به نام خدا

حل همه تست های مثلثات 12 سال اخیر بدون استفاده از حتی یک فرمول

ارائه ی تمام نکات تستی و کنکوری

همراه با تست های سراسری و سنجش و خارج از کشور

(1380-92)

ویژه ی داوطلبان رشته ی ریاضی و تجربی

مولف : ابراهیم پناهی

دانشجوی دکتری مهندسی برق-مخابرات

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

استاد دانشگاه آزاد و

دبیر دبیرستان های تهران

ایمیل : Panahisaeed59@yahoo.com

شماره تماس : 09196025850

مرداد ماه 1392

توضیحات :

جزوه تهیه شده در واقع بخشی از کتاب کمک آموزشی اینجانب است که زمستان سال 92 وارد بازار خواهد شد.این کتاب کمک آموزشی که اکنون در مرحله ی ویرایش نهایی است , به مرور زمان و طی 2 سال اخیر و به صورت شبانه روزی تهیه شده است.

یکی از مهم ترین عواملی که باعث شد به نگارش این کتاب دست بزنم , این بود که در اکثر کتاب های کمک آموزشی و شاید بشه گفت همه ی آنها تست های ارائه شده به صورت مخلوط و غیراستاندارد است.

عدم استاندارد بودن تست ها یکی از عواملی است که در تمرکز داوطلبان کنکور نقشی بسیار منفی دارد.

من که به نوبه ی خودم هرگز به شاگردای خصوصی خودم طی چند سال اخیر اجازه ندادم که به جز تست های سراسری و سنجش و خارج از کشور , تست دیگری را مطالعه کنند؛موفقیت آنها طی سال های اخیر در آزمون کنکور نیز گواه درستی این ادعاست. شاید برخی از شماها بگید که در این صورت ممکنه با کمبود تست مواجه شوید.اما می تونید یک تست رو چندین بار حل کنید خوب.تکرار و تمرین خودش یکی از عوامل موفقیت طی هر فرایندی ست.

در کتاب آموزشی که پیش روی شماست , تمام سعی اینجانب بر این بوده است که برای همه ی مباحث روش هایی و راهکارهایی سریع که شما داوطلبان را در کوتاه ترین زمان ممکن به پاسخ صحیح می رساند ارائه شده است.البته خیلی از این راهکارها و ترفندها در سایر مباحث درسی ارائه شده است.

توصیه ی بنده به همه ی داوطلبان عزیز این است که برای اینکه به بهترین رتبه های کنکور نائل شوید فقط یادگیری مطالب و حتی تسلط کامل بر مباحث نیز نمی تواند ضامن موفقیت شما در کنکور باشد.اگر قصد دارید جزو رتبه های برتر کنکور باشید سعی کنید علاوه بر تسلط کافی بر مباحث یک سری فاکتورها را در وجود خود تقویت کنید.فاکتورهایی مانند (افزایش قدرت محاسباتی – پرهیز از نوشتن تا حد ممکن –تکنیک های محاسباتی و ...).

امیدوارم که جزوه های تهیه شده که در خدمت شما داوطلبان عزیز و گرامی قرار می گیرد موجب رضایت شما داوطلبان عزیز قرار گرفته باشد.

در این بخش همه ی تست های دوازده سال اخیر مثلثات را بدون استفاده از حتی یک فرمول حل کرده ام.

شاید خیلی از دبیران به این شیوه ی حل اینجانب ایراد بگیرند , اما من به تنها چیزی که فکر میکنم موفقیت شما دانش آموزان عزیز در آزمون سراسری کنکور هست. بالاخره هر چی نباشد , یکی از مهم ترین عواملی که در آینده ی یک انسان تاثیر به سزایی دارد , آزمون کنکور می باشد.

داوطلبان عزیز توجه داشته باشند که اینجانب این جزوه را قبلا در سایت گذاشته بودم.اما با پاسخ های تشریحی و استفاده از فرمول.

دقت کنید که دانش آموزانی که قدرت تسلط شون بر دایره ی مثلثاتی بالا و دارای قدرت محاسباتی بالایی هستند به راحتی می توانند به این روش تسلط پیدا کرده و به تست های مثلثات پاسخ دهند.

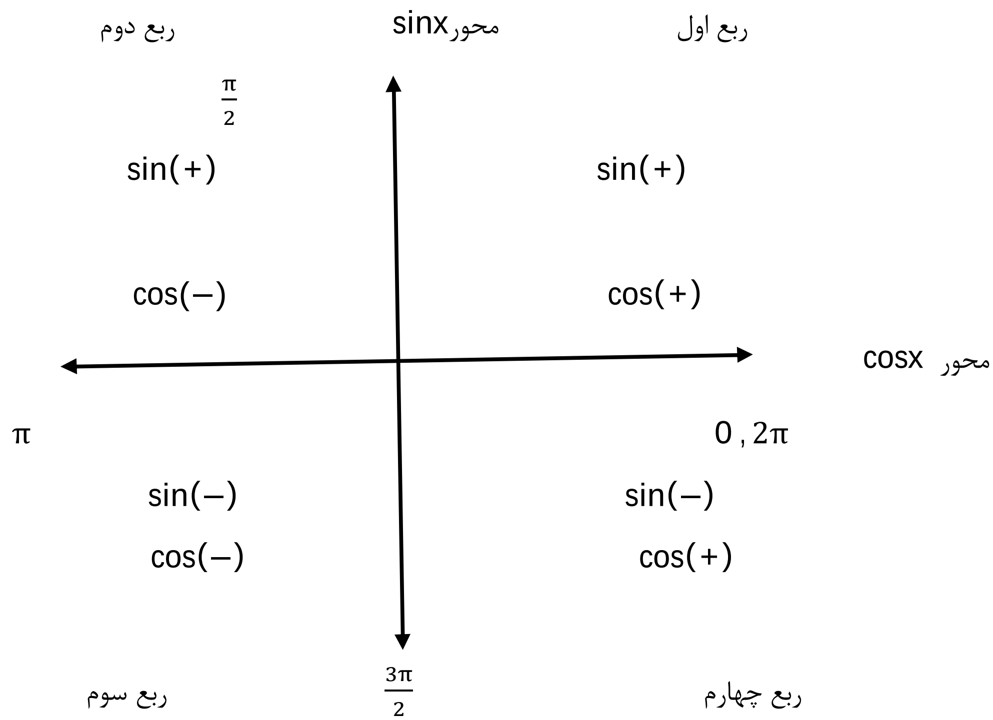
شما داوطلبان عزیز می توانید برای تهیه ی جزوات کنکوری و کلاس های خصوصی به صورت موضوعی با اینجانب تماس بگیرید.

موفق باشید.

*** مثلثات**

توابع مثلثاتی همیشه یک پای ثابت تست های کنکورهای سراسری بوده است. با وجود اینکه خیلی از دانش آموزان مبحث مثلثات را به مثابه یک غول پنداشته و کلا بی خیال آن می شوند , اما در واقعیت اینگونه نیست و اتفاقا یکی از تست هایی که به راحتی آب خوردن می توان از پس آن براومد تست مثلثات است.البته به شرطی که تمام چیزاییو که در این بخش خدمت شما داوطلبان عزیز ارائه خواهد شد را به صورت دقیق یاد بگیرید.

❄ اولین چیزی که در مبحث مثلثات یک دانش آموز به آن باید تسلط داشته باشد , دایره ی مثلثاتی است.در واقع شما داوطلبان گرامی با تسلط کافی روی دایره ی مثلثاتی نیمی از راه را پیموده اید.



خوب علامت سینوس و کسینوس در چهار ناحیه ی مثلثاتی را به خاطر بسپارید.

❄ قدم بعدی دانستن مقدار سینوس و کسینوس یکسری زوایاست.

	0	$\frac{\pi}{6}(30)^\circ$	$\frac{\pi}{4}(45)^\circ$	$\frac{\pi}{3}(60)^\circ$	$\frac{\pi}{2}(90)^\circ$	$\frac{2\pi}{3}(120)^\circ$	$\pi(180)^\circ$	$\frac{3\pi}{2}(270)^\circ$	$2\pi(360)^\circ$
Sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	$-\sqrt{3}$	0	تعریف نشده	0
cotx	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده

*** مهم ترین و پرکاربردترین روابط مثلثاتی مورد نیاز در کنکور**

1). $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2). $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}$

3). $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

4). $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

5). $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

6). $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

7). $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$

8). $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$, $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

9). $\sin k\pi = 0$ (سینوس مضارب صحیحی از π همواره صفر است.)

10). $\cos 2k\pi = 1$ (کسینوس مضارب زوجی از π همواره یک است .)

11). $\cos(2k + 1)\pi = -1$ (کسینوس مضارب فردی از π همواره یک منفی است .)

12). $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ (ربع سوم سینوس منفی است .)

13). $\sin(\pi - \alpha) = +\sin\alpha$ (ربع دوم سینوس مثبت است .)

14). $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ (ربع چهارم سینوس منفی است .)

15). $\sin(2\pi + \alpha) = +\sin\alpha$ (ربع اول سینوس مثبت است .)

16). $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ (ربع سوم کسینوس منفی است .)

17). $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ (ربع دوم کسینوس منفی است .)

18). $\cos(2\pi - \alpha) = +\cos\alpha$ (ربع چهارم کسینوس مثبت است .)

19). $\cos(2\pi + \alpha) = +\cos\alpha$ (ربع اول کسینوس مثبت است .)

20). $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

21). $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\sin\alpha$

22). $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha \quad , \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$

23). $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin\alpha \quad , \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$

❈ دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند که دیگر نیازی به اشاره ی این روابط برای توابع تانژانت و کتانژانت نیست.روابط یادشده را با استفاده از رابطه ی مثلثاتی ذکر شده در شماره ی 2 می توانید برای توابع تانژانت و کتانژانت نیز به دست آورید.باز هم اکیدا توصیه می کنم به هیچ وجه در صدد حفظ روابط یاد شده برنیایید و فقط به علامت آنها در دایره ی مثلثاتی توجه داشته باشید.

24). $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

25). $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

26). $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

27). $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

28). $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$

$29). \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

$30). \sin2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$31). \sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$32). \cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$33). \cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$34). \tan2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$35). \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

$36). \sin2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$37). \cos2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$38). \sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2} \quad , \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}$

$39). 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad , \quad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$40). \tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

*** حل معادلات مثلثاتی**

هر معادله ای را که شامل نسبت های مثلثاتی باشد را معادله ی مثلثاتی نامیده و برای حل آن باید معادله ی داده شده را به یکی از حالت های زیر درآورده و آنرا حل کنیم.

منظور از حل یک معادله ی مثلثاتی آن است که زوایایی که به ازای آنها آن رابطه ی مثلثاتی برقرار است را بدست آوریم.

$1). \sin\alpha = \sin\beta \;\rightarrow\; \alpha = 2k\pi + \beta \quad , \quad \alpha = 2k\pi + \pi - \beta$

$2). \cos\alpha = \cos\beta \;\rightarrow\; \alpha = 2k\pi \pm \beta$

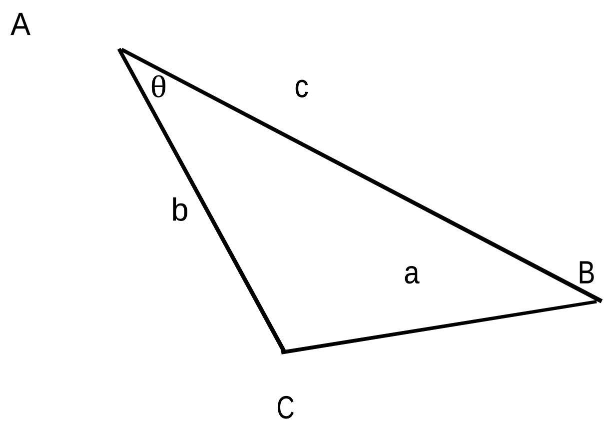
$3). \tan\alpha = \tan\beta \;\rightarrow\; \alpha = k\pi + \beta$

به یاد داشته باشید که β کوچکترین زاویه ای است که به ازای آن رابطه ی مثلثاتی داده شده برقرار است.

*** کاربرد مثلثات در هندسه**

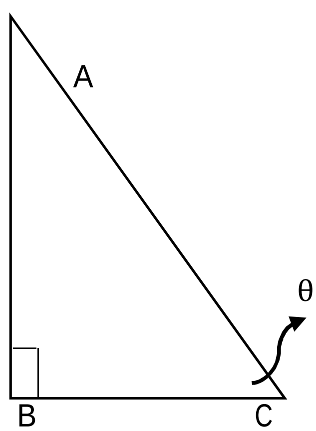
مثلثات در هندسه کاربرد فراوانی دارد.در ذیل و به ترتیب مهم ترین کاربردهای مثلثات در هندسه را که بسیار در کنکور پرکاربرد می باشد را ارائه خواهیم کرد.

الف – قضیه ی کسینوس ها در یک مثلث



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.\cos\theta$$

ب – نسبت های مثلثاتی در یک مثلث قائم الزاویه



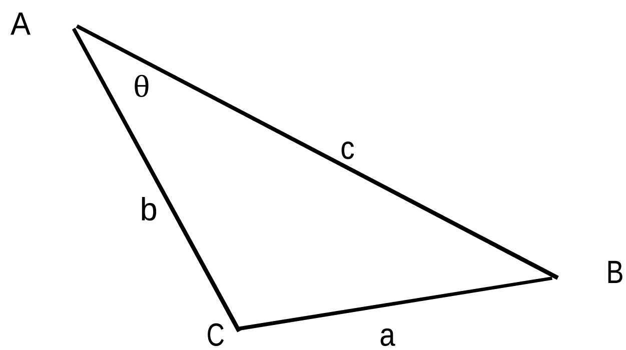
$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{AC} \qquad \tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{BC}{AB}$$

ج) – تبدیل رادیان به درجه و بالعکس

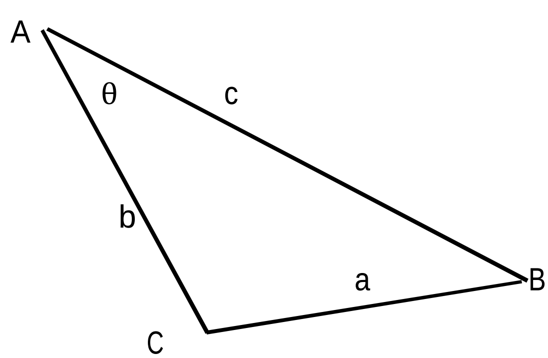
$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi}$$

د) – محاسبه ی مساحت یک مثلث با دانستن اندازه ی دو ضلع و زاویه ی بین آنها



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b.c.\sin\theta$$

ه) – قضیه ی سینوس ها در یک مثلث



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

***سخنی کوتاه با دانش آموزان عزیز**

با عرض سلام مجدد خدمت همه ی دانش آموزان و داوطلبان عزیز کنکور و آرزوی سلامتی و موفقیت همیشگی خدمت همه ی شما , به عنوان درد دل فقط خواستم مطالبی رو با شما دانش آموزان عزیز درمیان بگذارم.

اولا در مورد روش هایی که در این مبحث به کار برده شده است باید بگم که تسلط شما بر دایره ی مثلثاتی شرط اول استفاده از این مبحث است. اگه شما به دایره ی مثلثاتی تسلط داشته باشید مطمئن باشید با کمی سرعت عمل زیر سی ثانیه و به راحتی می توانید به این تست ها پاسخگو باشید.

ثانیا لازم میدونم از همه ی شما دانش آموزان عزیز که نهایت لطف رو با زنگ ها و اس ام اس ها و ایمیل ها یتان نسبت به بنده ابراز داشته اید تشکر لازم رو داشته باشم. خداوند گواه است که من فقط به خاطر موفقیت شما دانش آموزان عزیز این جزوه ها رو در اختیارتان می گذارم و باید هم بهم حق بدین که نتونم همه ی مباحث رو همینطوری در سایت قرار دهم.

حل تست های مثلثات بدون استفاده از فرمول یکی از کارهایی هستش که من روی آن خیلی زحمت کشیدم.فقط به خاطر موفقیت شما دانش آموزان عزیز.

اما متاسفانه خیلی از دبیران با این روش بنده به مخالفت دسته جمعی برخاسته و طوری به اینجانب حمله ور شده اند و ایراد می گیرند از روش هایی که بنده در این مبحث به کار بستم , انگاری ارث پدرشان را از من طلبکار باشند!

همین هفته ی اخیر که من در یک همایش این مبحث رو به همین شکلی که در اختیار شما دانش آموزان عزیز قرار می دهم ارائه نمودم , متاسفانه با بی مهری های زیادی از سوی دبیران و همکاران خویش مواجه شدم....گرچه خیلی از دوستان و همکاران اینجانب هم با تمجید از اینجانب , انتقادهای بعضا بی جای سایر همکاران را از روی حسادت دانسته و به بنده ابراز محبت کردند.البته ابراز محبتی که اکثریت دانش آموزان عزیز نسبت به بنده در این همایش ابراز داشتند , باعث آرامش خاطر اینجانب گردید.

در هر صورت و با وجود تمام ناملایمت ها پروردگار بزرگ را گواه می گیرم که هدف من از ارائه ی این مطالب چیزی جز موفقیت شما دانش آموزان عزیز نبوده و نیست.

هر کس هر چه می خواهد بگوید....همین که شما از من راضی باشید همین برایم بس است.

به امید قبولی همه ی دانش آموزان عزیز .....شاد و سرفراز باشید.در پناه حق.

ابراهیم پناهی – دی ماه 92

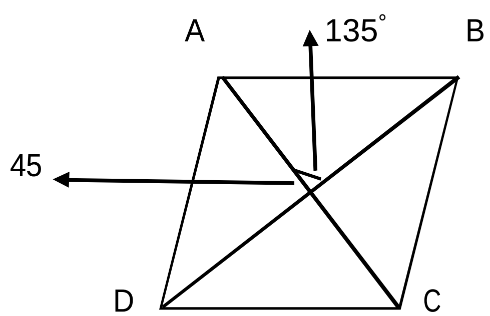
" تست های سراسری و سنجش مثلثات "

1- در متوازی الاضلاعی , اندازه ی دو قطر 12 و 8 واحد و زاویه ی بین دو قطر 135 درجه است.مساحت متوازی الاضلاع چند برابر $\sqrt{2}$ است؟(سراسری تجربی – 92)

1) 18 2) 24 3) 32 4) 36

گزینه ی 2 صحیح است.

همانطور که می دانیم در یک متوازی الاضلاع , قطرها یکدیگر را نصف می کنند.یعنی با چهار مثلث که اندازه ی دو ضلع هرکدام از مثلث ها و زاویه ی بینشان مشخص است مواجه هستیم :



اگر نقطه ی تقاطع قطرها را O بنامیم , خواهیم داشت :

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{ODC} + S_{OBC} + S_{OAD} = \frac{1}{2}0A.OB.\text{Sin}\,135 + \frac{1}{2}OD.OC.\sin135 +$$

$$\frac{1}{2}OB.OC.\sin45 + \frac{1}{2}OA.OD.\sin45 = \frac{1}{2}(6)(4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}(4)(6)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}(4)(6)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}(6)(4)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

2-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\sqrt{2}\mathbf{sinx.cosx} = \mathbf{sinx} + \mathbf{cosx}$ کدام است؟(سراسری ریاضی – 92)

1) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ 2). $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ 3). $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ 4) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$2\sqrt{2}\sin x.\cos x = \sin x + \cos x \xrightarrow{\sin 2x = 2\sin x.\cos x} \sqrt{2}\sin 2x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$$

$$\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

دقت شود که از بین جواب های به دست آمده , گزینه ی 3 صحیح تر و در واقع کلی تر است.

