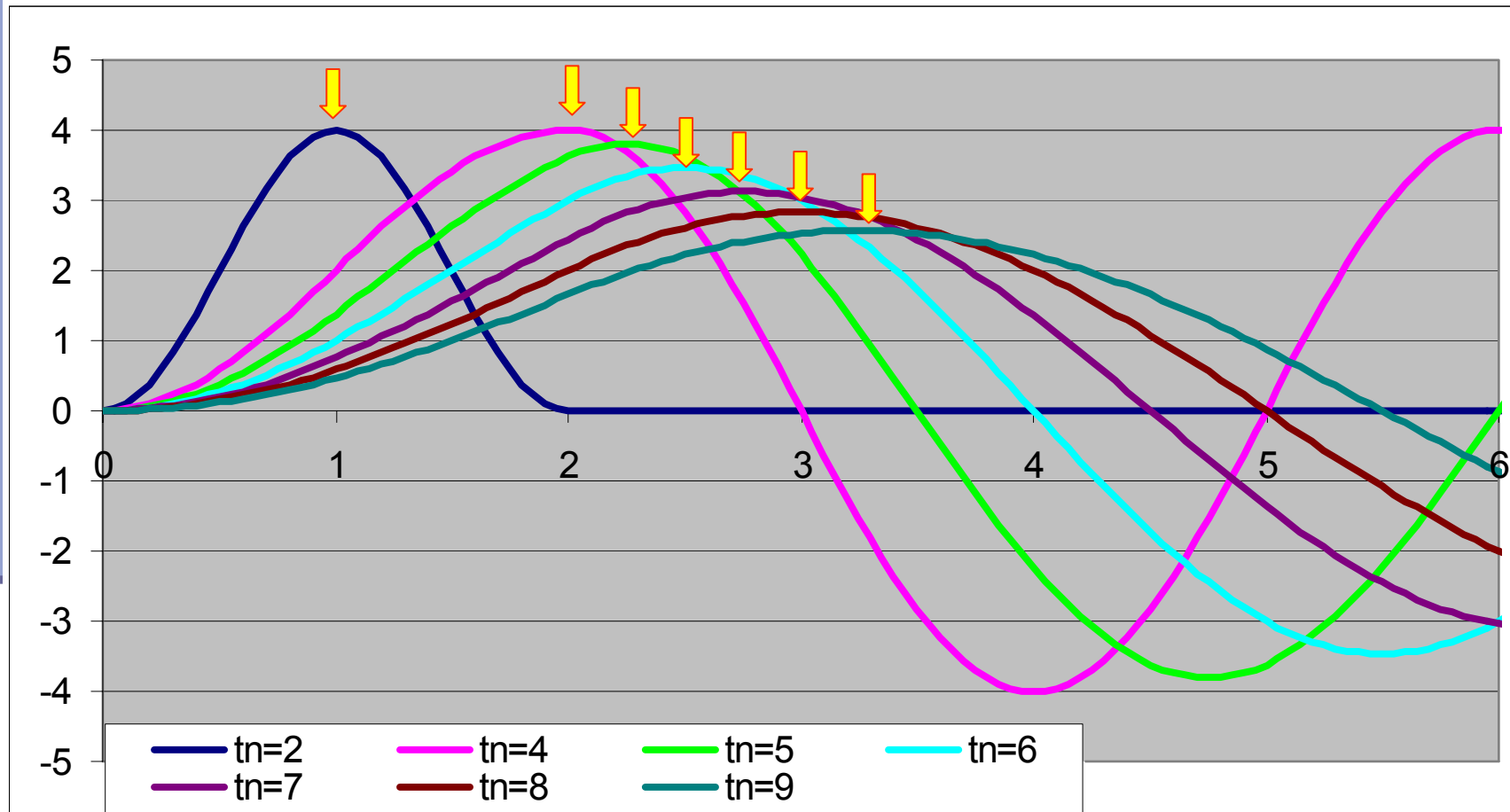
با صفر بودن شرایط اولیه و $t_0 = 0$ ■

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{k} [1 - \cos(\omega_n t)] & t < t_1 \\ \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n (t - t_1) - \cos(\omega_n t)] & t > t_1 \end{cases}$$

شکل پاسخ

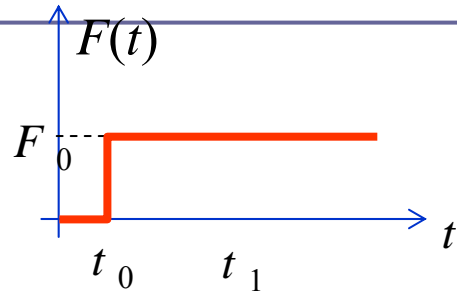


شکل پاسخ

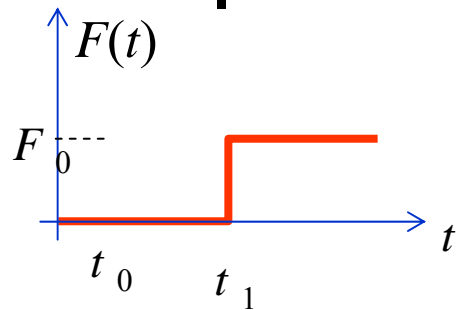


پاسخ یک سیستم نامیرا به یک ضربه مستطیلی

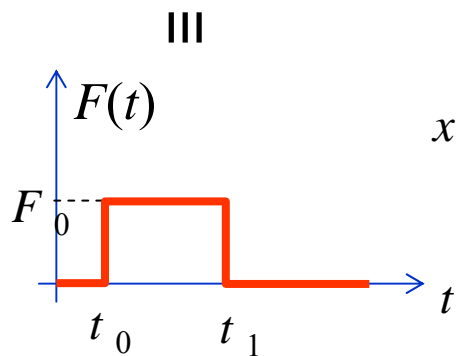
ب) روش ترکیب جوابها:



$$x_1(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \frac{F_0}{|k|} [1 - \cos \omega_d (t - t_0)] & t \geq t_0 \end{cases}$$



$$x_2(t) = \begin{cases} 0 & t < t_1 \\ \frac{F_0}{|k|} [1 - \cos \omega_d (t - t_1)] & t \geq t_1 \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ x_1 = \frac{F_0}{m\omega_n^2} [1 - \cos \omega_n (t - t_0)] & t_0 < t < t_1 \\ x_1 - x_2 = \frac{F_0}{m\omega_n^2} [\cos \omega_n (t - t_1) - \cos \omega_n (t - t_0)] & t > t_1 \end{cases}$$

استفاده از پاسخ به تابع پله ای

یادآوری پاسخ به تابع پله ای:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n(t-t_0)}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d(t-t_0) - \phi)) \right] \quad | \quad x(t) = F_0 h(t-t_0)$$

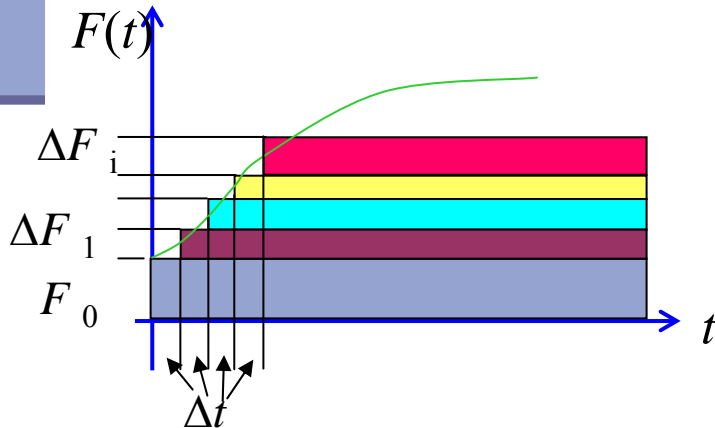
$$h(t) = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d t - \phi)) \right] \quad |$$

پاسخ به امین i تابع پله ای:

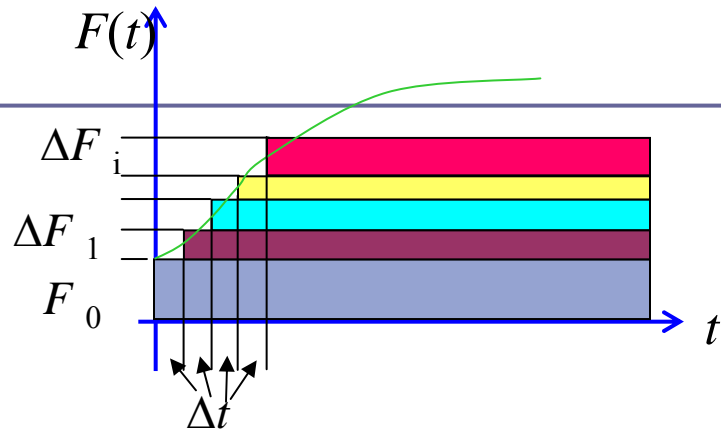
$$x_i(t) = H(t-t_i) \Delta F_i h(t-t_i)$$

پاسخ کلی برای $t > t_k$

$$x(t) = F_0 h(t) + \sum_{i=1}^k \frac{\Delta F_i}{\Delta t} h(t-t_i) \Delta t$$



انتگرال دو هامل



■ اگر $\Delta t \rightarrow 0$ آنگاه:

$$x(t) = F_0 h(t) + \sum_{i=1}^k \frac{\Delta F_i}{\Delta t} h(t - t_i) \Delta t$$

$$x(t) = F_0 h(t) + \int \frac{dF(\tau)}{d\tau} h(t - \tau) d\tau$$

$$h(t) = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_d t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} (\cos(\omega_d t - \phi)) \right]$$

انتگرال دوهمامل (روش دیگرا: انتگرال جزء به جزء)

$$x(t) = \int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau = -F(\tau)h(t-\tau)\Big|_0^t + \int_0^t F'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$u = F(\tau) \quad dv = g(t-\tau)d\tau \quad du = \frac{dF(\tau)}{d\tau}d\tau \quad v = -\int g(u)du = -h(t-\tau)$$

$$h(0) = \frac{1}{k} \left[1 - \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] = 0$$

$$x(t) = F(0)h(t) + \int_0^t F'(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

مثال: پاسخ تابع پله ای

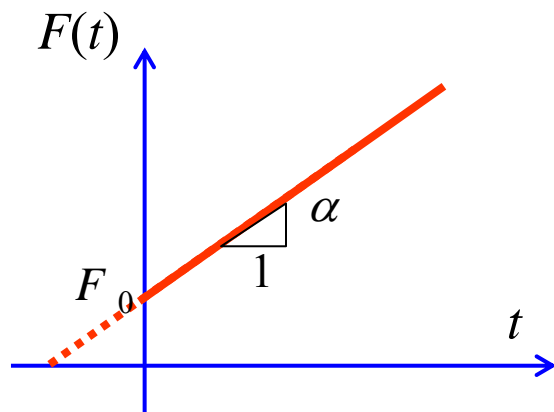
$$F(t) = F_0 H(t - t_0) \Rightarrow F' = F_0 \delta(t - t_0)$$

تابع پله ای: ■

$$x(t) = F_0 h(t) + \int_0^t \frac{dF(\tau)}{d\tau} h(t - \tau) d\tau = 0 + F_0 \int_0^t \delta(\tau - t_0) h(t - \tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ F_0 h(t - t_0) & t \geq t_0 \end{cases}$$

$$x(t) = H(t - t_0) \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n (t - t_0)}}{\sqrt{1 - \xi^2}} (\cos(\omega_d (t - t_0)) - \phi) \right]$$

مثال: پاسخ به نیروی خطی



■ فرض کنید نیرو به صورت خطی تغییر کند:

$$F(t) = \alpha t + F_0 = \alpha(t + F_0/\alpha) \quad t \geq 0$$

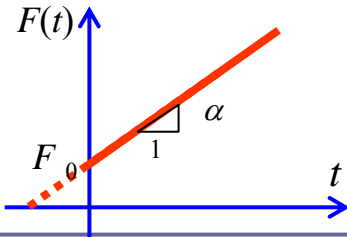
■ مشتق نیرو

$$F'(t) = \alpha \quad t \geq 0$$

$$x(t) = F_0 h(t) + \int_0^t \frac{dF(\tau)}{d\tau} h(t-\tau) d\tau = F_0 h(t) + \alpha \int_0^t h(t-\tau) d\tau$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d t - \phi)) \right] + \frac{\alpha}{k} \int_0^t \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n \tau}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d \tau - \phi)) \right] d\tau$$

مثال: پاسخ به نیروی خطی



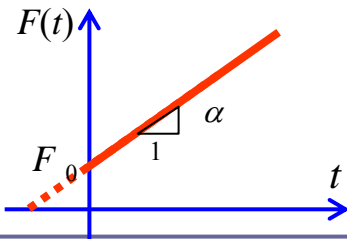
$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d t - \phi)) \right] + \frac{\alpha}{k} \int_0^t \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d(t-\tau) - \phi)) \right] d\tau$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d t - \phi)) \right] + \frac{\alpha}{k} \left[\tau - \frac{e^{-\xi\omega_n u} (-\xi\omega_n \cos(\omega_d u - \phi) + \omega_d \sin(\omega_d u - \phi))}{\sqrt{1-\xi^2} (\omega_n)^2} \right]_0^t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d t - \phi)) \right] + \frac{\alpha}{k} \left[t - \frac{e^{-\xi\omega_n t} (-\xi\omega_n \cos(\omega_d t - \phi) + \omega_d \sin(\omega_d t - \phi)) + (\xi\omega_n \cos(\phi) + \omega_d \sin(\phi))}{\sqrt{1-\xi^2} (\omega_n)^2} \right]_0^t$$

$$\tan \phi = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \sin \phi = \xi, \quad \cos \phi = \sqrt{1-\xi^2}$$

مثال: پاسخ به نیروی خطی



$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} (\cos(\omega_d t - \phi)) \right] + \frac{\alpha}{k\omega_n} \left[\omega_n t - \frac{e^{-\xi\omega_n t} (-\xi\omega_n \cos(\omega_d t - \phi) + \omega_d \sin(\omega_d t - \phi))}{\sqrt{1-\xi^2} (\omega_n)} - 2\xi \right]$$

■ برای سیستم نامیرا:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos(\omega_d t)] + \frac{\alpha}{k\omega_n} [\omega_n t - \sin(\omega_n t)]$$

$$x(t) = \frac{\alpha}{k\omega_n} [\omega_n t - \sin(\omega_n t)] \quad t > 0 \quad \text{اگر } F_0 = 0 \quad \blacksquare$$

■ اگر بار گذاری از زمان $t = t_0$ شروع شده باشد

$$x(t) = H(t - t_0) \frac{\alpha}{k\omega_n} [\omega_n (t - t_0) - \sin(\omega_n (t - t_0))]$$

طیف پاسخ

■ تعریف: نموداری که نشان دهنده تغییرات پاسخ بیشینه (بیشترین جابجائی، سرعت، شتاب، تنش یا هر کمیت دیگری) با فرکانس طبیعی ω_n (یا زمان تناوب طبیعی τ_n) سیستم یک درجه آزادی در اثر تابع نیروی معلوم را **طیف پاسخ** گویند.

■ چون پاسخ بیشینه در مقابل فرکانس طبیعی ترسیم می شود، لذا طیف پاسخ همه پاسخهای بیشینه سیستمهای یک درجه آزادی به نیروی معلوم است .

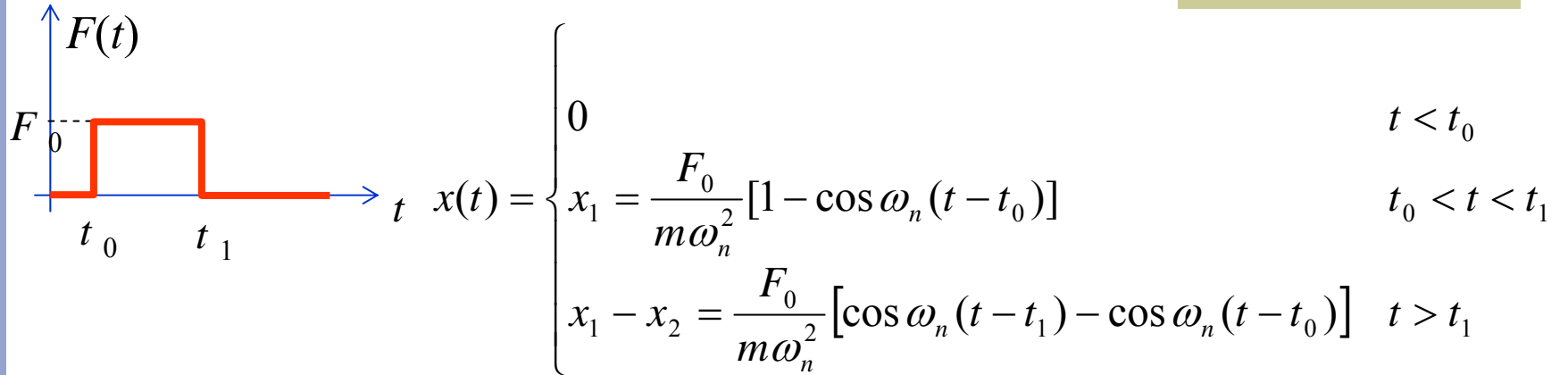
■ طیف پاسخ بطور وسیعی برای طراحی مهندسیهای زلزله استفاده می شود

■ با دانستن فرکانس طبیعی یک سیستم می توان پاسخ بیشینه را به نیروی کرد.

پیدا

معلوم

مثال: طیف پاسخ ضربه مستطیلی



برای $t_0 = 0$ ■

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n t] & 0 < t < t_1 \\ \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n (t - t_1) - \cos \omega_n t] & t > t_1 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{k} [\omega_n \sin \omega_n t] & 0 < t < t_1 \\ \frac{F_0}{k} \omega_n [-\sin \omega_n (t - t_1) + \sin \omega_n t] & t > t_1 \end{cases}$$

اگر $t_0 > \pi/\omega_n$ ■

$$\sin \omega_n t_p = 0 \quad \omega_n t_p = \pi \quad x(t_p) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n t_p] = 2 \frac{F_0}{k}$$

در غیر اینصورت ■

$$-\sin \omega_n (t - t_1) + \sin \omega_n t = 0$$

$$\sin \omega_n t_p \cos \omega_n t_1 - \cos \omega_n t_p \sin \omega_n t_1 - \sin \omega_n t_p = 0$$

$$\sin \omega_n t_p (\cos \omega_n t_1 - 1) = \cos \omega_n t_p \sin \omega_n t_1 \Rightarrow \tan \omega_n t_p = \frac{\sin \omega_n t_1}{\cos \omega_n t_1 - 1}$$

$$\tan \omega_n t_p = \frac{\sin \omega_n t_1}{\cos \omega_n t_1 - 1}$$

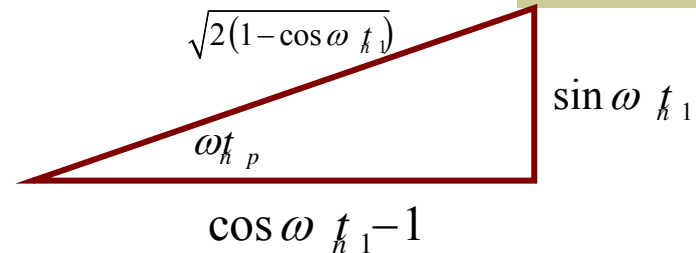
$$\sin \omega_n t_p = \frac{\sin \omega_n t_1}{\sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}}$$

$$\cos \omega_n t_p = \frac{\cos \omega_n t_1 - 1}{\sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}}$$

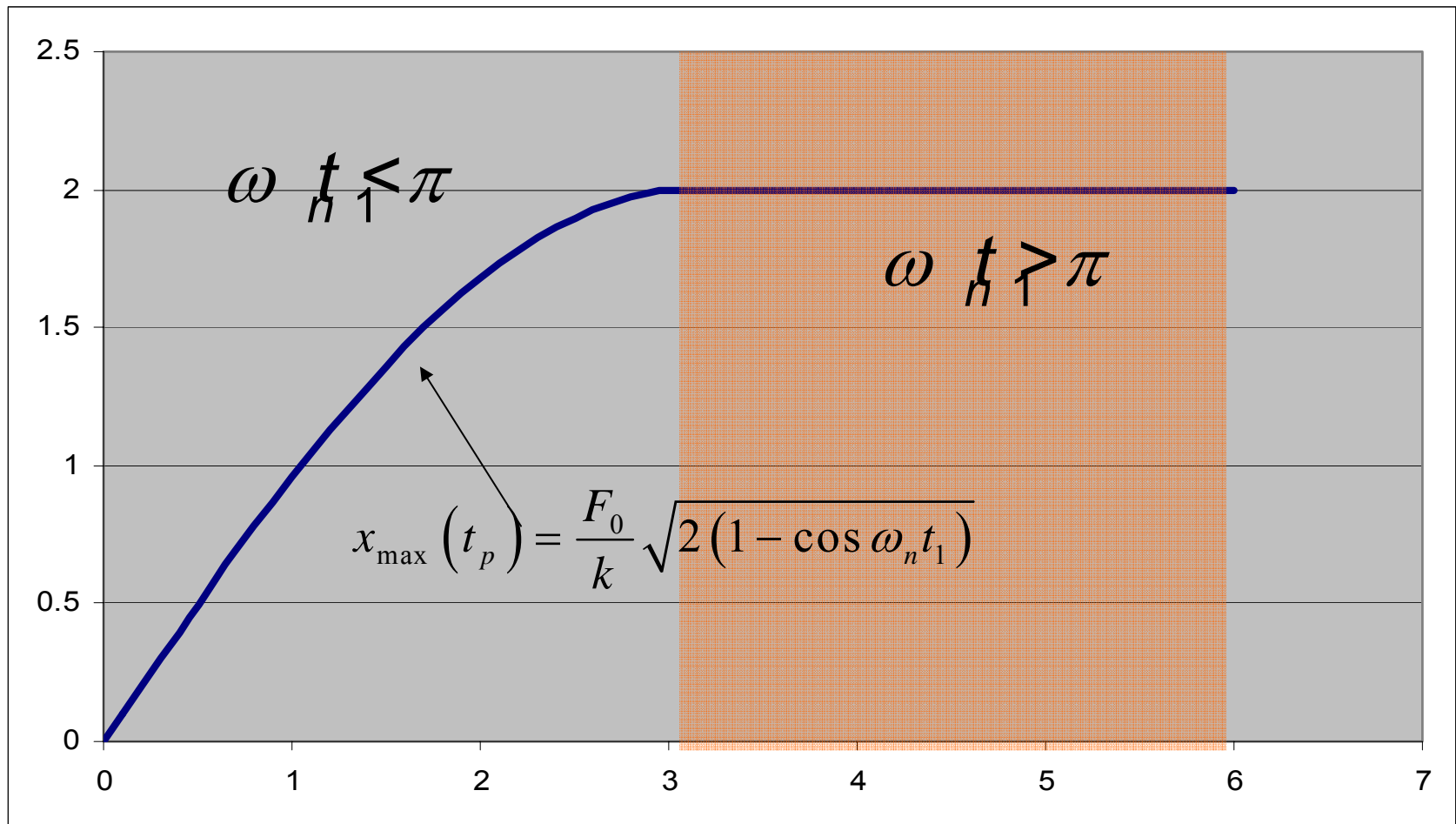
$$x_{\max}(t_p) = \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n(t_p - t_1) - \cos \omega_n t_p] = \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n t_p \cos \omega_n t_1 + \sin \omega_n t_p \sin \omega_n t_1 - \cos \omega_n t_p]$$

$$= \frac{F_0}{k} \left[\frac{(\cos \omega_n t_1 - 1)^2}{\sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}} + \frac{\sin^2 \omega_n t_1}{\sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}} \right]$$

$$= \frac{F_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}$$

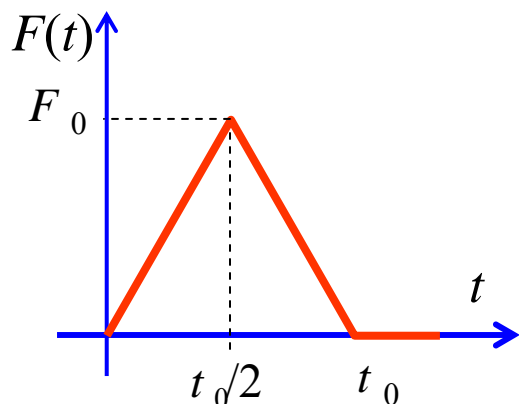


$$\sqrt{\sin^2 \omega t_1 + 1 + \cos^2 \omega t_1 - 2 \cos \omega t_1} = \sqrt{2(1 - \cos \omega t_1)}$$



پاسخ و طیف پاسخ به یک بار مثلثی

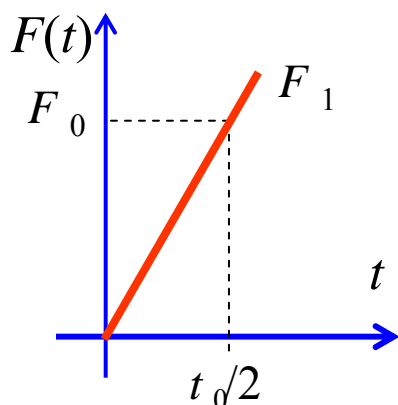
بارگذاری مقابل به یک سیستم یک درجه آزادی نامیرا اعمال شده، مطلوب است:



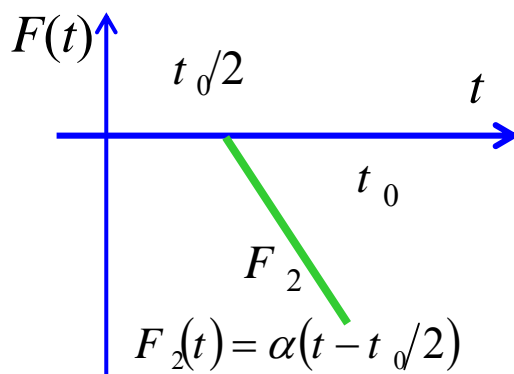
الف) پاسخ به بارگذاری

ب) طیف پاسخ

$$F(t) = F_1 + F_2 + F_3$$



$$F_1(t) = \frac{2F_0}{t_0}t$$

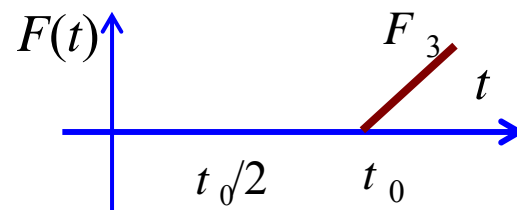


$$F_2(t) = \alpha(t - t_0/2)$$

$$F_2(t_0) + F_1(t_0) = 0 \Rightarrow \alpha t_0/2 + 2F_0 = 0$$

$$\alpha = \frac{-4F_0}{t_0}$$

$$F_2(t) = \frac{-2F_0}{t_0}(2t - t_0)$$



$$F_3(t) = -(F_1 + F_2) = \frac{2F_0}{t_0}(t - t_0)$$

پاسخ برای $0 < t < t_0/2$

$$F_1(t) = \frac{2F_0}{t_0} t$$

■ نیروی اعمالی F_1 :

$$x_1(t) = H(t) \frac{\alpha}{k \omega_n} [\omega_n t - \sin \omega_n t]$$

$$= H(t) \frac{2F_0}{k t_0 \omega_n} [\omega_n t - \sin \omega_n t] \quad 0 \leq t \leq t_0/2$$

پاسخ برای $t_0/2 < t < t_0$

نیروی اعمالی F_2 : $F_2(t) = \frac{-2F_0}{t_0}(2t - t_0)$

$$x_2(t) = H(t - t_0/2) \frac{\alpha}{k\omega_n} [\omega_n(t - t_0/2) - \sin \omega_n(t - t_0/2)]$$
$$= -H(t - t_0/2) \frac{4F_0}{kt_0\omega_n} [\omega_n(t - t_0/2) - \sin \omega_n(t - t_0/2)] \quad t_0/2 \leq t \leq t_0$$

در این بازه مجموع F_1 و F_2 بر روی سیستم عمل می کنند.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad t_0/2 \leq t \leq t_0$$

پاسخ برای $t < t_0$

$$F_3(t) = \frac{2F_0}{t_0}(t - t_0) \quad \blacksquare \text{ نیروی اعمالی } F_3$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= H(t - t_0) \frac{\alpha}{k\omega_n} [\omega_n(t - t_0) - \sin \omega_n(t - t_0)] \\ &= H(t - t_0) \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [\omega_n(t - t_0) - \sin \omega_n(t - t_0)] \quad t_0 \leq t \end{aligned}$$

■ در این بازه مجموع F_1 ، F_2 و F_3 بر روی سیستم عمل می کنند.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \quad t_0 \leq t$$

پاسخ کلی

$$x_1(t) = H(t) \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [\omega_n t - \sin \omega_n t] \quad 0 \leq t \leq t_0/2$$

$$x_2(t) = -H(t - t_0/2) \frac{4F_0}{kt_0\omega_n} [\omega_n (t - t_0/2) - \sin \omega_n (t - t_0/2)] \quad t_0/2 \leq t \leq t_0$$

$$x_3(t) = H(t - t_0) \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [\omega_n (t - t_0) - \sin \omega_n (t - t_0)] \quad t_0 \leq t$$

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & 0 \leq t \leq t_0/2 \\ x_1(t) + x_2(t) & t_0/2 \leq t \leq t_0 \\ x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) & t_0 \leq t \end{cases}$$

پاسخ کلی

$$x_1(t) = H(t) \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [\omega_n t - \sin \omega_n t]$$

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &= \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [\omega_n t - \sin \omega_n t] - \frac{4F_0}{kt_0\omega_n} [\omega_n (t - t_0/2) - \sin \omega_n (t - t_0/2)] \\ &= \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [2 \sin \omega_n (t - t_0/2) - \sin \omega_n t - \omega_n (t - t_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) &= \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [2 \sin \omega_n (t - t_0/2) - \sin \omega_n t - \omega_n (t - t_0)] + \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [\omega_n (t - t_0) - \sin \omega_n (t - t_0)] \\ &= \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [2 \sin \omega_n (t - t_0/2) - \sin \omega_n t - \sin \omega_n (t - t_0)] \end{aligned}$$

$$x_1(t) = H(t) \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [\omega_n t - \sin \omega_n t]$$

$$x_1(t) + x_2(t) = \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [2 \sin \omega_n (t - t_0/2) - \sin \omega_n t - \omega_n (t - t_0)]$$

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = \frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [2 \sin \omega_n (t - t_0/2) - \sin \omega_n t - \sin \omega_n (t - t_0)]$$

طیف پاسخ

لازم است که از معادلات $x(t)$ نسبت به زمان مشتق گرفته و معادل صفر قرار دهیم تا بیشترین دامنه بدست آید.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [2 \sin \omega_n (t - t_0/2) - \sin \omega_n t - \omega_n (t - t_0)] \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2F_0}{kt_0\omega_n} [2 \sin \omega_n (t - t_0/2) - \sin \omega_n t - \sin \omega_n (t - t_0)] \right) = 0$$

$$2\omega_n \cos \omega_n (t - t_0/2) - \omega_n \cos \omega_n t - \omega_n = 0 \Rightarrow 2 \cos \omega_n (t - t_0/2) = \cos \omega_n t + 1$$

$$2 \cos \omega_n (t - t_0/2) - \cos \omega_n t - \cos \omega_n (t - t_0) = 0$$

ارتعاشات مکانیکی ۹

بارگذاری عمومی-تبدیلات-عددی

سیدیوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

روشهای مبنی بر تبدیلات

روشهای دیگری برای حل معادلات ارتعاشی

تبدیل فوریه

■ تبدیل فوریه یک تبدیل انتگرالی بر مبنای انتگرال فوریه می باشد

■ خواص آن شبیه تبدیل لاپلاس است.

