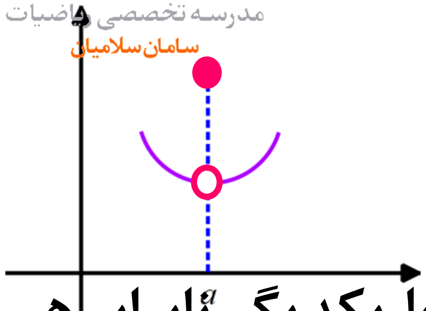
نقاط مشتق ناپذیری

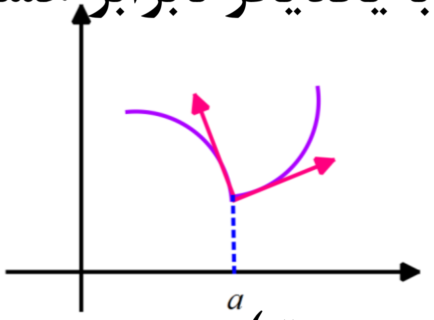
تعبیر نموداری مشتق ناپذیری



۱)نقاط ناپیوستگی

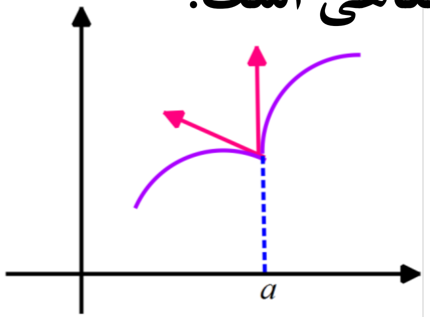
۲)نقاطی که تابع در آن ها پیوسته است و مشتق های چپ و راست نیز موجود می باشند ولی با یکدیگر نابرابر هستند

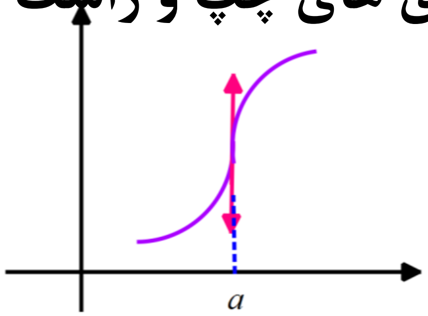
$$(f'_-(a) \neq f'_+(a))$$



۳)نقاطی که تابع در آن ها پیوسته است و در آن ها مماس عمودی داریم(از یک سمت یا هر دو سمت)

یعنی در آن ها حداقل یکی از مشتق های چپ و راست نامتناهی است.

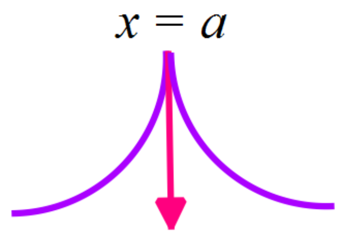




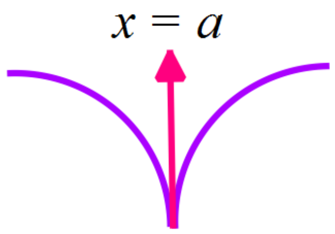
نقاط مشتق ناپذیری

۴)نقاط بازگشتی : $x = a$ را نقطهٔ بازگشتی تابع f می گوییم هرگاه f در این نقطه پیوسته و مشتق های راست و چپ در این نقطه یکی برابر $+\infty$ و دیگری $-\infty$ باشد.