بدون استفاده از فرمول :

قبل اینکه شروع به حل تست کنیم یه چیزیو فقط بگم.اونم اینکه من توضیح بسیار مفصلی در مورد این روش ها ارائه دادم.فقط به خاطر اینکه هیچ ابهامی تو ذهن شما داوطلب گرامی باقی نماند.پس حل این تست ها از نظر من همشون در عرض کمتر از سی ثانیه به نتیجه می رسه و شما باید قدرت و سرعت محاسباتتونو بالا ببرید.

لطفا دقت کنید.تمام مطالبی که در این جا نگارش می شه شما باید تو ذهنتون مطالب رو تداعی کنین و به هیچ وجه نیازی به قلم درآوردن این مطالب نیست.

من اگه k رو صفر بدم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه $\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 2 میشه $-\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 3 میشه $\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 4 هم میشه $\pm\frac{\pi}{4}$. خوب این یعنی چی؟یعنی شما باید یه $-\frac{\pi}{4}$ رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 1 و 3 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان $-\frac{\pi}{4}$ را ظاهر نمی کنند.اگه نادرست بود. گزینه ها ی 2 و 4 حتما نادرست هستند.

خوب امتحان می کنیم. بازم میگم نمیخاد بنویسی.همینجوری با چشمات دنبال کن و $-\frac{\pi}{4}$ رو بزار تو معادله...

$$2\sqrt{2}\sin x.\cos x = \sin x + \cos x \xRightarrow{x=-\frac{\pi}{4}\ ,\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\text{و}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}} 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow -\sqrt{2} = 0$$

خوب حالا که $-\frac{\pi}{4}$ جواب نادرست معادله است , پس گزینه های 2 و 4 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 1 درسته یا گزینه ی 3؟

خوب کی میتونه بگه فرق گزینه های 1 و 3 چیه؟ دقت کنید من اگه بیام k رو یک بدم , گزینه ی یک کمان $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 3 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه...یعنی من اگه بتونم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدم , به گزینه ی صحیح تست رسیدم.

خوب قبل اینکه این کمان را در معادله تست کنیم , یادآور می شوم که این کمان در ناحیه ی سوم مثلثاتی قرار داشته و همانطور که می دانیم علامت سینوس و کسینوس در این ناحیه منفی می باشد.

$$2\sqrt{2}\sin x.\cos x = \sin x + \cos x \xRightarrow{x=\frac{5\pi}{4}\ ,\sin x=\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}} 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \to \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

یعنی گزینه ی 1 نیز نادرست بوده و گزینه ی 3 پاسخ صحیح تست است.

داوطلب عزیز و گرامی جواب تست اینهمه نیستا! من دارم توضیح میدم که برای شما جا بیوفته...وگرنه این تست رو کسی به دایره ی مثلثاتی مسلط و قدرت تجزیه و تحلیل و محاسباتی ش بالا باشه میتونه در 15 ثانیه پاسخگو باشه!

3-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2\frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 92)

1). $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$　　2) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$　　3) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$　　4) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2\frac{5\pi}{4} \to (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \to$$

$$(1)(-\cos 2x) = \frac{1}{2} \to \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \to 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \to x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

بدون استفاده از فرمول :

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه $\pm\frac{\pi}{6}$, گزینه ی 2 میشه $\pm\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 3 میشه $\pm\frac{\pi}{6}$, گزینه ی 4 هم میشه $\pm\frac{\pi}{3}$. خوب این یعنی چی؟یعنی شما بیاید یه $\frac{\pi}{6}$رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 2 و 4 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان $\frac{\pi}{6}$ را ظاهر نمی کنند.اگه نادرست بود. گزینه ها ی 1 و 3 حتما نادرست هستند.

همینجوری با چشمات دنبال کن و $\frac{\pi}{6}$رو بزار تو معادله...

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2\frac{5\pi}{4} \xRightarrow{x=\frac{\pi}{6}\ ,\sin x=\frac{1}{2} \text{ و } \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ و } \sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \to \frac{1}{16} - \frac{9}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\to -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$$

خوب حالا که $\frac{\pi}{3}$جواب نادرست معادله است , پس گزینه های 1 و 3 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 2 درسته یا گزینه ی4؟

خوب فرق گزینه های 2 و 4 چیه؟ من اگه بیام k رو یک بدم , گزینه ی چهار کمان $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 2 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه..غیر اینه؟.یعنی من اگه بتونم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدم , به پاسخ صحیح تست رسیدم.

خوب قبل اینکه این کمان را در معادله تست کنیم , یادآور می شوم که این کمان در ناحیه ی دوم مثلثاتی قرار داشته و همانطور که می دانیم علامت سینوس در این ناحیه مثبت و علامت کسینوس در این ناحیه منفی می باشد.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2\frac{5\pi}{4} \xrightarrow{x=\frac{2\pi}{3}\ ,\cos x=-\frac{1}{2}\ \text{و}\ \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{و}\ \sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

یعنی گزینه ی 4 پاسخ صحیح تست بوده و گزینه ی 2 به خاطر اینکه کلی نیست نمی تواند پاسخ صحیح تست باشد!

4-اگر $\alpha + \beta = \frac{5\pi}{4}$ باشد , حاصل $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی92)

1) 3   2) 2   3) 4   4) 1

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{\text{ربع سوم علامت tan مثبت است}} 1$$

$$\xrightarrow{\text{با طرفین وسطین کردن عبارت}} \tan\alpha + \tan\beta = 1 - \tan\alpha.\tan\beta$$

$$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta) = 1 + \tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha.\tan\beta = 1 + 1 - \tan\alpha.\tan\beta +$$

$$\tan\alpha.\tan\beta = 2$$

خوب گرچه تست چندان دشواری نبود , اما شاید برخی از داوطلبان عزیز کنکور به هر دلیلی یا رابطه ی مثلثاتی یادشده رو بلد نباشند و به ذهنشون نرسیده باشه یا اینکه ممکنه طرفین وسطین کردن عبارت باعث حل تست بشه به ذهنشون تداعی نکرده باشه...خوب نطرتون در مورد راه حل زیر چیه؟!

البته قبلش یه چیزیو بگم! یهو یکی نیاد بگه من تو جمع و تفریق کمان های مثلثاتی مشکل دارم.! اگه اینجوریه هرچه سریع تر این نقیصه رو برطرف کنین.

بدون استفاده از فرمول :

خیلی ساده ست؛تمام کمان هایی رو که جمع شون $\frac{5\pi}{4}$ است در نظر می گیریم...البته باید توجه داشته باشیم که این کمان ها مقدار تانژانت شان برای ما معلوم باشد یا تعریف شده باشد؛

$$\alpha = \frac{\pi}{4}\quad,\quad \beta = \pi \quad \rightarrow \quad (1+1)(1+0) = 2$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \tan\frac{\pi}{2}\ \text{تعریف نشده} \quad , \quad \beta = \frac{3\pi}{4} \quad \rightarrow \text{نیازی به بررسی نیست}$$

5-اگر $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ باشد , مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟(سنجش جامع تجربی92)

1) 0.3 **2) 0.4** **3) 0.6** **4) 0.8**

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

حتما رابطه ی 34 را در روابط مثلثاتی به یاد دارید...

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2(\frac{1}{2})}{1+(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

بدون استفاده از فرمول :

داوطلبان عزیز دقت داشته باشند که به هیچ وجه روش هایی که اینجا گفته می شه غیرمنطقی نیست و هر آنچه در حل تست های مثلثات بدون استفاده از فرمول گفته می شود با منطق و عقل و درک آدمیزاد سازگار است!

قبل از اینکه به حل تست بپردازیم ذکر یک مطلب ضروری ست و آن اینکه مقدار رادیکال یک سری اعداد رو باید بدونیم . با این پیش زمینه خواهیم داشت :

$$\sqrt{3} \cong 1.7 \quad , \quad tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.7}{3} = 0.57$$

خوب در صورت تست گفته شده $\tan\alpha = 0.5$. یعنی زاویه ی α زاویه ایست نزدیک به زاویه ی 30 درجه و کمی کمتر از آن.زیرا می دانیم :

$$\alpha > \beta \rightarrow tg\alpha > tg\beta$$

تازه ما اگه بیایم زاویه رو همون 30 درجه فرض کنیم , در واقع محاسبه ی سینوس 60 مطلوب مساله خواهد بود . با این فرض :

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.7}{2} = 0.85$$

با توجه به اینکه تفاوت تانژانت زاویه ی 30 درجه با تانژانت زاویه ی داده شده حدود 0.07 است , مطمئنا تفاوت سینوس دو زاویه نیز در همین حدود خواهد بود و بالطبع نزدیکترین عدد به عدد 0.85 عدد گزینه ی 4 یعنی 0.8 است.

تذکر: تانژانت یک زاویه با سینوس آن زاویه نسبت مستقیم دارد.

6-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{1-\cos2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 2\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟(سنجش جامع تجربی92)

1.) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ **2)** $k\pi + \frac{\pi}{3}$ **3)** $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ **4)** $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$1 - \cos2\alpha = 2\sin^2\alpha \ \rightarrow \frac{1-\cos2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 2\sqrt{3} \ \rightarrow \frac{2\sin^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 2\sqrt{3}$$

با طرفین وسطین کردن نتیجه ی به دست آمده خواهیم داشت :

$$\sin^2\alpha = \sqrt{3}\sin\alpha.\cos\alpha$$

قبل اینکه به ادامه ی حل تست بپردازیم ذکر یک نکته ضروری است و آن اینکه در حل یک معادله ی مثلثاتی به هیچ عنوان حق ندارین که چیزی را از طرفین ساده کنید.!

$$\sin^2\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha.\cos\alpha = 0 \ \rightarrow \sin\alpha(\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha) = 0$$

در نتیجه :

$$\sin\alpha = 0 \ \rightarrow \ \alpha = k\pi$$

$$\tan\alpha = \sqrt{3} \ \rightarrow \ \alpha = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

چون جواب کلی مورد نظر است کاملا مشخص است که گزینه ی 2 صحیح است.

بدون استفاده از فرمول:

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه $\frac{\pi}{6}$, گزینه ی 2 میشه $\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 3 میشه $\frac{\pi}{6}$, گزینه ی 4 هم میشه $\frac{\pi}{3}$. خوب این یعنی چی؟یعنی شما بیاید یه $\frac{\pi}{6}$ رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 2 و 4 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان $\frac{\pi}{6}$ را ظاهر نمی کنند.اگه نادرست بود. گزینه ها ی 1 و 3 حتما نادرست هستند.

همینجوری با چشمات دنبال کن و $\frac{\pi}{6}$ رو بزار تو معادله...

$$\frac{1-\cos2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 2\sqrt{3} \xRightarrow{x=\frac{\pi}{6},\ \sin x=\frac{1}{2},\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1-\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{6}.\cos\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3} \rightarrow \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}.(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 2\sqrt{3}$$

خوب حالا که $\frac{\pi}{6}$ جواب نادرست معادله است , پس گزینه های 1 و 3 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 2 درسته یا گزینه ی4؟

خوب فرق گزینه های 2 و 4 ؟ من اگه بیام k رو یک بدم , گزینه ی دو کمان $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 4 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه.. یعنی اگه بتونیم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدیم , به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

خوب قبل اینکه این کمان را در معادله تست کنیم , یادآور می شوم که این کمان در ناحیه ی سوم مثلثاتی قرار داشته و همانطور که می دانیم علامت سینوس در این ناحیه منفی و علامت کسینوس نیز در این ناحیه منفی می باشد.

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 2\sqrt{3} \xRightarrow{\alpha=\frac{4\pi}{3},\ \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos x=-\frac{1}{2}} \frac{1-\cos\frac{8\pi}{3}}{\sin\frac{4\pi}{3}.\cos\frac{4\pi}{3}} = 2\sqrt{3} \rightarrow \frac{1-\cos(3\pi-\frac{\pi}{3})}{(-\frac{1}{2}).(-\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} =$$

$$\rightarrow \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

یعنی گزینه ی 2 پاسخ صحیح تست بوده و گزینه ی 4 به خاطر اینکه کلی نیست نمی تواند پاسخ صحیح تست باشد!

7-در مثلثی $c^{\circ} = 60$, $b = 4$, $a = 5$ است , اندازه ی ضلع c کدام است؟(سنجش جامع تجربی92)

1) $2\sqrt{7}$ **2)** $2\sqrt{6}$ **3)** $\sqrt{21}$ **4)** $3\sqrt{2}$

گزینه ی 3 صحیح است.

با توجه به قضیه ی کسینوس ها در یک مثلث داریم :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos c \rightarrow c^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(4)\cos 60 = 25 + 16 - 40(0.5)$$

$$c^2 = 41 - 20 = 21 \rightarrow c = \sqrt{21}$$

8-نمودار تابع $y = -4\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$ روی بازه ی $[-1$ و $1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟(سراسری تجربی – 91)

1.(1 **2.(2** **3.(3** **4.(4**

گزینه ی 3 صحیح است.

گرچه تست مطرح شده را می توان با استفاده از مشتق نیز حل نمود , اما در واقع حل تست به روش مثلثات مطلوب مساله است:

کاملا مشخص است که برای آنکه تابع داده شده بیشترین مقدار را در بازه ی مذکور داشته باشد این است که عبارت

$\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$ کمترین مقدار را به خود بگیرد...و همانطور که می دانیم کمترین مقداری که یک تابع کسینوسی می تواند داشته باشد مقدار 1- است:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-3\pi x\right) = -1 = \cos\pi \xrightarrow{\cos\alpha=\cos\beta \to \alpha=2k\pi\pm\beta} \frac{\pi}{4}-3\pi x = 2k\pi \pm \pi$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}-3x = 2k+1 \to -3x = 2k+\frac{3}{4} \to x = -\frac{2k}{3}-\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}-3x = 2k-1 \to -3x = 2k-\frac{5}{4} \to x = -\frac{2k}{3}+\frac{5}{12} \end{cases}$$

با یکی از جواب های به دست آمده نیز می توان تعداد جواب ها را مشخص نمود. -

با توجه به اینکه $-1 \le x \le 1$ ؛ داریم :

$$-1 \le -\frac{2k}{3}-\frac{1}{4} \le 1 \xrightarrow{\text{به طرفین اضافه } \frac{1}{4}} -\frac{3}{4} \le -\frac{2k}{3} \le \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{طرفین نامعادله ضربدر} -\frac{3}{2}} -\frac{15}{8} \le k \le \frac{9}{8}$$

پس چون سه مقدار صجیج k=-1 , 0 , 1 قابل قبول است پس عبارت یاد شده در بازه ی داده شده نیز در سه نقطه از آن بازه بیشترین مقدار را دارد.

9-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2}+x)$ به کدام صورت است؟(سراسری تجری 91)

1). $\frac{k\pi}{3}$ 2) $\frac{2k\pi}{3}$ 3) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 4) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) \to -\cos 2x = -\cos x \to \cos 2x = \cos x$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \to \alpha = 2k\pi \pm \beta \to 2x = 2k\pi \pm x$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x = 2k\pi \to x = \frac{2k\pi}{3} \\ \\ x = 2k\pi \end{array}\right. \xrightarrow{\text{جواب کلی تر}} x = \frac{2k\pi}{3}$$

بدون استفاده از فرمول :

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه 0 , گزینه ی 2 میشه 0 , گزینه ی 3 میشه $\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 4 هم میشه $\pm\frac{2\pi}{3}$. خوب این یعنی چی؟یعنی شما باید یه 0 رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 3 و 4 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان 0 درجه را ظاهر نمی کنند.اگه نادرست بود. گزینه ها ی 1 و 2 حتما نادرست هستند.

0 رو بزار تو معادله...

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\xrightarrow{x=0\ \ ,\sin x=0\ \text{و}\cos x=1}0-1=-1\rightarrow -1=-1$$

خوب حالا که 0 جواب درست معادله است , پس گزینه های 3 و 4 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 1 درسته یا گزینه ی2؟

خوب فرق گزینه های 1 و 2 ؟ من اگه بیام k رو یک بدم , گزینه ی یک کمان $\frac{\pi}{3}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 2 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه.. یعنی اگه بتونیم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدیم , به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

خوب قبل اینکه این کمان را در معادله تست کنیم , یادآور می شوم که این کمان در ناحیه ی اول مثلثاتی قرار داشته و همانطور که می دانیم علامت سینوس در این ناحیه مثبت و علامت کسینوس نیز در این ناحیه مثبت می باشد.

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{3}\ \ ,\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{و}\cos x=\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{11\pi}{6}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\rightarrow\frac{2}{4}\neq-\frac{1}{2}$$

یعنی گزینه ی 1 هم نادرست بوده و گزینه ی 2 پاسخ صحیح تست است.

10-اگر $\tan\theta=0.2$ باشد , مقدار $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}$ کدام است؟(سراسری ریاضی 91)

1) -2 2) 1.2 3) 2 4) 3

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول معادل بدون استفاده از فرمول

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(3\pi+\theta)}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta+\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\sin\theta}\xrightarrow{\text{کل رابطه را بر }\cos\theta\text{ تقسیم میکنیم}}$$

$$\frac{\tan\theta+1}{2\tan\theta}=\frac{0.2+1}{2(0.2)}=\frac{1.2}{0.4}=3$$

خدایی دیگه همه می دانند که نسبت سینوس به روی کسینوس برابر با تانژانت است.

11-خلاصه شده ی کسر $\frac{\sin^2 7x-\sin^2 2x}{\sin 5x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{54}$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی 91)

1) $\frac{1}{2}$ **2)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **3)** 1 **4)** $\sqrt{3}$

گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$\frac{\sin^2 7x-\sin^2 2x}{\sin 5x}=\frac{(\sin 7x+\sin 2x)(\sin 7x-\sin 2x)}{\sin 5x}=\frac{(2\sin\frac{9x}{2}.\cos\frac{5x}{2})(2\sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{9x}{2})}{\sin 5x}$$

$$\frac{(2\sin\frac{9x}{2}.\cos\frac{9x}{2})(2\sin\frac{5x}{2}.\cos\frac{5x}{2})}{\sin 5x}=\frac{\sin 9x.\sin 5x}{\sin 5x}=\sin 9x=\sin 9\left(\frac{\pi}{54}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

این دو رابطه را که بیشتر مخصوص بچه های رشته ی ریاضی است به یاد داشته باشید.

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

بدون استفاده از فرمول:

قبل از اینکه به حل تست بپردازیم ذکر یک نکته رو ضروری می دانم و آن این است که اگه در یک رابطه ی تساوی مثلثاتی کمانی را m برابر کنیم , طرف دیگر آن تساوی نیز باید کمان هایش m برابر شود.پس یعنی اگر در یک تساوی مثلثاتی , کمان ها را m برابر کنیم هیچ تغییری در رابطه ی مثلثاتی ایجاد نخواهد شد.