■ تبدیل فوریه تابع $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

■ تبدیل معکوس فوریه:

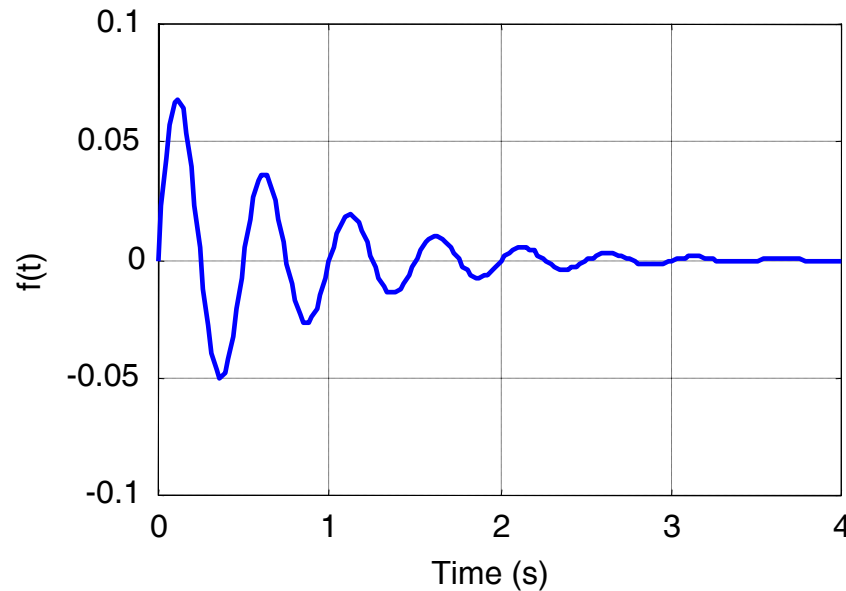
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

طیف دامنه

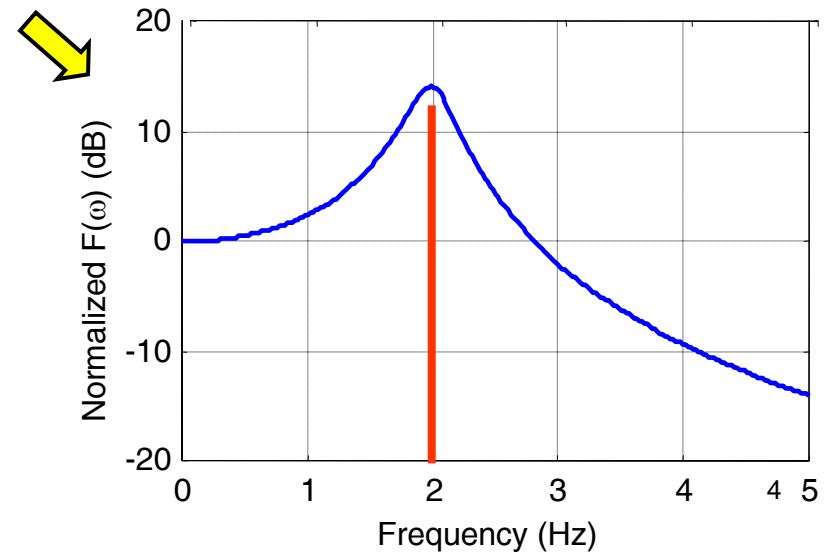
طیف دامنه $f(t)$ نموداری از $|F(\omega)|$ (اندازه تبدیل فوریه تابع)

می باشد.

$w = 2$ and $M=1$



Fourier Transform



خواص

■ اگر $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ باشد، آنگاه:

■ انتقال زمانی:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} F(\omega)$$

■ انتقال فرکانسی:

$$\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0)$$

■ مودولاسیون:

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$$

$$\mathcal{F}\{f(t) \sin(\omega_0 t)\} = \frac{i}{2} [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)]$$

خواص

■ اگر $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ باشد، آنگاه:

■ تبدیل فوریه مشتق n ام یک تابع:

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n F(\omega)$$

در نتیجه

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{f''(t)\} = -\omega^2 F(\omega)$$

مثال

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

■ معادله دیفرانسیل:

$$\mathcal{F}[m\ddot{x} + c\dot{x} + kx] = \mathcal{F}[f(t)] \quad \text{تبدیل معادله دیفرانسیل:} \quad \blacksquare$$

$$[-m\omega^2 + ic\omega + k]X(\omega) = F(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + ic\omega} F(\omega) \quad \rightarrow \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$$

مثال: $f(t) = \delta(t - t_0)$

$$\ddot{x} + \dot{x} + 4x = \delta(t - t_0)$$

$$Z(i\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + ic\omega} = \frac{1}{4 - \omega^2 + i\omega}$$

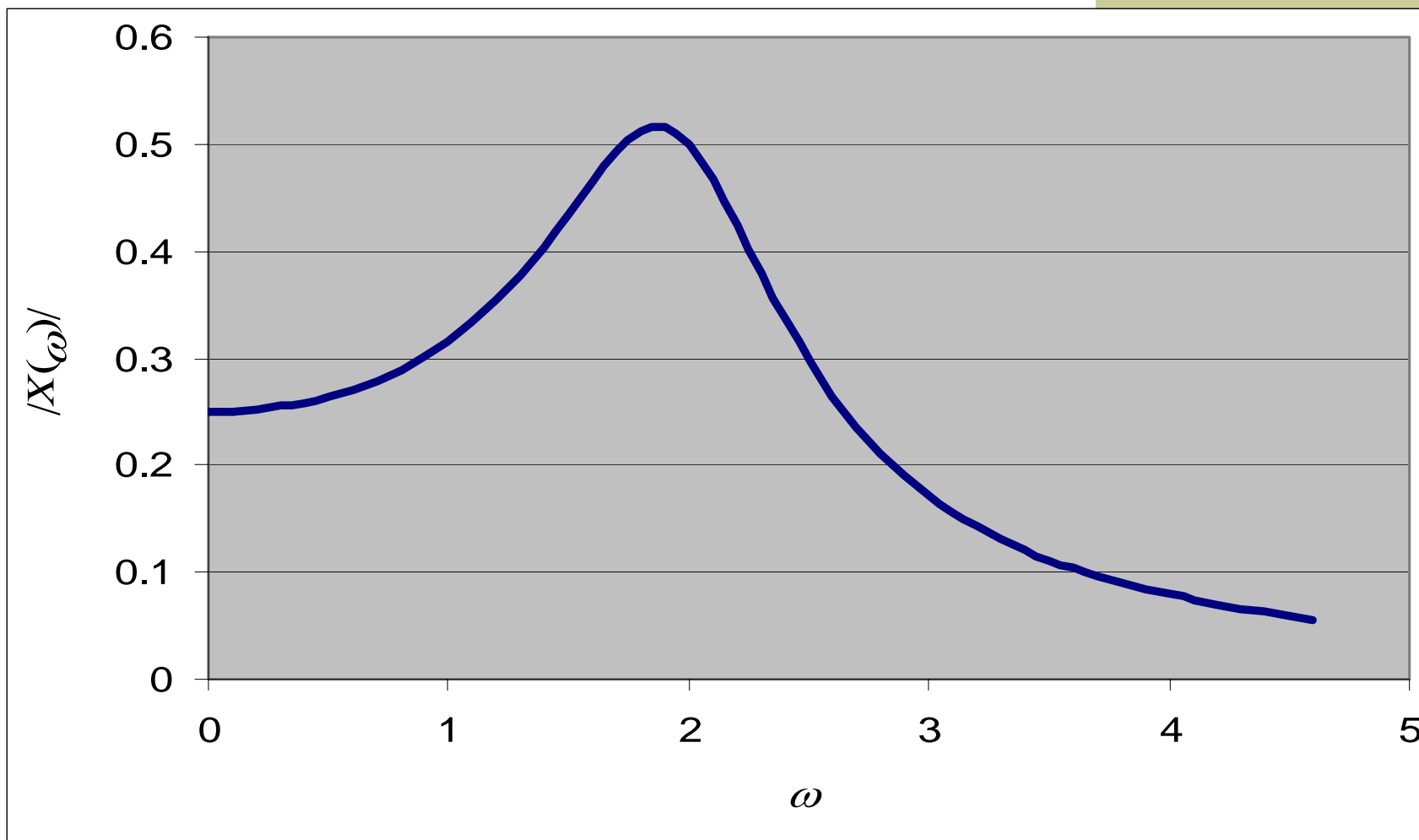
$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega t_0}$$

$$X(\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{4 - \omega^2 + i\omega}$$

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\}$$

طیف دامنه $X(\omega)$



تبدیل لاپلاس

■ تبدیل لاپلاس نیز یک تبدیل انتگرالی با کاربردهای بسیار وسیع در کاربردهای مهندسی و علوم است.

■ در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی با شرایط اولیه کاربرد دارد.

■ تبدیل لاپلاس:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

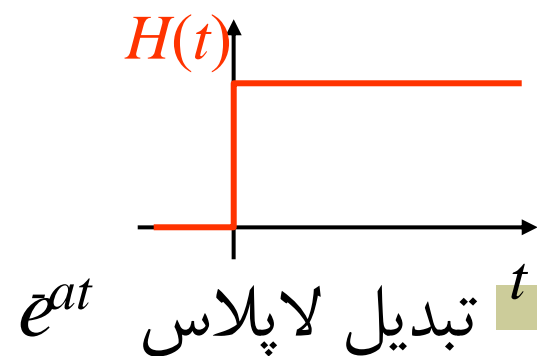
■ تبدیل معکوس:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

مثال

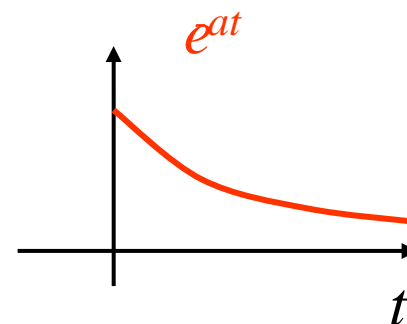
تبدیل لاپلاس تابع هویساید (پله ای واحد)

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$



$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \left[\frac{-e^{-(s+a)t}}{(s+a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{(s+a)}$$



جدول تبدیلات لاپلاس

$x(t)$	$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$
$\delta(t)$	1
$H(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$
$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$1 - \cos(at)$	$\frac{a^2}{s(s^2 + a^2)}$
$at - \sin(at)$	$\frac{a^3}{s^2(s^2 + a^2)}$

$x(t)$	$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$
$\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}$
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$

جدول تبدیلات لاپلاس

$x(t)$	$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$
$\frac{e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t}{\omega_d},$ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, 0 \leq \zeta \leq 1$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)}{\omega_n \omega_d},$ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, 0 \leq \zeta \leq 1, \phi = \cos^{-1} \zeta$	$\frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
$\frac{\sqrt{\alpha^2 - 2\zeta\omega_n \alpha + \omega_n^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi)}{\omega_d},$ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, 0 \leq \zeta \leq 1,$ $\phi = \tan^{-1}(\omega_d / (\alpha - \zeta \omega_n))$	$\frac{s + \alpha}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
\dot{x}	$sX(s) - x(0)$
\ddot{x}	$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$

Example 1:

Given the initial value problem

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}, y(0) = -1, y'(0) = 1$$

Step 1 transforms the problem from t -domain to s -domain using tables of functions:

$$(s^2 + 2s + 1)Y - sy(0) - y'(0) - 2y(0) = \frac{1}{s + 1}$$

The problem can now be solved using algebraic operation instead of calculus operation.

Step 2 solves the problem to find

$$Y(s) = \frac{1}{(s + 1)^3} - \frac{1}{s + 1}$$

Step 3 takes the solution from s -domain back to the original t -domain using lookup table.

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{-t} - e^{-t}$$

خواص تبدیل لاپلاس

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

خطی بودن ■

$$e^{at} f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - a)$$

انتقال در حوزه ■

$$f(t - a)H(t - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as} F(s)$$

انتقال در زمان ■

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 \Rightarrow \delta(t - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as}$$

مثال خطی بودن

Example 4:

Let $f(t) = \cosh at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$ when $t \geq 0$ where $\cosh at$ is called the **hyperbolic cosine function**. Find $F(s)$.

Solution:

From (1) and Theorem 1 we have

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-at}\}$$

From Example 2(b) we know that $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$. It also implies that $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$.

So we have

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Similarly we can obtain the transform of the **hyperbolic sine** as

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

مثال

Example 9:

Find the Laplace transforms of $e^{at} \cos \omega t$ and $e^{at} \sin \omega t$.

Solution:

From $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ and $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$. By Theorem 5 we obtain

immediately

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos \omega t\} = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{e^{at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$$

Example 10: Transform of $f(t)$

Find the Laplace transform of the function

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{if } 0 < t < \pi \\ 0 & \text{if } \pi < t < 2\pi \\ \sin t & \text{if } t > 2\pi \end{cases}$$

Solution:

In the first step we write $f(t)$ in terms of unit step functions.

$$f(t) = 2u(t) - 2u(t - \pi) + u(t - 2\pi) \sin t$$

The last term equals $u(t - 2\pi) \sin(t - 2\pi)$ because of the periodicity.

Thus the Laplace transform is

$$L\{f(t)\} = \frac{2}{s} - \frac{2e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$$

Example 11: Inverse Transform of $F(s)$

Find the inverse Laplace transform $f(t)$ of

$$F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{4e^{-2s}}{s} + \frac{se^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

Solution:

Without exponential functions the four terms would have inverse $2t$, $-2t$, -4 , $\cos t$.
Hence

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t - 2(t-2)u(t-2) - 4u(t-2) + \cos(t-\pi)u(t-\pi) \\ &= 2t - 2tu(t-2) - 4u(t-2) + 4u(t-2) - \cos t u(t-\pi) \\ &= 2t - 2tu(t-2) - \cos t u(t-\pi) \\ &= \begin{cases} 2 & \text{if } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{if } 2 < t < 2\pi \\ \cos t & \text{if } t > \pi \end{cases} \end{aligned}$$

Unit Step Function

Unit step function (also called **Heaviside function**) is denoted by

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < a \\ 1 & \text{if } t > a \end{cases}$$

Note that it is discontinuous at $t = a$ which is undefined.

The Laplace transform can be found directly from the definition:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t-a)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-a) dt = \int_0^a e^{-st} \cdot 0 dt + \int_a^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_a^{\infty} = \frac{e^{-as}}{s} \end{aligned}$$

transform of a delta function can be found as

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \lim_{k \rightarrow 0} e^{-as} \frac{1 - e^{-ks}}{ks} = e^{-as}$$

The indeterminate limit is obtained by applying the 'Hôpital' s rule.

کسر جزئی

$$Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)}$$

معمولاً تبدیلات به شکل

در می آیند و لازم است به شکلی آشنا تبدیل شوند

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - a_1} + \frac{A_2}{s - a_2} + \dots + \frac{A_k}{s - a_k}$$

where A_1, A_2, \dots, A_k can be found using **Heaviside formula**:

$$A_p = \lim_{s \rightarrow a_p} (s - a_p) \frac{F(s)}{G(s)}$$

for $p = 1, 2, \dots, k$

مثال

Example 6:

Find the inverse transform of $Y(s)$:

$$Y = \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-2} + \frac{A_3}{s-3}$$

According to formula (1):

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{-1}{6}$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow 2} (s-2) \cdot \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = \frac{3}{10}$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow -3} (s+3) \cdot \frac{s+1}{s(s-2)(s+3)} = -\frac{2}{15}$$

Hence,

$$Y(s) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{s-2} - \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{s+3}$$

Find the inverse transform by table lookup

$$y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10}e^{2t} - \frac{2}{15}e^{-3t}$$

کسر جزئی ریشه تکراری

Case 2: Repeated factor $(s - a_p)^m$

Suppose that $G(s)$ has a repeated factor $s - a_p$ of order m , for $m \geq 2$, then the fraction should contain terms

$$\frac{A_{p,1}}{s - a_p}, \frac{A_{p,2}}{(s - a_p)^2}, \dots, \frac{A_{p,m}}{(s - a_p)^m}$$

where

$$A_{p,u} = \frac{1}{(m - u)!} \lim_{s \rightarrow a_p} \left\{ \frac{d^{m-u}}{ds^{m-u}} \left[(s - a_p)^m \frac{F(s)}{G(s)} \right] \right\} \quad (2)$$

for $p = 1, 2, \dots, k$ and $u = 1, 2, \dots, m$

Example 7:

Find the inverse transform of $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s-1)(s-2)} = \frac{A_{1,1}}{s} + \frac{A_{1,2}}{s^2} + \frac{A_2}{s-1} + \frac{A_3}{s-2}$$

According to the formula (2),

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} s^2 \cdot \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s-1)(s-2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \cdot \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{(s-1)(s-2)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(3s^3 - 8s)(s-1)(s-2) - (2s-3)(s^3 - 4s^2 + 4)^2}{[(s-1)(s-2)]^2} = \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

$$A_{1,2} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2(s-1)(s-2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{(s-1)(s-2)} = \frac{4}{2} = 2$$

According to the formula (1),

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \cdot \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2 (s-1)(s-2)} = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2 (s-2)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow 2} (s-2) \cdot \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2 (s-1)(s-2)} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3 - 4s^2 + 4}{s^2 (s-1)} = \frac{-4}{4} = -1$$

Hence,

$$Y(s) = \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$

Find the inverse transform by table lookup

$$y(t) = 3t + 2 - e^t - e^{2t}$$

تبدیل مشتقات

Transforms of Derivatives

Theorem 1: Laplace transform of the derivative of $f(t)$

Suppose that $f(t)$ is continuous for all $t \geq 0$ and satisfies $|f(t)| \leq Me^{kt}$ for all $t \geq 0$ and some constants k and M , and has a derivative $f'(t)$ that is **piecewise continuous** on every finite interval in the range $t \geq 0$. Then the Laplace transform of the derivative $f'(t)$ exists when $s > k$ and

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad (1)$$

It is easy to show that

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

مسائل مقدار اولیه

To solve an initial value problem

$$y'' + ay' + by = r(t), \quad y(0) = K_0, \quad y'(0) = K_1$$

گام ۱: تبدیل معادله

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \right] + a[sY(s) - y(0)] + bY(s) = R(s)$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} \text{ and } R(s) = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

$$(s^2 + as + b)Y(s) = (s + a)y(0) + y'(0) + R(s)$$

گام ۲ ■

Step 2. We solve the subsidiary equation algebraically for $Y(s)$. Divide the equation by $s^2 + as + b$ and let

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

Then we have

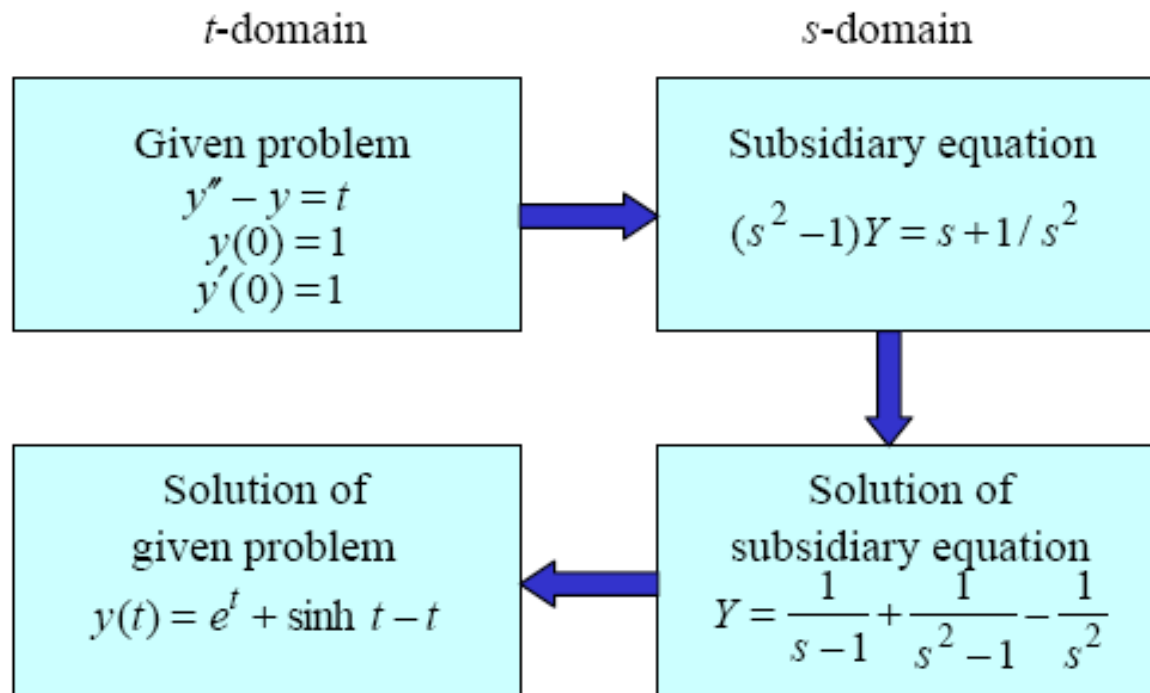
$$Y(s) = [(s + a)y(0) + y'(0)]Q(s) + R(s)Q(s) \quad (3)$$

This corresponds directly to the homogeneous solution and heterogeneous solution in t -domain, i.e.

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

گام ۳ تبدیل معکوس

Step 3. We obtain $y(t)$ from $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$. This often involves reducing (10) using partial fractions to a sum of terms whose inverses can be found from the table.



Example 1:

Solve

$$y'' - y = t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Solution:

Step 1: We transform the differential equation and get the subsidiary equation

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) - Y = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad (s^2 - a)Y = s + 1 + \frac{1}{s^2}$$

Step 2: We solve for Y and find

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s+1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2(s^2-1)} \\ &= \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Step 3: By table lookup we have

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - t$$

مثال

Example 2: Response of a damped vibrating system to piecewise continuous function

Determine the response of the damped mass-spring system governed by

$$y'' + 3y' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

where $r(t)$ is

(a) the square wave: $r(t) = u(t-1) - u(t-2)$

(b) the unit impulse at $t=1$: $r(t) = \delta(t-1)$

Solution:

The Laplace transform of the problem using **Error! Reference source not found.** is

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + 3sY - 3y(0) + 2Y = R$$

Substituting the initial conditions, we found the subsidiary equation as

$$(s^2 + 3s + 2)Y = R \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{R}{(s+1)(s+2)}$$

(a) with square wave input $r(t)$:

$$R = \frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-2s})$$

Solving for Y , we have

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} (e^{-s} - e^{-2s}) = F(s)(e^{-s} - e^{-2s})$$

where

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

By using partial fractions we get

$$F(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}$$

Hence by using lookup table, we found $f(t)$ as

$$f(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t}$$

By using t -shifting theorem (Theorem 1 Lecture 9) we have

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-s} - F(s)e^{-2s}\} \\
&= f(t-1)u(t-1) - f(t-2)u(t-2) \\
&= \left(\frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right)u(t-1) - \left(\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}\right)u(t-2) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} & \text{if } 1 < t < 2 \\ -e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} + e^{-(t-2)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} & \text{if } t > 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) with unit impulse input $r(t)$:

$$R = e^{-s}$$

Solving for Y , we have

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} e^{-s} = F(s)e^{-s}$$

where

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Hence by using lookup table, we found $f(t)$ as

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

By t -shifting theorem (Theorem 1 Lecture 9) we have

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-s}\} \\ &= f(t-1)u(t-1) \\ &= \left(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right)u(t-1) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < t < 1 \\ e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)} & \text{if } t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Example 3:

Solve

$$y' + 0.2y = 0.01t, \quad y(5) = 0$$

Solution:

We have $t_0 = 5$ and we set $t = \tilde{t} + 5$. Then the problem is changed to

$$\tilde{y}' + 0.2\tilde{y} = 0.01(\tilde{t} + 5), \quad \tilde{y}(0) = 0$$

where $\tilde{y}(\tilde{t}) = y(t)$.

Taking Laplace transform we obtain

$$s\tilde{Y} - \tilde{y}(0) + 0.2\tilde{Y} = \frac{0.01}{s^2} + \frac{0.05}{s}$$

Solving algebraically we have

$$\tilde{Y} = \frac{0.01}{s^2(s+0.2)} + \frac{0.05}{s(s+0.2)} = \frac{0.05s + 0.01}{s^2(s+0.2)} = \frac{0.05(s+0.2)}{s^2(s+0.2)} = \frac{0.05}{s^2}$$

Taking the inverse transform using lookup table, we found

$$\tilde{y} = 0.05\tilde{t}$$

Substituting $\tilde{t} = t - 5$ we obtain the solution

$$y = 0.05(t - 5) = 0.05t - 0.25$$

مثال: ارتعاش اجباری

■ مطلوب است پاسخ سیستم

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = \delta(t) - \delta(t - 4), x_0 = 1 \text{ mm}, \dot{x}_0 = -1 \text{ mm/s}$$

$$(\omega_n = 2 \text{ rad/s}, \zeta = 0.5, \omega_d = \sqrt{3} \text{ rad/s})$$

■ گام اول: تبدیل معادله

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + 2\dot{x} + 4x\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} - \mathcal{L}\{\delta(t - 4)\}$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 2sX(s) - x(0) + 4X(s) = 1 - e^{-4s}$$

■ گام دوم: حل برای $X(s)$

$$X(s) = \frac{1 - e^{-4s} + (2 + s)x_0 + v_0}{(s^2 + 2s + 4)}$$

ادامه

بدلیل ضربه
اول

بدلیل ضربه
دوم

بدلیل شرایط
مرزی

ادامه: ■

$$X(s) = \frac{1 - e^{-4s} + (2 + s)x_0 + v_0}{s^2 + 2s + 4} = \frac{1}{s^2 + 2s + 4} - \frac{e^{-4s}}{s^2 + 2s + 4} + \frac{1 + s}{s^2 + 2s + 4}$$

گام ۳: تبدیل معکوس از جدول صفحه بعد: ■

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{e^{-t} \sin \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} - \frac{H(t-4)e^{-t+4} \sin \sqrt{3} (t-4)}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{1-2+4} e^{-t} \sin(\sqrt{3} t + \psi)}{\sqrt{3}}$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1-0.5 \times 2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ادامه

در نتیجه: ■

$$x(t) = \frac{e^{-t} \sin \sqrt{3} t}{\sqrt{3}} - \frac{H(t-4) e^{-t+4} \sin \sqrt{3} (t-4)}{\sqrt{3}} + e^{-t} \cos(\sqrt{3} t)$$

بدلیل ضربه
اول

بدلیل ضربه
دوم

بدلیل شرایط
مرزی

$x(t)$	$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$
$\frac{e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t}{\omega_d},$ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, 0 \leq \zeta \leq 1$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
$\frac{1}{\omega_n^2} \frac{e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)}{\omega_n \omega_d},$ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, 0 \leq \zeta \leq 1, \phi = \cos^{-1} \zeta$	$\frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
$\frac{\sqrt{\alpha^2 - 2\zeta\omega_n \alpha + \omega_n^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \psi)}{\omega_d},$ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}, 0 \leq \zeta \leq 1,$ $\phi = \tan^{-1}(\omega_d / (\alpha - \zeta \omega_n))$	$\frac{s + \alpha}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
\dot{x}	$sX(s) - x(0)$
\ddot{x}	$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$

طیف پاسخ

■ **تعریف:** نموداری که نشان دهنده تغییرات پاسخ بیشینه (بیشترین جابجائی، سرعت، شتاب، تنش یا هر کمیت دیگری) با فرکانس طبیعی ω_n (یا زمان تناوب طبیعی τ_n) سیستم یک درجه آزادی در اثر تابع نیروی معلوم را **طیف پاسخ** گویند.

■ چون پاسخ بیشینه در مقابل فرکانس طبیعی ترسیم می شود، لذا طیف پاسخ همه پاسخهای بیشینه سیستمهای یک درجه آزادی به نیروی معلوم است .

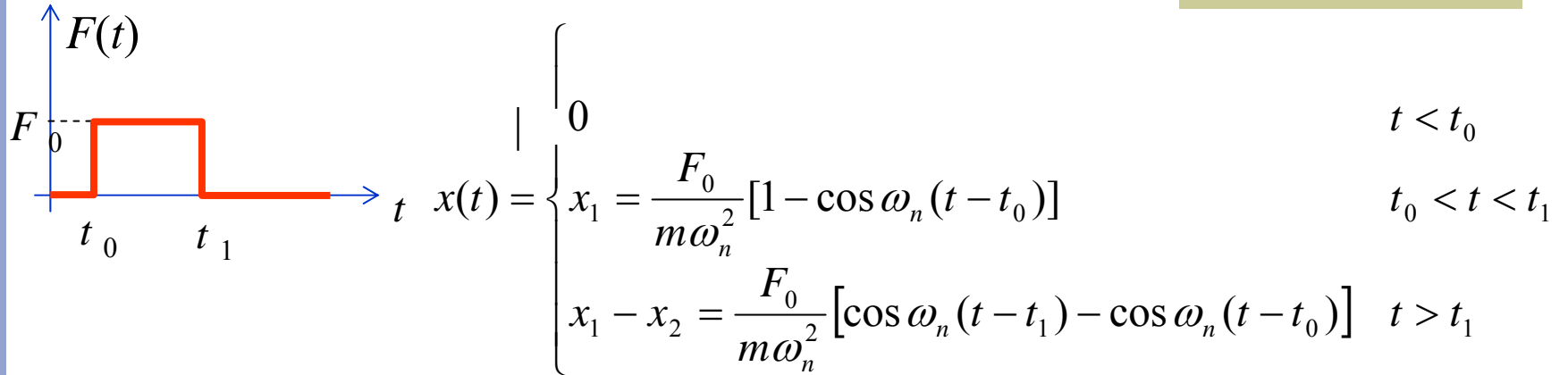
■ طیف پاسخ بطور وسیعی برای طراحی مهندسیهای زلزله استفاده می شود

■ با دانستن فرکانس طبیعی یک سیستم می توان پاسخ بیشینه را به نیروی کرد.