نمودار تابع در نقاط بازگشت به یکی از دو صورت زیر است :(در تخته های آینده در مورد این که نقاط بازگشتی در چه توابعی وجود دارد صحبت خواهم کرد.)



$$f'_-(a) = +\infty,\ f'_+(a) = -\infty$$

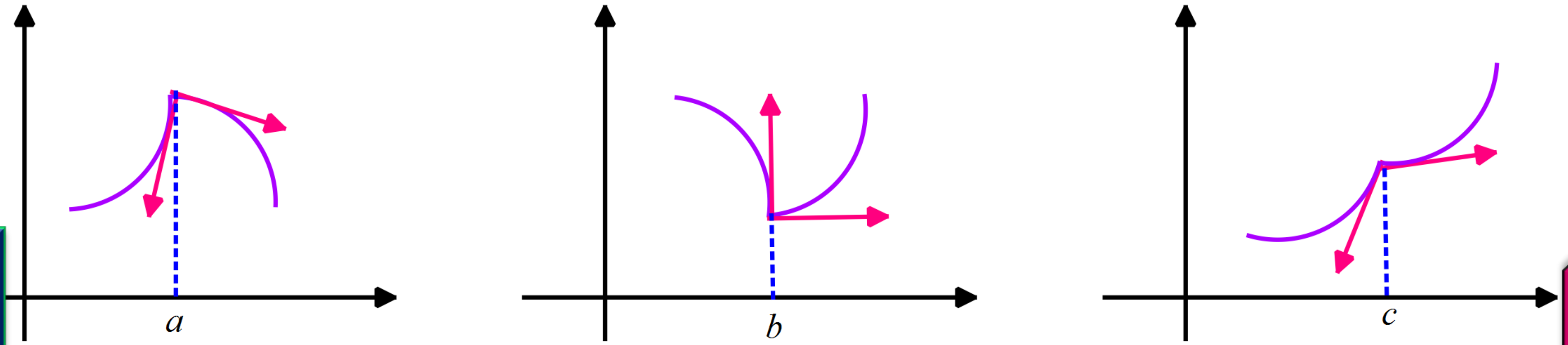


$$f'_-(a) = -\infty,\ f'_+(a) = +\infty$$

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

نقاط مشتق ناپذیری

۵) نقاط گوشه یا زاویه دار : $x = a$ را نقطهٔ گوشه یا زاویه دار تابع f می گوییم، هرگاه f در این نقطه پیوسته و مشتق های راست و چپ در آن نابرابر باشند. در نقاط زاویه دار، یکی از مشتق های راست یا چپ می تواند بی نهایت باشد.(اگر هر دو بی نهایت باشند، نقطه زاویه دار نبوده، بلکه بازگشتی یا عطف قائم است که بعداً مفصل در مورد آن صحبت خواهم کرد.)



ریشهٔ مرتبهٔ یک (ساده) درون قدرمطلق ها، نقاط زاویه دار می باشند.

@samansalamian

نقاط مشتق ناپذیری

یکی از سوالات متداولی که پیرامون نقاط زاویه دار مطرح می شود، زاویهٔ بین نیم مماس هاست. روش حل نیز بسیار ساده است، اگر شیب نیم مماس راست در نقطهٔ زاویه دار m_1 و شیب نیم مماس چپ m_2 باشد، زاویهٔ بین دو نیم مماس (θ) می تواند از فرمول $\tan(\theta)=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ محاسبه شود. برای درک بهتر این موضوع به مثال مطرح شده در تختهٔ بعد توجه کنید.

@samansalamian

زاویهٔ بین نیم مماس هایی که در $x=۱$ بر نمودار تابع $y=\sqrt{(x-۱)^۲(۲-x)}$

رسم می شود، چند درجه است؟

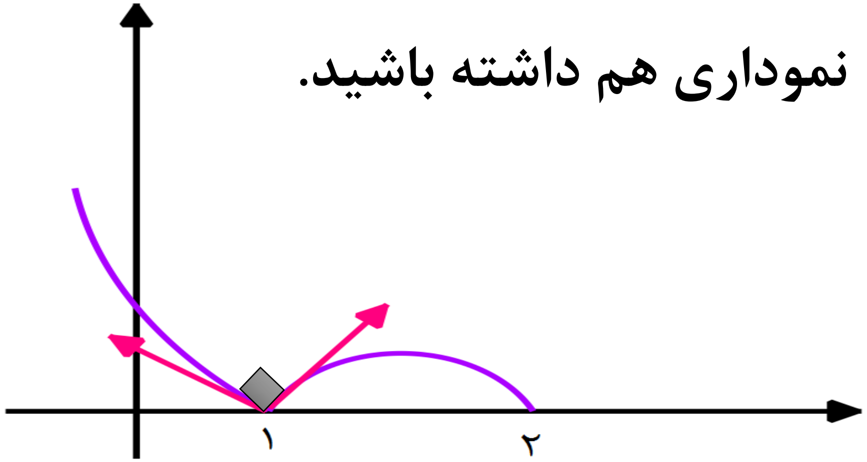
باید به سراغ شیب نیم مماس راست و چپ برویم :