با توجه به این ویژگی مهم و اینکه محاسبه ی نسبت های مثلثاتی کمان $\frac{\pi}{54}$ برای ما مقدور نیست , کمان را به صورت مضربی از عدد $\frac{1}{9}$ می نویسیم . یعنی :

$$\frac{\pi}{54}=\frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

حال به محاسبه ی رابطه ی مثلثاتی فوق با فرض $x=\frac{\pi}{6}$ می پردازیم :

$$\frac{\sin^2 7x-\sin^2 2x}{\sin 5x}=\frac{\sin^2\frac{7\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{5\pi}{6}}=\frac{(-\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-1=\sin\frac{3\pi}{2}$$

همانطور که می دانیم سینوس زاویه ی $\frac{3\pi}{2}$ برابر 1- است. یادتون که نرفته؟کمان رو الان باید $\frac{1}{9}$ برابر کنیم ! درسته؟خوب اینکارو میکنم...

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\times\frac{1}{9}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

یعنی گزینه ی 1 پاسخ صحیح تست است.

12-از معادله ی $\tan x - \cot x = 4$, مقدار $\tan 2x$ کدام است؟(سنجش جامع 91 تجربی)

1) -2 **2) $\frac{-1}{2}$** **3) $\frac{1}{2}$** **4) 2**

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$\tan x - \cot x = 4 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x . \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = -2\cot 2x = 4$$

$$\cot 2x = -2 \rightarrow \tan 2x = -\frac{1}{2}$$

بدون استفاده از فرمول :

با توجه به رابطه ی مثلثاتی $\tan x - \cot x = 4$ من با قاطعیت می تونم بگم که مقدار $\tan x$ حتما از 4 بیشتر هستش!چرا؟چون تازه باید از تانژانت یه چیزی تازه باید کم بشه تا بشه 4...درسته؟غیر این نیست که...تازه می دانیم مقدار کتانژانت هم معکوس تانژانت هستش و قرینه ش نیست که این یقین مارو نقض کنه...
خوب اینکه تانژانت زاویه ی ما بیشتر از 4 هستش یعنی چی؟یعنی اینکه زاویه ی ما بین دو زاویه ی 60 و 90 قرار داره...درسته؟
خوب یعنی دو برابر زاویه ی مورد نظرمون بین دو زاویه ی 120 و 180 قرار داره....حال با توجه به اینکه می دانیم تانژانت زاویه ی 120 درجه برابر تانژانت زاویه ی 60 درجه و البته با علامت منفی هستش.چون این کمان در ناحیه ی دوم مثلثاتی قرار داره و در این ناحیه علامت تانژانت همانطور که می دانیم همواره منفی است.تانژانت زاویه ی 120 درجه پس برابر $-\sqrt{3} = -1.7$ و تانژانت زاویه ی 180 درجه هم می دانیم که صفر است.

یعنی تانژانت زاویه ی مطلوب تست بین دو عدد صفر و منفی 1.7 قرار دارد و تنها عددی که با این شرایط سازگاری دارد عدد گزینه ی دو یعنی $-\frac{1}{2}$ است.

پس گزینه ی 2 پاسخ صحیح تست می باشد.

13-بزرگترین زاویه از مثلثی به اضلاع 7 و 5 و 3 چند درجه است؟(سنجش جامع 91 تجربی)

1) 60 **2) 75** **3) 105** **4) 120**

گزینه ی 4 صحیح است.

طبق قضیه ی کسینوس ها در یک مثلث می دانیم که بزرگترین زاویه , مربوط به زاویه ای است که در مقابل بزرگترین ضلع قرار داره...پس می توان نوشت :

$$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2(3)(5)\cos\alpha \rightarrow 49 = 25 + 9 - 30\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

و همانطور که می دانیم کسینوس زاویه ی 120 درجه جواب تست است.

تذکر :

داوطلبان گرامی توجه داشته باشند که اینگونه نباشد که هر فرایندی رو که طی حل یک تست طی می کنند روی کاغذ پیاده کنند...نوشتن بیش از حد در واقع به منزله ی سم برای یک داوطلب کنکور می باشد.پس سعی کنید در حل یک تست تا حتی الامکان از نوشتن پرهیز نموده و بیشتر و یا حداقل نصف محاسبات رو به صورت ذهنی انجام دهید.

مطمئن باشید که تمام داوطلبانی که به رتبه های برتر کنکور نائل می شوند کسانی هستند که قدرت محاسباتی بسیار بالایی دارند و تا حد امکان از نوشتن می زنند و خیلی از محاسبات رو تو ذهنشون انجام می دهند.پس اگه شما هم به دورنمایی اینگونه می اندیشید به نکات ذکر شده توجه داشته باشید.

اینجانب هم هر جا لازم بوده و در تمامی مباحث به مواردی که باعث بشه به شما کمک بشه و تکنیک های محاسباتی سریع اشاره کرده ام.

14-در مثلثی به اضلاع 7 و 5 و 3 واحد , تانژانت بزرگترین زاویه ی آن کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) $-\sqrt{3}$ **2)** $-\sqrt{2}$ **3)** $\sqrt{5}$ **4)** $2\sqrt{2}$

گزینه ی 1 صحیح است.

ابتدا با استفاده از قضیه ی کسینوس ها مقدار بزرگترین زاویه ی این مثلث را پیدا می کنیم؛

همانطور که در درس هندسه خواندیم , بزرگترین زاویه مربوط به زاویه ی مقابل به بزرگترین ضلع مثلث است.پس می توان نوشت:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha \rightarrow 7^2 = 5^2 + 3^2 - 2(3)(5)\cos\alpha \rightarrow 49 = 25 + 9 - 30\cos\alpha$$

$$49 = 34 - 30\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120 \rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{3}$$

15-اگر $2a + b = \frac{\pi}{2}$ باشد , حاصل $\tan a + \tan b$ کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) $\cos b$ **2)** $\cos a$ **3)** $\frac{1}{\cos a}$ **4)** $\frac{1}{\cos b}$

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a.\cos b + \cos a.\sin b}{\cos a.\cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b} \xrightarrow{b=\frac{\pi}{2}-2a} \frac{\sin\left(a + \frac{\pi}{2} - 2a\right)}{\cos a.\cos b}$$

$$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - a)}{\cos a.\cos b} = \frac{\cos a}{\cos a.\cos b} = \frac{1}{\cos b}$$

بدون استفاده از فرمول :

با توجه به رابطه ی $2a + b = \frac{\pi}{2}$, اگر $a = \frac{\pi}{4}$ و $b = 0$ را فرض کنم (قبل اینکه به حل تست ادامه بدم یه مطلبی رو ذکر کنم و اونم اینکه من باید کمان هایی برای b و a انتخاب کنم که تانژانت شون تعریف شده باشه , چون حاصل $\tan a + \tan b$ مطلوب مساله است). در این صورت عبارت خواسته شده به چه صورتی درمی آید ؟

$$\tan a + \tan b = \tan\frac{\pi}{4} + \tan 0 = 1 + 0 = 1$$

حال باید گزینه ها رو با این مقادیر اختیار شده برای b و a باید درستی شونو چک کنم!

گزینه ی 1 یعنی $\cos b$ به ازای 0 مقدارش میشه 1....یعنی همون مقداری که برای عبارت $\tan a + \tan b$ به دست اومد...

گزینه ی 2 یعنی $\cos a$ به ازای $\frac{\pi}{4}$ مقدارش میشه $\frac{\sqrt{2}}{2}$....متفاوت با مقداری که برای عبارت $\tan a + \tan b$ به دست اومد...در نتیجه این گزینه حتما غلط است!

گزینه ی 3 یعنی $\frac{1}{\cos a}$ به ازای $\frac{\pi}{4}$ مقدارش میشه $\sqrt{2}$....متفاوت با مقداری که برای عبارت $\tan a + \tan b$ به دست اومد...در نتیجه این گزینه نیزحتما غلط است!

گزینه ی 4 یعنی $\frac{1}{\cos b}$ به ازای 0 مقدارش میشه 1....یعنی همون مقداری که برای عبارت $\tan a + \tan b$ به دست اومد...

حال با توجه به اینکه گزینه های 1 و 4 هر دو می توانند پاسخ صحیح تست باشند باید یه حالت دیگه برای b و a بیان کنیم تا بتوانیم گزینه ی صحیح را از بین این دو گزینه به دست آوریم!

اگر $a = \frac{\pi}{6}$ و $b = \frac{\pi}{6}$ را فرض کنم چی؟ در این صورت عبارت خواسته شده به چه صورتی درمی آید ؟

$$\tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

حال باید گزینه های 1 و 4 رو با این مقادیر اختیار شده برای b و a باید درستی شونو چک کنم!

گزینه ی 1 یعنی $\cos b$ به ازای $\frac{\pi}{6}$ مقدارش میشه $\frac{\sqrt{3}}{2}$....یعنی متفاوت با مقداری که برای عبارت $\tan a + \tan b$ به دست اومد...

گزینه ی 4 یعنی $\frac{1}{\cos b}$ به ازای $\frac{\pi}{6}$ مقدارش میشه $\frac{2}{\sqrt{3}}$....یعنی همون مقداری که برای عبارت $\tan a + \tan b$ به دست اومد...

پس گزینه ی 4 پاسخ صحیح تست است.

16-اگر $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ باشد حاصل $\tan a.\tan b + \tan b.\tan c + \tan c.\tan a$ کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)(مطالعه ی این سوال به داوطلبان رشته ی تجربی توصیه نمی شود.!)

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1   3) 2   4) 3

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

شاید خیلی از شما به این فکر کنین که بخواین همون روشی رو که تو حل تست قبلی به کار گرفتینو تو همین تست هم به کار ببندین...به هیچ وجه دست به این کار نزنین که دستیابی به جواب نهایی تست بسیار سخت بوده و شاید امکان ناپذیر باشد؛

$$a + b + c = \frac{\pi}{2} \rightarrow a + b = \frac{\pi}{2} - c \xrightarrow{\text{از طرفین تانژانت می گیریم}} \tan(a + b) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \cot c$$

$$\rightarrow \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b} = \frac{1}{\tan c} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 1 - \tan a . \tan b = \tan a . \tan c + \tan b . \tan c$$

$$\tan a . \tan b + \tan b . \tan c + \tan a . \tan c = 1$$

تست واقعا سختی بود و دانش آموز باید خیلی زرنگ و دارای چنین ذهنی قوی باشه تا به چنین راه حلی فکر کنه...البته قابل ذکر است که در طول سال های اخیر چند باری چند تستی به این گونه حل شده است.به هر حال تمرین و تکرار و تجربه در حل تست های گوناگون نیز یکی از عواملی است که باعث افزایش تمرکز و حضور ذهنی داوطلبان می شود.

بدون استفاده از فرمول :

مگه غیر اینه که $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ ؟! خوب من میام کمان هایی برای c و b و a که البته!!! تانژانت اون زوایا تعریف شده باشد و در رابطه ی داده شده صدق می کند را درنظر می گیرم...

اگر $c = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$, $a = \frac{\pi}{4}$ فرض شوند , باید ببینیم که رابطه ی داده شده به ازای کمان های اختیار شده چقدر است؟

$$\tan\frac{\pi}{4} . \tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4} . \tan 0 + \tan\frac{\pi}{4} . \tan 0 = (1)(1) + (1)(0) + (1)(0) = 1 + 0 + 0 = 1$$

به راحتی گزینه ی صحیح تست یعنی گزینه ی 2 به دست می آید.!

17-مجموع جواب های معادله ی $\sin^2 x - \cos x = \cos^2 x$ در بازه ی $[\pi , 2\pi]$ کدام است؟(سنجش جامع ریاضی 91)

1) 3π   **2) $\frac{8\pi}{3}$**   **3) $\frac{10\pi}{3}$**   **4) $\frac{3\pi}{3}$**

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\sin^2 x - \cos x = \cos^2 x \rightarrow 1 - \cos^2 x - \cos x - \cos^2 x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

خوب حل یک معادله ی درجه ی 2 مد نظر است.

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow \cos x = -1 , \frac{1}{2} \rightarrow x = \pi , \frac{5\pi}{3} \xrightarrow{+} \frac{8\pi}{3}$$

بدون استفاده از فرمول :

آیا می تونین با اطمینان بگین که تنها کمان هایی می تونند در بازه ی داده شده در رابطه ی مثلثاتی مفروض صدق کنند فقط می تونند خود کمان های ابتدا و انتهای بازه یعنی 2π و π و کمان هایی که مضربی از $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{2}$ هستند می تونند باشند.چرا؟به چه دلیل کمان هایی که مضرب صحیح از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ هستند نمی توانند پاسخ صحیح تست باشند؟

اگه به معادله ی مثلثاتی داده شده یعنی رابطه ی $\sin^2 x - \cos x = \cos^2 x$ دقت کنید , با عبارت های $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ که مشکلی نداریم . چون اگه حتی سینوس و کسینوس زوایایی که در بازه ی داده شده وجود دارند , شامل عدد رادیکالی مانند $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ هم باشند , این اعداد رادیکالی با توان 2 از بین میروند.اما عبارت $\cos x$ با این مساله مشکل داره.پس امکان نداره زوایایی که مضرب صحیح از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ هستند پاسخ صحیح تست باشند.غیر اینه؟!

خوب پس کدوم زوایا میمونه تو بازه ی داده شده؟ π و 2π و $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$ ...حال باید دید از این زوایا کدوماشون تو رابطه ی داده شده صدق می کنند؟

$$\left(\begin{array}{c} x = \pi \to 0 - (-1) = 1 \to 1 = 1 \\ x = \frac{4\pi}{3} \to \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \to \frac{5}{4} \neq \frac{1}{4} \\ x = \frac{3\pi}{2} \to 1 - 0 = 0 \to 1 \neq 0 \\ x = \frac{5\pi}{3} \to \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ 2\pi \to 0 - 1 = 1 \to -1 \neq 1 \end{array}\right.$$

یعنی فقط کمان های π و $\frac{5\pi}{3}$ قابل قبول است که جمع این دو کمان هم می شود $\frac{8\pi}{3}$

18-نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه ی $[-\pi$ و $\pi]$ در چند نقطه محور xها را قطع می کند؟(سراسری تجربی خارج از کشور 91)

1) 2 **2)3** **3) 4** **4) 5**

گزینه ی 3 صحیح است.

اینکه گفته شده محور x ها را قطع می کند یعنی جواب ها ی معادله ی $y = 0$ مد نظر تست است.

$$y = 0 \to 3\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \to \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \to \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \to x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$$

حال با اختیار مقادیر صحیح برای k جواب های مورد قبول (نقاطی که محور xها را قطع می کند) به دست خواهد آمد:

$k = -2$ غ ق ق

$$k = -1 \to x = \frac{5\pi}{8} \qquad k = 1 \to x = -\frac{3\pi}{8}$$

$$k = 0 \to x = \frac{\pi}{8} \qquad k = 2 \to x = -\frac{7\pi}{8}$$

19-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 91)

1). $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ **2)** $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ **3)** $k\pi + \frac{\pi}{6}$ **4)** $k\pi - \frac{\pi}{6}$

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3} \rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\tan\alpha=\tan\beta \rightarrow \alpha = k\pi+\beta} 2x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

بدون استفاده از فرمول :

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه $-\frac{\pi}{6}$, گزینه ی 2 میشه $\frac{\pi}{6}$, گزینه ی 3 میشه $\frac{\pi}{6}$, گزینه ی 4 هم میشه $-\frac{\pi}{6}$. خوب این یعنی چی؟یعنی شما بیاید یه $\frac{\pi}{6}$ رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 1 و 4 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان $\frac{\pi}{6}$ درجه را ظاهر نمی کنند.اگه نادرست بود. گزینه ها ی 2 و 3 حتما نادرست هستند.

$\frac{\pi}{6}$ رو بزار تو معادله...

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}\ ,tgx=\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}} = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

خوب حالا که $\frac{\pi}{6}$ جواب درست معادله است , پس گزینه های 1 و 4 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 2 درسته یا گزینه ی3؟

خوب فرق گزینه های 2 و 3 ؟ من اگه بیام k رو یک بدم , گزینه ی دو کمان $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$رو ظاهر میکنه که گزینه ی 3 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه.. یعنی اگه بتونیم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدیم , به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

خوب قبل اینکه این کمان را در معادله تست کنیم , یادآور می شوم که این کمان در ناحیه ی دوم مثلثاتی قرار داشته و همانطور که می دانیم علامت تانژانت در این ناحیه منفی می باشد.

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \sqrt{3} \xrightarrow{x=\frac{2\pi}{3}\ ,tgx=-\sqrt{3}} \frac{2(-\sqrt{3})}{1-3=-2} = \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

پس گزینه ی 2 هم نادرست بوده و گزینه ی 3 چون کلی نبوده و هرگز نمی تواند کمان یادشده را ظاهر کند نمی تواند پاسخ صحیح تست باشد.

20-ساده شده ی کسر $\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta}$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 91)

1) $8\cos^{-2}2\theta$ **2) $8\sin^{-2}2\theta$** **3) $16\cos^{-4}2\theta$** **4) $16\sin^{-4}2\theta$**

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta-\cos^4\theta} = \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}}{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta) = \cos^2\theta.\sin^2\theta} \xrightarrow{\sin2\theta=2\sin\theta.\cos\theta} \frac{\frac{1}{\frac{1}{4}\sin^2 2\theta}}{\frac{1}{4}\sin^2 2\theta} =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{16}}\sin^{-4}2\theta = 16\sin^{-4}2\theta$$

بدون استفاده از فرمول :

من میام تو این تست چیکار میکنم؟میام به $\theta = \frac{\pi}{4}$ میدم تا ببینم رابطه ی مثلثاتی یادشده مقدارش چقدر میشه؟!

$$\frac{(1+\tan^2\theta)(1+\cot^2\theta)}{1-\sin^2\theta-\cos^4\theta} \rightarrow \frac{(1+1)(1+1)}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4} = \frac{(2)(2)}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16$$

عجب!!! با توجه به اینکه به ازای $\theta = \frac{\pi}{4}$, $2\theta = \frac{\pi}{2}$, و با توجه به اینکه کسینوس زاویه 90 صفر می باشد , پس گزینه ی 1 و 3 به شکل واضحی غلط هستند!

و با توجه به اینکه سینوس زاویه ی 90 درجه یک است و عدد به دست آمده برای رابطه ی مثلثاتی یادشده 16 شد , کاملا معلوم است گزینه ی 4 پاسخ صحیح تست است.

21-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin(\pi+x).\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin(\pi-x)+1=0$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 90)

1) $2k\pi-\frac{\pi}{2}$ **2) $2k\pi+\frac{\pi}{6}$** **3) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$** **4) $2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$**

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\sin(\pi+x).\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin(\pi-x)+1=0 \rightarrow (-\sin x).(-\sin x)-2\sin x+1=0$$

$$\sin^2 x-2\sin x+1=(\sin x-1)^2=0 \rightarrow \sin x=1=\sin\frac{\pi}{2} \rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

بدون استفاده از فرمول:

با اختیار $k = 0$ 4 گزینه ی داده شده را بررسی می کنیم؛

گزینه ی 1 : $-\frac{\pi}{2}$ نادرست $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

گزینه ی 2 : $\frac{\pi}{6}$ نادرست $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

گزینه ی 3 : $\frac{\pi}{2}$ درست $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

گزینه ی 4 : $\pm\frac{\pi}{2}$ نادرست $\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$

اکیدا به همه ی داوطلبان عزیز توصیه می شود که در تمامی تست های مثلثات از این روش استفاده کنند تا تسلط کافی بر آن پیدا کنند.این روش فقط نیازمند تسلط کافی شما بر دایره ی مثلثاتی بوده و مستلزم این نیست که شما بر فرمول های مثلثاتی حتما مسلط باشید.اما همانطور که قبلا هم اشاره شد استفاده ی درست و به جا بهترین روش برای حل تست های مثلثات است.گهگاه استفاده از این روش خوب است و برخی موارد هم استفاده از روابط مثلثاتی مناسب تر است.