پیدا

معلوم

مثال: طیف پاسخ ضربه مستطیلی



برای $t_0 = 0$ ■

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n t] & 0 < t < t_1 \\ \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n (t - t_1) - \cos \omega_n t] & t > t_1 \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{k} [\omega_n \sin \omega_n t] & 0 < t < t_1 \\ \frac{F_0}{k} \omega_n [-\sin \omega_n (t - t_1) + \sin \omega_n t] & t > t_1 \end{cases}$$

اگر $t_0 > \pi/\omega_n$ ■

$$\sin \omega_n t_p = 0 \quad \omega_n t_p = \pi \quad x(t_p) = \frac{F_0}{k} [1 - \cos \omega_n t_p] = 2 \frac{F_0}{k}$$

$$-\sin \omega_n (t - t_1) + \sin \omega_n t = 0$$

در غیر اینصورت ■

$$\sin \omega_n t_p \cos \omega_n t_1 - \cos \omega_n t_p \sin \omega_n t_1 - \sin \omega_n t = 0$$

$$\sin \omega_n t_p (1 - \cos \omega_n t_1) = \cos \omega_n t_p \sin \omega_n t_1 \Rightarrow \tan \omega_n t_p = \frac{\sin \omega_n t_1}{1 - \cos \omega_n t_1}$$

$$\tan \omega_n t_p = \frac{\sin \omega_n t_1}{\cos \omega_n t_1 - 1}$$

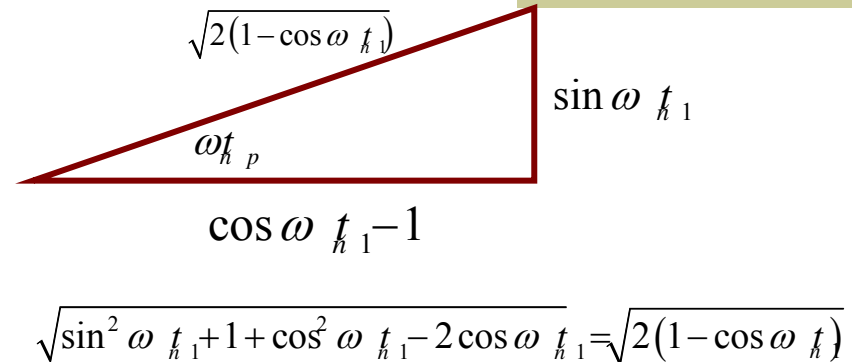
$$\sin \omega_n t_p = \frac{\sin \omega_n t_1}{\sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}}$$

$$\cos \omega_n t_p = \frac{\cos \omega_n t_1 - 1}{\sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}}$$

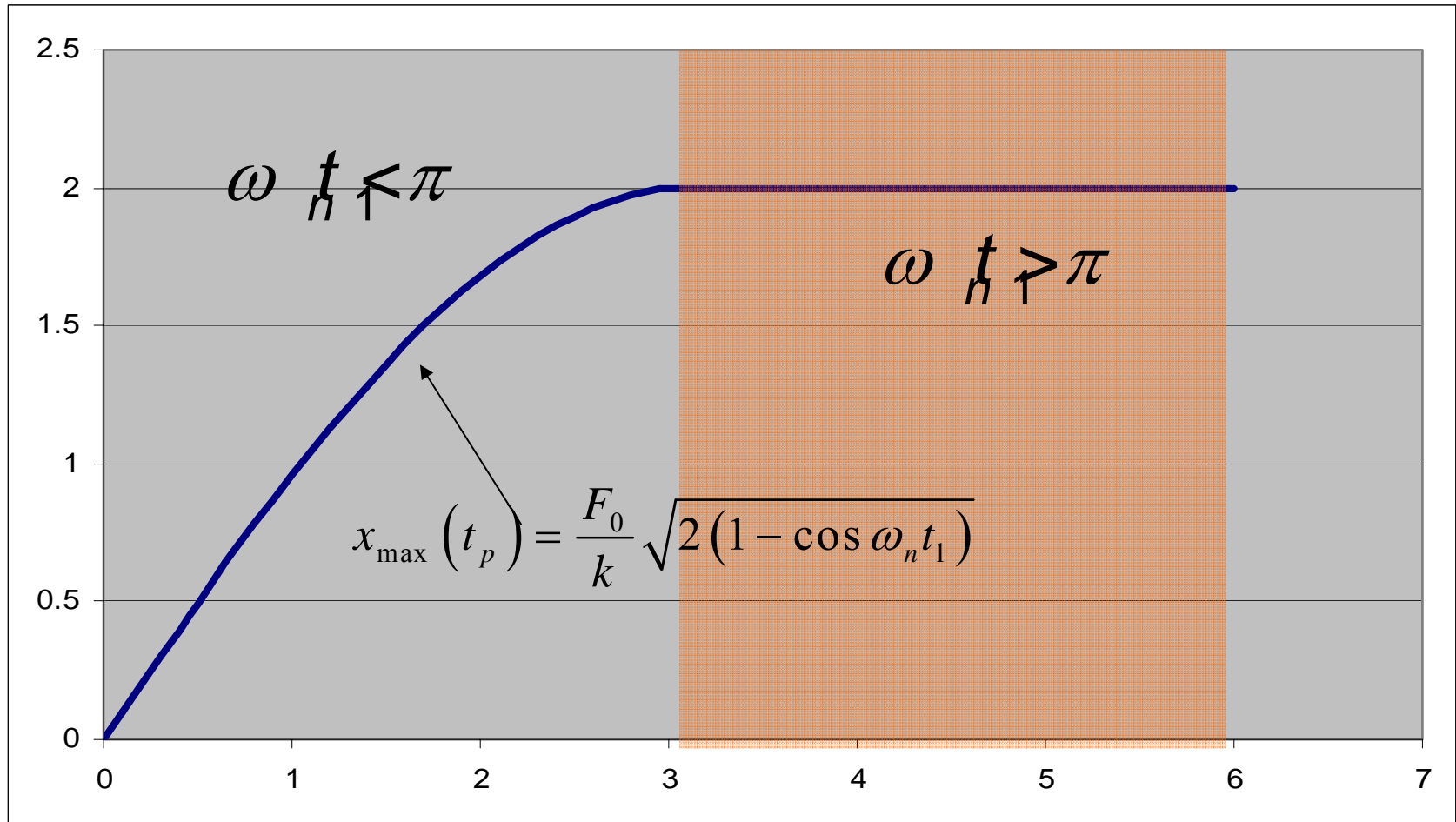
$$x_{\max}(t_p) = \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n(t_p - t_1) - \cos \omega_n t_p] = \frac{F_0}{k} [\cos \omega_n t_p \cos \omega_n t_1 + \sin \omega_n t_p \sin \omega_n t_1 - \cos \omega_n t_p]$$

$$= \frac{F_0}{k} \left[\frac{(\cos \omega_n t_1 - 1)^2}{\sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}} + \frac{\sin^2 \omega_n t_1}{\sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}} \right]$$

$$= \frac{F_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}$$



نمودار طیف پاسخ



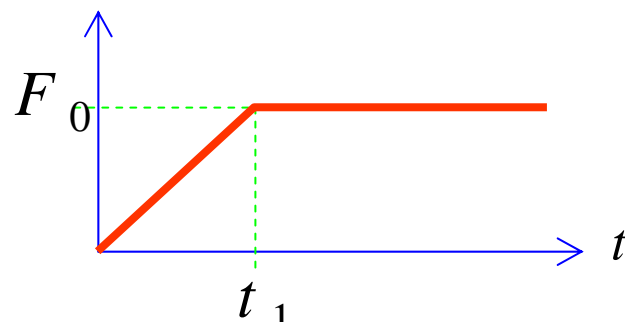
مثال:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

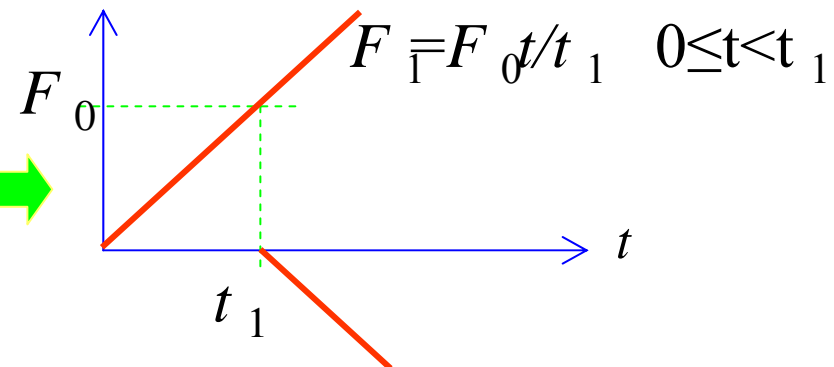
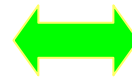
طیف پاسخ را برای:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \frac{t}{t_1} & 0 \leq t < t_1 \\ F_0 & t \geq t_1 \end{cases} \quad \text{که}$$

$F(t)$



زمان مشخصه ورودی



$$F_2 = H(t-t_1) F_0 (1-t/t_1) \quad t > t_1$$

پاسخ به بارهای F_1 و F_2 :

$$x_1(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t \frac{F_0\tau}{t_1} \sin \omega_n(t-\tau) d\tau = \frac{F_0}{k} \left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin \omega_n t_1}{\omega_n t_1} \right) \quad 0 < t < t_1$$

$$x_2(t) = -\frac{F_0}{k} \left(\frac{t-t_1}{t_1} - \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n t_1} \right) \quad t \geq t_1$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{F_0}{k} \left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin \omega_n t_1}{\omega_n t_1} \right) - \frac{F_0}{k} \left(\frac{t-t_1}{t_1} - \frac{\sin \omega_n(t-t_1)}{\omega_n t_1} \right) H(t-t_1)$$

پیدا کردن مقدار بیشینه پاسخ

■ برای پیدا کردن پاسخ بیشینه لازم است مشتق پاسخ را معادل صفر قرار داد.

■ برای هر دو مورد بررسی انجام می شود:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{F_0}{kt_1}(1 - \cos \omega_n t) = 0 \Rightarrow \cos \omega_n t = 1 \quad t = \frac{2n\pi}{\omega_n} \quad t < t_1 \quad \blacksquare$$

?

$$x_{1_{\max}}(t_p) = \frac{F_0}{k} \quad \blacksquare \quad \text{در صورتی که } t = n\tau_n \text{ باشد،}$$

$$t > t_1 \quad \blacksquare$$

$$\dot{x}(t) = \frac{F_0}{t_1 k} \left(-\cos \omega_n t + \cos \omega_n (t - t_1) \right) = 0$$

پیدا کردن مقدار بیشینه پاسخ

در نتیجه

$$-\cos(\omega_n t_p) + \cos(\omega_n t_p)\cos(\omega_n t_1) + \sin(\omega_n t_p)\sin(\omega_n t_1) = 0$$

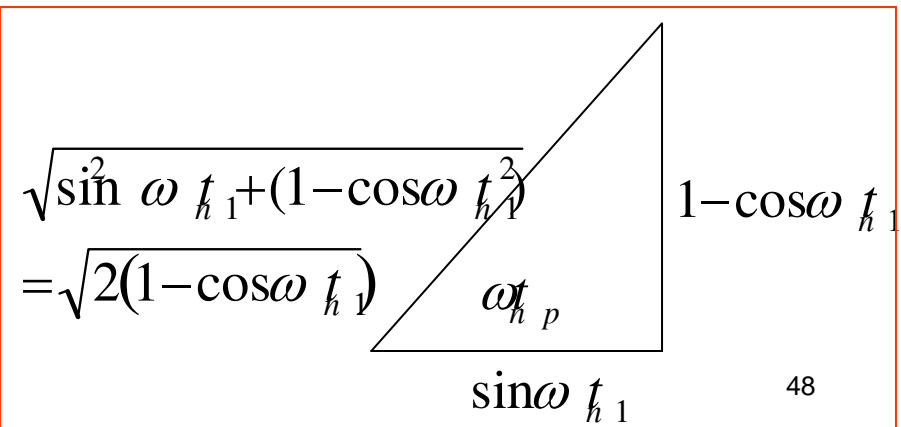
$$\cos(\omega_n t_p)[1 - \cos(\omega_n t_1)] = \sin(\omega_n t_p)\sin(\omega_n t_1)$$

$$\tan(\omega_n t_p) = \frac{[1 - \cos(\omega_n t_1)]}{\sin(\omega_n t_1)}$$

$$\sin(\omega_n t_p) = -\frac{1 - \cos(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1 - \cos(\omega_n t_1))}}$$

$$\cos(\omega_n t_p) = -\frac{\sin(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1 - \cos(\omega_n t_1))}}$$

چون $\omega t_p > \pi$



پیدا کردن مقدار بیشینه پاسخ

$$\sin(\omega_n t_p) = -\frac{1 - \cos(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1 - \cos(\omega_n t_1))}}$$

$$\cos(\omega_n t_p) = -\frac{\sin(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1 - \cos(\omega_n t_1))}}$$

با قرار دادن این مقادیر در پاسخ:

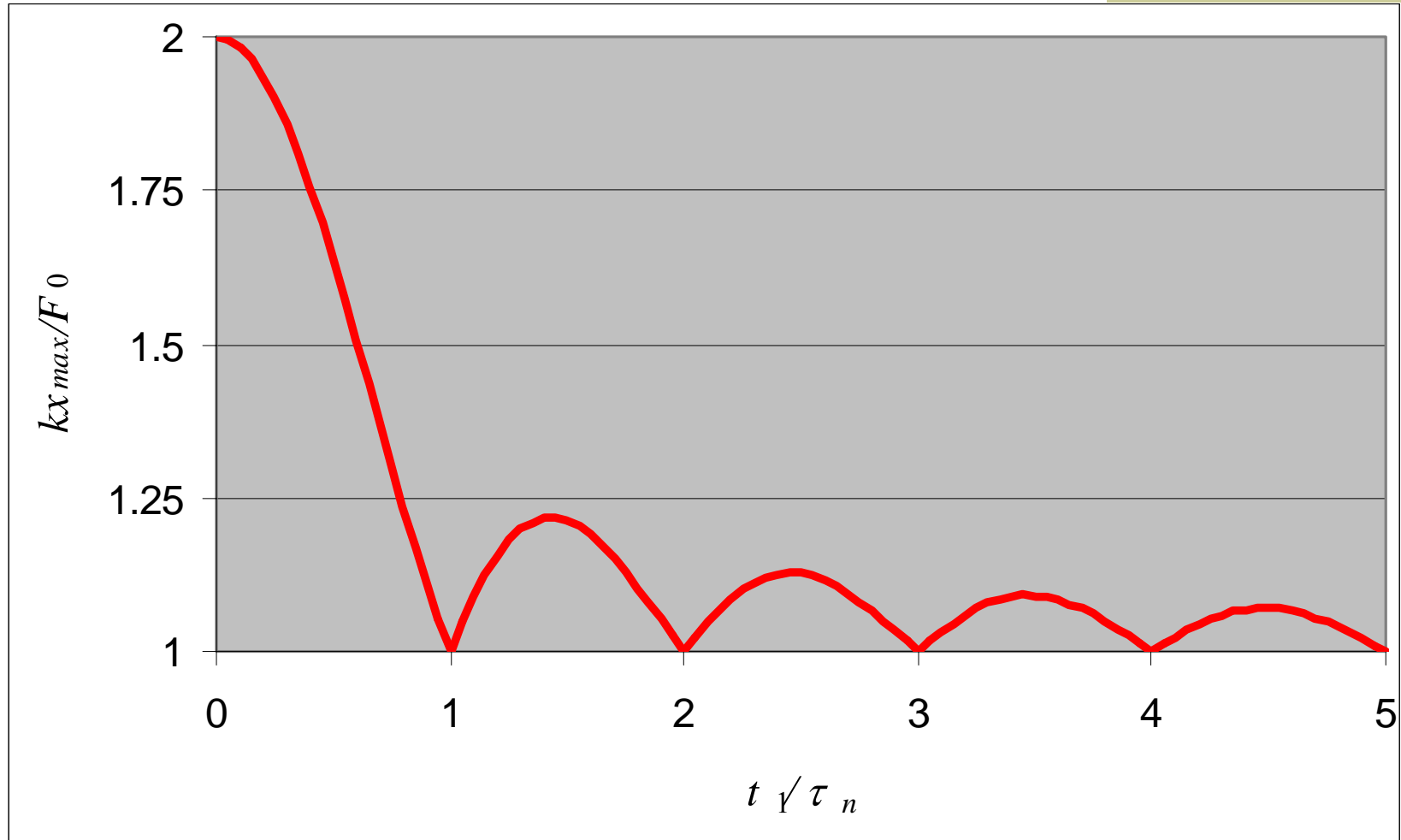
$$\begin{aligned} x_{\max} = x(t_p) &= \frac{F_0}{k\omega_n t_1} (\omega_n t_1 - \sin \omega_n t_p + \sin \omega_n (t_p - t_1)) \\ &= \frac{F_0}{k\omega_n t_1} (\omega_n t_1 - \sin \omega_n t_p (1 - \cos \omega_n t_1) - \sin \omega_n t_1 \cos \omega_n t_p) \\ &= \frac{F_0}{k\omega_n t_1} \left(\omega_n t_1 - \left(-\frac{1 - \cos(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1 - \cos(\omega_n t_1))}} \right) (1 - \cos \omega_n t_1) - \sin \omega_n t_1 \left(-\frac{\sin(\omega_n t_1)}{\sqrt{2(1 - \cos(\omega_n t_1))}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$x_{\max} = \frac{F_0}{k\omega_n t_1} (\omega_n t_1 + \sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)})$$

$$\frac{k x_{\max}}{F_0} = 1 + \frac{1}{\omega_n t_1} \sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)}$$

ترسیم این مقدار در مقابل $\omega_n t_1 = 2\pi t / \tau_n$

طیف پاسخ



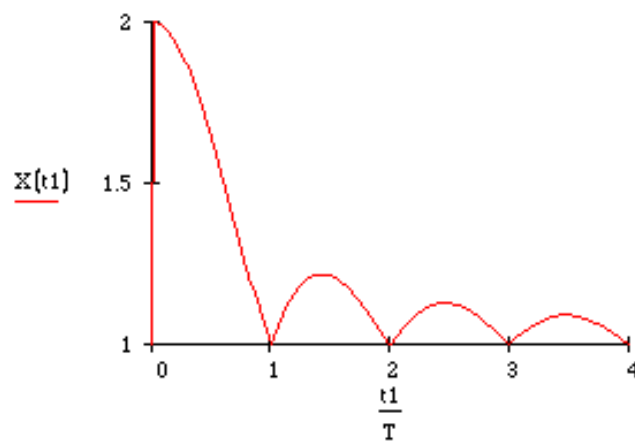
Comparison between impulse and harmonic inputs

Impulse Input

Max amplitude versus normalized pulse “frequency”

$$\omega n := 2 \cdot \pi \quad T := \frac{\omega n}{2 \cdot \pi}$$

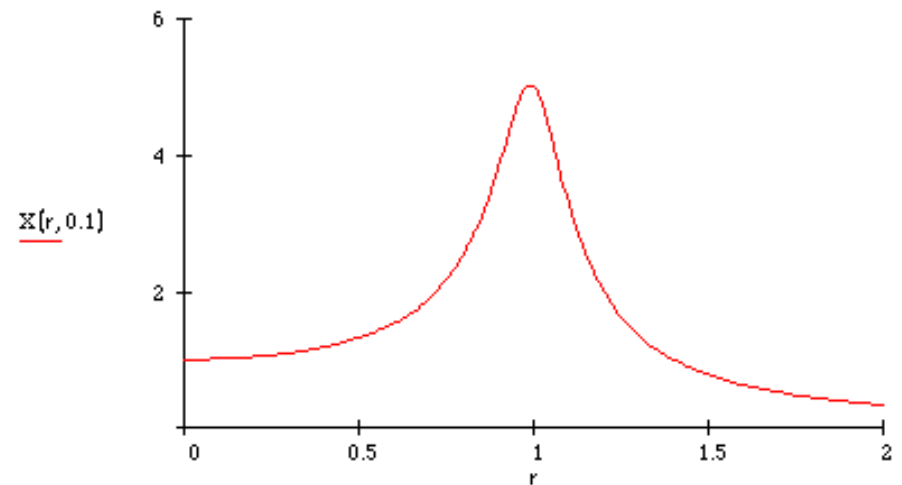
$$X(t1) := 1 + \frac{1}{\omega n \cdot t1} \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(\omega n \cdot t1))}$$



Harmonic Input

Max amplitude versus normalized driving frequency

$$X(r, \zeta) := \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot r)^2}} \quad r := 0, 0.01 \dots 2$$



روشهای عددی

■ گاهی نیروی اعمالی یا معادله دیفرانسیل بگونه ای است که روشهای تحلیلی گفته شده قادر به حل معادله نیستند.

■ در این حال از روشهای عددی استفاده می شود.

■ حل عددی معادلات دیفرانسیلی

■ روش اویلر

■ روش هیون

■ روشهای رانج کوتاه

■ روش مناسب تر برای معادلات مرتبه

کاهش رانج کوتاه استوار است

روش اویلر

■ در این روش مشتق اول در زمان t_i به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_i = \dot{x}_i = g(x_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{h}$$

$$x_{i+1} = x_i + h g(x_i)$$

■ بنابراین اگر x_0 (شرط اولیه) وجود داشته باشد، x_1 و... محاسبه می شود.

■ این روش برای معادلات مرتبه اول با h کوچک مناسب است:

مثال

■ معادله مرتبه اول:

$$\dot{x} + \dot{x} = 0 \quad x_0 = 1$$

$$\dot{x} = -x^2 \quad g(x) = -x^2 \quad x_0 = 1$$

$$x_{i+1} = x_i - hx_i^2$$

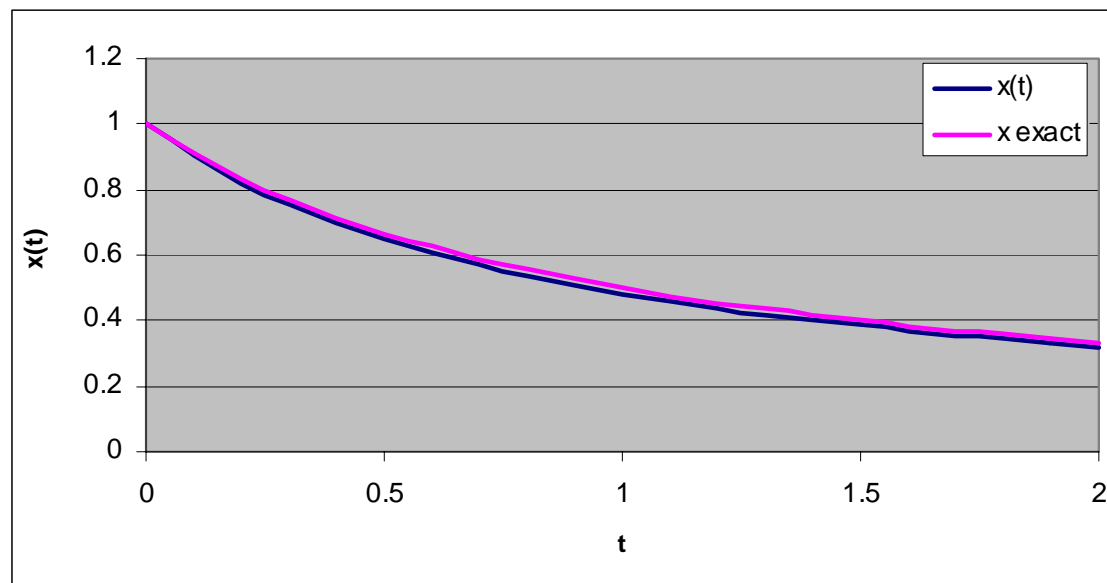
■ با انتخاب $h=0.1$:

$$x_{i+1} = x_i - 0.1x_i^2$$

$$x_1 = x_0 - 0.1x_0^2 = 1 - 0.1 = 0.9 \quad t_1 = 0.1$$

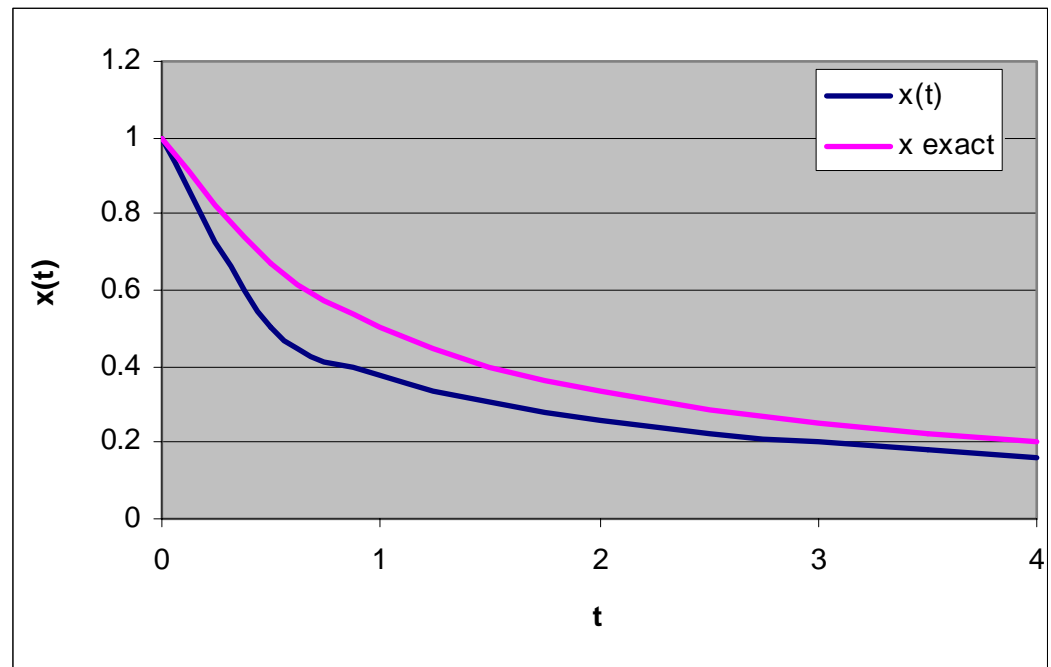
$$x_2 = x_1 - 0.1x_1^2 = 0.9 - 0.1 \times 0.81 = 0.819 \quad t_2 = 0.2$$

t	x(t)	x exact
0	1	1
0.1	0.9	0.909091
0.2	0.819	0.833333
0.3	0.751924	0.769231
0.4	0.695385	0.714286
0.5	0.647029	0.666667
0.6	0.605164	0.625
0.7	0.568542	0.588235
0.8	0.536218	0.555556
0.9	0.507465	0.526316
1	0.481713	0.5
1.1	0.458508	0.47619
1.2	0.437485	0.454545
1.3	0.418346	0.434783
1.4	0.400845	0.416667
1.5	0.384777	0.4
1.6	0.369972	0.384615
1.7	0.356284	0.37037
1.8	0.34359	0.357143
1.9	0.331784	0.344828
2	0.320776	0.333333



حل $h=0.5$

t	x(t)	x exact
0	1	1
0.5	0.5	0.666667
1	0.375	0.5
1.5	0.304688	0.4
2	0.25827	0.333333
2.5	0.224918	0.285714
3	0.199624	0.25
3.5	0.179699	0.222222
4	0.163553	0.2



روش اولر برای معادلات مرتبه ۲

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad x(0) = x_0 \quad \dot{x}(0) = v_0$$

$$y(t) = \dot{x}(t) \quad \text{فرض کنید} \quad \blacksquare$$

$$\dot{y} = \frac{-cy - kx + f(t)}{m} = g(t) \quad y(0) = v_0$$

$$\dot{x} = y \quad x(0) = x_0$$

حل عددی: \blacksquare

$$y_{i+1} = y_i + hg(t_i) \quad y(0) = v_0$$

$$x_{i+1} = x_i + hy_{i+1} \quad x(0) = x_0$$

مثال حل عددی معادله غیر خطی آونگ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

$$\dot{y} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad y_0 = \omega_0$$

$$\dot{\theta} = y \quad \theta_0$$

$$y_{i+1} = y_i - h g \sin \theta_i / l$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + h y_{i+1}$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\omega_0 = 0$$

مثال حل عددی معادله غیر خطی آونگ

$$y_{i+1} = y_i - h g \sin \theta_i / l$$
$$\theta_{i+1} = \theta_i + h y_i$$

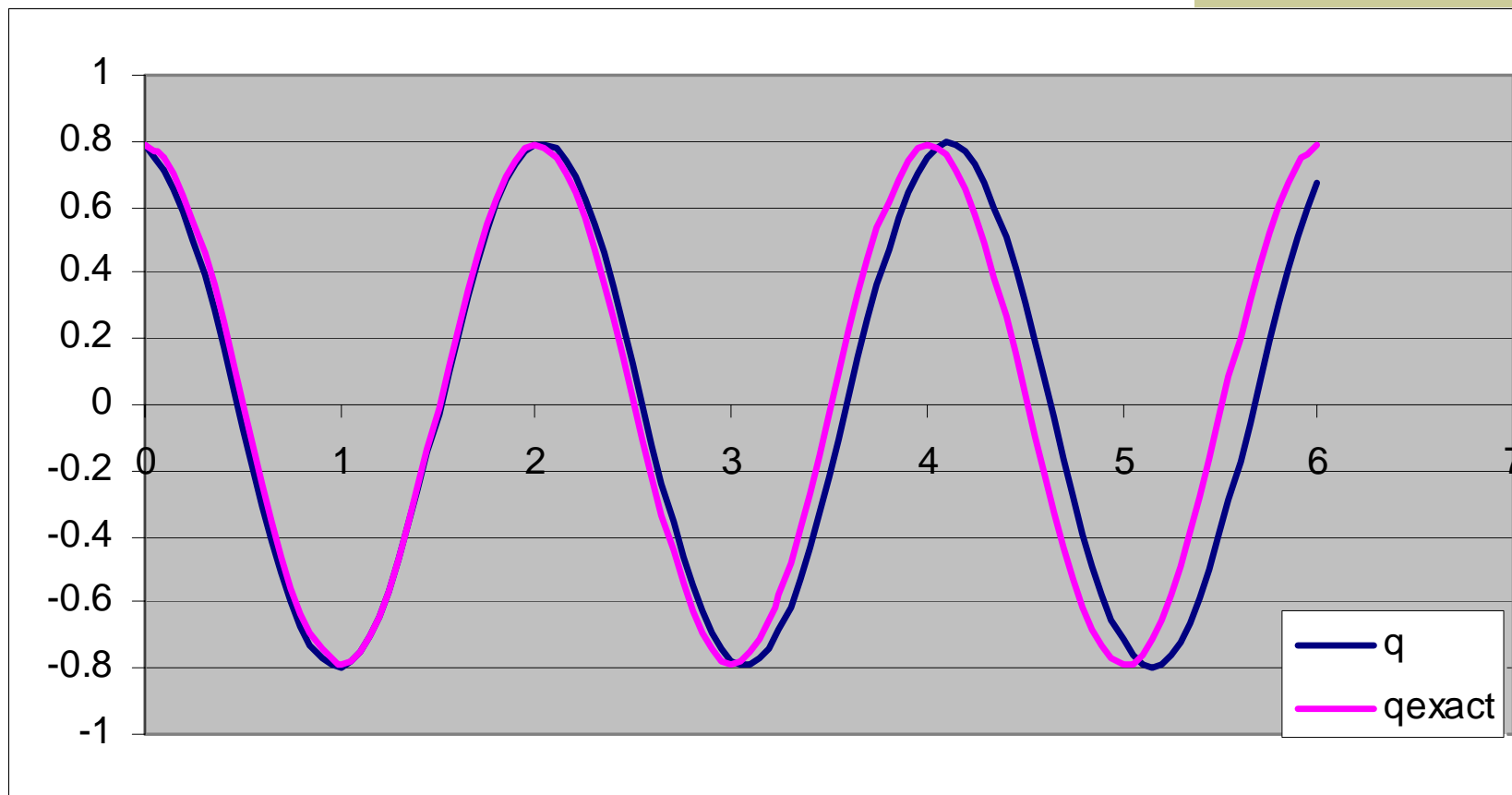
$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} \quad \omega_0 = 0$$

$$g=9.81 \quad , l=1 \quad , h=0.1 \quad \blacksquare$$

$$y_1 = y_0 - h g \sin \theta_0 / l = 0 - 0.1 \times 9.81 \sin(\pi/4) = -0.981 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta_1 = \theta_0 + h y_0 = (\pi/4) - 0.1 \times 0.981 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نتایج



روش رانج کوتا

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$$

$$k_1 = \Delta h^2 [f(t, x, \dot{x})]$$

$$k_2 = \left(\frac{\Delta h^2}{2} \right) \left[f \left(t + \frac{1}{2} \Delta h, x + \frac{\Delta h}{2} \dot{x} + \frac{1}{4} k_1, \dot{x} + \frac{1}{\Delta h} k_1 \right) \right]$$

$$k_3 = \left(\frac{\Delta h^2}{2} \right) \left[f \left(t + \frac{1}{2} \Delta h, x + \frac{\Delta h}{2} \dot{x} + \frac{1}{4} k_2, \dot{x} + \frac{1}{\Delta h} k_2 \right) \right]$$

$$k_4 = \left(\frac{\Delta h^2}{2} \right) \left[f \left(t + \Delta h, x + \Delta h \dot{x} + k_3, \dot{x} + \frac{2}{\Delta h} k_3 \right) \right]$$

$$x(t + \Delta h) = x(t) + \Delta h \dot{x}(t) + \frac{1}{3} [k_1 + k_2 + k_3]$$

$$\dot{x}(t + \Delta h) = \dot{x}(t) + \frac{1}{3\Delta h} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$