$$y=|x-۱|\sqrt{۲-x}\Rightarrow f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|x-۱|\sqrt{۲-x}-۰}{x-۱}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)\sqrt{۲-x}}{x-۱}\\ \lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{-(x-۱)\sqrt{۲-x}}{x-۱}\end{cases}=\begin{cases}f'_+(۱)=+۱=m_۱\\ f'_-(۱)=-۱=m_۲\end{cases}$$

چون $m_۱m_۲=-۱$، یعنی نیم مماس ها در $x=۱$ بر یکدیگر عمود هستند.

نمودار این تابع در حوالی $x=۱$ را هم به فرم زیر برایتان رسم می کنم تا از این سوال درک

نموداری هم داشته باشید.



@samansalamian

پس زاویه ۹۰ درجه است.

بررسی مشتق در توابع چند ضابطه ای

مدرسه تخصصی ریاضیات سامان سلامیان

به تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x^{۲}+x & x\geq ۰ \\ ۶x+۵ & x<۰ \end{cases}$ دقت کنید. فرض کنید بخواهیم $f'_{+}(a)$ و $f'_{-}(a)$ را به دست آوریم.

مسلماً برای این منظور، استفاده از تعریف مشتق وقت گیر است!!!

پس مجبور هستیم به سراغ فرمول های مشتق گیری برویم.

اما سوال اینجاست : آیا می توانیم به صورت زیر رفتار کنیم؟؟

$$f'(x)=\begin{cases} ۶x+۱ & x>۰ \\ ۶ & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f'_{+}(۰)=۶(۰)+۱=۱,\ f'_{-}(۰)=۶$$

برای اطمینان به سراغ تعریف مشتق می رویم :

@samansalamian

بررسی مشتق در توابع چند ضابطه ای

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{(3x^{2}+x)-0}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{x(3x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}(3x+1)=1$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{(6x+5)-0}{x}=\frac{5}{0^{-}}=-\infty$$

حال نتایج را مقایسه می کنیم، در مورد $f'_{+}(0)$ هر دو مسیر به یک جواب رسیده است. اما دربارهٔ $f'_{-}(0)$ این طور نیست. یعنی نمی توانیم از ضابطهٔ $x<0$ در تابع f با فرمول های مشتق گیری، مشتق بگیریم و سپس در آن $x=0$ را قرار دهیم. به بیان دیگر $\lim_{x\to 0^{-}} f'(x)\neq f'(0)$

(تابع f' در $x=0$ پیوستگی چپ ندارد.)

ریشهٔ این تفاوت در ماهیت تابع f است.

تابع f در $x=0$ فقط پیوستگی راست داشت و از چپ

بررسی مشتق در توابع چند ضابطه ای

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

در این نقطه ناپیوسته بود $(\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 5)$

و به همین دلیل در محاسبهٔ $f'_-(0)$ دچار مشکل شدیم!!

البته ما از قبل می دانستیم که وقتی f در $x=0$ پیوستگی چپ ندارد، نمی تواند

$f'_-(0)$ موجود باشد.