22-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\cos5x.\cos3x-\sin3x.\sin x}{\cos2x} = 1$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی 90)

1). $\frac{k\pi}{3}$ 2) $\frac{k\pi}{2}$ 3) $\frac{2k\pi}{5}$ 4) $\frac{2k\pi}{3}$

گزینه ی 1 صحیح است.(حل این تست نیز برای داوطلبان رشته ی تجربی توصیه نمی شود.! البته این عدم توصیه به مثابه این نیست که داوطلبان رشته ی تجربی بی خیال اینگونه تست ها شوند؛ درسته که امکان طرح چنین تست هایی به علت دانستن روابطی از مثلثات که در کتب درسی دانش آموزان رشته ی تجربی دیده نمی شود است , تقریبا صفر است , اما یادگیری و تسلط بر چنین تست هایی نیز باعث میشه شما داوطلبان رشته ی تجربی به راحتی از عهده ی هرگونه تستی از مثلثات بر بیاین.

با استفاده از فرمول:

$$\frac{\cos5x.\cos3x-\sin3x.\sin x}{\cos2x} = 1 \xrightarrow{\left[\begin{array}{l}\cos\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\\ \sin\alpha.\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\end{array}\right.}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(\cos8x+\cos2x)-\frac{1}{2}(\cos2x-\cos4x)}{\cos2x} = 1$$

$$\frac{1}{2}(\cos8x+\cos4x) = \cos2x \xrightarrow{\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}} \frac{1}{2}(2)\cos6x.\cos2x = \cos2x \rightarrow$$

$$\cos2x(\cos6x-1)=0\rightarrow\begin{cases}\cos2x=0=\cos\frac{\pi}{2}\rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}\rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}\\ \cos6x=1=\cos2k\pi\rightarrow 6x=2k\pi\rightarrow x=\frac{k\pi}{3}\end{cases}$$

کاملا مشخص است که $x=\frac{k\pi}{3}$ جواب کلی معادله است.

ذکر نکته ای در حل این تست الزامی است و آن این است که در حل یک معادله ی مثلثاتی هرگز حق ساده سازی ندارین...زیرا ممکن است که با این ساده سازی تعدادی از جواب های مورد نظر معادله حذف گردد و شما به پاسخ نادرست برسید.پس هرگز این کار را نکنین. با اینکه در اکثر کتاب های کمک آموزشی این کار موقع حل تست ها دیده می شود اما این حرکت کاملا اشتباه و نادرست می باشد.

بدون استفاده از فرمول :

اگه k رو صفر بدیم , چه اتفاقی می افته؟هیچی!دردی از دردامونو دوا نمیکنه که!میکنه؟

پس بیایم k رو یک بدیم , گزینه ها به چه شکلی در می آیند؟

گزینه ی 1 میشه $\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 2 میشه $\frac{\pi}{2}$, گزینه ی 3 میشه $\frac{2\pi}{5}$, گزینه ی 4 هم میشه $\frac{2\pi}{3}$. خوب باید کمان های به دست آمده را در معادله ی مثلثاتی داده شده تست کنیم.

$$\frac{\operatorname{Cos}5x.\cos3x-\sin3x.\sin x}{\cos2x}=1\rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\rightarrow\frac{\cos\frac{5\pi}{3}.\cos\pi-\sin\pi.\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}}=1\rightarrow\frac{\left(\frac{1}{2}\right)(-1)-(0)}{-\frac{1}{2}}=1\\ x=\frac{\pi}{2}\rightarrow\frac{\cos\frac{5\pi}{2}.\cos\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}.\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\pi}=1\rightarrow\frac{0-(-1)}{-1}=-1\neq1\\ x=\frac{2\pi}{5}\rightarrow\frac{\cos2\pi.\cos\frac{6\pi}{5}-\sin\frac{6\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{4\pi}{5}}=1\\ x=\frac{2\pi}{3}\rightarrow\frac{\cos\frac{10\pi}{3}.\cos2\pi-\sin2\pi.\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{4\pi}{3}}=1\rightarrow\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(1)-0}{-\frac{1}{2}}=1\end{cases}$$

یعنی یا گزینه ی 1 صحیح است یا 4؟

در مورد گزینه ی 3 با اینکه با کمان نام آشنایی به قول دوستان مواجه نیستیم دقت داشته باشید :

$$\frac{(1)\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)\right)-\sin(\pi+\frac{\pi}{5}).\sin\frac{2\pi}{5}}{\cos(\pi-\frac{\pi}{5})}=1\rightarrow\frac{-\cos\frac{\pi}{5}+(\sin\frac{\pi}{5})(\sin\frac{2\pi}{5})}{-\cos\frac{\pi}{5}}=1-\frac{(\sin\frac{\pi}{5})(\sin\frac{2\pi}{5})}{\cos\frac{\pi}{5}}\neq1$$

درسته؟!

خوب فرق گزینه های 1 و 4 ؟ من اگه بیام k رو سه بدم , گزینه ی یک کمان π رو ظاهر میکنه که گزینه ی 4 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه.. یعنی اگه بتونیم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدیم , به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

$$\frac{\mathrm{Cos}5x.\cos 3x-\sin 3x.\sin x}{\cos 2x}=1\xRightarrow{x=\pi}\frac{\cos 5\pi.\cos 3\pi-\sin 3\pi.\sin \pi}{\cos 2\pi}=1\rightarrow\frac{(-1).(-1)-0}{1}=1\rightarrow 1=1$$

پس گزینه ی 4 هم نادرست بوده و گزینه ی 1 کلی بوده و پاسخ صحیح تست است.

23-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+5\cos x=3$ به کدام صورت است؟(سنجش جامع 90 تجربی)

1). $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$　　**2) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$**　　**3) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$**　　**4) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$**

گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+5\cos x=3\rightarrow -\cos 2x+5\cos x-3=0\rightarrow$$

$$-(2\cos^2x-1)+5\cos x-3=0\rightarrow 2\cos^2x-5\cos x+2=0\rightarrow \cos x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2(2)}=\frac{5\pm 3}{4}\rightarrow \cos x$$

$$=2,\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{جواب قابل قبول}}\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

بدون استفاده از فرمول :

اگه k رو صفر بدیم , چه اتفاقی می افته ؟ گزینه ی 1 میشه $\pm\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 2 میشه $\pm\frac{2\pi}{3}$, گزینه ی 3 میشه $\pm\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 4 هم میشه $\pm\frac{\pi}{3}$. خوب با امتحان کمان $\frac{\pi}{3}$ در رابطه ی مثلثاتی داده شده خواهیم داشت :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+5\cos x=3\xRightarrow{x=\frac{\pi}{3}}-\cos 2x+5\cos x=3\xRightarrow{x=\frac{\pi}{3}}-\cos\frac{2\pi}{3}+5\cos\frac{\pi}{3}=-\left(-\frac{1}{2}\right)+5\left(\frac{1}{2}\right)=3=3$$

یعنی یا گزینه ی 1 صحیح است یا گزینه ی 3! درسته؟چون گزینه های 2 و 4 به هیچ وجه این کمان را ظاهر نمی کند.

فرق گزینه های 1 و 3 چیه؟

گزینه ی 3 کمان $\pi-\frac{\pi}{3}$ را ظاهر می کند که گزینه ی 1 به هیچ عنوان قادر به ظاهر کردن این کمان نیست. پس اگر بتوانیم درستی یا نادرستی این کمان را مشخص کنیم , می توانیم به گزینه ی صحیح برسیم.

$$\mathrm{Sin}\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+5\cos x=3\xRightarrow{x=\frac{\pi}{3}}-\cos 2x+5\cos x=3\xRightarrow{x=\frac{2\pi}{3}}-\cos\frac{4\pi}{3}+5\cos\frac{2\pi}{3}=-\left(-\frac{1}{2}\right)+5\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{4}{2}=-2\neq 3$$

یعنی گزینه ی 3 نیز نادرست بوده و گزینه ی 1 پاسخ صحیح و کلی تست است.

24-حاصل $1-\sin^2 10-\sin^2 70$ برابر کدام است؟(سنجش جامع 90 ریاضی)

1) $\frac{1}{2}\sin 10$ **2) $\cos 10$** **3) $\frac{1}{2}\sin 20$** **4) $\cos 20$**

گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\rightarrow 1-\frac{1-\cos 20}{2}-\frac{1-\cos 140}{2}=$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 20+\cos 140)-\frac{1}{2}=$$

$$\frac{1}{2}(\cos 20+\cos 140)=\frac{1}{2}(2)\left(\cos\frac{140+20}{2}.\cos\frac{140-20}{2}\right)=\cos 80.\cos 60\rightarrow\frac{1}{2}\sin 10$$

بدون استفاده از فرمول:

اگر بتونیم سینوس و کسینوس زوایای 10 و 20 رو بلد باشیم به پاسخ صحیح تست می توانیم دست پیدا کنیم.

سینوس یک کمان از صفر تا 30 درجه به ازای هر 5 درجه به مقدار تقریبی 0.08 افزایش می یابد.

پس می توان گفت که مقدار تقریبی سینوس زاویه ی 10 برابر با 0.16 و سینوس زاویه ی 20 تقریبا 0.32 است.

کسینوس یک کمان از زاویه ی صفر تا 30 درجه به ازای هر 5 درجه به اندازه ی 0.025 کاهش می یابد.

پس می توان گفت که کسینوس زاویه ی 10 درجه برابر با 0.95 و کسینوس زاویه ی 20 درجه برابر با 0.9 تقریبا است.

من عبارت $1-\sin^2 10-\sin^2 70$ را با توجه به این نکته که می دانم سینوس و کسینوس متمم یکدیگرند به صورت زیر می نویسم:

$$1-\sin^2 10-\sin^2 70=\cos^2 10-\cos^2 20=(\cos 10+\cos 20)(\cos 10-\cos 20)=$$

$$(0.95+0.9)(0.95-0.9)=(1.85)(0.05)=0.0925\cong 0.09$$

حال گزینه ها را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sin 10 = \frac{1}{2}(0.16) = 0.08 \\ \cos 10 = 0.95 \\ \frac{1}{2}\sin 20 = \frac{1}{2}(0.32) = 0.16 \\ \cos 20 = 0.9 \end{cases}$$

کاملا معلوم است که نزدیکترین عدد به عدد 0.092 عدد گزینه ی یک یعنی 0.08 بوده و گزینه ی یک پاسخ صحیح و مطلوب تست خواهد بود.

25-از رابطه ی $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 2 - 2\sin 2x$ مقدار $\cos(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟(سنجش جامع 90 ریاضی)

1) $\frac{1}{2}$ و -1 **2) 0 و $-\frac{1}{2}$** **3) $\frac{1}{2}$ و 1** **4) 0 و 1-**

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

با فرض : $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ خواهیم داشت:

$$\cos x.\cos\frac{\pi}{4} - \sin x.\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x) = y \xrightarrow{\times 2} \sqrt{2}(\cos x - \sin x) = -2y$$

$$2 - 2\sin 2x = 2(1 - \sin 2x) = 2(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x.\cos x) = 2(\sin x - \cos x)^2 = 4y^2$$

در نتیجه معادله ی داده شده به معادله ی زیر منتهی می شود :

$$4y^2 + 2y = 0 \rightarrow 2y(2y + 1) = 0 \rightarrow y = 0, -\frac{1}{2}$$

بدون استفاده از فرمول :

توجه نمائید که این روش حل هم یه جور روش و مدل حل هستش.استفاده از گزینه ها!

گزینه ی 1 و 3 تو عدد $\frac{1}{2}$ مشترک هستند. درسته؟کسینوس کدوم زاویه برابر با $\frac{1}{2}$ است؟زاویه ی 60 درجه...درسته؟یعنی باید $x + \frac{\pi}{4}$ باید بشه 60 درجه و در نتیجه مقدار زاویه ی x باید 15 درجه باشد.

حال به معادله ی مثلثاتی $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 2 - 2\sin 2x$ اگر دقت کنید , این معادله به ازای $x = 15$ مقدار طرف دوم اش یعنی $2 - 2\sin 2x$

مساوی یک می شود. در حالی که طرف اول تساوی امکان ندارد مقدارش برابر یک باشد!

البته اگه هضم این مساله براتون اگه سخت هستش به گزینه ها و اعداد دیگر هم توجه داشته باشید..

گزینه ی 1 و 4 تو عدد -1 مشترک هستند. کسینوس کدوم زاویه برابر با -1 است؟زاویه ی π درجه...درسته؟یعنی باید $x + \frac{\pi}{4}$ باید بشه π درجه و در نتیجه مقدار زاویه ی x باید $\frac{3\pi}{4}$ درجه باشد.

حال به معادله ی مثلثاتی $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 2 - 2\sin 2x$ اگر دقت کنید , این معادله به ازای $x = \frac{3\pi}{4}$ به صورت زیر درمی آید :

$$\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2})\right) = 2 - 2(-1) \rightarrow \sqrt{2}(\sqrt{2}) = 2 + 2 \rightarrow 2 \neq 4$$

پس گزینه ی 1 و 4 نادرست هستش. تو این موضوع که شکی ندارید؟

حال باید دید از بین گزینه های 2 و 3 کدامیک درست هستند؟

گزینه ی 3 شامل عدد یک هستش. خوب کسینوس کدوم زاویه یک هستش؟زاویه ی 0 درجه....یعنی یعنی باید $x + \frac{\pi}{4}$ باید بشه 0 درجه و در نتیجه مقدار زاویه ی x باید $-\frac{\pi}{4}$ درجه باشد.

حال به معادله ی مثلثاتی $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 2 - 2\sin 2x$ اگر دقت کنید , این معادله به ازای $x = -\frac{\pi}{4}$ به صورت زیر درمی آید :

$$\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - (\frac{\sqrt{2}}{2})\right) = 2 - 2(-1) \rightarrow \sqrt{2}(-\sqrt{2}) = 2 + 2 \rightarrow -2 \neq 4$$

یعنی گزینه ی 3 نیز نادرست بوده و گزینه ی 2 پاسخ صحیح و مطلوب تست است.

می تونید درستی اعداد این گزینه ها رو خودتون چک کنید.

26-اگر $\tan(15 + a) = \frac{3}{4}$ باشد آنگاه $\cot(30 - a)$ کدام است؟(سنجش جامع 90 ریاضی)

1) 4   **2) 5**   **3) 6**   **4) 7**

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

زمانی که تستی رو می خواین حل کنین , باید ببینین که تست چی میخواد...

خوب...تست سختی که به نظر نمی آد؟چیزی که مشخصه اینه که از کمان $15 + a$, کمانی به اندازه ی $30 - a$ دربیاوریم:

$$\tan(30 - a) \xrightarrow{30-a=45-(15+a)} \tan(45 - (15 + a)) = \frac{\tan 45 - \tan(15 + a)}{1 + \tan 45 . \tan(15 + a)} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7} \rightarrow \cot(30 - a) = \frac{1}{\tan(30 - a)} = 7$$

بدون استفاده از فرمول:

می دانیم که مقدار تانژانت زاویه ی 30 درجه برابر با $0.57 = \frac{1.7}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و مقدار تانژانت زاویه ی 45 درجه برابر یک است. پس با توجه به اینکه عبارت داده شده ی $\tan(15 + a) = \frac{3}{4} = 0.75$ است , یعنی کمان مورد نظر بین 30 و 45 قرار دارد.

از زاویه ی 30 تا 45 درجه مقدار تانژانت از 0.57 تا 1 و به ازای هر 5 درجه به اندازه ی 0.14 تقریبا افزایش می یابد.یعنی با توجه به اینکه عدد 0.75 حدودا 0.18 بیشتر از عدد 0.57 که تانژانت زاویه ی 30 درجه است بیشتر است پس به طور تقریبی می توان گفت که 0.75 تانژانت زاویه ی 37 درجه است.

پس $15 + a = 37 \rightarrow a = 22$ است و مقدار کتانژانت زاویه ی $(30 - a) = (8)$ یا $\frac{1}{\mathrm{tg}8}$ پاسخ مطلوب تست خواهد بود.

زاویه ی 8 درجه بین 0 تا 30 درجه قرار دارد و فی مابین این دو زاویه مقدار تانژانت به ازای هر 5 درجه , 0.09 افزایش می یابد. یعنی مقدار تانژانت زاویه ی 8 درجه تقریبا برابر با عددی حدود 0.14 است. پس $7 \cong \frac{1}{0.14} = \frac{1}{\mathrm{tg}8}$

گزینه ی 4 پاسخ مورد نظر تست است.

27-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos\frac{4\pi}{3} = (\sin x - \tan x)\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج از کشور 90)

1.) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ 2) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ 3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 4) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$(\sin x - \tan x)\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{4\pi}{3} \rightarrow (\sin x - \tan x).\cot x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه k رو صفر بدیم , چه اتفاقی می افته ؟ گزینه ی 1 میشه $-\frac{\pi}{6}$, گزینه ی 2 میشه $\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 3 میشه $\pm\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 4 هم میشه $\pm\frac{\pi}{6}$. خوب با امتحان کمان $\frac{\pi}{3}$ در رابطه ی مثلثاتی داده شده خواهیم داشت :

$$(\sin x - \tan x)\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{4\pi}{3} \overset{x=\frac{\pi}{3}}{\Longrightarrow} \left(\sin\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} \overset{x=\frac{\pi}{3}}{\Longrightarrow} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

یعنی یا گزینه ی 2 صحیح است یا گزینه ی 3! درسته؟چون گزینه های 1 و 4 به هیچ وجه این کمان را ظاهر نمی کند.

فرق گزینه های 2 و 3 چیه؟

گزینه ی 2 کمان $-\frac{\pi}{3}$ را تحت هیچ شرایطی و به ازای هیچ مقدار صحیح از k این کمان را ظاهر نمی کند. پس اگر بتوانیم درستی یا نادرستی این کمان را مشخص کنیم , می توانیم به گزینه ی صحیح برسیم.

$$(\sin x-\tan x)\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\cos\frac{4\pi}{3}\xRightarrow{x=-\frac{\pi}{3}}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}\xRightarrow{x=\frac{\pi}{3}}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

یعنی گزینه ی 2 نیز نادرست بوده و گزینه ی 3 پاسخ صحیح و کلی تست است.

28-معادله ی مثلثاتی $\sin 3x-\sin x+2\sin^2 x=1$ در بازه ی $[0$ و $2\pi]$ چند جواب دارد؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 90)

1) 3 **2) 4** **3) 5** **4) 6**

گزینه ی 2 صحیح است.

به داوطلبان رشته ی تجربی توصیه نمی شود...البته نه اینکه اصلا نخونین!