برنامه excel ■

پایان

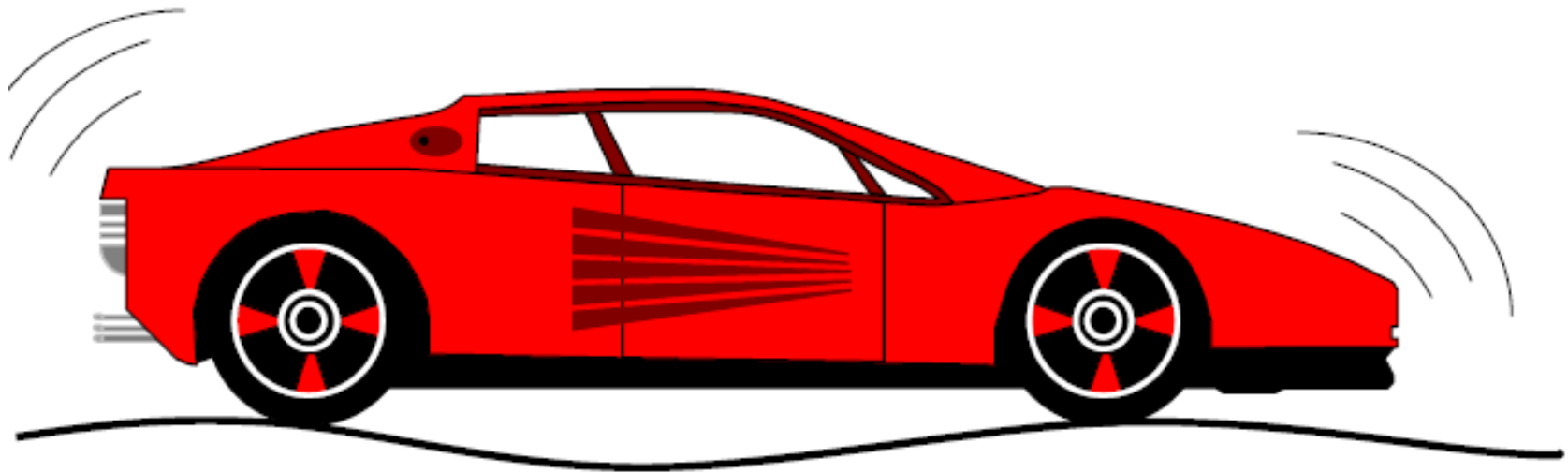
ارتعاشات مکانیکی ۱۰ ارتعاشات دو درجه آزادی

سیدیوسف احمدی بروغنی

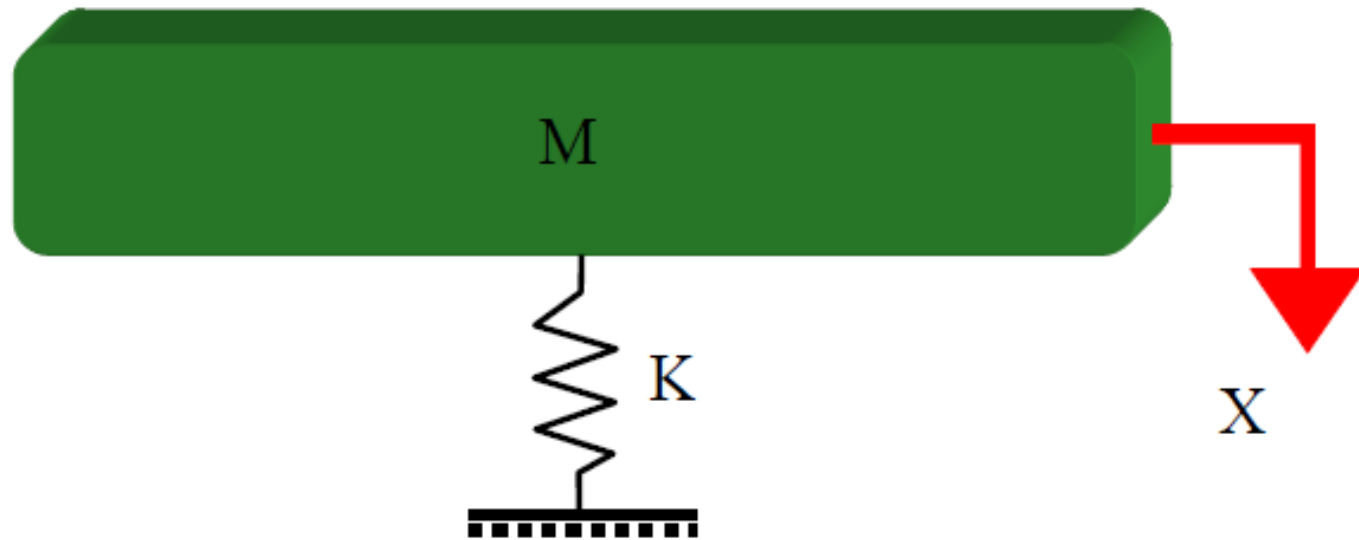
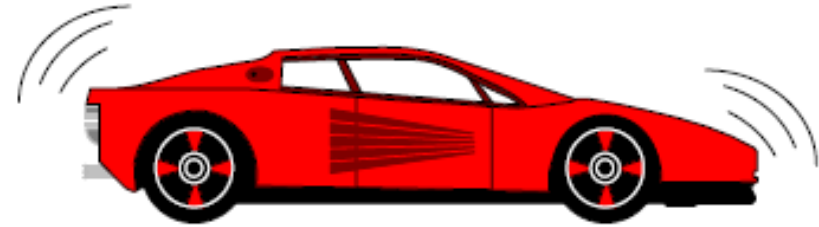
استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

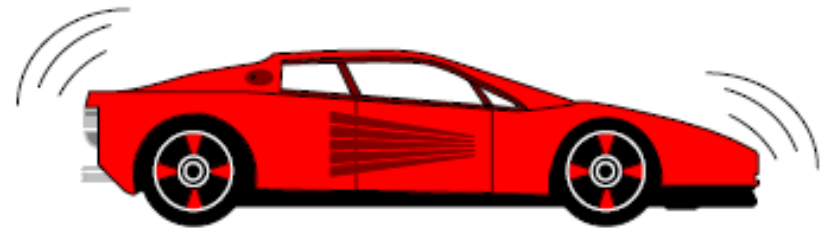
Multiple Degree of Freedom Systems



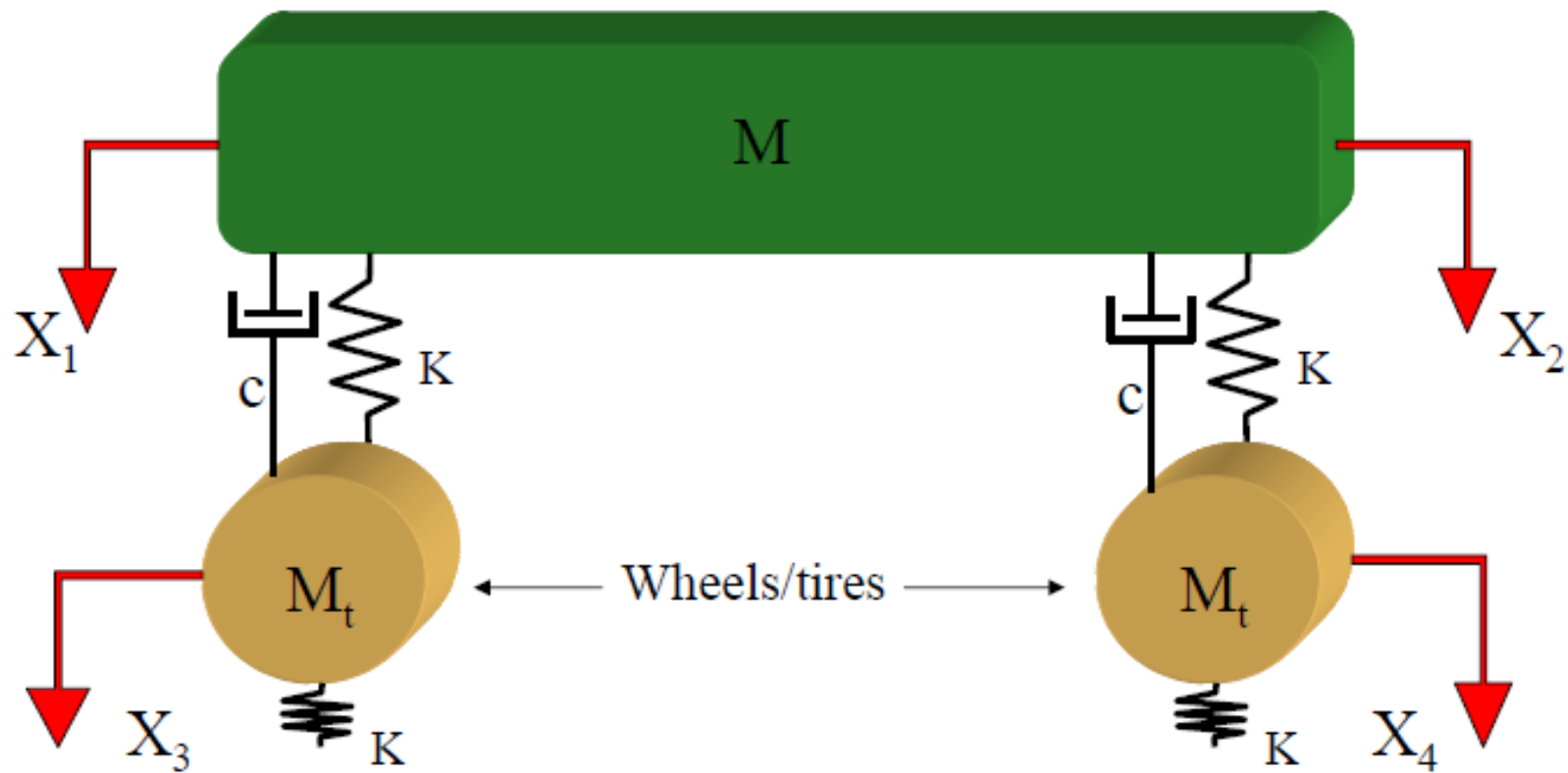
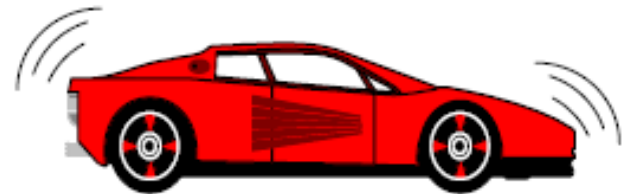
Vibrating Systems: Single Degree of Freedom (SDOF)



Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)

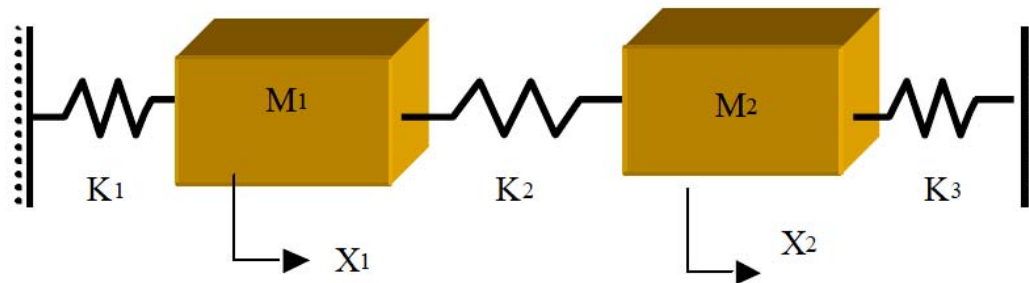


Vibrating Systems: Multi Degree of Freedom (MDOF)



سیستم‌های چند درجه آزادی MDOF

- یک سیستم چند درجه آزادی، سیستمی است که نیاز به بیش از یک مختصات مستقل برای توصیف حرکت دارد.
- وقتی مختصات مستقل از یکدیگر باشند، آنها را مختصات تعمیم یافته *generalized coordinates* گویند.
- تعداد مختصات تعمیم یافته معادل تعداد درجات آزادی سیستم است.



سیستم‌های چند درجه آزادی MDOF

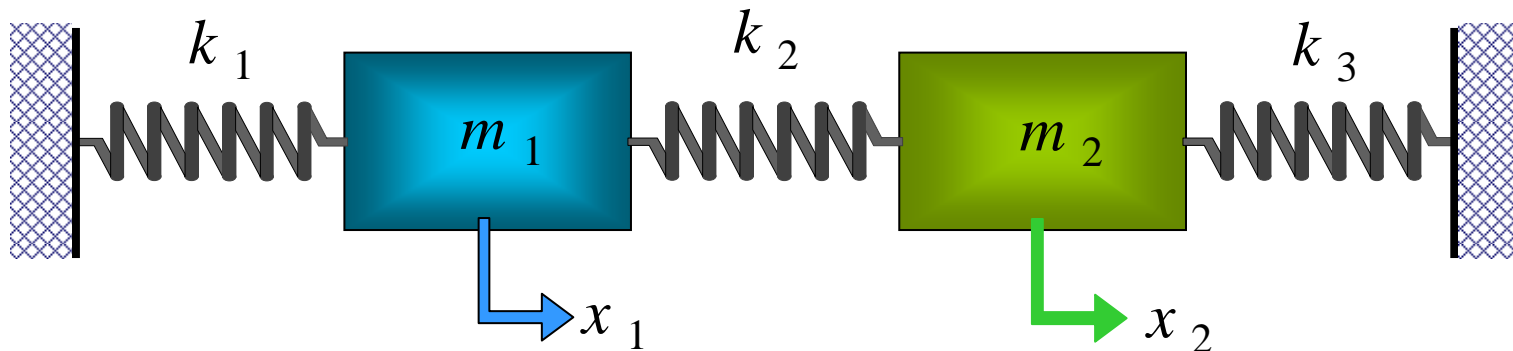
- یک سیستم چند درجه آزادی که دارای N درجه آزادی است، دارای N فرکانس طبیعی است.
- برای هر فرکانس طبیعی یک حالت طبیعی ارتعاش *Natural state of vibration* با یک ترکیبی از تغییر مکان که نرمال مد نامیده می شود، وجود دارد.
- اصطلاحات ریاضی متناظر با این کمیتها عبارتند از:
 - مقدارهای ویژه *Eigenvalues* (فرکانسهای طبیعی)
 - بردارهای ویژه *Eigenvectors* (شکل مد یا نرمال مد)

ار تعاش آزاد سیستم دو درجه آزادی

■ سیستم دو درجه آزادی زیر را در نظر بگیرید:

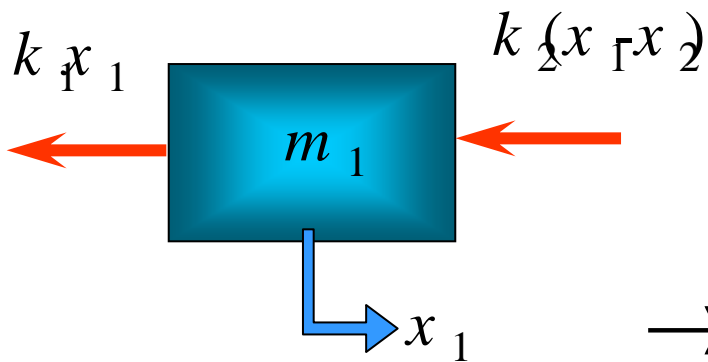
■ الف) مطلوب است معادله حرکت:

■ ب) پاسخ سیستم به شرایط اولیه:



معادله حرکت برای جرم ۱

■ برای جرم اول با در نظر گرفتن نامیرائی



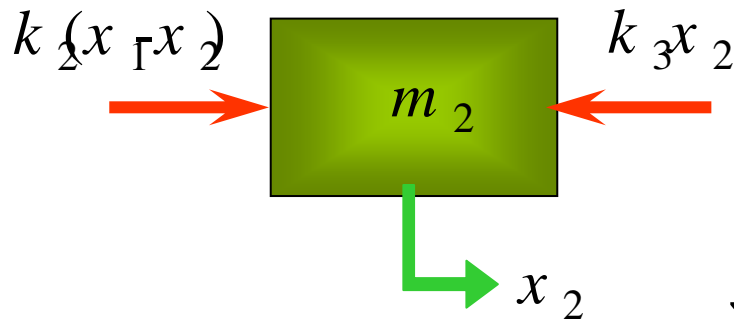
$$\rightarrow \sum_{+} F_x = m_1 \ddot{x}_1$$

$$-k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) = m_1 \ddot{x}_1$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

ت برای ی جرم

■ برای جرم اول با در نظر گرفتن نامیرائی



$$\rightarrow \sum F_x = m_2 \ddot{x}_2$$

$$-k_3x_2 + k_2(x_1 - x_2) = m_2 \ddot{x}_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0$$

معادلات حرکت

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0$$

■ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی:

- مرتبه دوم
- همگن
- ضرایب ثابت
- وابسته به هم

معادله حرکت

■ شکل ماتریسی

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$

ماتریس جرم $[M]$ (ماتریس جرم)
بردار شتاب $\{\ddot{x}\}$ (بردار شتاب)
ماتریس سختی $[K]$ (ماتریس سختی)
بردار جابجائی $\{x\}$ (بردار جابجائی)
بردار نیرو $\{0\}$ (بردار نیرو)

پاسخ سیستم

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ حلی به شکل زیر فرض می شود:

$$\{x(t)\} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sin(\omega t + \phi)$$

■ در نتیجه

$$\{\ddot{x}\} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sin(\omega t + \phi)$$

پاسخ سیستم

■ جایگزینی در معادله حرکت:

$$\left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sin(\omega t + \phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ در نتیجه دستگاه معادلات خطی همگن زیر باید حل شود:

$$\left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ حل این دستگاه در صورتی جواب غیر بدیهی دارد که دترمینان ضرایب صفر باشد

معادله مشخصه دستگاه معادلات

■ با مساوی صفر قراردادن ماتریس ضرایب، معادله مشخصه دستگاه معادله دیفرانسیل که یک چندجمله ای مرتبه ۴ برای ω است.

$$\det \left\{ -\omega \ddagger \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \ddagger \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \right\} = \det \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2 = 0$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - [m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)]\omega^2 - k_2^2 + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) = 0$$

■ حل این معادله برای ω فرکانسهای طبیعی را حاصل می کند.

فرکانسهای طبیعی

$$m_1 m_2 \omega^4 - [m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)]\omega^2 - k_2^2 + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) = 0$$

■ در نتیجه:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{[m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)] \pm \sqrt{[m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)]^2 - 4m_1 m_2 [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2]}}{2m_1 m_2}$$

■ که ω_1 و ω_2 فرکانسهای طبیعی هستند.

شکل مدها

- با قرار دادن در دستگاه معادلات منطبق بر هر فرکانس طبیعی یک بردار دامنه بدست می آید **شکل مد** نام دارد.

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \underline{\omega_1^2} m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \underline{\omega_1^2} m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

شکل مدها

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \underline{\omega_2^2} m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \underline{\omega_2^2} m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

شکل کلی پاسخ

■ ترکیب خطی حاصلضرب شکل مدها در تابع سینوسی فرضی پاسخ سیستم می باشد.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + B \begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

■ از شرایط اولیه می توان ثابتهای A ، B ، ϕ_1 و ϕ_2 را بدست آورد.

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} \quad \left| \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{pmatrix} \right.$$

اعمال شرایط اولیه

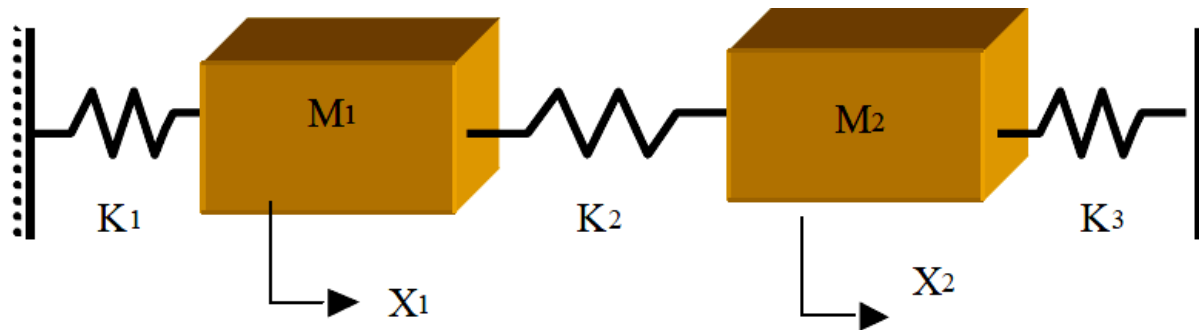
$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix} \sin(\phi_1) + B \begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix} \sin(\phi_2)$$

$$\begin{pmatrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{pmatrix} = A \omega_1 \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix} \cos(\phi_1) + B \omega_2 \begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix} \cos(\phi_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^1 & X_1^2 & 0 & 0 \\ X_2^1 & X_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 X_1^1 & \omega_2 X_1^2 \\ 0 & 0 & \omega_1 X_2^1 & \omega_2 X_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \sin \phi_1 \\ B \sin \phi_2 \\ A \cos \phi_1 \\ B \cos \phi_2 \end{pmatrix}$$

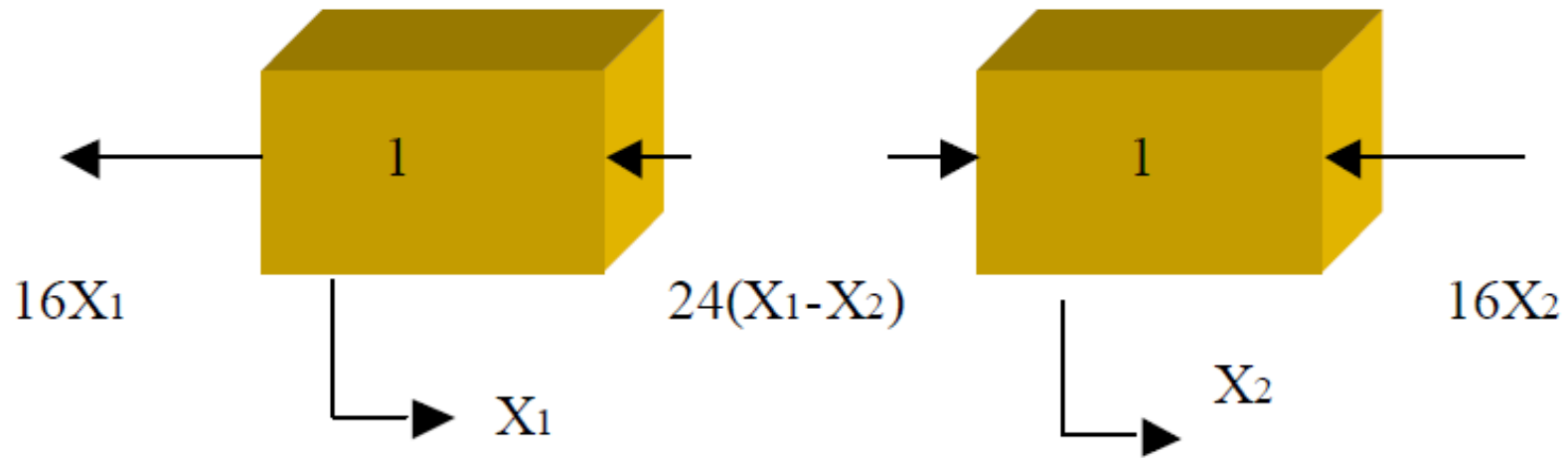
مثال: سیستم دو درجه آزادی (ارتعاش آزاد-نامیرا)

■ فرکانسهای طبیعی و شکل مدهای سیستم دو درجه آزادی زیر را بدست آورید



$$k_1 = 16 \text{ N/m} \quad k_2 = 24 \text{ N/m} \quad k_3 = 16 \text{ N/m} \quad m_1 = 1 \text{ kg} \quad m_2 = 1 \text{ kg}$$

حل: دیاگرام آزاد جسم و معادله حرکت



■ برای جسم ۱:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_2(x_1 - x_2) - k_1 x_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 + 40x_1 - 24x_2 = 0$$

■ برای جسم ۲:

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 - 24x_1 + 40x_2 = 0$$

حل: معادله حرکت و حل معادله

■ این دو معادله حرکت به هم وابسته هستند و در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 40 & -24 \\ -24 & 40 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ حلی بصورت زیر فرض می شود:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} (-\omega^2 \sin(\omega t + \phi))$$

حل: حل معادله

■ با قرار دادن در معادله حرکت

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} (-\omega^2) + \begin{pmatrix} 40 & -24 \\ -24 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \right\} \sin(\omega t + \phi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ جواب بدیهی؟ $\sin \omega t = 0$ لذا:

$$\left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & -24 \\ -24 & 40 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ مسئله مقدار ویژه: $([A] - \lambda[I])\{X\} = \{0\}$

حل: مسئله مقدار ویژه

■ در نتیجه

$$\begin{pmatrix} 40 - \omega^2 & -24 \\ -24 & 40 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ حل دستگاه همگن: جواب غیر بدیهی اگر $\det([A] - \lambda[I]) = 0$

$$\begin{vmatrix} 40 - \omega^2 & -24 \\ -24 & 40 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(40 - \omega^2)^2 - 24^2 = (40 - \omega^2 + 24)(40 - \omega^2 - 24) = 0$$

حل: بدست آوردن مقادیرهای ویژه

■ لذا مقادیر ویژه عبارتند از:

$$(64 - \omega^2)(16 - \omega^2) = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = 16, \quad \omega_2^2 = 64$$

$$\omega_1 = \pm 4, \quad \omega_2 = \pm 8$$

مقادیر ویژه

■ در نتیجه فرکانسهای طبیعی سیستم:

$$\omega_1 = 4 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 8 \text{ rad/s}$$

$$\begin{pmatrix} 40 - \omega^2 & -24 \\ -24 & 40 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ برای بدست آوردن بردار

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

حل: محاسبه بردارهای ویژه (شکل مد)

■ حال دو مقدار ویژه را در دستگاه قرار داده و منطبق بر هر کدام یک

$$\begin{pmatrix} 40 - \omega^2 & -24 \\ -24 & 40 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{بردار ویژه محاسبه می شود:}$$

$$\omega_1^2 = 16 \quad \text{الف} \quad \blacksquare$$

$$\begin{vmatrix} 40 - 16 & -24 \\ -24 & 40 - 16 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 24 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = X_2 = \alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha \xrightarrow{\text{نرمالیزه}} \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

حل: محاسبه بردارهای ویژه (شکل مد)

$$\omega_2^2 = 64 \quad (\text{ب} \quad \blacksquare)$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 40 - 64 & -24 \\ -24 & 40 - 64 \end{pmatrix} \right\| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -24 & -24 \\ -24 & -24 \end{pmatrix} \right\| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_1 = -X_2 = \beta \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta$$

نرمالیزه
→

$$\begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

حل: پاسخ

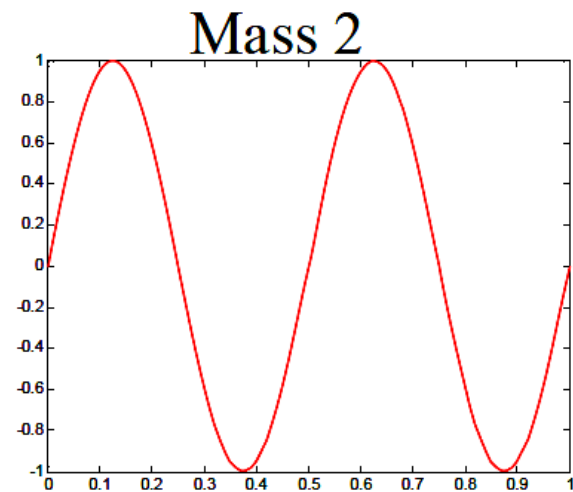
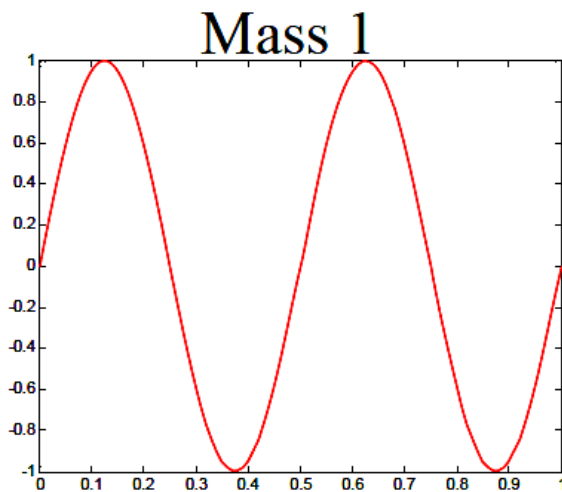
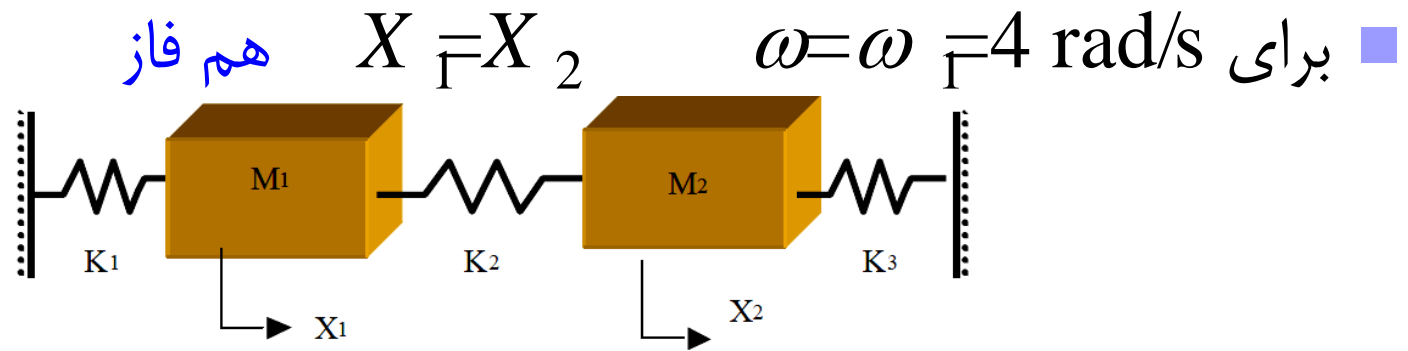
■ در نتیجه پاسخ سیستم

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + B \begin{pmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(4t + \phi_1) + B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(8t + \phi_2)$$