با استفاده از فرمول:

$$\sin 3x-\sin x+2\sin^2 x=1\to\sin 3x-\sin x=1-2\sin^2 x\xrightarrow{\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$2\sin x.\cos 2x=\cos 2x\to\cos 2x(1-2\sin x)=0\to\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\to\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}\to x=\frac{\pi}{4}\\2x=\frac{3\pi}{2}\to x=\frac{3\pi}{4}\end{array}\right.\\\sin x=\frac{1}{2}\to x=\frac{\pi}{6},\quad\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.$$

بدون استفاده از فرمول:

حقیقتش اگه به دایره ی مثلثاتی تسلط کافی داشته باشید حل این تست چندان هم طول نمی کشد.از زاویه ی 30 درجه یعنی $\frac{\pi}{6}$ شروع می کنیم. اگر کمان $\frac{\pi}{6}$ رو جاگذاری کنیم , به عبارت $\sin 3x-\sin x+2\sin^2 x=1$ دقت کنید. نیازی به جاگذاری نیستا.اصلا هم به هیچ عنوان دست به قلم نبرید. با جاگذاری $\frac{\pi}{6}$ کمان 3x میشه $\frac{\pi}{2}$ و سینوس این زاویه هم که یک هستش. یعنی عدد یک طرف دیگر معادله نیز تامین شده به قولی.حال میمونه عبارت $-\sin x+2\sin^2 x$ که باید همو خنثی کنند و این فقط زمانی میسر هستش که حاصل سینوس علامت اش مثبت باشه و این فقط در ناحیه ی اول و دوم مثلثاتی برقرار است.

پس علاوه بر کمان $\frac{\pi}{6}$ که در رابطه ی داده شده صدق می کنه کمان $\frac{5\pi}{6}$ هم جواب معادله است . زیرا این زاویه هم در ناحیه ی دوم مثلثاتی که علامت سینوس در این ناحیه مثبت است قرار دارد. اما کمان های $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ نمی توانند پاسخ مساله باشند.

خوب از کمان های مضرب $\frac{\pi}{6}$ عبور می کنیم. می رسیم به کمان های مضرب $\frac{\pi}{4}$, ابتدا خود این کمان را در معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان می کنیم.

اگه کمان های مضرب $\frac{\pi}{4}$ را در این معادله جاگذاری کنیم , مقدار یک سمت راست معادله را عبارت $2\sin^2 x$ تامین می کنه. یعنی باید مقدار عبارت

$\sin 3x - \sin x$ باید صفر شود .و این فقط زمانی مقدور است که این دو عبارت هم علامت باشند. با اختیار کمان $\frac{\pi}{4}$ که این شرایط برقرار است . و یکی از کمان ها در ناحیه ی اول و دیگری در ناحیه ی دوم مثلثاتی قرار دارند که در هر دو ناحیه علامت سینوس مثبت است.

کمان $\frac{3\pi}{4}$ هم مشکلی نداره. زیرا به ازای این کمان هم دو کمان حاصل شده یعنی $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{4}$ هر دو در ناحیه ی دوم و اول مثلثاتی قرار دارند. پس معادله ی داده شده به ازای این کمان نیز برقرار است و در نتیجه 4 جواب داریم.

البته با توجه به اینکه کمان های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{2}$ و مضارب آنها هیچ کدام در معادله ی داده شده صدق نمی کنند. البته $\frac{\pi}{3}$ که تابلو غلط هستش.کمان $\frac{\pi}{2}$ و مضرب آنها هم به هیچ عنوان در رابطه ی مثلثاتی داده شده صدق نمی کنند.

29-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 89)

$k\pi+\frac{\pi}{6}$.(1	**$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$ (2**	**$\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$ (3**	**$k\pi+\frac{\pi}{3}$ (4**

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}\rightarrow\frac{\tan x+1}{1-\tan x}+\frac{\tan x-1}{1+\tan x}=\frac{(1+\tan x)^2-(1-\tan x)^2}{1-\tan^2 x}$$

$$\frac{1+\tan^2 x+2\tan x-1-\tan^2 x+2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}=2\left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)=2\sqrt{3}\rightarrow$$

$$\tan 2x=\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}\rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{3}\rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$$

البته روش دیگری نیز برای حل این تست وجود دارد و در اکثر کتاب های آموزشی هم از این روش استفاده شده است.گرچه به نظر من این راه حل که اینجا استفاده شد بهتر بود.

روش دیگه اینه که هر دو تابع تانژانت رو به صورت نسبت سینوس بر کسینوس بنویسیم و ادامه ی حل که توصیه نمی شود!

بدون استفاده از فرمول:

سریع در هر چهار گزینه به k مقدار عددی صفر می دهم:

$$k = 0 \qquad 1)\ x = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 0 \qquad 2)\ x = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 0 \qquad 3)\ x = \frac{\pi}{6}$$

$$k = 0 \qquad 3)\ x = \frac{\pi}{3}$$

کمان $\frac{\pi}{6}$ رو تست می کنیم :

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3} \overset{x=\frac{\pi}{6}}{\Longrightarrow} \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}$$

گزینه ی 2 رو هم چک کردیم و صحیح دراومد...خوب این چه معنی میده؟یعنی هم گزینه ی یک غلطه هم گزینه ی دو!

البته نه اینکه غلط باشه...پاسخ صحیح و کلی تست نیست....زیرا هیچکدام از این گزینه های کمان های به دست آمده برای گزینه ی دیگر را دربرندارد.گزینه ی 3 که تابلو غلط هستش و من جای شما بودم اصلا چک نمی کردم....

و کاملا مشخصه که گزینه ی 4 پاسخ صحیح تست بوده و هر دو گزینه ی یک و دو را در بر دارد.

تذکر : به یاد داشته باشین که اگه بخواین از روش تستی استفاده کنین ممکنه مقدار $k = 0$ سه گزینه ی نادرست را برای ما مشخص نکنه...البته در بیشتر تست های مطرح شده در طول سال های گذشته با همون تست کردن اول به پاسخ صحیح می رسیم....اما اگه اینگونه نبود قدم بعدی چک کردن گزینه ها با مقدار عددی $k = 1$ **است.**

30-عبارت $(\cos 10-\cos 70)(\tan 70-\cot 100)$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی 89)

1) 1 **2) $2\cos 20$** **3) $-\sqrt{3}$** **4) $\sin 80$**

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$(\cos 10-\cos 70)(\tan 70-\cot 100)=(\cos 10-\cos 70)(\tan 70+\tan 10)=$$

$$(-2\sin 40.\sin(-30)\left(\frac{\sin 70}{\cos 70}+\frac{\sin 10}{\cos 10}\right)=$$

$$\sin 40.(\frac{\sin 70.\cos 10+\cos 70.\sin 10)}{\cos 70.\cos 10}=\sin 40\frac{\sin(70+10)}{\cos 70.\cos 10}=\sin 40.\frac{\sin 80}{\cos 70.\cos 10}=\sin 40.\frac{\cos 10}{\cos 70.\mathrm{co}10}$$

$$=\frac{\sin 40}{\cos 70}=\frac{2\sin 20.\cos 20}{\sin 20}=2\cos 20$$

دیگه خودتون می دونین که سینوس و کسینوس زوایا متمم دیگه هستند.و ما در حل این تست خیلی از این خاصیت استفاده نمودیم.

بدون استفاده از فرمول:

میام زاویه ها رو سه برابر می کنم. در حین سه برابر کردن به عوض شدن نواحی مثلثاتی نیز دقت کنید.چه اتفاقی برای رابطه ی مثلثاتی داده شده می افتد؟

$$(\cos 10-\cos 70)(\tan 70-\cot 100) \rightarrow (\cos 30-\cos 210)(\tan 210-\cot 300)=$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=\sqrt{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=2$$

31-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 89خارج از کشور)

1). $k\pi-\frac{\pi}{3}$ 2) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ 3) $2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ 4) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=(\frac{1}{4}\cos^2 x$$

$$-\frac{3}{4}\sin^2 x)=-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4}(1-\sin^2 x)-\frac{3}{4}\sin^2 x=\frac{1}{4}-\sin^2 x=-\frac{1}{2} \rightarrow \sin^2 x=\frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x=\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \text{ یا } x=2k\pi+\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\left(\begin{array}{l} x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ x=2k\pi-\frac{\pi}{3} \\ x=2k\pi+\frac{4\pi}{3} \\ x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. \rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

لازم به توضیح است که بعضی وقتا حل تشریحی تست ها منجر به جواب های چهارگانه ای مانند همین تست می گردد.خدمتتون عرض کنم که نه اینکه این روش اشتباه باشه...نه! اما خداوکیلی طولانی بوده و تازه ممکنه که شما در انتها خیلی براتون سخت باشه که جواب کلی را بتونین از بین این چهار جواب بدست بیارین.

روش تیتی زیر که قبلا هم اشاره شد و شما می تونین در همه ی تست های مثلثات از این روش استفاده کنین به راحتی به تست فوق پاسخ می دهد.

بدون استفاده از فرمول:

واقعا اگه زرنگ باشین خیلی راحت و بدون اینکه مراحل فوق رو طی کنین می تونین به پاسخ صحیح تست برسین.من خودم اگه بخوام اینگونه به این تست پاسخ می دهم.

سریع در هر چهار گزینه به k مقدار عددی صفر می دهم:

$$k=0 \quad 1)\ x=-\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{چک کردن در معادله}} \cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right).\cos(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}) = \cos0.\cos-\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$k=0 \quad 2)\ x=\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{چک کردن در معادله}} \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right).\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3}.\cos0 = -\frac{1}{2}$$

$$k=0 \quad 3)\ x=\pm\frac{\pi}{6} \xrightarrow{\text{چک کردن در معادله}} \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right).\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{2}.\cos-\frac{\pi}{6} = 0$$

$$k=0 \quad 3)\ x=\pm\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{چک کردن در معادله}} \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right).\cos(\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

توضیحات :

وقتی که گزینه ی یک رو چک کردین و جواب صحیح شد , مبادا فکر کنین که بله دیگه تموم شد و تو همون گزینه ی یک به پاسخ صحیح تست رسیدین...!

صورت سوالو حتما دقت کنین گفته شده جواب کلی!

گزینه ی 2 رو هم چک کردیم و صحیح دراومد...خوب این چه معنی میده؟یعنی هم گزینه ی یک غلطه هم گزینه ی دو!

البته نه اینکه غلط باشه...پاسخ صحیح و کلی تست نیست....زیرا هیچکدام از این گزینه های کمان های به دست آمده برای گزینه ی دیگر را دربرندارد.گزینه ی 3 که تابلو غلط هستش و من جای شما بودم اصلا چک نمی کردم....

و کاملا مشخصه که گزینه ی 4 پاسخ صحیح تست بوده و هر دو گزینه ی یک و دو را در بر دارد.

تذکر : به یاد داشته باشین که اگه بخواین از روش تستی استفاده کنین ممکنه مقدار $k=0$ سه گزینه ی نادرست را برای ما مشخص نکنه...البته در بیشتر تست های مطرح شده در طول سال های گذشته با همون تست کردن اول به پاسخ صحیح می رسیم....اما اگه اینگونه نبود قدم بعدی چک کردن گزینه ها با مقدار عددی $k=1$ **است.**

خوب زیادی حرف زدیم دیگه! به تست بعدی توجه فرمائید.

32-ساده شده ی $\frac{\sin^2 40-\sin^2 10}{\cos70+\cos10}$ کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 89)

1) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **2)** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **3)** $\sin50$ **4)** $\cos50$

گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$\frac{\sin^2 40-\sin^2 10}{\cos70+\cos10}=\frac{(\sin40+\sin10)(\sin40-\sin10)}{\cos70+\cos10}=$$

$$\frac{(2\sin\frac{40+10}{2}\cos\frac{40-10}{2})(2\sin\frac{40-10}{2}\cos\frac{40+10}{2})}{2\cos\frac{70+10}{2}\cos\frac{70-10}{2}}=\frac{(2\sin25.\cos15)(2\sin15.\cos25)}{2\cos40.\cos30}$$

$$=\frac{(2\sin25.\cos25)(2\sin15.\cos15)}{2\cos40.\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sin50.\sin30}{\sqrt{3}\cos40}=\frac{\cos40.(\frac{1}{2})}{\sqrt{3}\cos40}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

خوب ویژگی هایی که در این تست استفاده شد رو مرور می کنیم...

1) سینوس و کسینوس زوایا متمم یکدیگر هستند. $\sin50=\cos40$

2) تبدیل حاصل جمع به حاصل ضرب

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

بدون استفاده از فرمول :

میام زوایا رو سه برابر می کنم , رابطه ی مثلثاتی داده شده به چه صورتی درمی آید ؟

$$\frac{\sin^2 40-\sin^2 10}{\cos70+\cos10}\rightarrow\frac{\sin^2 120-\sin^2 30}{\cos210+\cos30}=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{0}=\infty$$

یعنی اگر در گزینه ها زاویه ها رو سه برابر کنیم , باید مقدار عبارت بی نهایت گردد!غیر این که نیست؟!

گزینه ی 3 و 4 که تابلو نادرست هستند...زیرا سینوس و کسینوس زوایای 150 درجه هرگز بی نهایت نمی شوند.

من میام گزینه ی 2 را مقدارش $\frac{\sqrt{3}}{4}$است به صورت $\sin60\times\sin30=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$ می نویسم. حالا میام این زوایا رو سه برابر می کنم.چه اتفاقی می افته؟ عبارت به صورت $\sin180\times\sin90$ درمی اید که مقدار آن صفر می شود. پس این گزینه نیز نادرست است.

حال گزینه ی 1 می ماند که پاسخ صحیح تست نیز می باشد. من این گزینه رو به صورت $tg30\times\sin30=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}$ می نویسم که اگر کمان ها رو سه برابر کنم به صورت $tg90\times\sin90=\infty\times1=\infty$ درمی آید.پس این گزینه همان پاسخ مطلوب تست خواهد بود.

33-اگر $\tan\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = 1$ باشد , مقدار $\cos2x$ کدام است؟(سراسری تجربی 88)

1) $\frac{-2}{3}$ **2)** $\frac{-1}{3}$ **3)** $\frac{1}{3}$ **4)** $\frac{2}{3}$

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\tan\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = 1 \rightarrow \tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = (-\sqrt{3}).(-\cos x) = 1 \rightarrow$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \cos2x = 2\cos^2x-1 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)-1 = \frac{2}{3}-1 = -\frac{1}{3}$$

بدون استفاده از فرمول:

تا $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ که کسی مشکل نداره که!

مقدار عددی $0.57 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$است که در واقع بین کسینوس دو زاویه ی 45 و 60 درجه قرار دارد.

نکته : $\cos60 = 0.5$ $\cos45 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7$

نکته: از زاویه ی 45 تا 60 درجه مقدار کسینوس به ازای هر 5 درجه , 0.07 کم می شود.

پس با این شرایط عدد 0.57 چون 0.07 بیشتر از 0.5 است , پس زاویه ی مورد نظر ما 55 درجه است.یعنی کسینوس زاویه ی 110 درجه مدنظر ماست.

$$\cos(90+20) = -\sin20$$

می دانیم که بین زاویه ی 0 تا 30 درجه , به ازای هر 5 درجه , مقدار سینوس 0.08 زیاد می شود. یعنی به ازای 20 درجه , 0.32 می شود . پس مقدار عبارت مطلوب ما یعنی $-\sin20$ برابر با 0.32- می شود که تقریبا همون مقدار کسری داده شده در گزینه ی 2 است.

34-اگر $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ باشد حاصل $\frac{\sin3\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha}$ کدام است؟(سراسری ریاضی 88)

1) $\frac{3}{4}$ **2)** $-\frac{1}{4}$ **3)** $\frac{1}{4}$ **4)** $-\frac{1}{2}$

گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha} = \frac{2\sin\alpha . \cos 2\alpha}{2\sin\alpha . \sin 2\alpha} = \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه به رابطه ی مثلثاتی $\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha}$ دقت کنید.من میام تو این رابطه به جای زاویه ی α 30 درجه قرار می دهم. چی میشه؟ رابطه ی مثلثاتی داده شده به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\sin 90 - \sin 30}{\cos 30 - \cos 90} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{tg}30 = \mathrm{tg}\alpha = \mathrm{cotg}2\alpha$$

دقت داشته باشید که مقدار $\mathrm{tg}\alpha$ غیر قابل قبول است. و می توان به قطع یقین گفت که این زاویه 30 درجه نمی تواند باشد.زیرا اگر اینگونه بود عدد $\frac{1}{2}$ نیز جزء گزینه های ما باید می بود.

پس همون $\mathrm{cotg}2\alpha$ حاصل رابطه ی مثلثاتی مفروض است و مقدار این را باید با توجه به اینکه $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ است محاسبه نمود.

همانطور که می دانیم مقدار تانژانت از زاویه ی 0 تا 30 درجه که مقدارش از 0 تا $0.57 = \frac{1.7}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ تغییر میکند و مقدار این تغییر به ازای هر 5 درجه برابر با تقریبا 0.09 است

با توجه به اینکه عدد $\frac{1}{2} = 0.5$ تقریبا 5.5 برابر عدد 0.09 است میتوان گفت که مقدار زاویه ی α تقریبا برابر با 27.5 درجه است و محاسبه ی مقدار کتانژانت زاویه ی 55 درجه تقریبا ما رو به پاسخ صحیح تست می رساند.

کتانژانت زاویه ی 45 یک و کتانژانت زاویه ی 60 درجه برابر با 0.57 است. و مقدار کتانژانت از زاویه ی 45 تا 60 درجه به ازای هر 5 درجه تقریبا 0.14 کاهش می یابد.یعنی زاویه ی 55 درجه که 2 تا 5 درجه بیشتر از زاویه ی 45 درجه است , باید دو تا 0.14 از عدد یک کم کنیم. یعنی مقدار کتانژانت زاویه ی 55 درجه تقریبا 0.72 است.یعنی تقریبا معادل همون عددی که در گزینه ی یک آورده شده است .عدد $0.75 = \frac{3}{4}$

پس گزینه ی 1 پاسخ صحیح و مطلوب تست است.

35-اگر $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{2}{3}$ باشد آنگاه $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ کدام است؟(سراسری خارج از کشور تجربی 88)

1) $-\frac{1}{3}$

2) $-\frac{1}{5}$

3) $\frac{1}{5}$

4) $\frac{1}{3}$

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{2}{3}-1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)(1)} = \frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5}$$

بدون استفاده از فرمول:

برای حل چنین تست هایی لطفا نکات زیر را به خاطر بسپارید:

1- تانژانت زاویه ی 30 درجه برابر با $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57$ و تانژانت زاویه ی 45 درجه برابر یک و تانژانت زاویه ی 60 درجه برابر با $\sqrt{3} = 1.7$ است.

2- بین زاویه ی 0 تا 30 درجه به ازای هر 5 درجه , مقدار تانژانت 0.09 زیاد می شود.

3- بین زاویه ی 30 تا 45 درجه به ازای هر 5 درجه , مقدار تانژانت 0.14 زیاد می شود.

4- بین زاویه ی 45 تا 60 درجه به ازای هر 5 درجه , مقدار تانژانت 0.23 زیاد می شود.

خوب با توجه به آنچه که گفته شد , می دانیم که $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{2}{3} \to \mathrm{tg}\alpha = \frac{3}{2} = 1.5$ است.