■ که با داشتن شرایط اولیه می توان پاسخ را بدست آورد؟؟؟

حل: تعبیر فیزیکی بردارهای ویژه

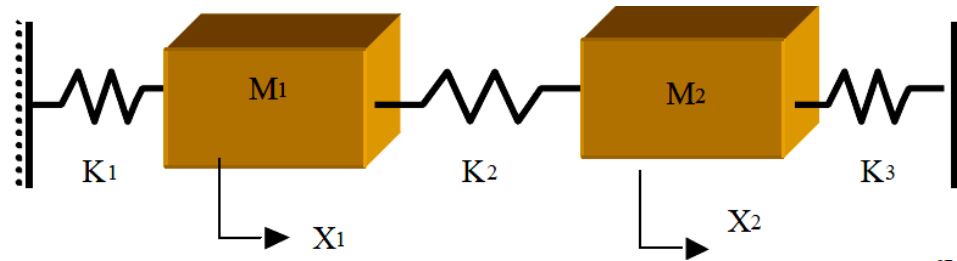


حل: تعبیر فیزیکی بردارهای ویژه

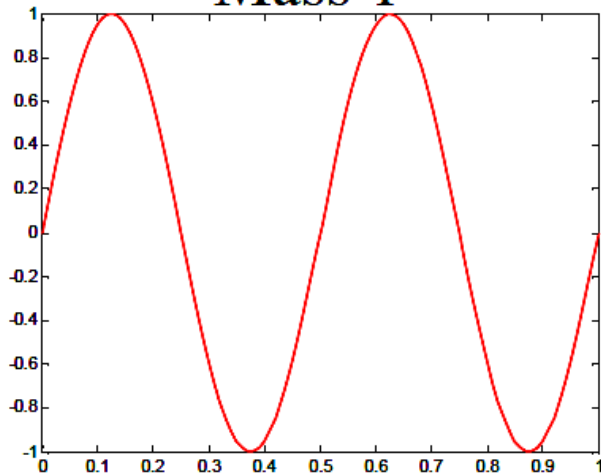
غیرهم فاز

$$X_1 = -X_2$$

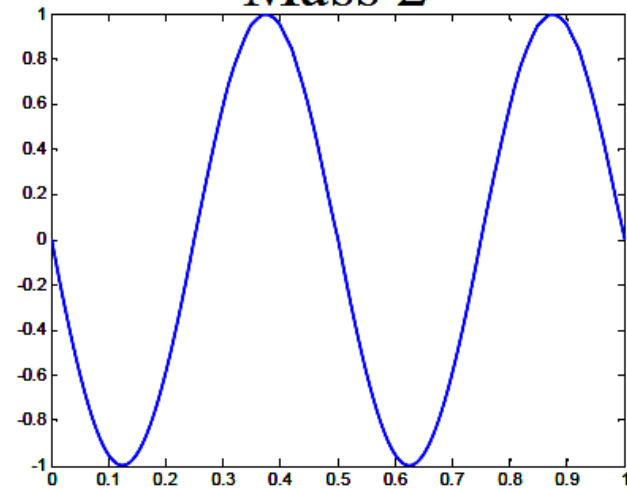
■ برای $\omega = \omega_2 = 8 \text{ rad/s}$



Mass 1



mass 2



حل: اعمال شرایط اولیه

■ شرایط اولیه

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(4t + \phi_1) + B \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(8t + \phi_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \sin \phi_1 \\ B \sin \phi_2 \\ A \cos \phi_1 \\ B \cos \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \sin \phi_1 \\ B \sin \phi_2 \\ A \cos \phi_1 \\ B \cos \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \sin \phi_1 &= 1.5, & B \sin \phi_2 &= 0.5 \\ A \cos \phi_1 &= 0, & B \cos \phi_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad A = 1.5, \quad B = 0.5$$

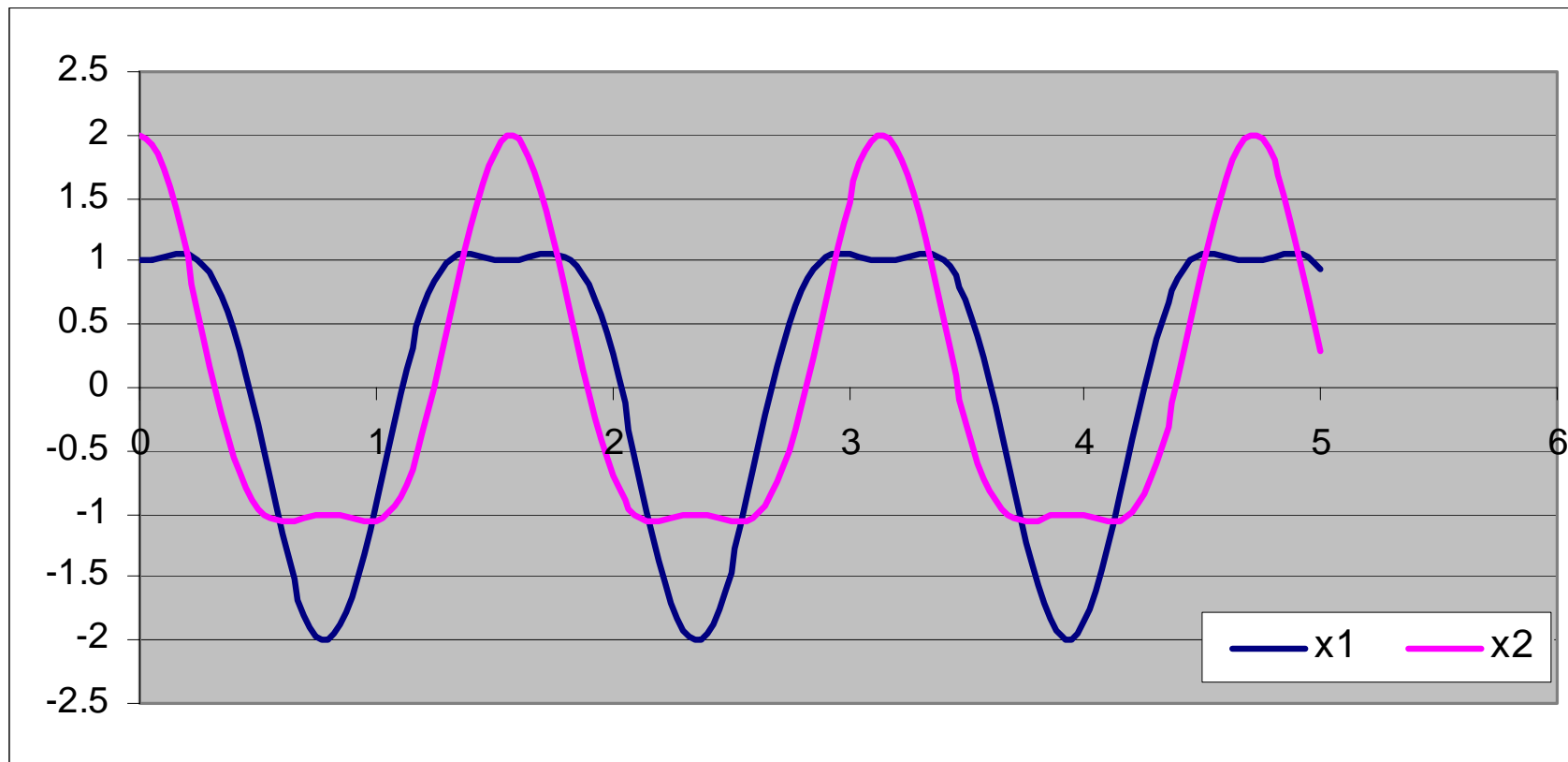
پاسخ

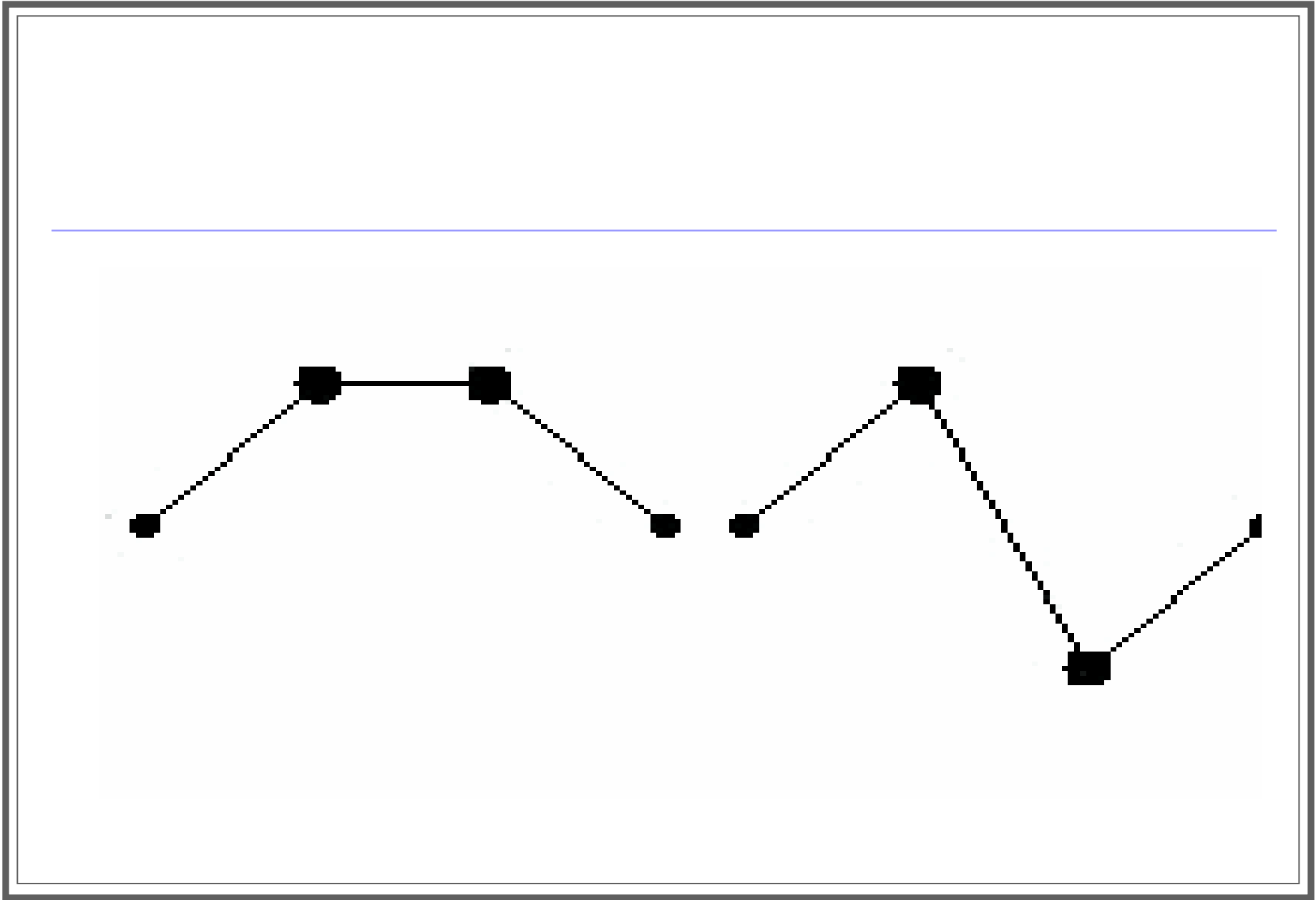
■ با قرار دادن مقادیر ثابت:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1.5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(4t + \pi/2) + 0.5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(8t + \pi/2)$$

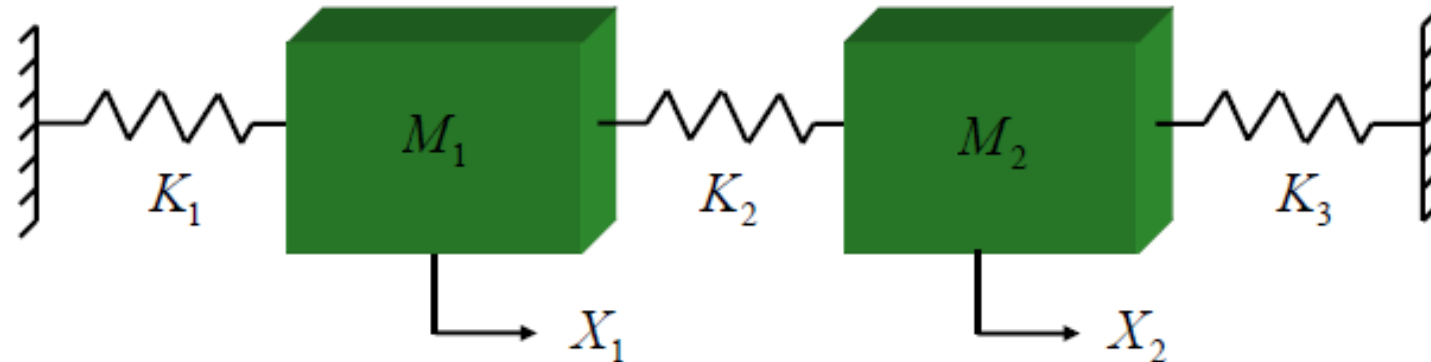
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} \cos(4t) + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \cos(8t)$$

نمودار پاسخ





2 DOF Free Vibration



Given:

$$x_1(0) = 1$$

$$x_2(0) = 2$$

$$\dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0$$

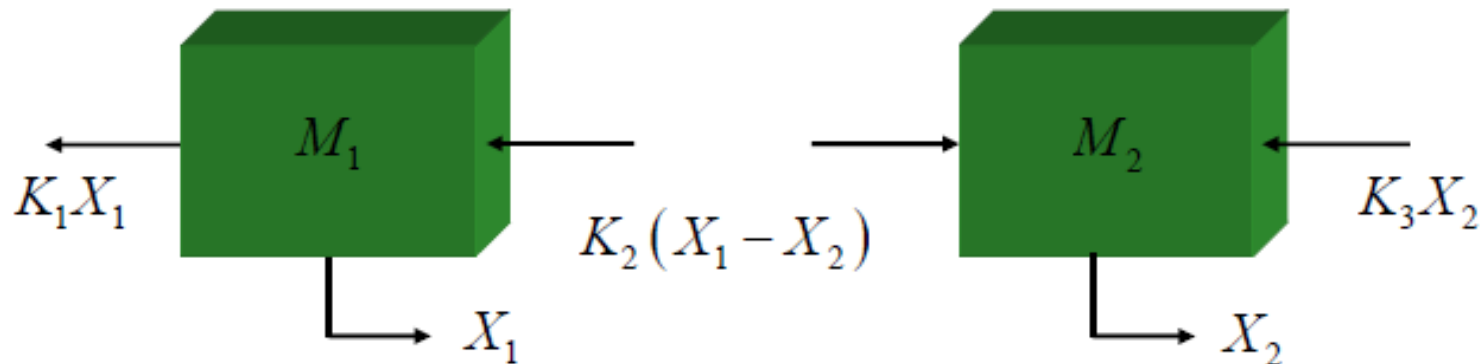


Determine:

$$x_1(t) = ?$$

$$x_2(t) = ?$$

2 DOF Free Vibration: FBDs & EOM



Dynamic Equilibrium:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0$$

Matrix Form:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2 DOF Free Vibration: Solution

Assume a Solution:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi)$$

Substitution:

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi) + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Rearranging:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2 DOF Free Vibration: Solution

Let $\lambda = \omega^2$ and divide by $\sin(\omega t + \phi)$:

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - m_1\lambda & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - m_2\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

For a non-trivial solution: $\det \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - m_1\lambda & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - m_2\lambda \end{bmatrix} = 0$

Using numerical values: $k_1 = 10$ $k_2 = 40$ $k_3 = 5$ $m_1 = 2$ $m_2 = 5$

$$\det \begin{bmatrix} 50 - 2\lambda & -40 \\ -40 & 45 - 5\lambda \end{bmatrix} = 0$$

2 DOF Free Vibration: Eigen Solution

The solution becomes:

$$(50 - 2\lambda)(45 - 5\lambda) - 1600 = 0 \longrightarrow 10\lambda^2 - 340\lambda + 650 = 0$$

$$\text{where: } \lambda_1 = 2.03 \quad \text{and} \quad \lambda_2 = 31.96$$

$$\text{Therefore: } \omega_1 = 1.43 \quad \text{and} \quad \omega_2 = 5.65 \quad \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

This means that there are two solutions and the total solution is the superposition of each solution.

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + B \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

2 DOF Free Vibration: Mode Shapes

Using $\lambda_1 = 2.03$ \longrightarrow
$$\begin{bmatrix} 50 - 2(2.03) & -40 \\ -40 & 45 - 2(2.03) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(50 - 2(2.03))X_1 - 40X_2 = 0$$

$$X_1 = 0.87X_2$$

$$\{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.15 \end{Bmatrix}$$

mode shape for 1st natural frequency

2 DOF Free Vibration: Mode Shapes

Using $\lambda_2 = 31.97$ \longrightarrow
$$\begin{bmatrix} 50 - 2(31.97) & -40 \\ -40 & 45 - 2(31.97) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(50 - 2(31.97))X_1 - 40X_2 = 0$$

$$X_1 = -2.87X_2$$

$$\{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.35 \end{Bmatrix} \quad \text{mode shape for 2nd natural frequency}$$

2 DOF Free Vibration: Free Vibration Solution

— Therefore the free vibration solution becomes: —

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A \{X\}_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + B \{X\}_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$



$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.15 \end{Bmatrix}_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + B \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.35 \end{Bmatrix}_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

A, ϕ_1, B, ϕ_2 are determined from the initial conditions.

2 DOF Free Vibration: Initial Conditions

$$x_1(t) = AX_{11} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + BX_{12} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = AX_{21} \sin(\omega_1 t + \phi_1) + BX_{22} \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\dot{x}_1(t) = A\omega_1 X_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B\omega_2 X_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\dot{x}_2(t) = A\omega_1 X_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B\omega_2 X_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Using

$$x_1(0) = 1 \quad \dot{x}_1(0) = 0$$

$$x_2(0) = 2 \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

$$A = 1.566$$

$$B = -0.566$$

2 DOF Free Vibration: Initial Conditions

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Therefore:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = 1.566 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.15 \end{Bmatrix} \sin\left(1.43t + \frac{\pi}{2}\right) - 0.566 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.35 \end{Bmatrix} \sin\left(5.65t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.566 \\ 1.801 \end{Bmatrix} \cos(1.43t) + \begin{Bmatrix} -0.566 \\ 0.1981 \end{Bmatrix} \cos(5.65t)$$

2 DOF Free Vibration: Initial Conditions

Eigen-solution method

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 50 & -40 \\ -40 & 45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$$

eigenvalues $\lambda_1 = 2.033$ $\lambda_2 = 31.96$

natural frequencies $\omega_1 = 1.426$ rad/sec $\omega_2 = 5.654$ rad/sec

Eigenvectors (mode shapes)

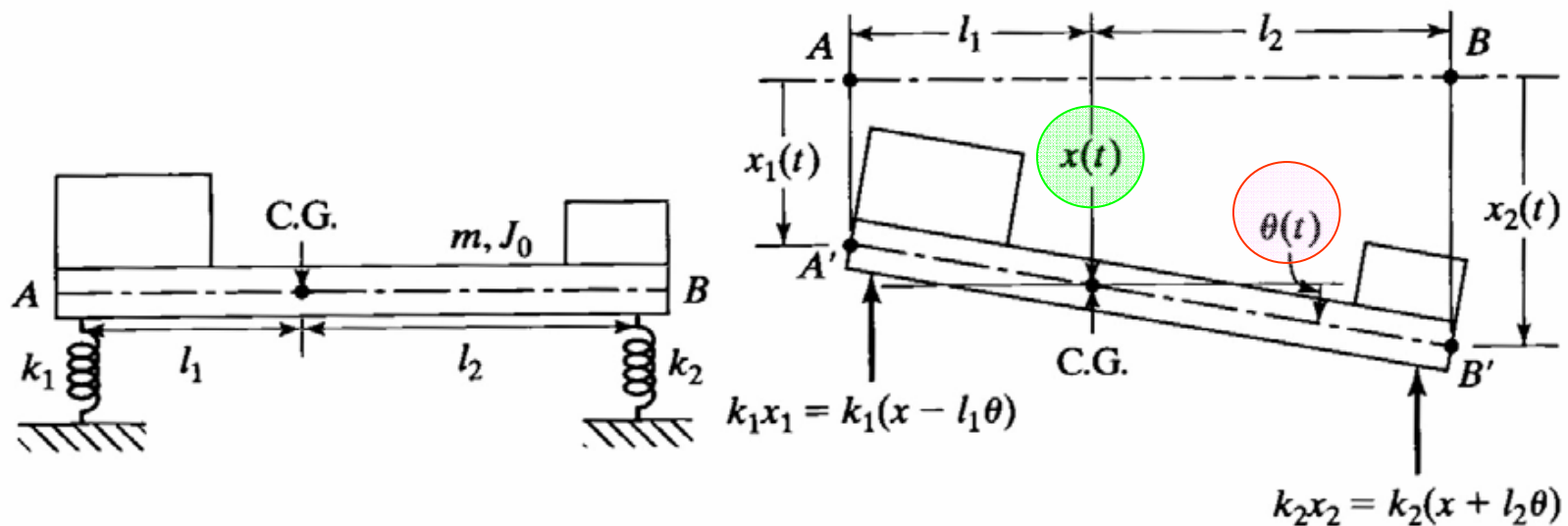
$$\begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} .3411 \\ .3917 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.15 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} .6194 \\ -.216 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -.348 \end{Bmatrix}$$

وابستگی مختصات و مختصات اصلی

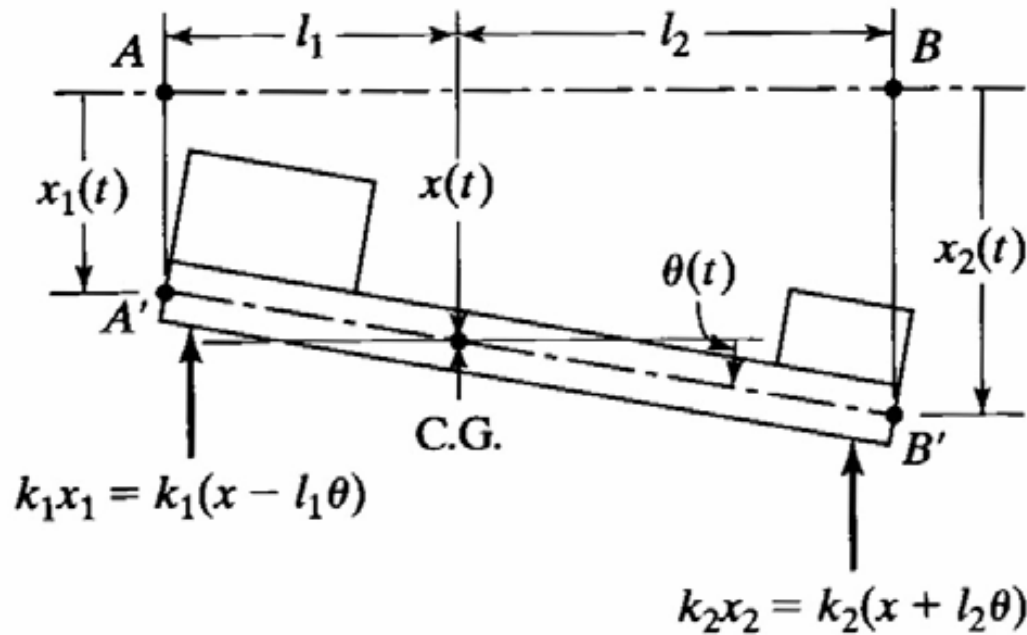
Coordinate coupling and principal coordinates

■ مختصات تعمیم یافته مجموعه n مختصات استفاده شده برای توصیف حرکت یک سیستم می باشند.

■ معادله حرکت یک ماشین تراش با استفاده از مختصات $x(t)$ و $\theta(t)$



معادله حرکت:



$$+\downarrow \sum F = ma_G \Rightarrow -k_1(x - l_1\theta) - k_2(x + l_2\theta) = m\ddot{x}$$

$$\curvearrow + \sum M_G = J_G \ddot{\theta} \Rightarrow k_1(x - l_1\theta)l_1 - k_2(x + l_2\theta)l_2 = J_G \ddot{\theta}$$

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x + (k_2l_2 - k_1l_1)\theta = 0$$

$$J_G \ddot{\theta} + (k_2l_2 - k_1l_1)x + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\theta = 0$$

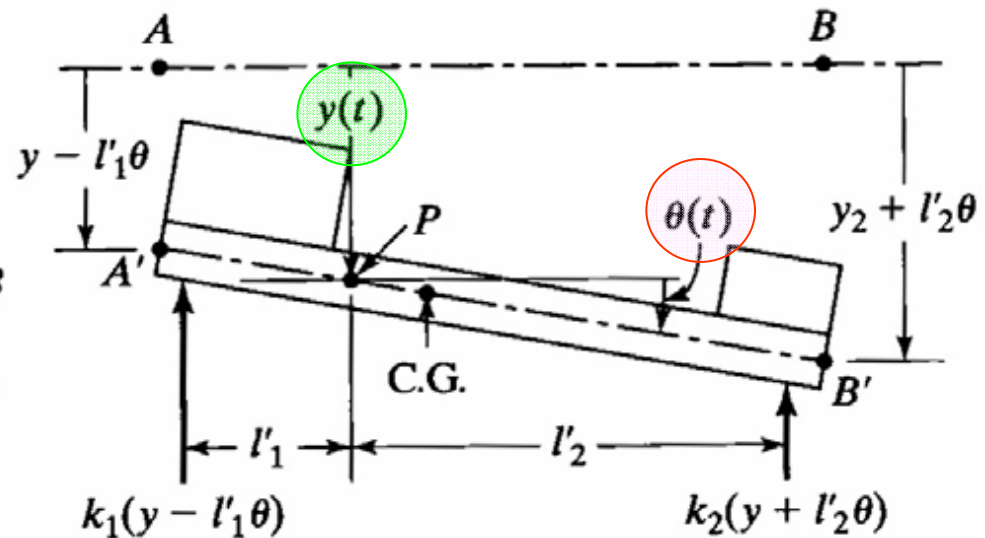
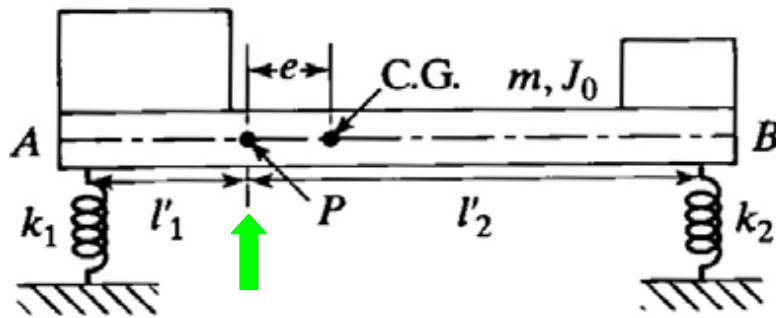
شکل ماتریسی و وابستگی مختصات

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

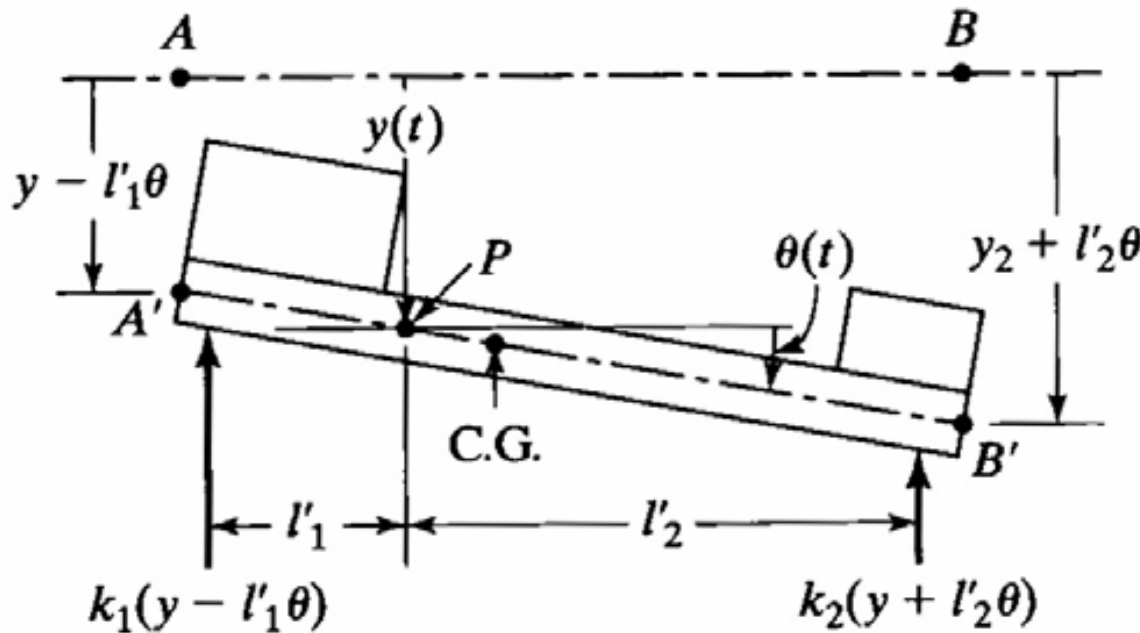
- ماشین تراش دارای ارتعاش دورانی و جابجائی قائم مرکز جرم بطور همزمان است. مگر اینکه اعضاء قطری ماتریس سختی صفر باشند.
- این وابستگی دو مختصه از طریق نیروی فنر یا نیروهای استاتیکی است لذا وابستگی را استاتیکی گویند.
- اگر ماتریس سختی غیر قطری باشد وابستگی استاتیکی است.

معادله حرکتی دیگر

- حال معادله حرکت برای جابجائی و دوران حول نقطه ای مانند P نوشته می شود.
- مختصات تعمیم یافته $y(t)$ و $\theta(t)$ است.



دیاگرام آزاد



$$+\downarrow \sum F = ma_G$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_P + \vec{a}_{G/P}$$

$$\vec{a}_G)_y = \ddot{y} + e\ddot{\theta}$$

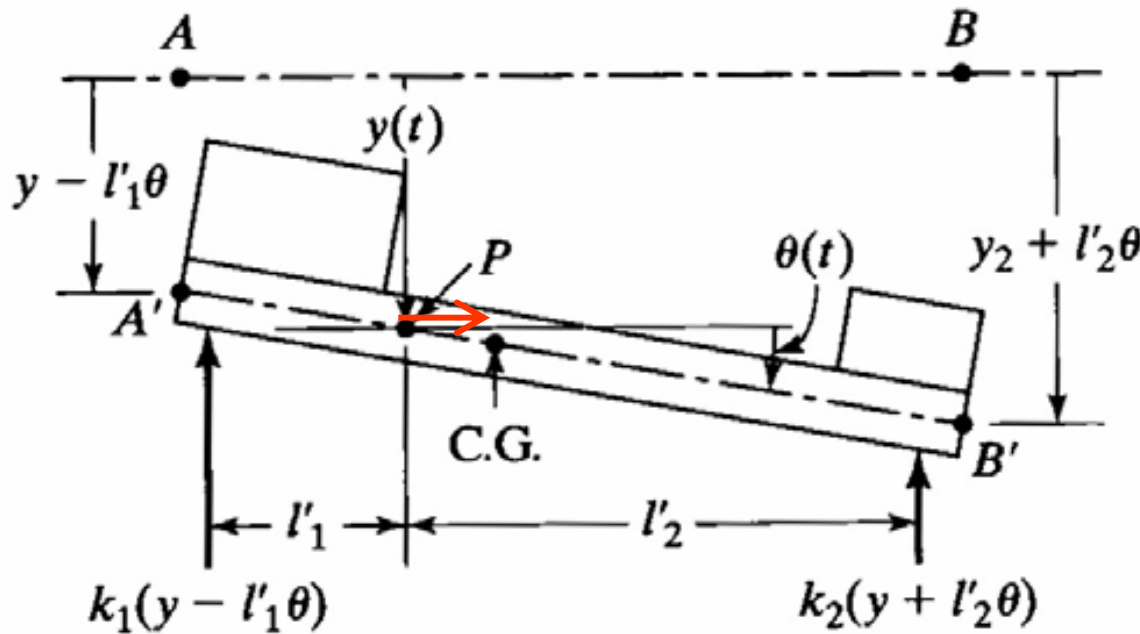
■ مؤلفه های شتاب در راستای y :

$$+\downarrow \sum F = ma_G)_y$$

$$-k_1(y - l'_1\theta) - k_2(y + l'_2\theta) = m\ddot{y} + me\ddot{\theta}$$

$$m\ddot{y} + me\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)y + (k_2l'_2 - k_1l'_1)\theta = 0$$

دیاگرام آزاد



$$\vec{\rho}_G$$

$$\vec{a}_P = \ddot{y}$$

$$\vec{\rho}_G \times m \vec{a}_P = m e \ddot{y}$$

$$\curvearrowright + \sum M_P = J_P \dot{\theta} + \vec{\rho}_G \times m \vec{a}_P$$

$$k_1 (y - l'_1 \theta) l'_1 - k_2 (y + l'_2 \theta) l'_2 = J_P \ddot{\theta} + m e \ddot{y}$$

$$m e \ddot{y} + J_P \ddot{\theta} + (k_2 l'_2 - k_1 l'_1) y + (k_1 l'^2_1 + k_2 l'^2_2) \theta = 0$$

شکل ماتریسی معادله حرکت

$$m \ddot{y} + me \ddot{\theta} + (k_1 + k_2) y + (k_2 l'_2 - k_1 l'_1) \theta = 0$$

$$me \ddot{y} + J_P \ddot{\theta} + (k_2 l'_2 - k_1 l'_1) y + (k_1 l'^2_1 + k_2 l'^2_2) \theta = 0$$

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l'_2 - k_1 l'_1 \\ k_2 l'_2 - k_1 l'_1 & k_1 l'^2_1 + k_2 l'^2_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■ در حالت کلی این معادله دارای وابستگی مختلط (هم استاتیکی و هم دینامیکی) است.