یعنی زاویه ی α زاویه ای بین 45 و 60 است. درسته؟همانطور که گفته شد بین زاویه ی 45 تا 60 درجه به ازای هر 5 درجه مقدار تانژانت 0.23 زیاد می شود. اگه به 45 درجه دوتا 5 درجه زیاد کنیم , یعنی زاویه مون بشه 55 درجه , مقدار تانژانت هم از عدد یک به 1.46 یعنی همون مقدار تقریبی 1.5 افزایش می یابد.پس زاویه ی α همون مقدار تقریبی 55 درجه است.

با این اوصاف چون مقدار $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ یعنی تانژانت زاویه ی 10- درجه مدنظر است.میدانیم که :

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha \to \mathrm{tg}(-10) = -\mathrm{tg}10 = ?$$

و بالاخره همانطور که گفته شد , بین 0 تا 30 درجه مقدار تانژانت به ازای هر 5 درجه , 0.09 تقریبا افزایش می یابد و البته چیزی بیشتر از اینه!

با این شرایط 10 درجه دو تا 5 درجه است که مقدار تانژانت 10 درجه میشه $2 \times 0.09 = 0.18 \approx 0.2 = \frac{1}{5}$

پس $-\mathrm{tg}10 = -\frac{1}{5}$ پاسخ مطلوب تست بوده و گزینه ی 2 صحیح است.

36-اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{1}{5}$ باشد آنگاه $\tan 2\alpha$ کدام است؟(سراسری خارج ریاضی 88)

1) 1.5 | **2) 1.8** | **3) 2.4** | **4) 2.8**

گزینه ی 3 صحیح است.

مشابه تست قبلی است.

با استفاده از فرمول:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5}\rightarrow\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$5-5\tan\alpha=1+\tan\alpha\rightarrow$$

$$6\tan\alpha=4\rightarrow\tan\alpha=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\rightarrow\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1-(\frac{2}{3})^2}=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}}=$$

$$\frac{36}{15}=\frac{12}{5}=2.4$$

بدون استفاده از فرمول:

با توجه به اینکه مقدار تانژانت زاویه ی $\frac{\pi}{4}-\alpha$ مقداری مثبت و برابر 0.2 است , پس زاویه ی مورد نظر حتما در یا ناحیه ی اول مثلثاتی قرار دارد یا در ناحیه ی سوم مثلثاتی ! غیر این نیست که دوستان؟

اول باید ببینم تانژانت کدوم زاویه برابر با $\frac{1}{5}$ یعنی 0.2 است.

می دانیم که تانژانت یک کمان از صفر تا 30 درجه به ازای هر 5 درجه تقریبا 0.09 افزایش می یابد.

با توجه به اینکه عدد 0.2 تقریبا 2.2 برابر 0.09 است پس می توان گفت این عدد تانژانت تقریبا زاویه ی 11 درجه می شود.یعنی مقدار زاویه ی $\frac{\pi}{4}-\alpha$ باید 11 درجه و در نتیجه مقدار زاویه ی α , 34 درجه می شود. پس محاسبه ی تانژانت زاویه ی 68 درجه مطلوب تست خواهد بود.

با توجه به اینکه محاسبه ی کتانژانت این زاویه راحت تر است ابتدا این محاسبه را انجام داده و با توجه به رابطه ی معکوسی که بین تانژانت و کتانژانت هستش عدد به دست آمده را معکوس می کنیم.

زاویه ی 68 درجه بین دو زاویه ی 60 و 90 قرار دارد.

کتانژانت یک کمان بین دو زاویه ی 60 تا 90 به ازای هر 5 درجه تقریبا 0.09 از عدد 0.57 به عدد صفر کاهش می یابد.

یعنی می توان گفت کتانژانت زاویه ی 68 درجه که 8 درجه یعنی معادل 1.6 برابر زاویه ی 5 درجه است , به میزان $1.6\times0.09=0.144\approx0.14$ کاهش یافته و به مقدار $0.57-0.14=0.43$ می رسد.

حال تنها کاری که مانده باید عدد به دست آمده را معکوس کنیم.

$$\frac{1}{0.43}=\frac{100}{43}=2.3$$

با توجه به اینکه محاسبات ما همگی تقریبی بوده اند پس درستی گزینه ی 3 کاملا برای ما معلوم و واضح است.

37-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 5x.\cos 3x = \cos^2 x$ کدام است؟(سراسری خارج ریاضی 88)

1) $\frac{k\pi}{4}$ **2)** $\frac{k\pi}{2}$ **3)** $\frac{(2k+1)\pi}{4}$ **4)** $k\pi + \frac{\pi}{4}$

گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\cos 5x.\cos 3x = \cos^2 x \rightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) = \cos^2 x \rightarrow \cos 8x + \cos 2x = 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \rightarrow$$

$$\cos 8x = 1 \rightarrow 8x = 2k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه 0 , گزینه ی 2 میشه 0 , گزینه ی 3 میشه $\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 4 هم میشه $\frac{\pi}{4}$. خوب یعنی شما بیاید یه 0 رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 3 و 4 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان 0 درجه را ظاهر نمی کنند.اگه غیر این بود. گزینه ها ی 1 و 2 حتما نادرست هستند.

0 رو بزار تو معادله...

$$\cos 5x.\cos 3x = \cos^2 x \xRightarrow{x=0} \cos 0.\cos 0 = \cos^2 0 \rightarrow (1)(1) = 1$$

خوب حالا که 0 جواب درست معادله است , پس گزینه های 3 و 4 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 1 درسته یا گزینه ی2؟

خوب فرق گزینه های 1 و 2 ؟ گزینه ی یک کمان $\frac{\pi}{4}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 2 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه.. یعنی اگه بتونیم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدیم , به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

$$\cos 5x.\cos 3x = \cos^2 x \xRightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \cos\frac{5\pi}{4}.\cos\frac{3\pi}{4} = \cos^2\frac{\pi}{4} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

پس گزینه ی 1 پاسخ صحیح تست است و گزینه ی 2 نیز چون نمی تواند این کمان رو ظاهر کند نمی تواند جواب صحیح تست باشد. زیرا جواب کلی معادله مطلوب و مد نظر تست است.

38-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\sin(\pi - x).\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3\cot x.\sin(\pi + x) = 0$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 87)

1.) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$ **2) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$** **3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$** **4) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$**

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$2\sin(\pi - x).\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3\cot x.\sin(\pi + x) = 0 \rightarrow 2\sin x.\sin x + 3\cot x.(-\sin x) = 2\sin^2 x - 3\cos x$$
$$= 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 2 - 2\cos^2 x - 3\cos x$$
$$= 0 \xrightarrow{\times -1} 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4} \rightarrow$$
$$\cos x = -2 \ , \frac{1}{2}$$
$$\cos x = -2 \quad \text{غ ق ق} \qquad \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه با همون روش رد گزینه ادامه بدیم, خیلی راحت به جواب مورد نظر تست خواهیم رسید...

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

کاملا مشخصه که گزینه ی 2 و 4 نادرست است.حال بین گزینه ی 1 و 3 , گزینه ی 3 درست است.زیرا کلی تر است.

کلی تر که میدونین یعنی چی؟(یعنی اینکه $x = -\frac{\pi}{3}$ جواب تست است اما در گزینه ی یک وجود ندارد اما در گزینه ی 3 وجود دارد.)

39-حاصل عبارت $2 + \frac{1}{\cos 20}$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی 87)

1) $2\sin 40$ **2) $4\cos 40$** **3) $2\cos 40$** **4) $4\sin 40$**

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\frac{1}{\cos20}+2=\frac{1+2\cos20}{\cos20}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\cos20\right)}{\cos20}=\frac{2(\cos60+\cos20)}{\cos20}=2\left(\frac{2\cos\frac{60+20}{2}\cos\frac{60-20}{2}}{\cos20}\right)$$

$$=\frac{4\cos40.\cos20}{\cos20}=4\cos40$$

بدون استفاده از فرمول:

قبل اینکه تست رو حل کنیم ذکر یک نکته رو ضروری می دانم و آن این است که در عبارات مثلثاتی این چنینی که یک عدد با یک عبارت مثلثاتی جمع می شود ,اگه بخواین کمان رو چندبرابر کرده و در انتها به حالت اولیه برگردونید به پاسخ صحیح نخواهد رسید.فقط یادتون باشه زمانایی که عدد مضربی از رابطه ی مثلثاتی باشه این ترفند جواب خواهد داد.پس رابطه ی $2+\frac{1}{\cos20}$ را به همان شکل بالایی تا $\frac{2(\cos60+\cos20)}{\cos20}$ پیش می بریم. حال زاویه را 3 برابر می کنم.چه اتفاقی می افته؟

معادله به صورت $-2=\frac{2(-\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}=\frac{2(-1+\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}=\frac{2(\cos180+\cos60)}{\cos60}$ درمی آید. حال تو همه ی گزینه ها کمان را سه برابر کنید تا به پاسخ صحیح تست برسید.

گزینه ی 1 میشه $2\sin120=\sqrt{3}\neq-2$ - گزینه ی 2 میشه $4\cos120=4\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$ – گزینه ی 3 میشه $2\cos120=2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ و گزینه ی 4 میشه $4\sin120=2\sqrt{3}\neq-2$. پس گزینه ی 2 پاسخ صحیح تست است.

40-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin\frac{5\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right).\sin(\pi+x)=0$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی87)

1). $k\pi+\frac{\pi}{4}$ **2) $k\pi-\frac{\pi}{4}$** **3) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$** **4) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$**

گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\sin\frac{5\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right).\sin(\pi+x)=0\rightarrow\frac{1}{2}+\cos x.(-\sin x)=0\xrightarrow{\times2}1-2\sin x.\cos x=0$$

$$\sin2x=1=\sin\frac{\pi}{2}\rightarrow2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه $\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 2 میشه $-\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 3 میشه $\pm\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 4 هم میشه $\frac{\pi}{2}$. خوب یعنی شما بیاید یه $\frac{\pi}{4}$ رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 2 و 4 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان $\frac{\pi}{4}$ درجه را ظاهر نمی کنند.اگه غیر این بود. گزینه ها ی 1 و 3 حتما نادرست هستند.

$\frac{\pi}{4}$ رو بزار تو معادله...

$$co3x.\sin(3\pi - x) - \sin3x.\cos(\pi + x) = \cos\frac{3\pi}{2} \xRightarrow{x=0} \sin0.\sin3\pi - \sin\pi.\cos\pi = 0 \to 0 - 0 = 0$$

خوب حالا که 0 جواب درست معادله است , پس گزینه های 3 و 4 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 1 درسته یا گزینه ی2؟

خوب فرق گزینه های 1 و 2 ؟ گزینه ی یک کمان $\frac{\pi}{4}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 2 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه.. یعنی اگه بتونیم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدیم , به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

$$\sin\frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right).\sin(\pi + x) = 0 \xRightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} + (\cos\frac{\pi}{4}).\left(-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 \to \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

پس گزینه ی 1 پاسخ صحیح تست است.

41-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $co3x.\sin(3\pi - x) - \sin3x.\cos(\pi + x) = \cos\frac{3\pi}{2}$ کدام است؟(سراسری تجربی 87 خارج از کشور)

1). $\frac{k\pi}{4}$ **2) $\frac{k\pi}{2}$**   **3) $k\pi + \frac{\pi}{4}$**   **4) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$**

گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$co3x.\sin(3\pi - x) - \sin3x.\cos(\pi + x) = \cos\frac{3\pi}{2} \to \cos3x.\sin x - \sin3x.(-\cos x)$$

$$= \sin x.\cos3x + \cos x.\sin3x \xrightarrow{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta} \sin(x + 3x) = \sin4x = 0 = \sin k\pi \to x = \frac{k\pi}{4}$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه 0 , گزینه ی 2 میشه 0 , گزینه ی 3 میشه $\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 4 هم میشه $\pm\frac{\pi}{4}$. خوب این یعنی چی؟یعنی شما بیاید یه 0 رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 3 و 4 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان 0 درجه را ظاهر نمی کنند.اگه غیر این بود. گزینه ها ی 1 و 2 حتما نادرست هستند.

0 رو بزار تو معادله...

$$co3x.\sin(3\pi-x)-\sin3x.\cos(\pi+x)=\cos\frac{3\pi}{2}\xRightarrow{x=0}\sin0.\sin3\pi-\sin\pi.\cos\pi=0\to0-0=0$$

خوب حالا که 0 جواب درست معادله است , پس گزینه های 3 و 4 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 1 درسته یا گزینه ی2؟

خوب فرق گزینه های 1 و 2 ؟ گزینه ی یک کمان $\frac{\pi}{4}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 2 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه.. یعنی اگه بتونیم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدیم , به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

$$co3x.\sin(3\pi-x)-\sin3x.\cos(\pi+x)=\cos\frac{3\pi}{2}\xRightarrow{x=\frac{\pi}{4}}\cos\frac{3\pi}{4}.\sin\left(3\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{3\pi}{4}.\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=0\to$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

پس گزینه ی 1 درست بوده و گزینه ی 2 چون نمی تواند این کمان رو ظاهر کند نادرست است.

42-در معادله ی $2\sin x.\cos3x=1+\cos(\frac{\pi}{2}+2x)$ مجموعه ی جواب ها به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی 87 خارج از کشور)

1). $\frac{k\pi}{4}$ 2) $\frac{k\pi}{2}$ 3) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ 4) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$2\sin x.\cos3x=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\to2\sin x.\cos3x=1-\sin2x\to2(\frac{1}{2}(\sin(x+3x)+\sin(x-3x))$$

$$=\sin4x-\sin2x=1-\sin2x\to$$

$$\sin4x=1\to4x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\to x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

بدون استفاده از فرمول:

گزینه های 1 و 4 نادرست هستند. چرا؟ زیرا با اختیار مقدار یک برای k برای گزینه ی یک و مقدار صفر برای k برای گزینه ی 4 , کمان $\frac{\pi}{4}$ به دست می آید که طرف دوم معادله به ازای انتخاب این کمان مقدارش

$1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=1+\cos(\pi)=1-1=0$ می شود که این شرایط در طرف اول معادله به وجود نمی آید و عبارت سمت چپ معادله به ازای این کمان هرگز صفر نمی شود.

گزینه ی 2 هم با اختیار مقدار صفر برای k کمان صفر درجه رو ظاهر میکنه که گزینه ی 3 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه...یعنی اگه ما بتونیم درستی یا نادرستی این کمان را مشخص کنیم به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

دقت داشته باشید که نیازی به تست کمان نیست.فقط توجه داشته باشید که با اختیاراین کمان با توجه به وجود سینوس در سمت چپ معادله , می توان گفت که این سمت عبارت مثلثاتی مفروض صفر می شود. اما سمت راست معادله مقدارش یک می شود.پس این گزینه نیز نادرست بوده و گزینه ی 3 پاسخ صحیح و مطلوب تست است.

43-حاصل عبارت $\cos 20.\cos 40+\cos^2 80$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی86)

1) $\cos 10$ **2) $\sin 70$** **3) $\frac{1}{2}$** **4) $\frac{3}{4}$**

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\cos 20.\cos 40+\cos^2 80 \xrightarrow[\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}]{\cos A.\cos B=\frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))} \frac{1}{2}(\cos 60+\cos 20)+\frac{1+\cos 160}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos 20\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 20=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 20+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 20=\frac{3}{4}$$

بدون استفاده از فرمول:

من میام کمان ها رو سه برابر می کنم.چه اتفاقی برای رابطه ی مثلثاتی داده شده می افتد؟

$$\cos 20.\cos 40+\cos^2 80 \xRightarrow{\text{کمان ها سه برابر}} \cos 60.\cos 120+\cos^2 240=\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+(-\frac{1}{2})^2=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$$

قبل اینکه به ادامه ی حل تست بپردازیم ذکر این نکته رو ضروری می دانم و آن اینکه درسته که ما با سه برابر کردن کمان زوایای 20 و 40 رو به ربع اول و دوم انتقال دادیم , یعنی یه منفی اومد تو محاسباتمون! پس آخر کار این موضوع رو حتما باید مد نظر داشته باشیم.

خوب! ادامه ی حل تست!

با توجه به اینکه کمان را سه برابر کردیم و در پایان باید به $\frac{1}{3}$ این کمان را تغییر دهیم , همین الان تو تمام گزینه ها کمان را سه برابر کنید . در واقع اگر کمان را سه برابر کنید گزینه ی صحیح باید مقدارش صفر شود! غیر اینه؟

گزینه ی 1 میشه کسینوس 30 درجه که صفر نیست. پس این گزینه نادرست است!

گزینه ی 2 میشه سینوس 210 درجه که اینم صفر نیست و نادرست می باشد!

گزینه ی 3 رو من می تونم سینوس 30 درجه فرض کنم که اگه سه برابر کنم کمانشو میشه سینوس 90 که اونم مقدارش مخالف صفر است.

اما گزینه ی 4 که پاسخ صحیح تست هم می باشد رو من میام به صورت حاصلضرب $\sin60.\sin60$ می نویسم. حال کمان ها رو اگه سه برابر کنم میشه $\sin180.\sin180$ که مقدارش برابر صفر بوده و پاسخ صحیح تست نیز می باشد.

44-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\sin^2x = 3\cos x$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 86)

1.) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 2) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 4) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

با استفاده از فرمول:

گزینه ی 4 صحیح است.

$$2\sin^2x = 3\cos x \to 2(1-\cos^2x) - 3\cos x = 0 \to 2 - 2\cos^2x - 3\cos x = 0 \to 2\cos^2x + 3\cos x - 2 = 0 \to$$

$$\cos x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4} = -2 \ , \frac{1}{2}$$

$\cos x = -2$ غ ق ق

$$\cos x = \frac{1}{2} \to x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

می توان با روش رد گزینه حل تست را ادامه داد؛اما وقتی جواب به این راحتی به دست می آید نیازی به این کار نیست..این جاست که مشخص می شود شما داوطلب گرامی به تناسب و بر حسب موقعیت از یکی از روش ها باید استفاده کنین.

بدون استفاده از فرمول:

به شکل بسیار تابلویی گزینه های 1 و 3 نادرست هستند. چرا؟ زیرا همه می دانیم که مقدار کسینوی زاویه ی 30 درجه که با اختیار مقدار صفر برای k در این گزینه ها به دست می آیند برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$ بوده که چون اون طرف معادله همواره عددی گویا هستش , پس نمی توانند با این شرایط با هم برابر باشند.

فرق گزینه های 2 و 4 در این هستش که گزینه ی 2 کمان $\pi - \frac{\pi}{3}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 4 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه...یعنی اگه ما بتونیم درستی یا نادرستی این کمان را مشخص کنیم به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

دقت داشته باشید که نیازی به تست کمان نیست.فقط اگر به این نکته توجه داشته باشید که این کمان در ناحیه ی دوم مثلثاتی قرار داشته و در ناحیه ی دوم علامت کسینوس همواره منفی است. پس این گزینه پاسخ صحیح تست نمی تواند باشد و گزینه ی 4 پاسخ صحیح تست است.

45-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\tan x.\cos^2x = 1$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی خارج 86)

1.) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ 2) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ 3) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ 4) $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$2\tan x.\cos^2 x = 1 \to 2\frac{\sin x}{\cos x}.\cos^2 x = 2\sin x.\cos x = \sin 2x = 1 = \sin\frac{\pi}{2} \to$$
$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \to x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

بدون استفاده از فرمول:

کاملا معلوم هستش که گزینه های 1 و 3 چون به ازای $x = -\frac{\pi}{4}$ مقدار تانژانت شون منفی هستش , غلط هستند. زیرا حاصل عبارت $2\tan x.\cos^2 x$ مثبت می باشد.