■ اگر اعضاء قطری ماتریس سختی صفر باشد، وابستگی استاتیکی حذف می شود.

ادامه

■ از طرفی: $l'_1 = l_1 - e$ $l'_2 = l_2 + e$

■ در نتیجه: $k_2 l'_2 - k_1 l'_1 = 0 \Rightarrow k_2 l_2 - k_1 l_1 + e(k_1 + k_2) = 0 \Rightarrow e = \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{k_1 + k_2}$

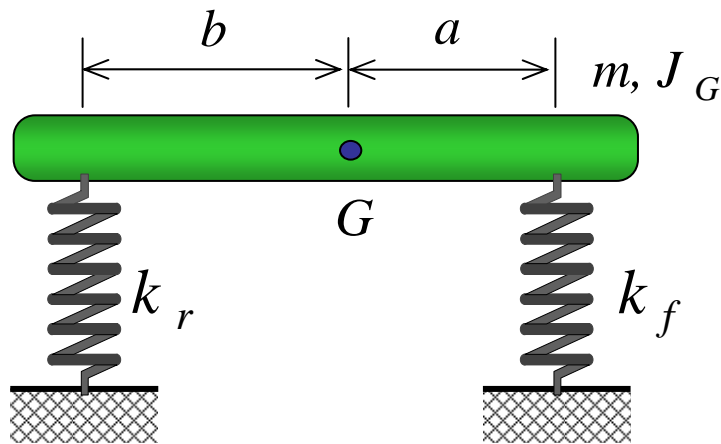
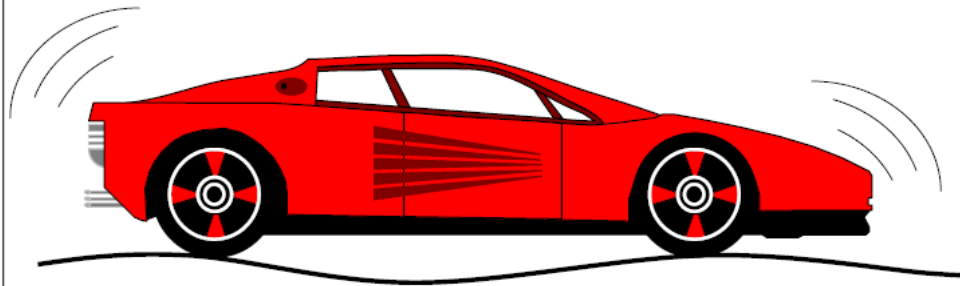
$$\begin{pmatrix} m & me \\ me & J_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l_1'^2 + k_2 l_2'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ این سیستم فقط دارای وابستگی دینامیکی است چون ماتریس جرم غیرقطری است

مختصات اصلی یا طبیعی

- مختصاتی که در آن معادلات مستقل از هم باشند یا کوپلینگ نداشته باشند، مختصات اصلی یا طبیعی است.

مثال:



■ مدل اتومبیلی دارای مشخصات زیر است: m, J_G

■ $m=1000\text{kg}$

■ شعاع ژیراسیون $k_G=0.9$

■ $a=1.0\text{ m}$

■ $b=1.5\text{ m}$

■ $k_f=18\text{ kN/m}$

■ $k_r=22\text{ kN/m}$

■ ممان اینرسی حول مرکز جرم: $J_G = mk_G^2 = 1000(0.9)^2 = 810\text{ kgm}^2$

معادله حرکت:

■ باتوجه به قبل و استفاده از مختصات $x(t)$ و $\theta(t)$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_f + k_r & k_r b - k_f a \\ k_r b - k_f a & k_f a^2 + k_r b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 810 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40000 & 15000 \\ 15000 & 67500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■ با فرض جوابی:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} (-\omega^2 \sin(\omega t + \phi))$$

حل:

■ در نتیجه:

$$\begin{pmatrix} 40000 - 1000\omega^2 & 15000 \\ 15000 & 67500 - 810\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 40000 - 1000\omega^2 & 15000 \\ 15000 & 67500 - 810\omega^2 \end{vmatrix} = (40000 - 1000\omega^2)(67500 - 810\omega^2) - 15000^2 = 0$$

$$8.1 \times 10^5 \omega^4 - 999 \times 10^5 \omega^2 + 24750 \times 10^5 = 0$$

$$8.1\omega^4 - 999\omega^2 + 24750 = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{999 \pm \sqrt{999^2 - 4 \times 8.1 \times 24750}}{2 \times 8.1} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = 34.331 \Rightarrow \omega_1 = 5.859 \text{ rad/s} \\ \omega_2^2 = 89.002 \Rightarrow \omega_2 = 9.434 \text{ rad/s} \end{cases}$$

حل:

■ برای $\omega_1^2 = 34.331$:

$$\left| \begin{pmatrix} 40000 - 1000 \times 34.331 & 15000 \\ 15000 & 67500 - 810 \times 34.331 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 5669 & 15000 \\ 15000 & 39692 \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = -\frac{15000}{5669} X_2 = -\frac{39692}{15000} X_2 = -2.646 X_2$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.646 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} = -2.646$$

حل:

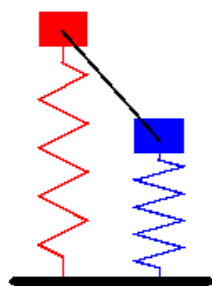
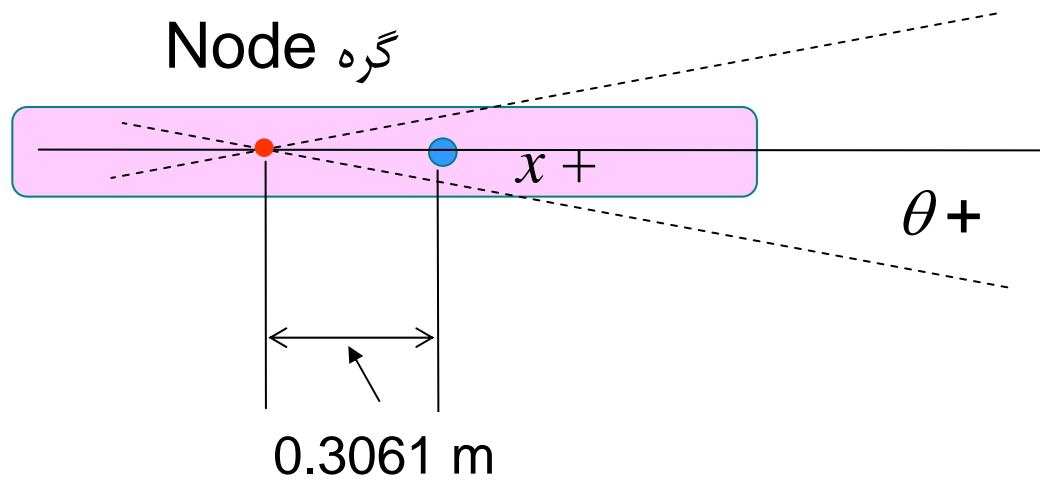
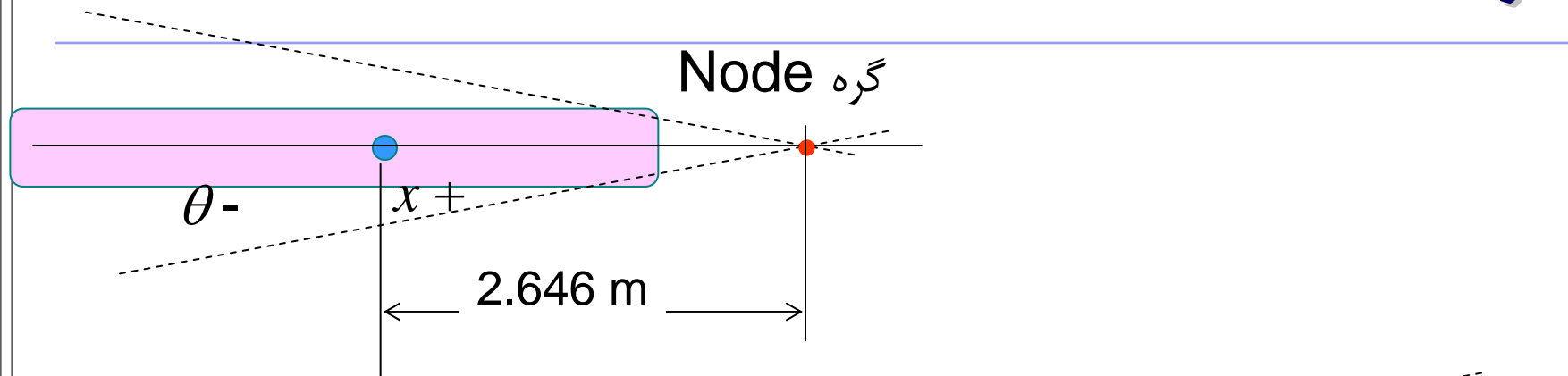
■ برای $\omega_2^2 = 89.001$:

$$\begin{pmatrix} 40000 - 1000 \times 89.002 & 15000 \\ 15000 & 67500 - 810 \times 89.002 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -49002 & 15000 \\ 15000 & -4591.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_1 = \frac{15000}{49002} X_2 = \frac{4591.6}{15000} X_2 = 0.3061 X_2$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3061 \\ 1 \end{pmatrix} \beta \Rightarrow \frac{X_1}{X_2} = 0.3061$$

گره



ارتعاشات مکانیکی ۱۱ ارتعاشات اجباری دو درجه آزادی

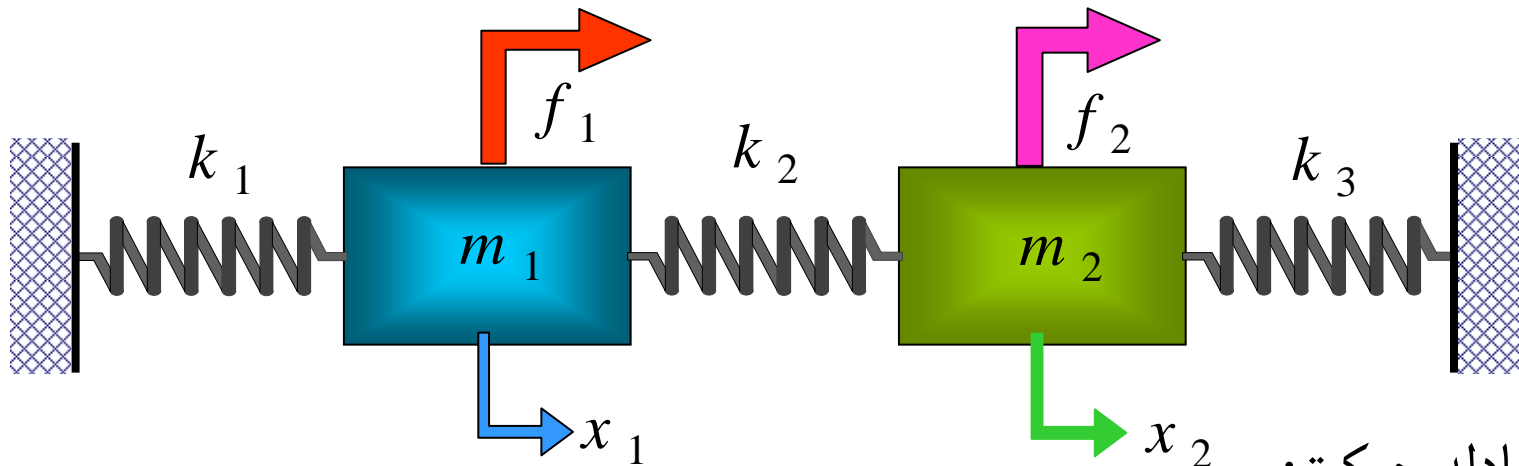
سیدیوسف احمدی بروغنی

استادیار گروه مکانیک

دانشگاه بیرجند

نیروی اجباری

■ چنانچه بر روی سیستم ارتعاشی دودرجه آزادی نیروهای F_1 و F_2 اعمال گردد:



■ معادله حرکت:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

نیروی اجباری هارمونیک

- در حالت کلی حل این معادله کار مشکلی است.
- در صورتی که نیروهای وارده هارمونیک و با یک فرکانس ولی دامنه های مختلف باشند راحت حل می شوند.
- در غیر اینصورت لازم است از برهنهش جوابها استفاده کرد
- لذا نیرو و پاسخ آن عبارتند از:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

حل

■ با جایگزینی در معادله حرکت:

$$\left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

■ با ساده کردن معادله:

$$\left\{ -\omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

■ با تعریف ماتریس امپدانس یا سیستم:

$$[Z(\omega)] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix}$$

■ که $[Z(\omega)]$ را ماتریس امپدانس گویند:

$$[Z(\omega)] \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

■ که برای بدست آوردن دامنه پاسخ:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = [Z(\omega)]^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \frac{\text{adjoint}[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

بدست آوردن معکوس ماتریس

$$[Z(\omega)]^{-1} = \frac{\text{adjoint}[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]} = \frac{\begin{pmatrix} k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 \end{pmatrix}}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

■ در نتیجه

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = [Z(\omega)]^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 & k_2 \\ k_2 & k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

ادامه

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} (k_2 + k_3 - \omega^2 m_2)F_1 + k_2 F_2 \\ k_2 F_1 + (k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)F_2 \end{pmatrix}}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

روشهای دیگر بدست آوردن دامنه

■ الف) روش کرامر

$$[Z(\omega)] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & -k_2 \\ F_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix}}{\det[Z(\omega)]} = \frac{F_1(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) + k_2 F_2}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & F_1 \\ -k_2 & F_2 \end{vmatrix}}{\det[Z(\omega)]} = \frac{F_2(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) + k_2 F_1}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

روش کرامر

$$[Z(\omega)] = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & -k_2 \\ F_2 & k_2 + k_3 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix}}{\det[Z(\omega)]} = \frac{F_1(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) + k_2 F_2}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & F_1 \\ -k_2 & F_2 \end{vmatrix}}{\det[Z(\omega)]} = \frac{F_2(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) + k_2 F_1}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

FRF FRF

■ اگر ماتریس $H(\omega)$ بصورت معکوس ماتریس امپدانس تعریف شود:

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = [H(\omega)] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}F_1 + h_{12}F_2 \\ h_{21}F_1 + h_{22}F_2 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = h_{11}F_1 + h_{12}F_2$$

$$X_2 = h_{21}F_1 + h_{22}F_2$$

FRF FRF

■ تابع پاسخ فرکانسی FRF جداگانه:

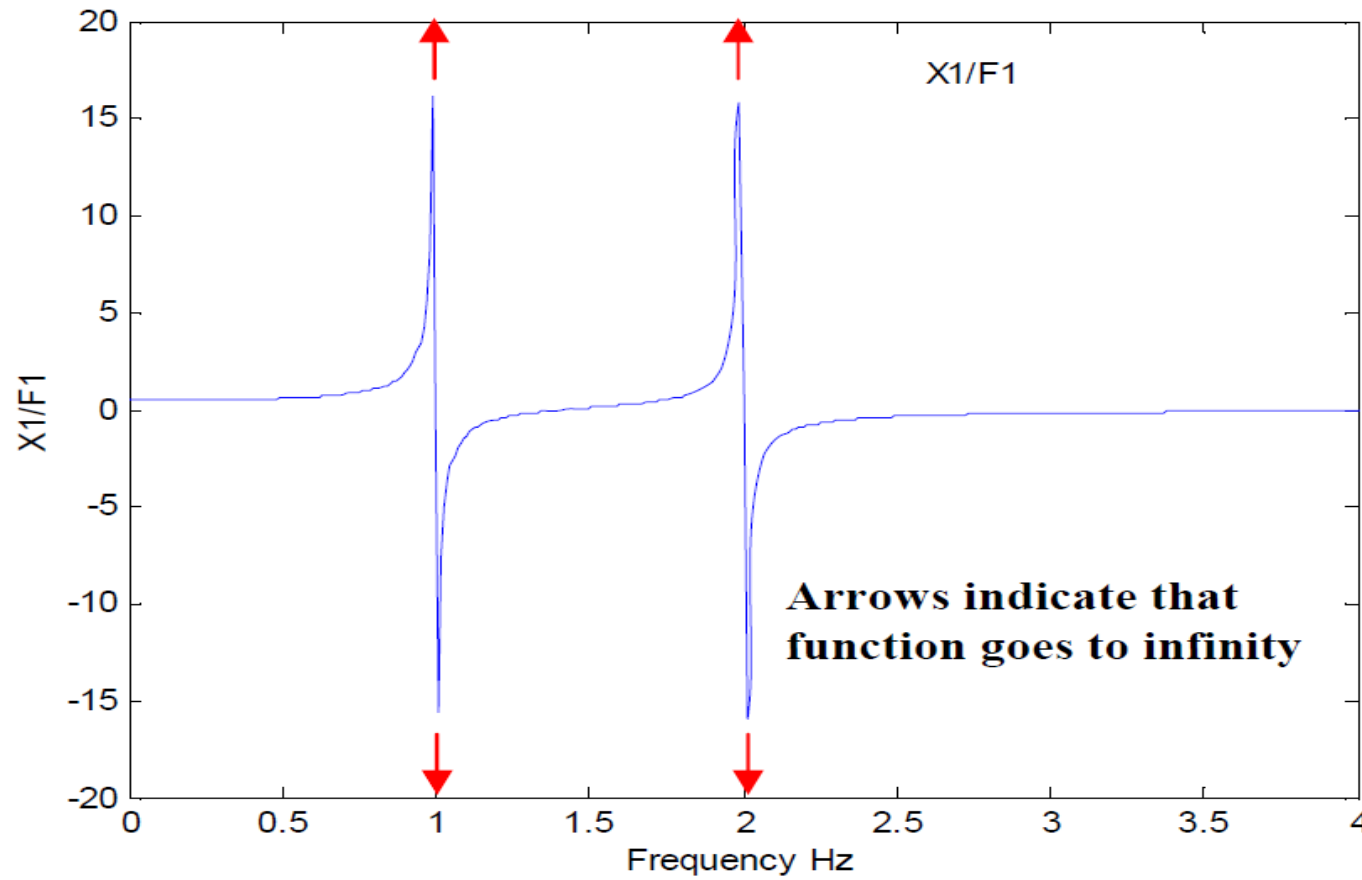
$$\frac{X_1}{F_1} = h_{11} = \frac{k_2 + k_3 - \omega^2 m_2}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

$$\frac{X_1}{F_2} = h_{12} = \frac{k_2}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

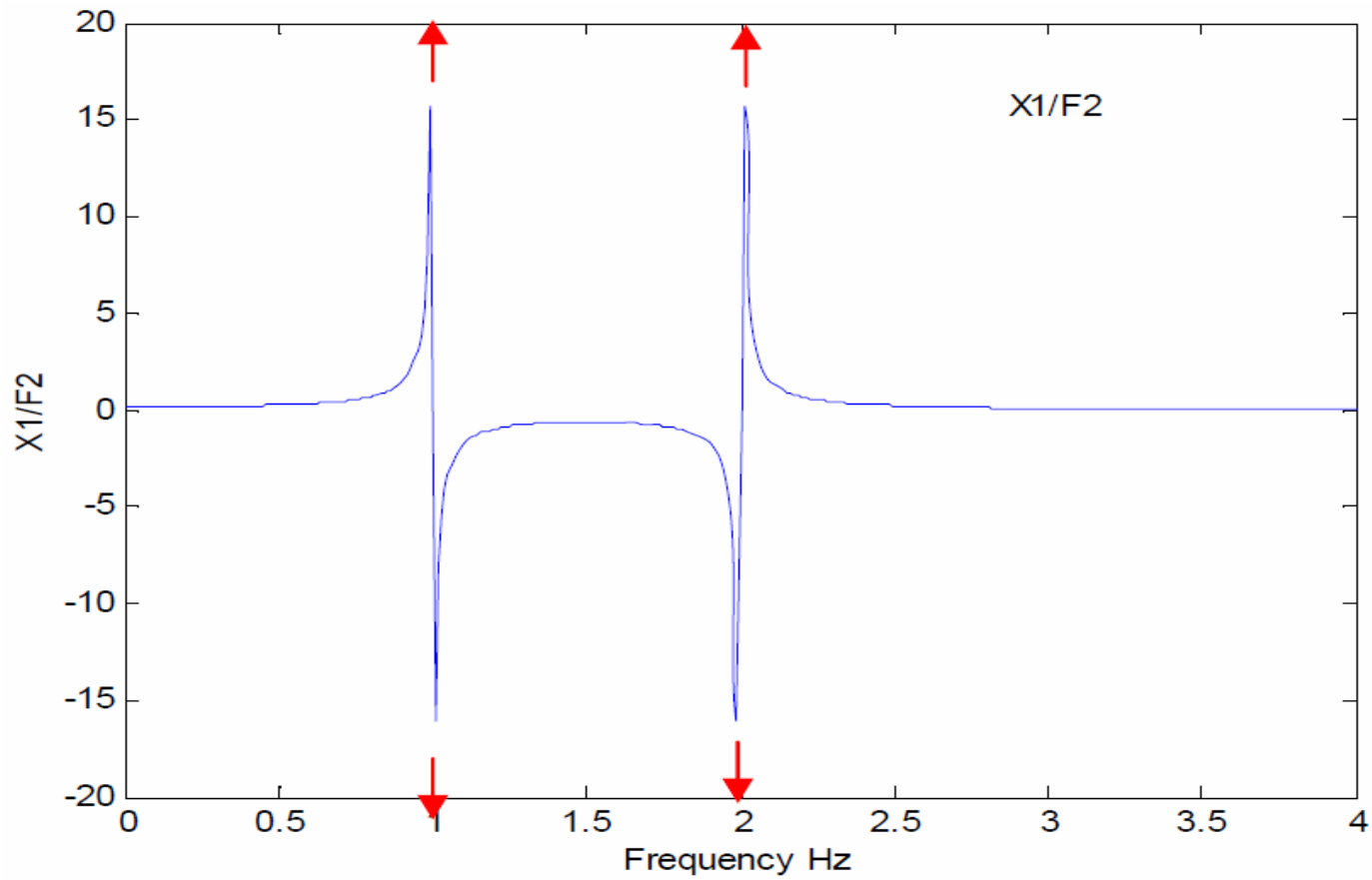
$$\frac{X_2}{F_1} = h_{21} = \frac{k_2}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

$$\frac{X_2}{F_2} = h_{22} = \frac{k_1 + k_2 - \omega^2 m_1}{(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2) - k_2^2}$$

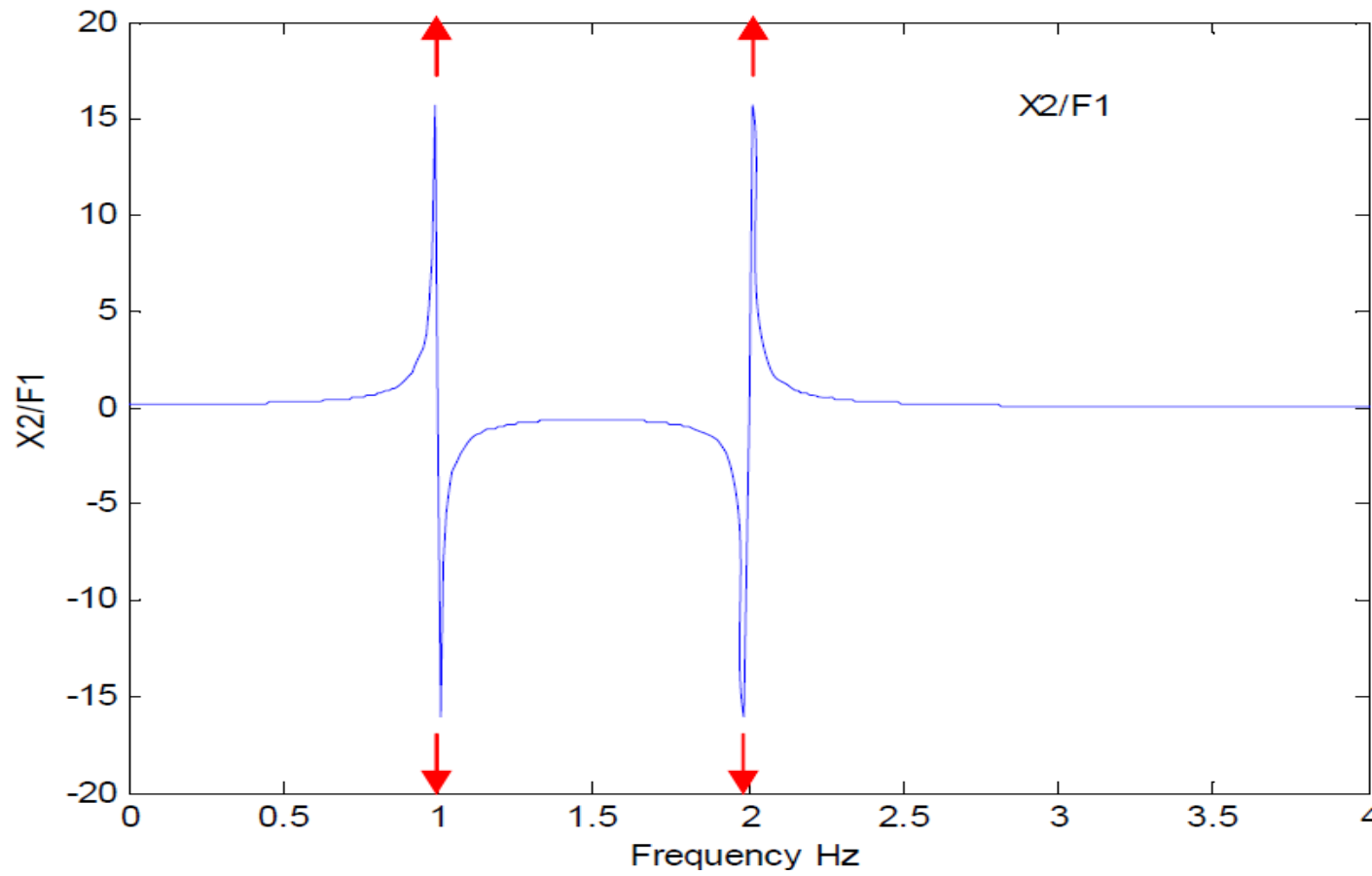
(h_{11}) FRF



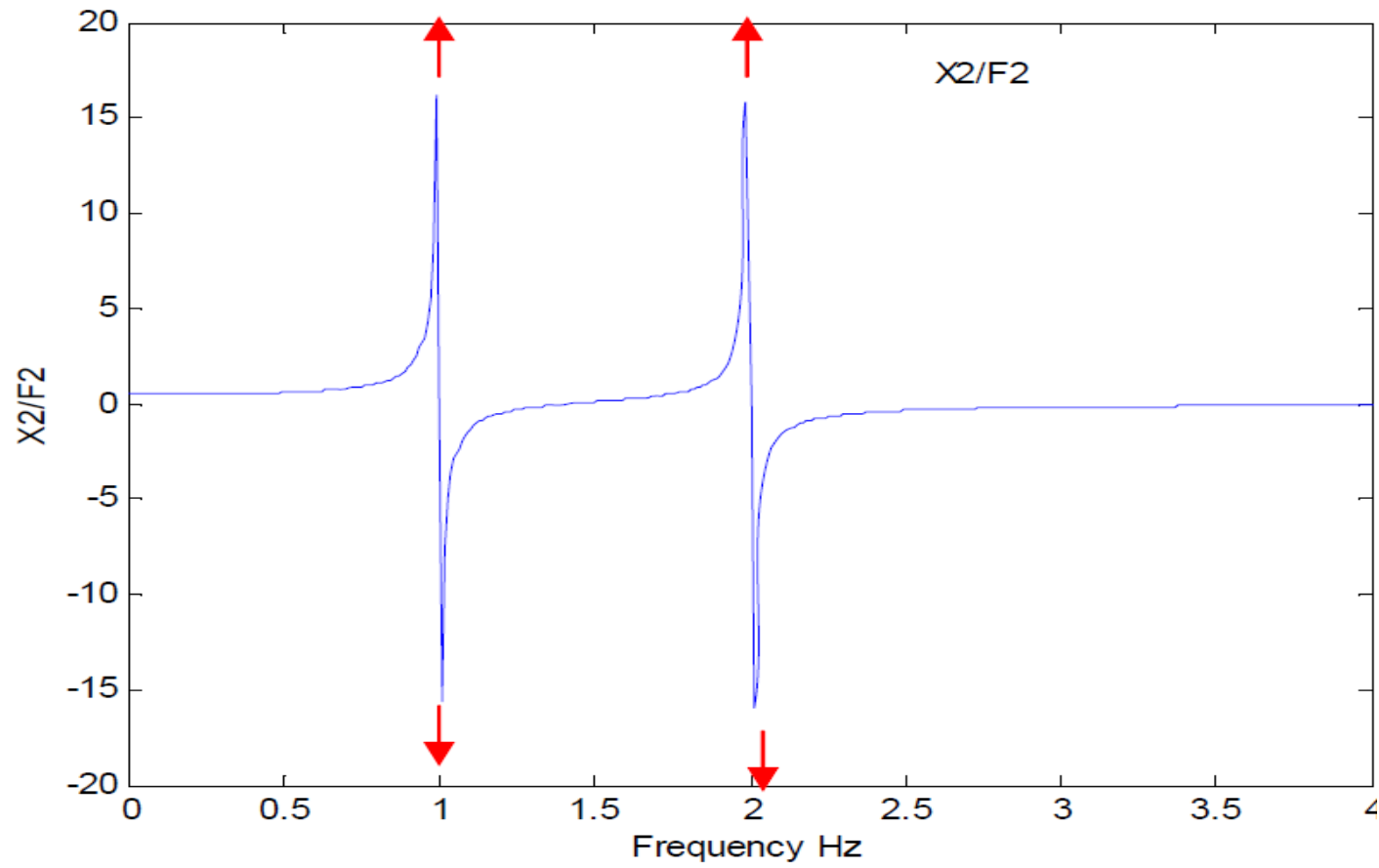
(h_{12}) FRF



~~FRF~~ (1 2) FRF



(11) FRF



2 DOF Forced Vibration: Damping

If damping is considered the equations of motion become:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

And if the forcing functions are harmonic functions (as before) the solution is:

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

2 DOF Forced Vibration: FRF w/ Damping

Define:
$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Where $[Z(\omega)]$ is called the *system or impedance matrix*.