فرق گزینه های 2 و 4 در این هستش که گزینه ی 2 کمان $\pi + \frac{\pi}{4}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 4 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه...یعنی اگه ما بتونیم درستی یا نادرستی این کمان را مشخص کنیم به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

دقت داشته باشید که نیازی به تست کمان نیست.فقط اگر به این نکته توجه داشته باشید که این کمان در ناحیه ی سوم مثلثاتی قرار داشته و در ناحیه ی سوم علامت تانژانت همواره مثبت است. پس این گزینه پاسخ صحیح تست بوده و گزینه ی 4 چون کلی نیست نمی تواند پاسخ مطلوب تست باشد.

46-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ با شرط $x \neq \frac{k\pi}{2}$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 86)

1). $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$　　**2) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$**　　**3) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$**　　**4) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$**

گزینه ی 2 صحیح است.

داوطلبان رشته ی ریاضی حتما این سوال رو در تمرین کتاب درسی حسابان دیده اند.

با استفاده از فرمول:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \to (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x \xrightarrow{\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}$$
$$\left(2\sin\frac{x+3x}{2}.\cos\frac{x-3x}{2}\right) + \sin 2x = 0 \to 2\sin 2x.\cos x + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1) = 0$$
$$\to \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0 \to 2x = k\pi \to x = \frac{k\pi}{2}\\ \cos x = -\frac{1}{2} \to x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\end{array}\right.$$

که جواب گزینه ی 2 یک پاسخ صحیح و کلی تر بوده و جواب دیگر را نیز در بر می گیرد.

بدون استفاده از فرمول:

با توجه به شرط گذاشته شده و اینکه x نباید مضرب صحیح از کمان $\frac{\pi}{2}$ باشد , داریم:

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه $\pm\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 2 میشه $\pm\frac{2\pi}{3}$, گزینه ی 3 میشه $\pm\frac{\pi}{6}$, گزینه ی 4 هم میشه $\pm\frac{\pi}{3}$. خوب این یعنی چی؟یعنی شما بیاید یه $\frac{\pi}{3}$ رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 2 و 3 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان $\frac{\pi}{3}$ درجه را ظاهر نمی کنند.اگه غیر این بود. گزینه ها ی 1 و 4 حتما نادرست هستند.

$\frac{\pi}{3}$ رو بزار تو معادله...

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \xRightarrow{x=\frac{\pi}{3}} \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\pi = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 = 0 \rightarrow \sqrt{3} \neq 0$$

خوب حالا که $\frac{\pi}{3}$ جواب نادرست معادله است , پس گزینه های 1 و 4 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 2 درسته یا گزینه ی3؟

خوب فرق گزینه های 2 و 3 ؟ گزینه ی سه کمان $\frac{\pi}{6}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 2 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه.. یعنی اگه بتونیم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدیم , به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \xRightarrow{x=\frac{\pi}{6}} \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \neq 0$$

پس گزینه ی 3 نیز نادرست بوده و گزینه ی 2 جواب کلی معادله بوده و پاسخ صحیح تست است.

47-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin(\frac{5\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 85)

1). $k\pi + \frac{\pi}{2}$ **2) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$** **3) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$** **4) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$**

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

$$= 1 + \cos x \rightarrow \cos x - \sin x = 1 + \cos x \rightarrow \sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه $\frac{\pi}{2}$, گزینه ی 2 میشه $-\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 3 میشه $-\frac{\pi}{2}$, گزینه ی 4 هم میشه $\frac{\pi}{2}$. خوب این یعنی چی؟یعنی شما بیاید یه $\frac{\pi}{2}$ رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 2 و 3 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان $\frac{\pi}{2}$ درجه را ظاهر نمی کنند.اگه غیر این بود. گزینه ها ی 1 و 4 حتما نادرست هستند.

$\frac{\pi}{2}$ رو بزار تو معادله...

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1+\sin(3\pi) \to \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+0 \to -1 \neq 1$$

خوب حالا که $\frac{\pi}{2}$ جواب نادرست معادله است , پس گزینه های 1 و 4 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 2 درسته یا گزینه ی3؟

خوب فرق گزینه های 2 و 3 ؟ گزینه ی سه کمان $-\frac{\pi}{2}$ رو ظاهر میکنه که گزینه ی 2 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه.. یعنی اگه بتونیم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدیم , به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right) \xrightarrow{x=-\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1+\sin(2\pi) \to \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+0 \to 1 = 1$$

پس گزینه ی 3 صحیح بوده و گزینه ی 2 چون جواب کلی معادله نیست نمی تواند پاسخ صحیح تست باشد.

48-ساده شده ی عبارت $\cos50(\tan70+\tan10)$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی85)

1) $\sin20$ 2) $\cos20$ 3) $2\sin20$ 4) $2\cos20$

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\cos50(\tan70+\tan10) = \cos50\left(\frac{\sin70}{\cos70}+\frac{\sin10}{\cos10}\right) =$$

$$\cos50\left(\frac{\sin70.\cos10+\cos70.\sin10}{\cos70.\cos10}\right) = \cos50\left(\frac{\sin(70+10)}{\cos70.\cos10}\right) =$$

$$\cos50.\frac{\sin80}{\cos70.\cos10} = \cos50.\frac{\cos10}{\cos70.\cos10} = \frac{\cos50}{\cos70} = \frac{\sin40}{\sin20} = \frac{2\sin20.\cos20}{\sin20} = 2\cos20$$

بدون استفاده از فرمول:

من میام کمان ها رو سه برابر می کنم!چرا؟تا به شکلی که محاسبه ی مقدار مثلثاتی کمان ها مقدور باشد درآورده باشم.مشکلی نیست؟

$$\cos50(\tan70+\tan10) \xRightarrow{\text{زاویه سه برابر}} \cos150(\tan210+\tan30) = \cos(180-30)\,(\tan(180+30)+\tan30)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -1 = -2\cos60$$

دقت داشته باشید که با توجه به گزینه ها عدد 1- را به این صورت نوشتم.حال با توجه به این موضوع که ما با سه برابر کردن زاویه ی اولیه ,کلا کمان ها رو از ناحیه ی اول بردیم به ناحیه ی سوم! البته حواستون باشه که کلا چون در ناحیه ی سوم مثلثاتی مقدار تانژانت همواره مثبت است , پس حاصل عبارت مثلثاتی مورد نظر یعنی $\tan70+\tan10$ از لحاظ مثبت و منفی بودن که هیچ فرقی نمیکنه! فقط میمونه بررسی $\cos50$ که شده $\cos150$ یعنی از ربع اول رفته به ربع دوم که کسینوس مقدارش منفی ست. پس باید در جواب آخر علاوه بر اینکه کمان رو $\frac{1}{3}$ می کنیم , باید تو یه منفی هم ضرب کنیم...غیر اینه؟

مطابق آنچه گفته شد می توان نوشت :

$$-2\cos60 \xRightarrow{\text{تو یه منفی ضرب کرده و کمان را } \frac{1}{3} \text{میکنیم}} 2\cos20$$

یعنی گزینه ی 4 پاسخ صحیح و مطلوب تست است.

49-اگر α زاویه ی منفرجه و $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ باشد , مقدار $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ کدام است؟(سراسری تجربی خارج 85)

1) 7-   **2) $-\frac{1}{7}$**   **3) $\frac{1}{7}$**   **4) 7**

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\rightarrow \cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}\xrightarrow{\text{زاویه منفرجه}}$$

$$\cos x=-\frac{4}{5}\ \text{ق ق}\rightarrow \tan x=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}\rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\alpha}$$

$$=\frac{1+\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}=\frac{1}{7}$$

بدون استفاده از فرمول:

واقعیت مساله این هست که در حل برخی تست ها بدون استفاده از فرمول , قدرت تجزیه و تحلیل دانش آموز باید خیلی بالا باش.همه ی ما میدونیم که سینوس زاویه ی 37 درجه که یکی از زوایای معروف مثلثاتی در حل مسائل ریاضی و فیزیک می باشد برابر با 0.6 یا همون $\frac{3}{5}$ است. و با توجه به اینکه گفته شده این زاویه منفرجه است , پس مقدار کمان 37 درجه نیست.بلکه $143 = 180 - 37$ درجه است. یعنی کمان مورد نظر یعنی 143 درجه بوده و در ناحیه ی دوم مثلثاتی قرار دارد.

اگر $\alpha = 143$ درجه رو با 45 درجه جمع کنیم , مقدار کمان برابر با 188 درجه می شود.یعنی یه چیزی بیشتر از 180 درجه...دوستان توجه داشته باشند که می دانیم که تانژانت زاویه ی 180 درجه صفر است.پس قدر مسلم مقدار تانژانت هر زاویه ای با توجه به اینکه با افزایش زاویه , زیاد می شود ,و تفاوت زاویه ی مورد نظر نیز فقط 8 درجه است , پس با اطمینان می توان گفت که گزینه ی 3 یعنی عدد $\frac{1}{7}$ که کمی بیشتر از صفر است پاسخ مطلوب مساله است.

البته ناصحیح بودن گزینه های 1 و 2 که اعدادی منفی هستند مشخص است . زیرا کمان مورد نظر ما در ناحیه ی سوم مثلثاتی قرار داشته و به طور قطع همه می دانیم که در این ناحیه علامت تانژانت مثبت است.

50-حاصل عبارت $4\cos40 - \frac{1}{\cos20}$ برابر کدام است؟(سراسری ریاضی خارج از کشور 85)

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) $\sqrt{3}$ 4) 2

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$4\cos40 - \frac{1}{\cos20} = \frac{4\cos40.\cos20 - 1}{\cos20} \xrightarrow{\cos A.\cos B=\frac{1}{2}(\cos(A+B)+\cos(A-B))} = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)(\cos60 + \cos20) - 1}{\cos20} = \frac{2\left(\frac{1}{2} + \cos20\right) - 1}{\cos20} = \frac{1 + 2\cos20 - 1}{\cos20} = 2$$

بدون استفاده از فرمول:

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند که در این گونه تست ها سعی کنید زوایا را چند برابر کنید به طوری که مقدارعبارت را بتونیم محاسبه کنیم.

من میام کمان ها رو سه برابر میکنم.عبارت مثلثاتی داده شده به صورت زیر درمی آید:

$$4\cos40 - \frac{1}{\cos20} \xRightarrow{\text{کمان سه برابر}} 4\cos120 - \frac{1}{\cos60} = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\frac{1}{2}} = -2 - 2 = -4$$

لطفا توجه داشته باشید که کمان را چون با سه برابر کردن به ناحیه ی دوم مثلثاتی برده و در این ناحیه چون مقدار کسینوس منفی می شود , پس یادتون باشه بعد از محاسبه عبارت را در یک منفی ضرب کنید!

صبر کنید. هنوز حل مساله تموم نشده است. من میام عدد -4 را به صورت $4\cos\pi$ می نویسیم. حال با توجه به اینکه کمان را سه برابر کرده بودیم , حال کمان را $\frac{1}{3}$ برابر می کنیم. یعنی عبارت مفروض به صورت $2 = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 4\cos\frac{\pi}{3}$ دراومده و گزینه ی 4 پاسخ مطلوب تست است.

51-اگر $\tan 20 = 0.36$ باشد حاصل $\frac{\sin 160-\cos 200}{\cos 110+\sin 70}$ کدام است؟(سراسری تجربی 84)

1) $\frac{4}{9}$ **2)** $\frac{15}{8}$ **3)** $\frac{17}{8}$ **4)** $\frac{31}{16}$

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول:(بدون استفاده از فرمول)

$$\frac{\sin 160-\cos 200}{\cos 110+\sin 70}=\frac{\sin(180-20)-\cos(180+20)}{\cos(90+20)+\sin(90-20)}=\frac{\sin 20+\cos 20}{-\sin 20+\cos 20}\xrightarrow{\text{همه ی جملات را بر } \cos 20 \text{ تقسیم می کنیم}}=\frac{\frac{\sin 20}{\cos 20}}{\frac{-\sin 20}{\cos 20}}$$

$$=\frac{\tan 20+1}{-\tan 20+1}=\frac{0.36+1}{-0.36+1}=\frac{1.36}{0.64}=\frac{136}{64}=\frac{68}{32}=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$$

خدایی دیگه همه می دونن که حاصل تقسیم سینوس به روی کسینوس می شود تانژانت!!!پس فرمول استفاده نکردیم اصلا تو حل این تست!

52-عبارت $\sin 3x-2\sin 4x+\sin 5x$ با کدام عبارت زیر برابر است؟(سراسری ریاضی 84)

1) $2\sin 4x.\sin^2\frac{x}{2}$ **2)** $-2\sin 4x.\sin^2\frac{x}{2}$

3) $4\sin 4x.\sin^2\frac{x}{2}$ **4)** $-4\sin 4x.\sin^2\frac{x}{2}$

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\sin 3x-2\sin 4x+\sin 5x$$

$$=(\sin 3x+\sin 5x)-2\sin 4x\xrightarrow{\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}\left(2\sin\frac{3x+5x}{2}.\cos\frac{3x-5x}{2}\right)$$

$$-2\sin 4x=(2\sin 4x.\cos x)-2\sin 4x=-2\sin 4x(1-\cos x)\xrightarrow{1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=-2\sin 4x.\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)=$$

$$-4\sin 4x.\sin^2\frac{x}{2}$$

بدون استفاده از فرمول:

دقت داشته باشید که هنگامی که قصد دارید با دادن کمان به x تست رو حل کرده و رد گزینه کنید , با توجه به اینکه عبارت sin4x در همه ی گزینه ها وجود دارد نباید کمانی بدهیم که این عبارت را صفر کند.من میام کمان $\frac{\pi}{3}$ را اختیار کرده و مقدار عبارت مثلثاتی داده شده را به ازای این کمان محاسبه می کنم.

$$\sin 3x-2\sin 4x+\sin 5x \xRightarrow{x=\frac{\pi}{3}} \sin\pi-2\sin\frac{4\pi}{3}+\sin\frac{5\pi}{3}=0-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

به بررسی گزینه های داده شده می پردازیم:

حال با توجه به اینکه مقدار عبارت $\sin^2\frac{x}{2}$ همواره مثبت و برابر با $\frac{1}{2}$است و مقدار عبارت sin4x به ازای کمان $x=\frac{\pi}{3}$ در ناحیه ی سوم مثلثاتی قرار داشته و مقداری منفی می شود , پس با توجه به اینکه مقدار عبارت مثلثاتی داده شده مثبت و برابر با $\frac{\sqrt{3}}{2}$است , پس گزینه ی 1 و 3 چون مقداری منفی به دست می آیند , نادرست می باشند . پس یا گزینه 2 صحیح است یا 4؟

با مقدار محاسبه شده برای عبارت مثلثاتی فرق میکند $-2\sin 4x.\sin^2\frac{x}{2} \xRightarrow{x=\frac{\pi}{3}} -2\sin\frac{4\pi}{3}.\sin^2\frac{\pi}{6}=-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

پس گزینه ی 2 نیز نادرست بوده و گزینه ی 4 پاسخ مطلوب تست است.درستی گزینه ی 4 را در ذیل می توانید مشاهده کنید!

$$-4\sin 4x.\sin^2\frac{x}{2} \xRightarrow{x=\frac{\pi}{3}} -4\sin\frac{4\pi}{3}.\sin^2\frac{\pi}{6}=-4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

53-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=0$ به کدام صورت است؟(سراسری تجربی 83)

1). $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ **2) $k\pi\pm\frac{\pi}{4}$**   **3) $k\pi+\frac{\pi}{4}$**   **4) $k\pi-\frac{\pi}{4}$**

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\frac{\cos 2x}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=0\rightarrow\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}=\frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)}=\cos x+\sin x=0$$

$$\xrightarrow{\div\cos x}\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}=1+\tan x=0\rightarrow\tan x=-1=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

بدون استفاده از فرمول :

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه $\pm\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 2 میشه $\pm\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 3 میشه $\frac{\pi}{4}$, گزینه ی 4 هم میشه $-\frac{\pi}{4}$. 0 رو بزار تو معادله...

کاملا مشخص است که هر سه گزینه ی 1 و 2 و 3 نادرست هستند زیرا به ازای کمان $\frac{\pi}{4}$ مخرج کسر عبارت مثلثاتی داده شده نیز صفر می شود که مشخصا نادرست می باشد.

پس گزینه ی 4 فقط می تواند پاسخ صحیح تست باشد.

54-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است.مجموعه ی مقادیر i کدام است؟(سراسری ریاضی 83)

1) 7 و 9 **2) 1 و 3 و 5** **3) 1 و 4 و 7** **4) 1 و 5 و 9**

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$\cos 2x = \sin x \rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{3\pi}{6} = 2k\pi + 2\pi - \frac{3\pi}{6} = 2k\pi + \underline{\frac{9\pi}{6}} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{3\pi}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{2} \end{array}\right. \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2k\pi + \underline{\frac{\pi}{6}} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \underline{\frac{5\pi}{6}} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه k رو صفر بدیم , با توجه به اینکه جواب کلی معادله ی مثلثاتی به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ است , به صورت $\frac{i\pi}{6}$ درمی آید. گزینه ها را بررسی می کنیم.

کاملا مشخص است که گزینه ی 1 نادرست است . حال باید دید به ازای کدام i, ها رابطه ی داده شده برقرار است؟

به ازای $i = 1$ کمان مورد نظر به صورت $\frac{\pi}{6}$ در می آید که رابطه ی مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به ازای این کمان برقرار است و چون گزینه ی 1 این عدد را شامل نمی شود نادرست است.

$$\cos 2x = \sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} \cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه گزینه های 2 و 3 هیچکدام عدد 9 را ندارند , بهتر است ابتدا این عدد را تست کنید که اگه صحیح هم باشد یعنی گزینه های 2 و 3 نیز نادرست است. اگر نه که هیچی !باید این دو گزینه رو چک کنیم!البته دقت داشته باشید که من عدد 9 رو واسه این اختیار کردم که به ازای هیچ مقدار دیگری از k این گزینه ظاهر نمی شود!غیر اینه؟

به ازای $i = 9$ کمان مورد نظر به صورت $\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$ در می آید که رابطه ی مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به ازای این کمان برقرار است.

$$\cos 2x = \sin x \xrightarrow{x=\frac{3\pi}{2}} \cos 3\pi = \sin\frac{3\pi}{2} \to -1 = -1$$

پس گزینه ی 4 پاسخ صحیح و مطلوب تست بوده و گزینه های 2 و 3 کلی نیستند...

دقت کنید که رابطه ی مثلثاتی داده شده به ازای به ازای 4 و $3 = i$ نادرست هستند که گزینه های 2 و 3 شامل این عدد می باشند.