Then the response $\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$ can be solved for as:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = [Z(\omega)]^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Where $[Z(\omega)]^{-1} = [H(\omega)]$ is the **Frequency Response Function Matrix**

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = [H(\omega)] \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

2 DOF Forced Vibration: FRF w/ Damping

The FRF matrix can be written as:

$$[H(\omega)] = \frac{\text{adj}[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]}$$

This is expanded to:

$$[H(\omega)] = \frac{\begin{bmatrix} k_{22} - \omega^2 m_{22} + j\omega c_{22} & -(j\omega c_{12} + k_{12}) \\ -(j\omega c_{21} + k_{21}) & k_{11} - \omega^2 m_{11} + j\omega c_{11} \end{bmatrix}}{(k_{11} - \omega^2 m_{11} + j\omega c_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22} + j\omega c_{22}) - (j\omega c_{12} + k_{12})(j\omega c_{21} + k_{21})}$$

Therefore each response can be written as:

$$X_1 = h_{11}F_1 + h_{12}F_2$$

$$X_2 = h_{21}F_1 + h_{22}F_2$$

2 DOF Forced Vibration: FRF w/ Damping

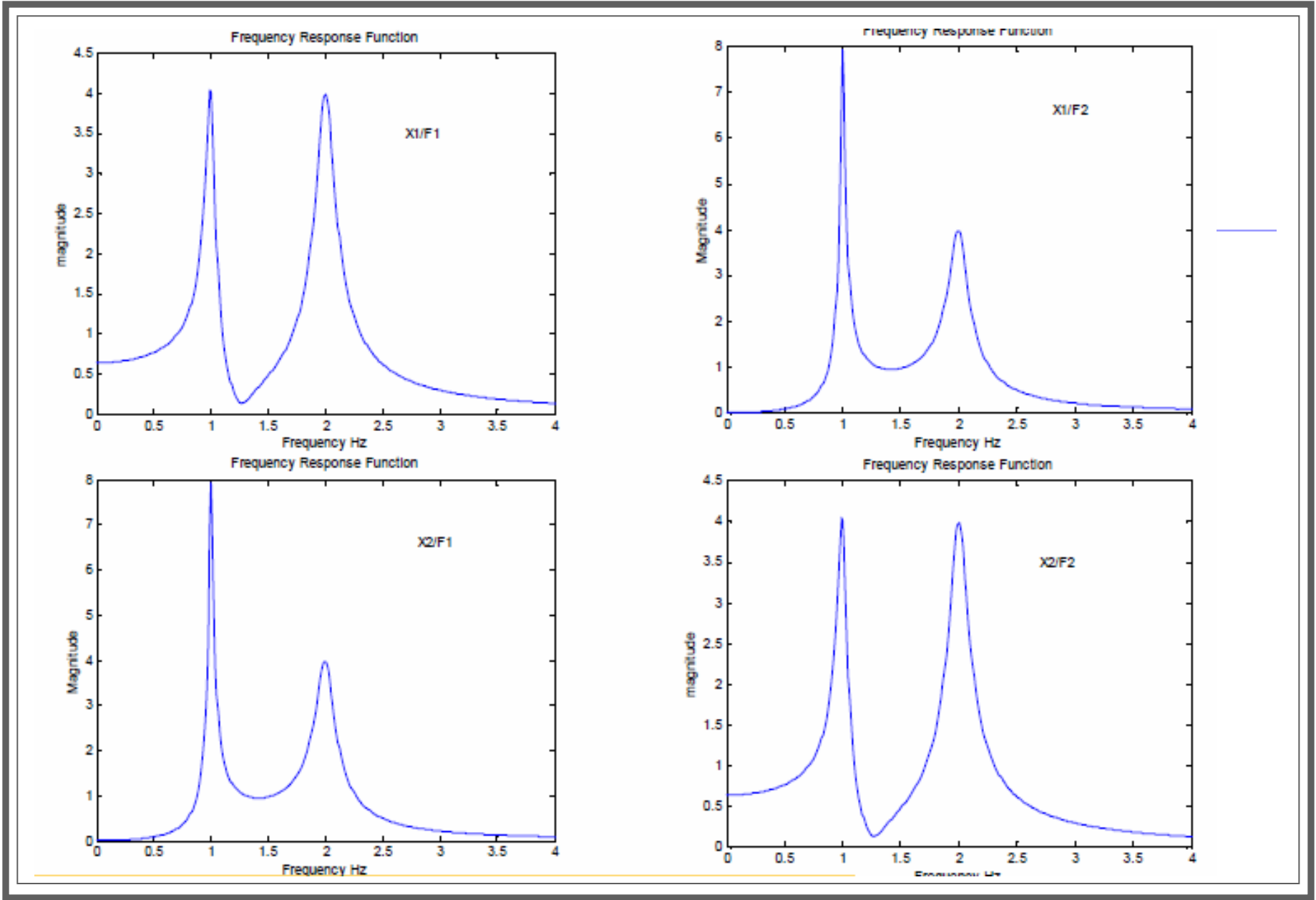
The individual FRF's are defined as:

$$\frac{X_1}{F_1} = h_{11} = \frac{(k_{22} - \omega^2 m_{22}) + j\omega c_{22}}{(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (j\omega c_{12} + k_{12})(j\omega c_{21} + k_{21})}$$

$$\frac{X_1}{F_2} = h_{12} = \frac{-(k_{12} + j\omega c_{12})}{(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (j\omega c_{12} + k_{12})(j\omega c_{21} + k_{21})}$$

$$\frac{X_2}{F_1} = h_{21} = \frac{-(k_{21} + j\omega c_{21})}{(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (j\omega c_{12} + k_{12})(j\omega c_{21} + k_{21})}$$

$$\frac{X_2}{F_2} = h_{22} = \frac{(k_{11} - \omega^2 m_{11}) + j\omega c_{11}}{(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (j\omega c_{12} + k_{12})(j\omega c_{21} + k_{21})}$$



لرزه (لرزه)

Vibration Absorbers

■ ارتعاش زیاد را می توان:

■ از محیط اطراف **عایق**

کرد

■ **کنترل** کرد

■ راه حل:

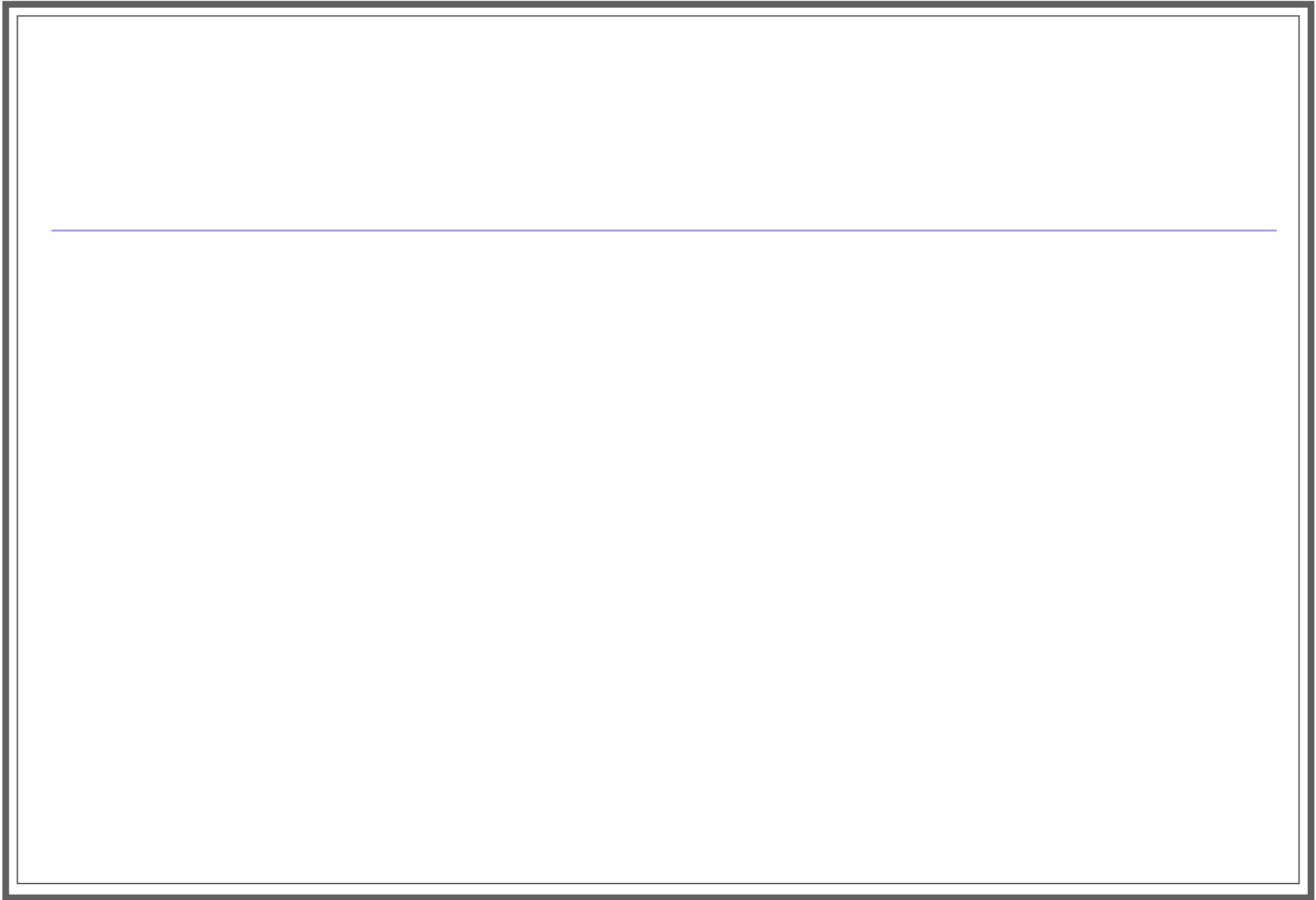
■ کاهش تابع نیرو (میزان کردن)

■ قرار دادن عایق

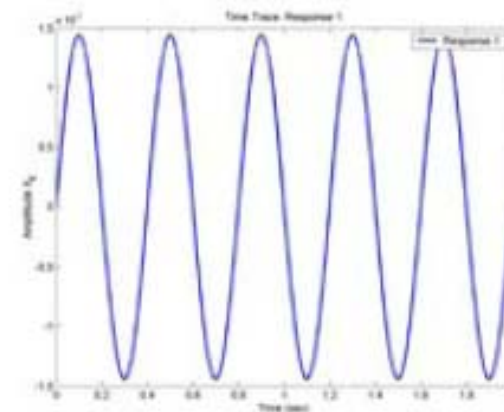
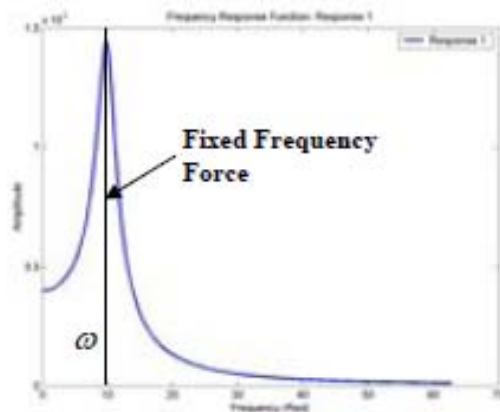
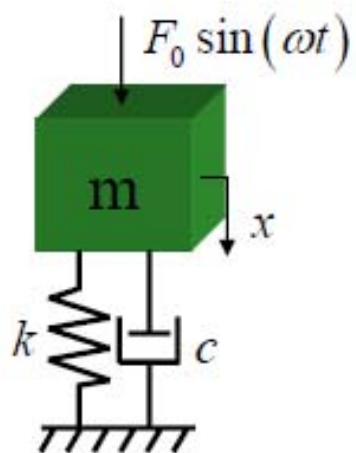
■ جابجا کردن فرکانس تشدید (تغییر

فرکانس تشدید)

■ افزایش ضریب میرایی



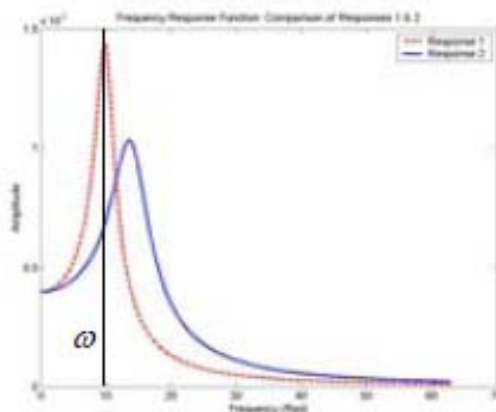
Example: Fixed Frequency Force



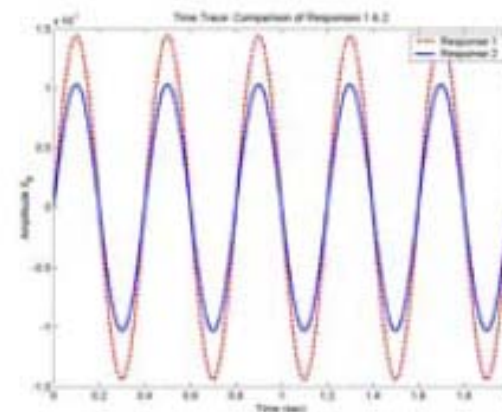
$X_m \sin(\omega t)$

$X_0 = \text{Amplitude (original)}$

Move Resonance



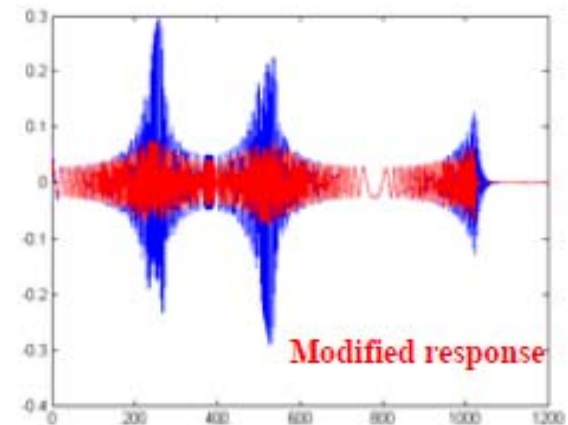
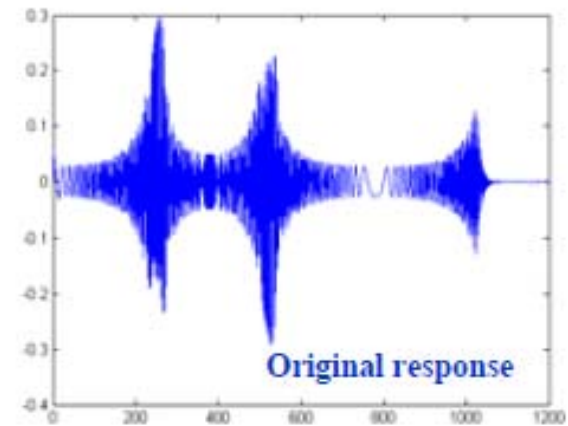
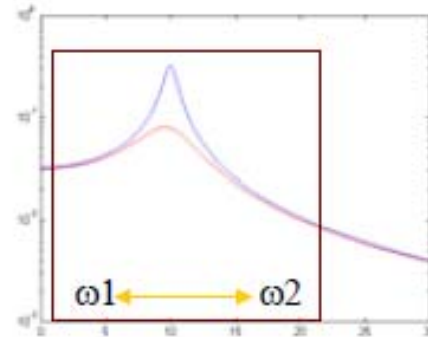
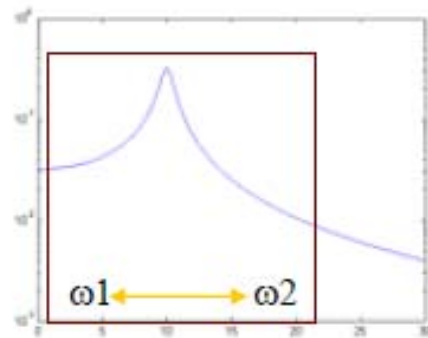
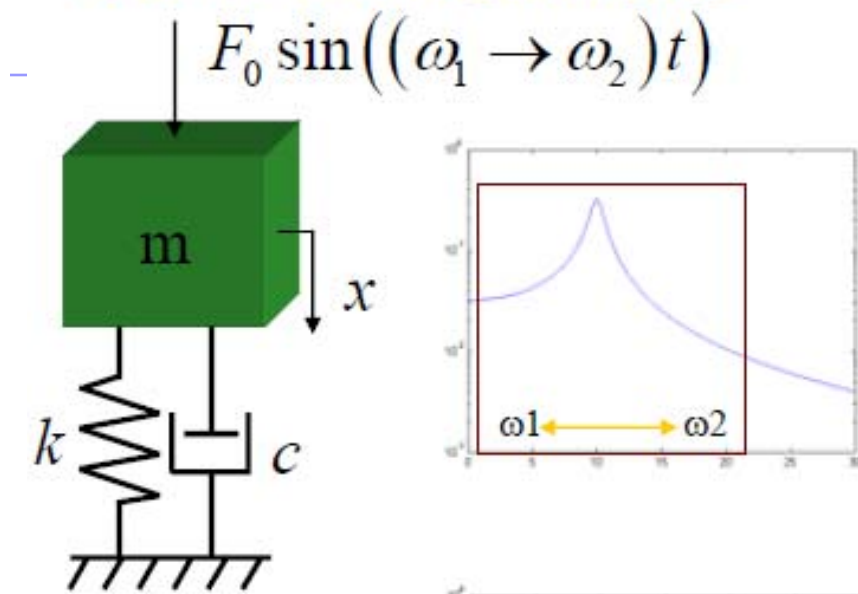
Amplitude Reduction



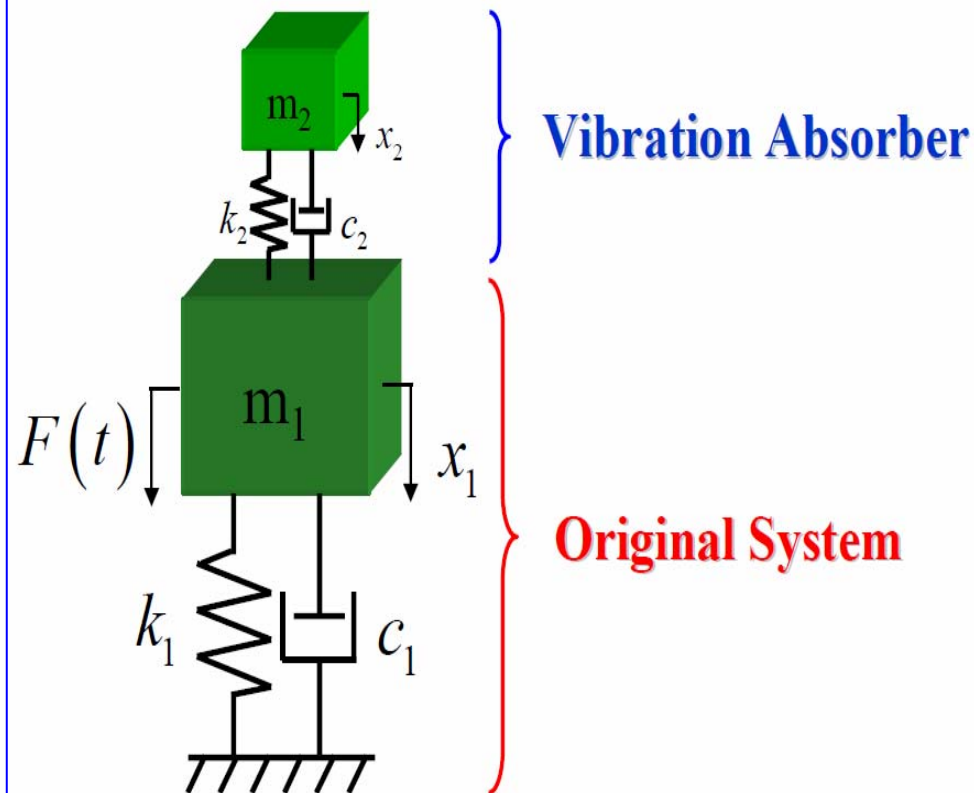
$X_m \sin(\omega t)$

$X_m = \text{Amplitude (modified)}$

Example: Moving or Broadband Force Effects of Adding Damping



جاذبه‌های ارتعاشی

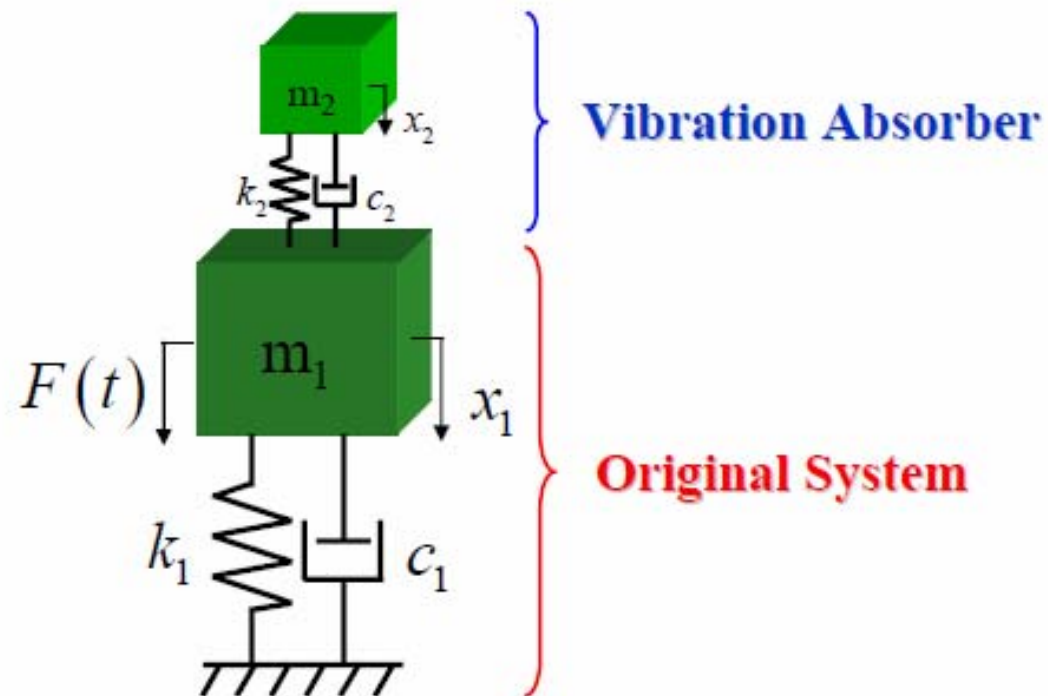


■ در این شیوه:

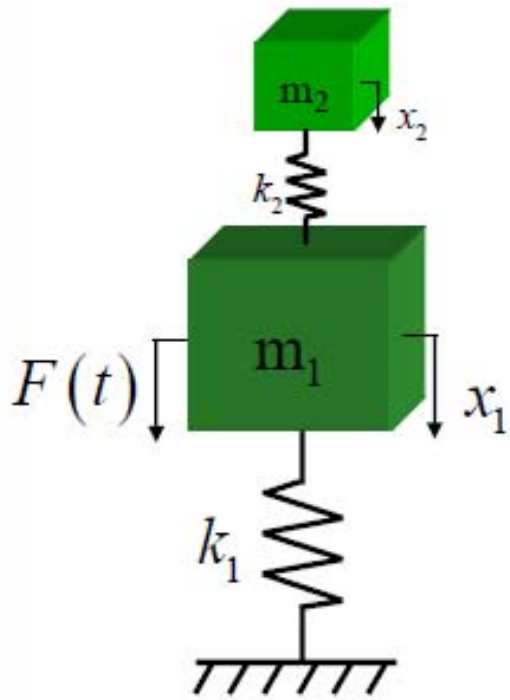
- در نزدیکی یا خود تشدید دامنه کاهش می یابد (حتی حذف می شود)
- در هر فرکانس معلومی می توان دامنه را کاهش داد

Vibration Absorber (a.k.a Tuned Mass Damper)

- 1.) Reduces amplitude response at or near a resonance.
- 2.) Reduces amplitude response at a specific frequency.

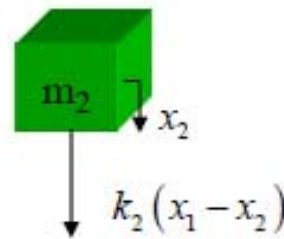


Vibration Absorber (undamped configuration)



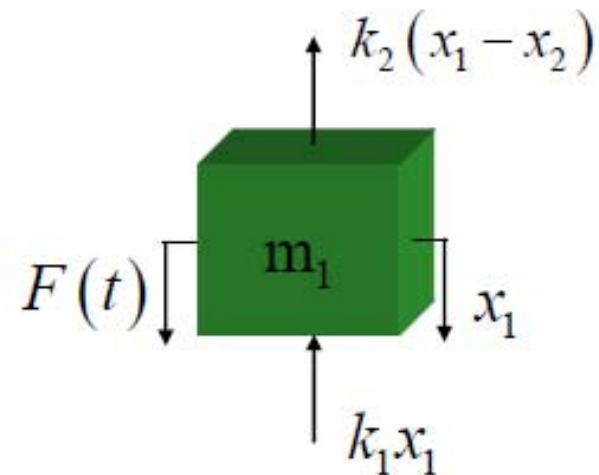
$$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$$

FBD's →



$$\sum F_{x_2} = m_2 \ddot{x}_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0$$



$$\sum F_{x_1} = m_1 \ddot{x}_1$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \sin(\omega t)$$

Vibration Absorber (undamped configuration)

Equations of Motion

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Solution

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t) \quad \longrightarrow$$

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

Vibration Absorber

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

Goal: Reduce amplitude X_1

$$\therefore (k_2 - m_2 \omega^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

The natural frequency of the vibration absorber equals the frequency of the forcing function:

$$F_0 \sin(\omega t)$$

Vibration Absorber: Design for Resonance

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

Define: $\delta_{st} = \frac{F_0}{k_1}$

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}}$$

Vibration Absorber: Design for Resonance

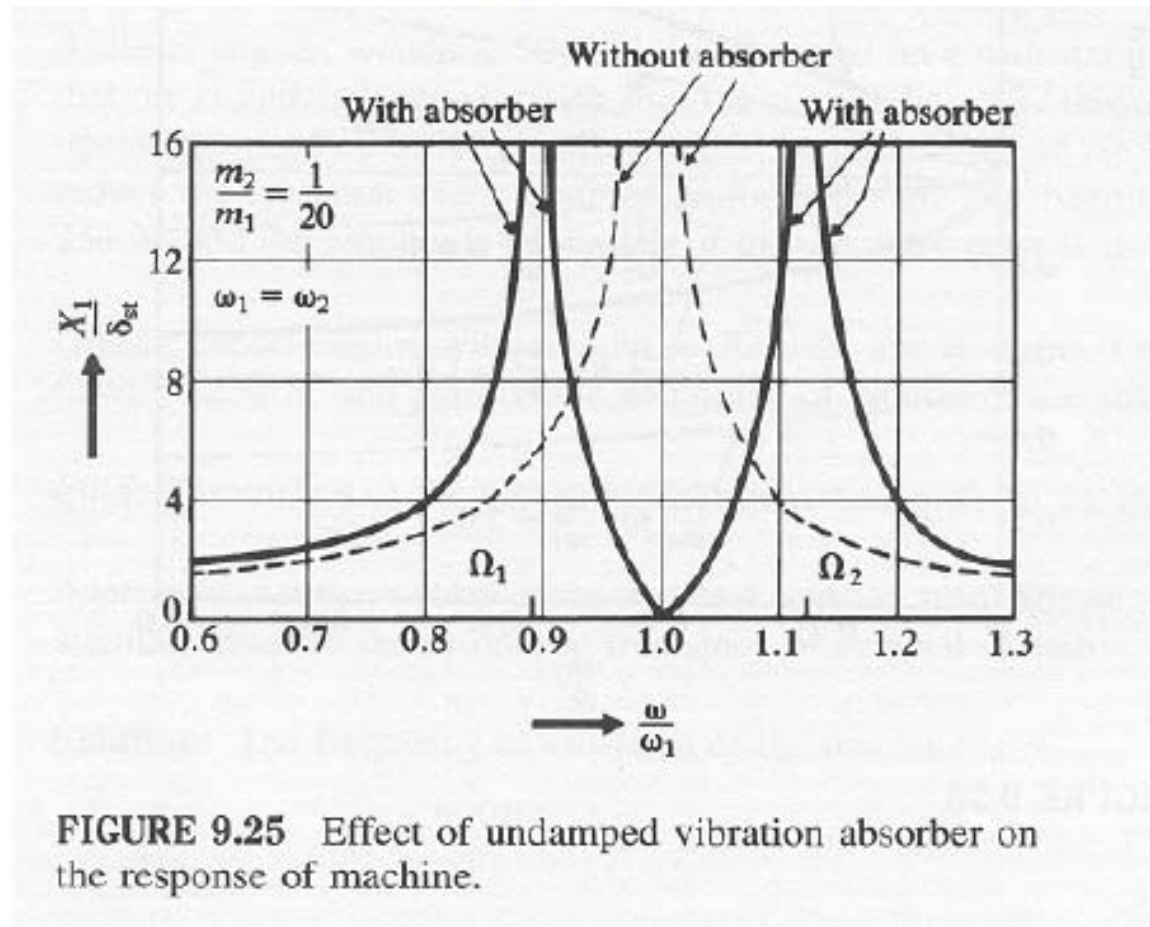


FIGURE 9.25 Effect of undamped vibration absorber on the response of machine.

$\Omega_1, \Omega_2 =$ natural frequency of the “new” combined system

Vibration Absorber: Amplitude of the Absorber

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2}$$

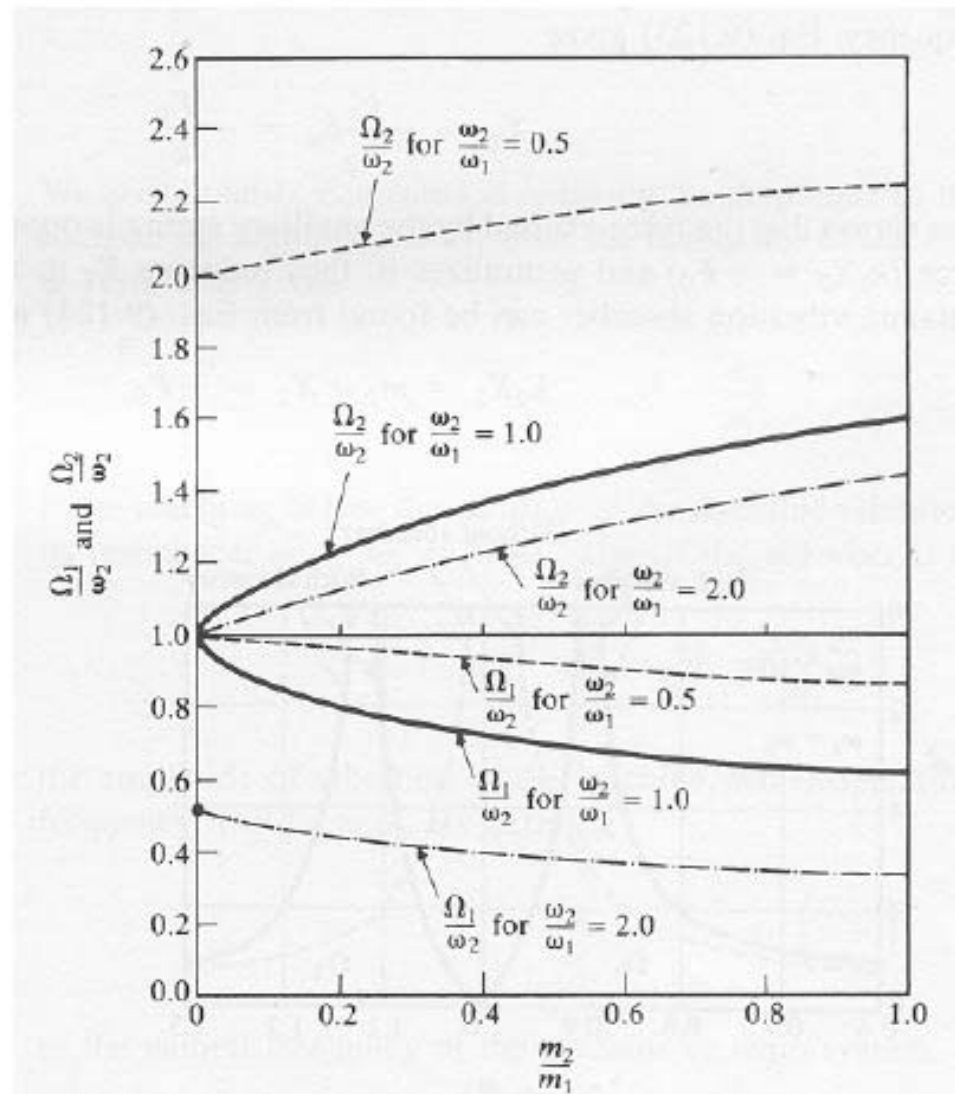
$$X_2 = -\frac{F_0}{K_2}$$

Absorber design must accommodate this.