55-اگر $a + b = \frac{\pi}{4}$ باشد حاصل $8\cos a.\cos b.\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos(\frac{\pi}{2} - b)$ کدام است؟(سراسری ریاضی83)

1) $\sin 4a$ 2) $\cos 4b$ 3) $\sin^2 2a$ 4) $\cos^2 2a$

گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$8\cos a.\cos b.\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = 8\cos a.\cos b.\sin a.\sin b =$$

$$2(2\sin a.\cos a)(2\sin b.\cos b) = 2\sin 2a.\sin 2b = 2\sin 2a.\sin 2\left(\frac{\pi}{4} - a\right) =$$

$$2\sin 2a.\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) = 2\sin 2a.\cos 2a = \sin 4a$$

بدون استفاده از فرمول:

با توجه به رابطه ی $a + b = \frac{\pi}{4}$ با اختیار $a = 0$ و $b = \frac{\pi}{4}$ رابطه ی مثلثاتی داده شده به صورت زیر محاسبه می شود :

$$8\cos a.\cos b.\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = 8\cos 0.\cos\frac{\pi}{4}.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

می توان با اطمینان گفت که گزینه های 2 و 4 به طور قطع نادرست است. زیرا به ازای مقادیر اختیارشده برای a و b در این دو گزینه خواهیم داشت :

$$\cos 4b = \cos 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi = -1 \neq 0 \quad , \quad \cos^2 2a = \cos^2 0 = 1 \neq 0$$

حال باید دید که کدامیک از گزینه های 1 و 3 پاسخ صحیح تست می باشند؟!

این سری و با توجه به رابطه ی $a + b = \frac{\pi}{4}$, $a = \frac{\pi}{4}$ و $b = 0$ رابطه ی مثلثاتی داده شده به صورت زیر محاسبه می شود :

$$8\cos a.\cos b.\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = 8\cos\frac{\pi}{4}.\cos 0.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

در نتیجه گزینه ی 3 نیز نادرست شده و گزینه ی 1 پاسخ مطلوب مساله خواهد بود.

$$\sin^2 2a = \sin^2\frac{\pi}{2} = 1 \neq 0 \qquad و \qquad \sin 4a = \sin\pi = 0$$

56-خلاصه شده ی عبارت $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).\sin(\pi+\alpha)-\sin(\pi-\alpha).\cos(-\alpha)$ کدام است؟(سراسری تجربی 82)

1) $-\sin2\alpha$ **2) $\sin2\alpha$** **3) $\cos2\alpha$** **4) 0**

گزینه ی 1 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).\sin(\pi+\alpha)-\sin(\pi-\alpha).\cos(-\alpha)=\cos a.(-\sin a)-\sin a.\cos a$$

$$=-2\sin a.\cos a=-\sin2a$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه α رو صفر بدیم :

حاصل عبارت مثلثاتی چقدر می شود؟

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).\sin(\pi+\alpha)-\sin(\pi-\alpha).\cos(-\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\pi)-\sin(\pi).\cos(0)=(1)(0)-(0)(1)=0$$

حال با امتحان $\alpha=0$ برای گزینه های داده شده می توان گزینه ی 3 را رد کرد. زیرا به ازای این زاویه مقدار گزینه ی 3 , یک می شود.

α رو یک زاویه ی دیگه بدیم. مثلا $\alpha=\frac{\pi}{6}$. حال در مورد گزینه ها چه می توان گفت؟

مقدار عبارت مثلثاتی داده شده به ازای این کمان چقدر می شود؟

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right).\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

کاملا معلوم است که گزینه های 2 و 4 نیز با اختیار این کمان رد می شوند . زیرا مقدار گزینه ی دو $+\frac{\sqrt{3}}{2}$ و مقدار گزینه ی 4 هم که همواره صفر است.

پس گزینه ی 1 پاسخ صحیح و مطلوب تست است.

$$-\sin(2\alpha)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

57-حاصل عبارت $\cos165.\cos105$ کدام است؟(سراسری ریاضی 82)

1) $-\frac{1}{2}$ **2) $-\frac{1}{4}$** **3) $\frac{1}{4}$** **4) $\frac{1}{2}$**

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\cos165.\cos105 = \cos(180-15).\cos(90+15) = (-\cos15)(-\sin15) = \sin15.\cos15 = \frac{1}{2}\sin30 = \frac{1}{4}$$

بدون استفاده از فرمول:

با اینکه گاهی حل تست های مثلثات با استفاده از فرمول خیلی آسونتر هستش , اما ما بر حسب وظیفه این تست رو نیز بدون استفاده از فرمول حل می کنیم.

با توجه به اینکه کمان های داده شده ی 105 و 165 به ترتیب در ناحیه ی دوم و سوم مثلثاتی قرار دارند و در این دو ناحیه علامت کسینوس همواره منفی است , پس صد در صد گزینه های 1 و 2 نادرست هستند. چرا؟امکان داره که حاصلضرب دو تا عدد منفی , منفی بشه؟!

یعنی یا گزینه ی 3 درسته یا گزینه ی 4؟

توجه داشته باشید در عبارت $\cos165.\cos105$ من میام کمان ها را دو برابر می کنم...چی میشه؟عبارت به صورت $\cos330.\cos210$...درسته؟چرا این کارو کردم؟برای اینکه بتونم عبارت داده شده را به شکلی دربیارم تا محاسبه ی کسینوس کمان هاشون مقدور باشه!

$$\cos330.\cos210 = \cos(360-30).\cos(180+30) = (\cos30).(-\cos30) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

من میام عدد $-\frac{3}{4}$ را به صورت یک عبارت مثلثاتی می نویسم...مثلا $\sin(-60).\sin(60)$. حال چون کمان ها را دو برابر کرده بودم حالا نصفش می کنم! البته به این نکته هم باید توجه کنم که چون با دوبرابر کردن کمان ها آنها را از ناحیه ی دوم و سوم مثلثاتی که علامت کسینوس در آن نواحی منفی بود آنها را به نواحی سوم و چهارم مثلثاتی که علامت کسینوس در آنها به ترتیب منفی و مثبت و در نتیجه حاصلضرب آنها را منفی کرده ام , باید هنگام نصف کردن در واقع چون یک منفی را به حاصلضرب عبارت اضافه نموده ام یه منفی را حذف کنم!

$$\sin(-60).\sin(60) \xRightarrow{\text{یه منفی حذف و کمان ها نصف می شود}} \sin30.\sin30 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

58-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin3x+\sin x}{\sin x} = 1$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی 82)

1) $\frac{k\pi}{3}$ **2)** $k\pi + \frac{\pi}{3}$ **3)** $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ **4)** $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\frac{\sin3x+\sin x}{\sin x} = 1 \xrightarrow{\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} \frac{2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}}{\sin x} = 1 \to \frac{2\sin2x.\cos x}{\sin x} = 1$$

$$\frac{2(2\sin x.\cos x)(\cos x)}{\sin x} = 1 \to 4\cos^2x = 1 \to \cos^2x = \frac{1}{4} \to \cos x = \pm\frac{1}{2} \to \left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2} \to x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\\ \cos x = -\frac{1}{2} \to x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}\end{array}\right.$$

دقت شود که مبادا به اشتباه گزینه ی 4 را به عنوان پاسخ صحیح انتخاب کنید.درسته که موقع محاسبات به جواب هایی که در صورت آنها کمانی به صورت $2k\pi$ ظاهر می شود ؛ اما ما پاسخ و جواب کلی تست مد نظرمان است.جوابی که کلی باشه و همه ی حالت های ممکن رو دربر بگیره...پس با یک حساب سرانگشتی به راحتی متوجه می شوید که گزینه ی 3 صحیح است.

در سال 1382 خیلی از داوطلبان رشته ی ریاضی به این سوال پاسخ نادرست داده بودند.

بدون استفاده از فرمول:

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه 0 , گزینه ی 2 میشه $\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 3 میشه $\mp\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 4 هم میشه $\pm\frac{\pi}{3}$. 0 رو بزار تو معادله...

کاملا مشخص است که گزینه ی 1 نادرست است . زیرا به ازای کمان صفر مخرج کسر عبارت مثلثاتی داده شده نیز صفر می شود که مشخصا نادرست می باشد.

برای پی بردن به صحت گزینه های دیگر توجه داشته باشید که نیازی به جاگذاری نیست. با اختیار کمان $\frac{\pi}{3}$, sin3x برابر صفر شده و در نتیجه رابطه ی مثلثاتی داده شده برقرار است. تو جه داشته باشید چون به ازای $-\frac{\pi}{3}$ نیز چون عبارت sin3x حذف گردیده و باز هم رابطه ی مثلثاتی داده شده برقرار است.خوب این مطالب یعنی چی؟یعنی گزینه ی 2 نادرست است!!!چرا؟چون کلی نیست و به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تواند کمان $\frac{\pi}{3}$ را که صحیح است ظاهر کند.

با این حساب و مطابق آنچه که گفته شد یکی از گزینه های 3 و 4 پاسخ درست تست می باشند.

فرق گزینه ی 3 و 4 در چیه؟در این که به ازای $k = 1$ گزینه ی 3 کمان $\frac{2\pi}{3}$ را ظاهر می کند که گزینه ی 4 به هیچ عنوان نمی تواند این کمان را ظاهر کند.یعنی اگر بتوانیم درستی یا نادرستی این کمان را معلوم کنیم به پاسخ صحیح تست خواهیم رسید.

با اختیار این کمان عبارت sin3x باز صفر گردیده و در نتیجه رابطه ی مثلثاتی داده شده باز هم به صورت $\frac{\text{sinx}}{\text{sinx}} = 1$ درآمده و صحیح می باشد. پس چون به ازای این کمان رابطه ی مثلثاتی داده شده نیز برقرار است گزینه ی 3 پاسخ صحیح تست بوده و گزینه ی 4 به دلیل عدم توانایی در ظاهرکردن این کمان نمی تواند پاسخ صحیح تست باشد.

59-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$ کدام است؟(سراسری تجربی 81)

1). $k\pi$ 2) $2k\pi + \pi$ 3) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ 4) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

گزینه ی 2 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\text{cosx} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{1 \pm 5}{4} = \frac{3}{2}\ , -1$$

کاملا مشخص است که $\text{cosx} = \frac{3}{2}$ نادرست است.زیرا همانطور که می دانیم مقدار سینوس و کسینوس هرگز از دو مقدار مثبت یک و منفی یک تجاوز نمی کند.

$$\text{Cosx} = -1 = \cos\pi \ \rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه 0 , گزینه ی 2 میشه π , گزینه ی 3 میشه $-\frac{\pi}{2}$, گزینه ی 4 هم میشه $\frac{\pi}{2}$. خوب این یعنی چی؟0 رو بزار تو معادله...

$$2\cos^2 x-\cos x-3=0 \xRightarrow{x=0\ \ ,\cos x=1} 2-1-3=0 \rightarrow -2\neq 0$$

0 جواب نادرست معادله است , پس گزینه 1 نادرست می باشد!

$$2\cos^2 x-\cos x-3=0 \xRightarrow{x=\pi\ \ ,\cos\pi=-1} 2+1-3=0 \rightarrow 0=0$$

یعنی گزینه ی 2 ممکن است پاسخ صحیح تست باشد و با توجه یه اینکه جواب کلی معادله ی مثلثاتی خواسته شده است و همه ی پاسخ ها را باید دربر داشته باشد و گزینه ی 3 و 4 به هیچ عنوان و به ازای هیچ مقدار صحیح k کمان π را ظاهر نمی کنند پس با قطعیت می توان گفت گزینه ی دو جواب صحیح و کلی معادله است و گزینه های 3 و 4 نادرست می باشند.

نادرستی این گزینه ها را به راحتی می توانید با قراردادن کمان های به دست آمده برای حالت $k=0$ نیز بررسی کنید.

60-ساده شده ی عبارت $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ کدام است؟(سراسری ریاضی 81)

$\cos\alpha-\sin\alpha$ (1	**$\cos2\alpha$ (2**	**$1+\sin2\alpha$ (3**	**$1-\sin2\alpha$ (4**

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

روش های مختلفی برای حل این تست در کتاب های کمک آموزشی ارائه شده است, اما بهترین و آسانترین روش حل این تست همان استفاده از ویژگی تبدیل ضرب به جمع است.

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \xrightarrow{\sin\alpha.\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))} 2(\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin(-2\alpha)\right)$$

$$=1-\sin2\alpha$$

بدون استفاده از فرمول:

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشند که اینکه برای رد گزینه ها چه زاویه ای را بدهیم به خود شما داوطلب بستگی داره و البته بهتر است به تناسب رابطه ی مثلثاتی داده شده این زوایا را انتخاب کنیم...

با توجه به اینکه در چنین معادلاتی زاویه ی صفر یکی از بهترین زوایاست , اما در این مورد این زاویه هیچ کمکی به ما نمی کند و ما نمی توانیم با دادن این زاویه به α گزینه ای را رد کنیم...درسته؟!

اگر α را $\frac{\pi}{4}$ اختیار کنیم , آنگاه مقدار عبارت مثلثاتی $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\cos\frac{\pi}{2}.\sin 0=0$ می شود که تنها گزینه ی 3 با اختیار این زاویه رد می شود!

$$1+\sin 2\alpha=1+\sin 1+1=2\neq 0$$

و اگر α را $-\frac{\pi}{4}$ اختیار کنیم , آنگاه مقدار عبارت مثلثاتی $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\cos 0.\sin\frac{\pi}{2}=2$ می شود که گزینه های 1 و 2 نیز با اختیار این زاویه رد می شوند!

$$\cos\alpha-\sin\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\neq 2$$

$$\cos 2\alpha=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 2$$

پس گزینه ی 4 پاسخ صحیح تست است.

$$1-\sin 2\alpha=1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1+\sin 1+1=2$$

61-جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin 4x-\sin 2x=\sin(\frac{\pi}{2}+3x)$ به کدام صورت است؟(سراسری ریاضی 81)

1). $\frac{k\pi}{6}$ 2) $\frac{k\pi}{3}$ 3) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\sin 4x-\sin 2x=\sin(\frac{\pi}{2}+3x)$$

$$\xrightarrow{\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\sin 4x+\sin(-2x)=\cos 3x\rightarrow 2\sin\frac{4x-2x}{2}\cos\frac{4x+2x}{2}=\cos 3x\rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{حق ساده سازی ندارید}} 2\sin x.\cos 3x-\cos 3x=0\rightarrow \cos 3x(2\sin x-1)=0\rightarrow$$

$$2\sin x.\cos 3x=\cos 3x\qquad \begin{cases}\cos 3x=0\rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}\rightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\\ \sin x=\frac{1}{2}\rightarrow x=\begin{matrix}2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}\end{matrix}\end{cases}$$

بدون استفاده از فرمول:

اگه k رو صفر بدیم , گزینه ها به چه شکلی درمی آیند؟

گزینه ی 1 میشه 0 , گزینه ی 2 میشه 0 , گزینه ی 3 میشه $-\frac{\pi}{3}$, گزینه ی 4 هم میشه $\frac{\pi}{6}$. خوب این یعنی چی؟یعنی شما باید یه 0 رو تو معادله ی مثلثاتی داده شده امتحان کنید. اگه درست بود , که گزینه های 3 و 4 نادرست هستند. زیرا به ازای هیچ مقدار صحیح k , این دو گزینه کمان 0 درجه را ظاهر نمی کنند.اگه نادرست بود. گزینه ها ی 1 و 2 حتما نادرست هستند.

0 رو بزار تو معادله...

$$\sin 4x - \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} + 3x) \xRightarrow{x=0 \ ,\sin x=0 \ و \ \sin\frac{\pi}{2}=1} 0 - 0 = 1 \rightarrow 0 \neq 1$$

خوب حالا که 0 جواب نادرست معادله است , پس گزینه های 1 و 2 نادرست می باشند!

یعنی یا گزینه ی 3 درسته یا گزینه ی4؟

خوب فرق گزینه های 3 و 4 ؟, گزینه ی سه کمان $\frac{\pi}{3}$ - رو ظاهر میکنه که گزینه ی 4 به ازای هیچ مقدار صحیح k نمی تونه این کمان رو ظاهر کنه.. یعنی اگه بتونیم درستی یا نادرستی این کمان رو نشون بدیم , به پاسخ صحیح تست رسیدیم.

$$\sin 4x - \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \xRightarrow{x=-\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 \rightarrow \sqrt{3} \neq -1$$

یعنی گزینه ی 3 هم نادرست بوده و گزینه ی 4 پاسخ صحیح تست است.

62-اگر $a + b = \frac{\pi}{2} - a$ باشد , حاصل $\tan a + \tan b$ کدام است؟(سراسری ریاضی 80)

1) $\sin b$ 　 **2) Cosa** 　 **3) $\frac{1}{\sin a}$** 　 **4) $\frac{1}{\cos b}$**

گزینه ی 4 صحیح است.

با استفاده از فرمول:

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a.\cos b + \cos a.\sin b}{\cos a.\cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - a)}{\cos a.\cos b} = \frac{\cos a}{\cos a.\cos b} = \frac{1}{\cos b}$$

بدون استفاده از فرمول:

$$a + b = \frac{\pi}{2} - a \rightarrow 2a + b = \frac{\pi}{2}$$

با اختیار $a = \frac{\pi}{4}$ و $b = 0$ حاصل عبارت مثلثاتی $\tan a + \tan b = tg\frac{\pi}{4} + tg0 = 1 + 0 = 1$ درمی آید که اگر در گزینه ها این مقادیر مفروض شده را جاگذاری کنیم , تنها گزینه ی 4 ما را به پاسخ مطلوب و صحیح تست میرساند.

$$\sin b = 0 \quad , \quad \cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \frac{1}{\sin a} = \infty \quad , \quad \frac{1}{\cos b} = 1$$

63-یکی از جواب های معادله ی $2\sin^2x - 3\sin x - 2 = 0$ کدام است؟(سراسری تجربی 80)

1) $\frac{2\pi}{3}$ **2)** $\frac{5\pi}{6}$ **3)** $\frac{7\pi}{6}$ **4)** $\frac{4\pi}{3}$

گزینه ی 3 صحیح است.

با استفاده از فرمول :

$$2\sin^2x - 3\sin x - 2 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{3 \pm 5}{4} = 2\ ,-\frac{1}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

بدون استفاده از فرمول :

به راحتی و با جاگذاری گزینه ها می توان به پاسخ صحیح تست رسید...

آنچه که مشخص است شما باید با یک نگاه و در کسری از ثانیه به نادرستی گزینه های 1 و 4 که به صورت جمع و تفاضلی از کمان $\frac{\pi}{3}$ بیان شده اند پی ببرید.چرا؟

زیرا به خاطر وجود عبارت تک $\sin x$ و اینکه مقدار این عبارت به ازای $\frac{\pi}{3}$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است و با این وجود امکان ندارد که مقدار عبارت مثلثاتی داده شده صفر شود.زیرا هیچوقت اون مقدار رادیکالی از بین نمیرود! امیدوارم متوجه شده باشین که منظورم چه بوده است.

خوب حال باید دید از بین گزینه های 2 و 3 کدامیک درست است.توجه کنید اصلا نیازی به جاگذاری نیست!

با توجه به اینکه عبارت $2\sin^2x$ همواره مثبت و کمتر از 2 است و نمی توان عدد 2- را خنثی کند مقدار سینوس باید منفی باشد تا با ضرب در عدد منهای 3 مثبت درآمده و در نتیجه برای خنثی کردن عدد 2- به عبارت $2\sin^2x$ کمک کند!.پس کمان نمی تواند در ناحیه ی دوم مثلثاتی واقع باشد. زیرا در این ناحیه علامت سینوس مثبت بوده و این مطلوب مساله نیست . پس گزینه ی 2 نیز نادرست بوده و گزینه ی 3 صحیح است.

«موفق باشید»

تهیه و تنظیم : ابراهیم پناهی

مرداد ماه 92