Vibration Absorber:

Effect of $\frac{\omega_2}{\omega_1}$

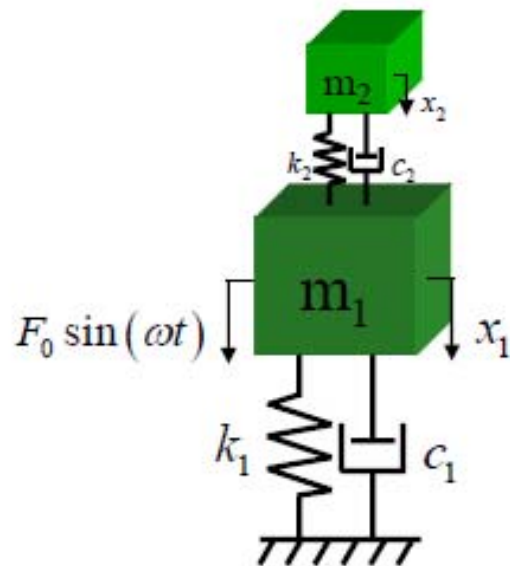
Effect of the size of m_2



Vibration Absorber: Damped System

Equations of Motion

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Solution:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t}$$

Vibration Absorber: Damped System

$$X_1 = \frac{F_0 (k_2 - m_2 \omega^2 + j c_2 \omega)}{\left[(k_1 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - m_2 k_2 \omega^2 \right] + j \omega c_2 (k_1 - m_1 \omega^2 - m_2 \omega^2)}$$

$$X_2 = \frac{X_1 (k_2 + j \omega c_2)}{(k_2 - m_2 \omega^2 + j \omega c_2)}$$

Vibration Absorber: Damped System

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \text{Mass ratio} = \text{Absorber mass} / \text{main mass}$$

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k_1} = \text{Static deflection of the system}$$

$$\omega_a^2 = \frac{k_2}{m_2} = \text{Square of the natural frequency of the absorber}$$

By defining:

$$\omega_n^2 = \frac{k_1}{m_1} = \text{Square of the natural frequency of the main mass}$$

$$f = \frac{\omega_a}{\omega_n} = \text{Ratio of natural frequencies}$$

$$g = \frac{\omega}{\omega_n} = \text{Forced frequency ratio}$$

$$c_c = 2m_2\omega_a = \text{Critical damping constant}$$

$$\zeta = \frac{c_2}{c_c} = \text{Damping ratio}$$

Vibration Absorber: Damped System

Solution:
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t}$$

The magnitudes, X_1 and X_2 , can be expressed as:

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \left[\frac{(2\zeta g)^2 + (g^2 - f^2)^2}{(2\zeta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)\}^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{X_2}{\delta_{st}} = \left[\frac{(2\zeta g)^2 + f^4}{(2\zeta g)^2 (g^2 - 1 + \mu g^2)^2 + \{\mu f^2 g^2 - (g^2 - 1)(g^2 - f^2)\}^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Vibration Absorber: Damped System

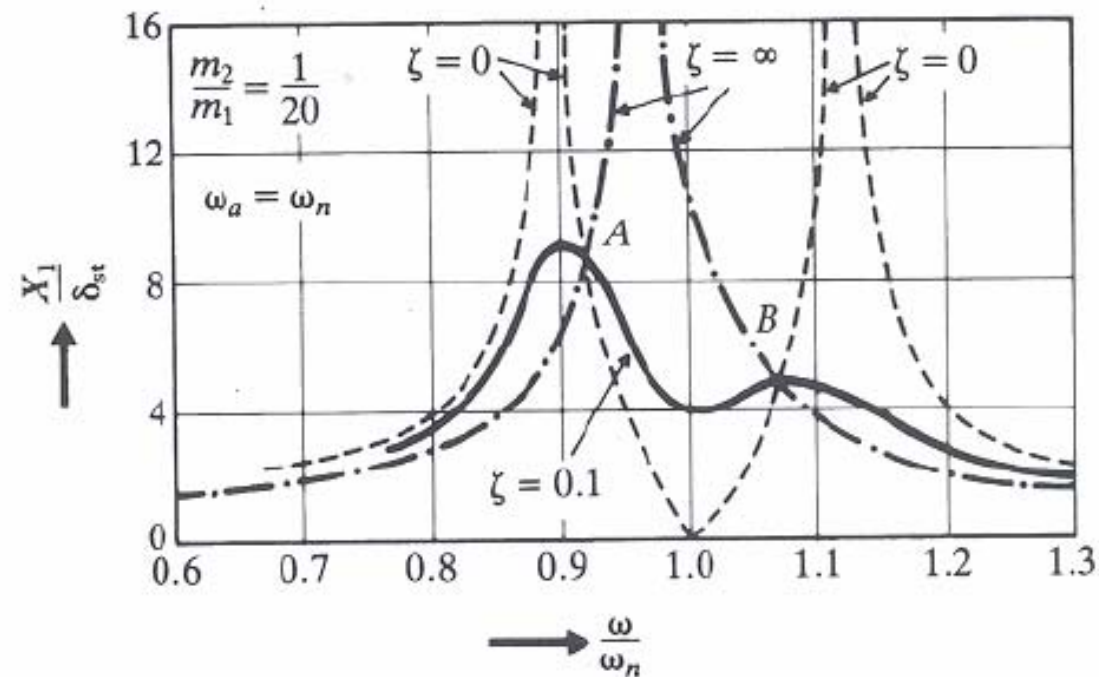
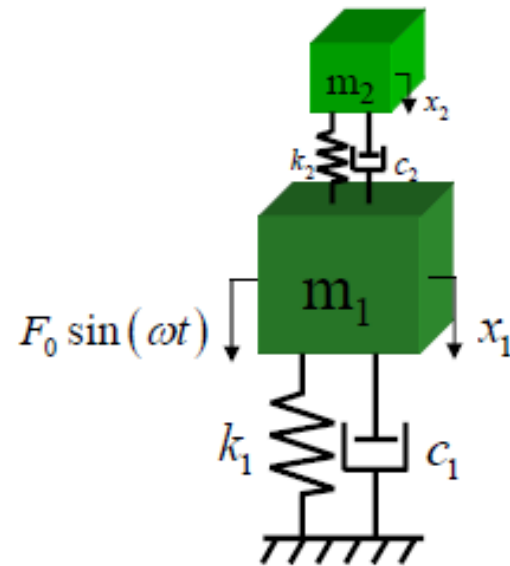


FIGURE 9.29 Effect of damped vibration absorber on the response of the machine.

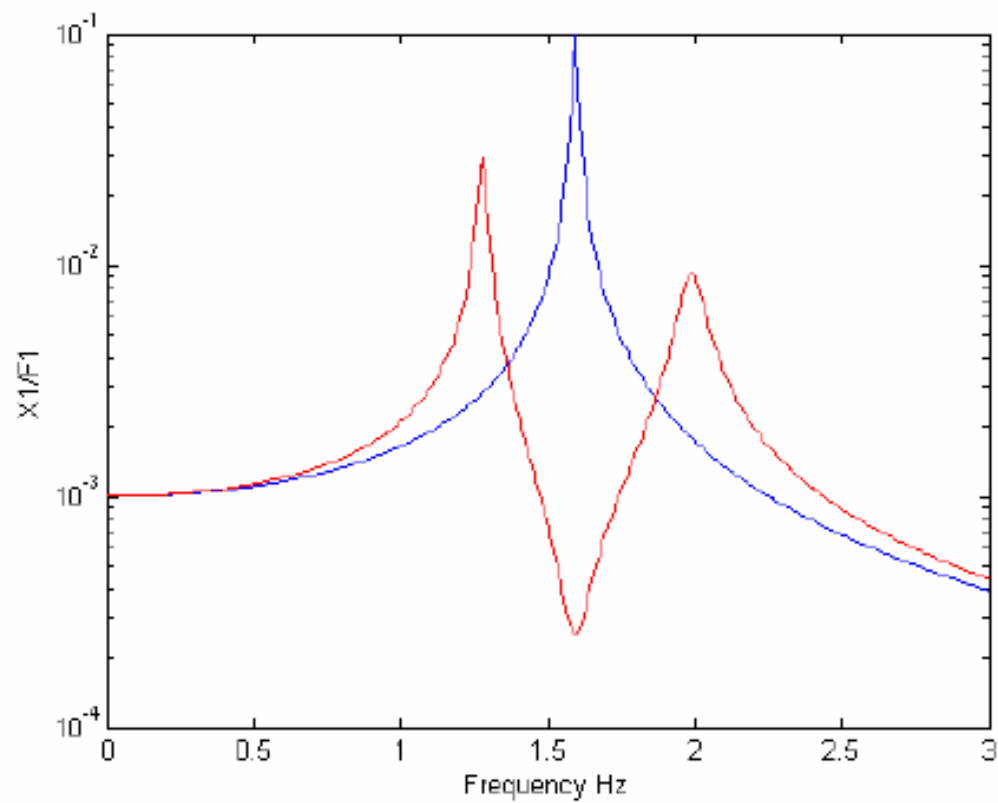
Example: $\omega_a = \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$

$$\begin{array}{ll} m_1 = 10 & m_2 = 2 \\ k_1 = 1000 & k_2 = 200 \\ c_1 = 1 & c_2 = 1 \end{array}$$



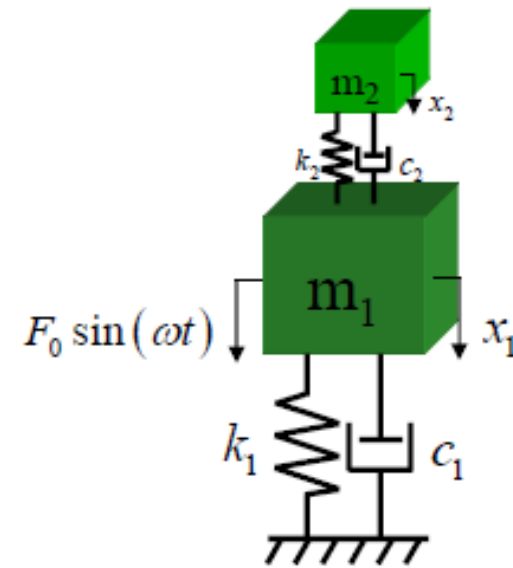
$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Example: $\omega_a = \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$



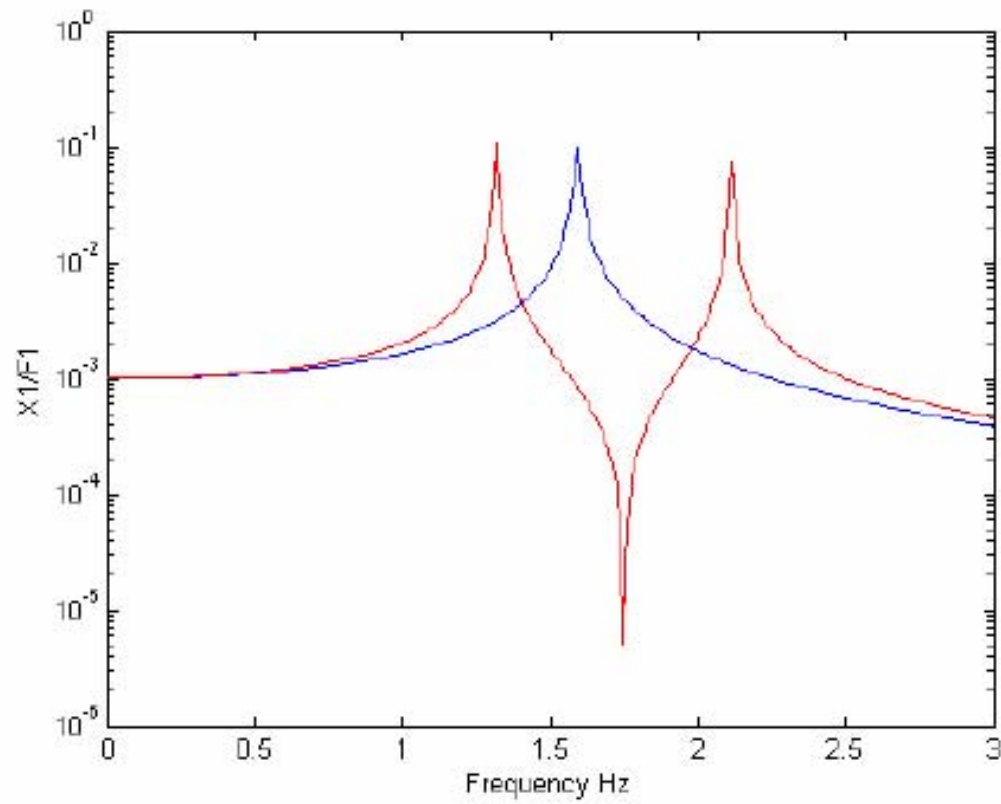
Example: $\omega_a = 1.75 \text{ Hz}$

$$\begin{array}{ll} m_1 = 10 & m_2 = 2 \\ k_1 = 1000 & k_2 = 241 \\ c_1 = 1 & c_2 = 0 \end{array}$$



$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1241 & -241 \\ -241 & 241 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Example: $\omega_a = 1.75\text{Hz}$



Applications of Tuned Mass Damper

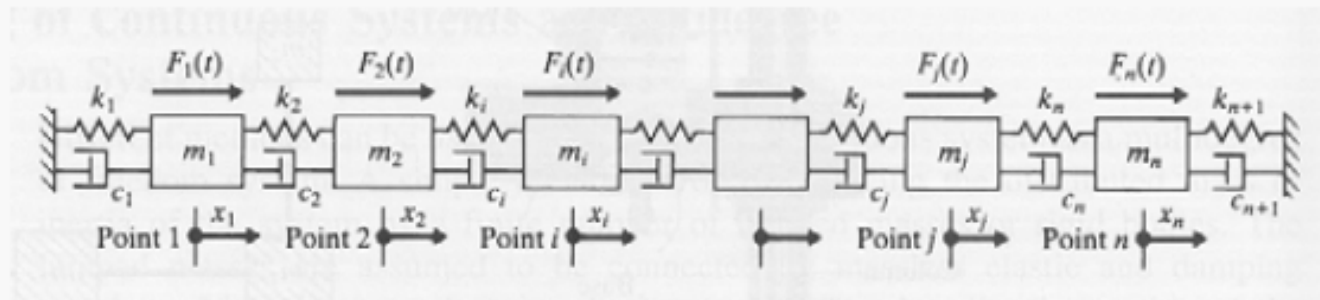
- **Automotive** (Exhaust, Steering & Suspension Systems, Rear view mirror, airbag, battery, etc.)
- **Appliances** (Washers, Dryers, Dishwasher, Refrigerators, etc.)
- **Machine Tools** (Lathes, Milling Machines, Grinders, etc.)
- **Buildings** (John Hancock Tower, Citicorp Center, Canadian National Tower)
- **Aircraft & Spacecraft** (Turbines, Inlet & Exhaust, accessory component motors, etc.)

Multiple Degree of Freedom Systems

Topics:

- 1.) Equations of Motion
- 2.) Eigenvalue Problem
- 3.) Orthogonality
- 4.) Modal Space
- 5.) Solving MDOF Problems in Simple Fashion

MDOF: Equations of Motion



Equations of Motion Using Newton's Second Law:

- 1.) Choose suitable coordinates for the point masses and rigid bodies in the system.
- 2.) Determine static equilibrium position of the system. Measure motion from this position.
- 3.) Draw free-body diagram of each mass or rigid body. Indicate all forces acting on the mass or rigid body when positive displacement or velocity is present.

4.) Apply Newton's Second Law: **Translation:** $\sum F_{x_i} = m\ddot{x}_i$

Rotation: $\sum M_{\theta_i} = J\ddot{\theta}_i$

MDOF: Equation of Motion

General Form n-DOF System

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}$$

$[m] = n \times n$ mass matrix

$[c] = n \times n$ viscous damping matrix

$[k] = n \times n$ stiffness matrix

$\{\ddot{x}\} = n \times 1$ acceleration vector

$\{\dot{x}\} = n \times 1$ velocity vector

$\{x\} = n \times 1$ displacement vector

$\{F\} = n \times 1$ externally applied force vector

MDOF: General Solution to Equation of Motion

- 1.) Determine natural frequencies (ω_i) and mode shapes $\{X\}_i$ from undamped Free Vibration. (eigensolution)**
- 2.) Use orthogonality of mode shapes to transform Equations of Motion into “*MODAL SPACE*”.**
- 3.) Solve “n” single degree of freedom problems.**
- 4.) Use mode shapes to transform back to physical space.**

MDOF: ω_i and $\{X\}_i$ from Eigensolution

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

For Harmonic Motion: $\ddot{x} = -\omega^2 x$

$$\left(-\omega^2 [m] + [k]\right)\{x\} = \{0\}$$

$$[k]\{x\} = \omega^2 [m]\{x\} \quad \text{classic eigenvalue problem}$$

Computer or calculator solution (MATLAB, Mathematica, etc.)

Yields “n” eigenvalues ω_i^2 for $i = 1, n$

and “n” eigenvectors $\{X\}_i$ for $i = 1, n$

The natural frequencies are the square roots of the eigenvalues:

$$\omega_i = \sqrt{\omega_i^2}$$

The mode shapes are the corresponding eigenvectors.

MDOF: ω_i and $\{X\}_i$ from Eigensolution

$$(-\omega^2 [m] + [k])\{x\} = \{0\}$$

To solve, the characteristic determinant = 0

$$|[k] - \omega^2 [m]| = 0$$

$$|[k] - \lambda [m]| = 0$$

results in an “n” order polynomial

$$a_n (\lambda)^n + a_{n-1} (\lambda)^{n-1} + \dots + a_1 (\lambda) + a_0 = 0$$

$$\text{roots} = \lambda_i \text{ for } i = 1, n$$

natural frequencies $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$

Substitute ω_i or λ_i into original equations for mode shape solution.

MDOF: ω_i and $\{X\}_i$ from Eigensolution

Alternate Method

$$(-\omega^2 [m] + [k])\{x\} = \{0\}$$

$$(\lambda [k] - [m])\{x\} = \{0\} \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

$$(\lambda [k]^{-1} [k] - [k]^{-1} [m])\{x\} = \{0\}$$

$$(\lambda [I] - [D])\{x\} = \{0\}$$

$[I]$ = Identity Matrix

$$\lambda [I]\{x\} = [D]\{x\}$$

$[D] = [k]^{-1} [m]$ = dynamical matrix

Solutions are the eigenvalues and eigenvectors of $[D]$.

$$\lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2} \quad \text{for } i = 1, n \quad \{X\}_i \quad \text{for } i = 1, n$$

Orthogonality of Mode Shape Vectors

$$\left(-\omega^2 [m] + [k]\right)\{x\} = \{0\}$$

Using the i th natural frequency and mode shape

$$\omega_i^2 [m]\{X\}_i = [k]\{X\}_i \quad \mathbf{1}$$

Using the j th natural frequency and mode shape

$$\omega_j^2 [m]\{X\}_j = [k]\{X\}_j \quad \mathbf{2}$$

Pre-multiply $\mathbf{1}$ by $\{X\}_j^T$ and $\mathbf{2}$ by $\{X\}_i^T$

$$\omega_i^2 \{X\}_j^T [m]\{X\}_i = \{X\}_j^T [k]\{X\}_i \quad \mathbf{3}$$

$$\omega_j^2 \{X\}_i^T [m]\{X\}_j = \{X\}_i^T [k]\{X\}_j \quad \mathbf{4}$$

Orthogonality of Mode Shape Vectors

Because of the symmetry of $[k]$, $[m]$

$$\{X\}_j^T [k] \{X\}_i = \{X\}_i^T [k] \{X\}_j$$

$$\{X\}_j^T [m] \{X\}_i = \{X\}_i^T [m] \{X\}_j$$

$$\therefore \omega_i^2 \{X\}_j^T [m] \{X\}_i = \{X\}_i^T [k] \{X\}_j \quad \mathbf{3}$$

$$\omega_j^2 \{X\}_j^T [m] \{X\}_i = \{X\}_i^T [k] \{X\}_j \quad \mathbf{4}$$

$$\text{Subtract } \mathbf{3} - \mathbf{4} \quad (\omega_i^2 - \omega_j^2) \{X\}_j^T [m] \{X\}_i = \{0\}$$

In general $\omega_i \neq \omega_j$

Also:

$$\{X\}_j^T [m] \{X\}_i = \{0\}$$

$$\{X\}_j^T [k] \{X\}_i = \{0\}$$

Modal vectors are orthogonal with respect to $[m]$, $[k]$.

Modal Mass, Stiffness, & Damping

$$\{X\}_i^T [m] \{X\}_i = M_{ii}$$

Modal Mass

$$\{X\}_i^T [k] \{X\}_i = K_{ii}$$

Modal Stiffness

$$\text{if } [c] = \alpha [m] + \beta [k]$$

Proportional Damping

$$\{X\}_i^T [c] \{X\}_i = C_{ii}$$

Modal Damping

Modal Mass, Stiffness, & Damping

Define $[X] = [\{X\}_1 \{X\}_2 \cdots \{X\}_n]$ **Modal Matrix**

$$[X]^T [m][X] = \begin{pmatrix} m_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & m_{nn} \end{pmatrix} = [M] \quad \text{Modal Mass Matrix}$$

$$[X]^T [k][X] = \begin{pmatrix} k_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & k_{nn} \end{pmatrix} = [K] \quad \text{Modal Stiffness Matrix}$$

For proportional damping:

$$[X]^T [c][X] = \begin{pmatrix} c_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & c_{nn} \end{pmatrix} = [C] \quad \text{Modal Damping Matrix}$$

Example

$$[m] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 2000 & -1000 & 0 \\ -1000 & 3000 & -2000 \\ 0 & -2000 & 4000 \end{bmatrix}$$

From $\omega_i^2 [m] \{X\} = [k] \{X\}$

$$\omega_1 = 9.15 \quad \{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 1.16 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 14.14 \quad \{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \\ -0.50 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_3 = 26.76 \quad \{X\}_3 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ -5.16 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

Example (continued)

$$[X] = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.16 & 0.00 & -5.16 \\ 1.00 & -0.50 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$[M] = [X]^T [m] [X] = \begin{bmatrix} 36.75 & & \\ & 15.00 & \\ & & 163.25 \end{bmatrix}$$

$$[C] = [X]^T [c] [X] = \begin{bmatrix} 3.08 & & \\ & 3.00 & \\ & & 116.92 \end{bmatrix}$$

$$[K] = [X]^T [k] [X] = \begin{bmatrix} 3080 & & \\ & 3000 & \\ & & 116920 \end{bmatrix}$$

Modal Space

Original Equations of Motion:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}$$

Define a new coordinate system

$$\{x\} = [X]\{q\} \qquad \{q\} = \text{Modal Space principal coordinates}$$

↙
Modal Matrix

Substitute into equation of motion

$$[m][X]\{\ddot{q}\} + [c][X]\{\dot{q}\} + [k][X]\{q\} = \{F\}$$

Pre-multiply by $[X]^T$

$$[X]^T [m][X]\{\ddot{q}\} + [X]^T [c][X]\{\dot{q}\} + [X]^T [k][X]\{q\} = [X]^T \{F\}$$

Modal Space

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = [X]^T \{F\}$$



Uncoupled equations of motion in the form of single degree of freedom systems.

$$M_{11}\ddot{q}_1 + C_{11}\dot{q}_1 + K_{11}q_1 = X_1^1 F_1 + X_2^1 F_2 + \dots + X_n^1 F_n$$

$$M_{22}\ddot{q}_2 + C_{22}\dot{q}_2 + K_{22}q_2 = X_1^2 F_1 + X_2^2 F_2 + \dots + X_n^2 F_n$$

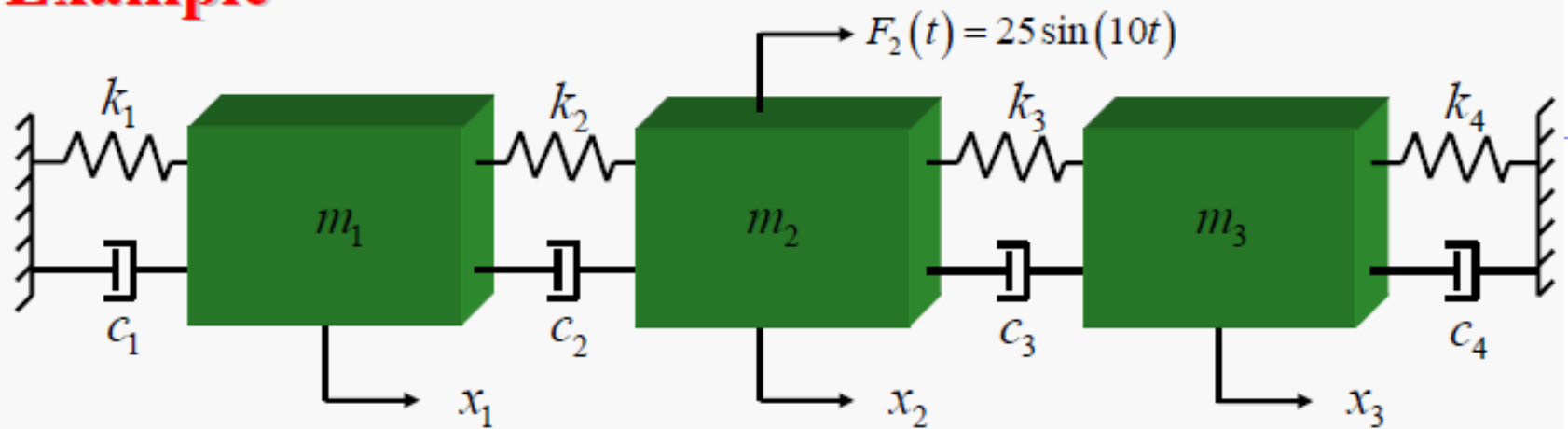
⋮

$$M_{nn}\ddot{q}_n + C_{nn}\dot{q}_n + K_{nn}q_n = X_1^n F_1 + X_2^n F_2 + \dots + X_n^n F_n$$

- Solve each SDOF system
- Transform back to physical space for total solution

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = [X] \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix}$$

Example



$$m_1 = 10 \text{ kg}$$

$$m_2 = 15 \text{ kg}$$

$$m_3 = 5 \text{ kg}$$

$$k_1 = 1000 \text{ N/m}$$

$$k_2 = 2000 \text{ N/m}$$

$$k_3 = 1000 \text{ N/m}$$

$$k_4 = 500 \text{ N/m}$$

$$c_1 = 10 \text{ N}\cdot\text{sec/m}$$

$$c_2 = 20 \text{ N}\cdot\text{sec/m}$$

$$c_3 = 10 \text{ N}\cdot\text{sec/m}$$

$$c_4 = 5 \text{ N}\cdot\text{sec/m}$$

Determine the total solution if the system starts from rest.

Example

Equations of Motion

$$\begin{bmatrix} 10 & & \\ & 15 & \\ & & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & -20 & 0 \\ -20 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3000 & -2000 & 0 \\ -2000 & 3000 & -1000 \\ 0 & -1000 & 1500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 25 \sin(10t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Determine the mode shapes and natural frequencies

$$[k]\{x\} = \omega^2 [m]\{x\}$$

$$\omega_1 = 6.62 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_2 = 17.3 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_3 = 21.4 \text{ rad/sec}$$

$$[X] = \begin{array}{ccc} \text{mode 1} & \text{mode 2} & \text{mode 3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.28 & 0.00 & -0.78 \\ 1.00 & -2.00 & 1.00 \end{bmatrix} \end{array}$$

Example

Uncouple the Equations of Motion (transform to *Modal Space*)

$$\{x\} = [X]\{q\}$$

$$[X]^T [m][X]\{\ddot{q}\} + [X]^T [c][X]\{\dot{q}\} + [X]^T [k][X]\{q\} = [X]^T \{F\}$$

$$\begin{bmatrix} 39.6 & & \\ & 30 & \\ & & 24.14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 17.36 & & \\ & 90 & \\ & & 110.13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1737 & & \\ & 9000 & \\ & & 11,013 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.28(25 \sin(10t)) \\ 0 \\ -0.78(25 \sin(10t)) \end{Bmatrix}$$

Example

Solve each SDOF system

$$39.6\ddot{q}_1 + 17.36\dot{q}_1 + 1737q_1 = 32 \sin(10t)$$

$$\zeta = \frac{17.36}{2\sqrt{39.6(1737)}} = 0.033$$

$$\omega_n = \omega_1 = 6.62$$

$$\omega_d = 6.60$$

$$q_1(t) = e^{-(0.033(6.62))t} (A \cos(6.6t) + B \sin(6.6t)) + Q \sin(10t - \phi)$$

$$r = \frac{10}{6.62} = 1.51$$

$$\text{from } \frac{XK}{F_0}(r, \zeta) = 0.78$$

$$\frac{QK}{F_0} = 0.78 \quad Q = \frac{0.78(32)}{1737} = 0.0144 \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right) = \pi$$

Example

$$q_1(t) = e^{-0.218t} (A \cos(6.6t) + B \sin(6.6t)) + 0.0144 \sin(10t - \pi)$$

Initial conditions:

$$\{x(0)\} = [X]\{q(0)\} \quad \{\dot{x}(0)\} = [X]\{\dot{q}(0)\}$$

$$\{q(0)\} = [X]^{-1}\{x(0)\} \quad \{\dot{q}(0)\} = [X]^{-1}\{\dot{x}(0)\}$$

For a system at rest: $\{q(0)\} = \{0\}$, $\{\dot{q}(0)\} = \{0\}$

$$0 = q_1(0) = (1)(A + 0) + 0.0144 \sin(-\pi) \quad A = 0$$

$$\dot{q}_1(t) = e^{-0.218t} (6.6B \cos(6.6t)) - 0.218e^{0.218t} (B \sin(6.6t)) + 0.144 \cos(10t - \pi)$$

$$0 = \dot{q}_1 = (1)(6.6B) - (1)(0) - 0.144 \quad B = 0.022$$

$$\therefore q_1(t) = e^{-0.218t} (0.022 \sin(6.6t)) + 0.0144 \sin(10t - \pi)$$

In a similar manner:

$$30\ddot{q}_2 + 90\dot{q}_2 + 9000q_2 = (0)(25 \sin(10t)) \longrightarrow q_2(t) = 0$$

$$24.14\ddot{q}_3 + 110\dot{q}_3 + 11,013q_3 = -19.5 \sin(10t) \longrightarrow$$
$$q_3(t) = e^{-2.3t} (1.25 \sin(21t)) - 0.0025 \sin(10t)$$

$$\{X\} = [X]\{q\} = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 \\ 1.28 & 0.00 & -0.78 \\ 1.00 & -2.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{Bmatrix}$$

$$x_1(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$$

$$x_2(t) = 1.28q_1(t) - 0.78q_3(t)$$

$$x_3(t) = q_1(t) - 2.00q_2(t) + q_3(t)$$