به ازای کدام مقدار a در تابع f مقدار $f'(1)$ موجود است؟

$$f(x)=\begin{cases} x+a & x\le 1 \\ b\sqrt[3]{x} & x>1 \end{cases}$$

گام اول: چک کردن پیوستگی $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow b = 1+a \Rightarrow a-b=-1$

گام دوم: برابر هم قرار دادن مشتق های چپ و راست

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & x<1 \\ \dfrac{b}{3\sqrt[3]{x^2}} & x>1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f'_-(1)=f'_+(1)} 1 = \frac{b}{3} \Rightarrow b=3 \xrightarrow{a-b=-1} a=2$$

البته چون گفته مقدار $f'(1)$ موجوده یعنی شرط پیوستگی برقراره.

@samansalamian

بررسی مشتق پذیری در توابع قدرمطلق

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

به وضعیت مشتق پذیری توابع زیر در $x=۱$ توجه کنید :

$$f(x)=|x-۱|$$

$$\Rightarrow f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|x-۱|-۰}{x-۱}\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)}{x-۱}=۱\Rightarrow f'_+(۱)=۱\\ \lim_{x\to ۱^-}\frac{-(x-۱)}{x-۱}=-۱\Rightarrow f'_-(۱)=-۱\end{cases}$$

$\Rightarrow f'(۱)$ موجود نیست.

$$f(x)=|(x-۱)^۳|$$

$$\Rightarrow f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{|(x-۱)^۳|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^۲|x-۱|}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x-۱)|x-۱|=۰\Rightarrow f'(۱)=۰$$

@samansalamian

بررسی مشتق پذیری در توابع قدرمطلقی

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS
Salamian
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

ازبررسی دو تابع فوق به نتیجهٔ زیر می رسیم :

۱-ریشه های ساده(مرتبه ۱) داخل قدرمطلق ها نقاط مشتق ناپذیر آن ها هستند. در این نقاط مشتق چپ و راست با یکدیگر قرینه هستند.

۲-ریشه های داخل قدر مطلق که مرتبهٔ آن ها بیشتر از یک باشد، نقاط مشتق پذیر تابع هستند و مشتق در این نقاط صفر است.

@samansalamian

بررسی مشتق پذیری در توابع قدرمطلقی

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

به مثال های زیر توجه کنید :

تابع $f(x)=\left|(x-۲)(x+۳)^۲(x-۳)^۳(x-۴)^۴\right|$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست ؟

تابع f تنها در $x=۲$ مشتق پذیر نیست. زیرا $x=۲$ ریشهٔ مرتبهٔ یک تابع داخل قدر مطلق است.
همچنین تابع f در سایر نقاط به طول $x=-۳$, $x=۳$, $x=۴$ مشتق پذیر است، چون طول این نقاط با مرتبهٔ بیشتر از یک است(به ترتیب از مرتبهٔ ۲،۳و۴ می باشد).

@samansalamian

بررسی مشتق پذیری در توابع قدرمطلقی

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

تابع $f(x)=\left|\left|x-۱\right|-x\right|$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست ؟

تابع f در ریشه های سادهٔ داخل قدرمطلق مشتق پذیر نیست. یعنی :

$$x-۱=\bullet\Rightarrow x=۱,\left|x-۱\right|-x=\bullet\Rightarrow\left|x-۱\right|=x\Rightarrow x-۱=\pm x\Rightarrow\begin{cases}x-۱=x\Rightarrow -۱\neq\bullet & \text{غ ق ق:}\\ x-۱=-x\Rightarrow x=\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$$

پس تابع f تنها در ۲ نقطهٔ $x=۱$, $x=\dfrac{۱}{۲}$ مشتق پذیر نیست.

@samansalamian

بررسی مشتق پذیری در توابع رادیکالی

ابتدا موضوع را با بیان مثال هایی آغاز کرده و در انتها

برایتان جمع بندی خواهم نمود.

مشتق پذیری توابع زیر را در $x=0$ بررسی کنید :

$$1)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x}}=\pm\infty \Rightarrow f'(0)$$ وجود ندارد.

$$2)\ f(x)=\sqrt[8]{x^{10}}=\sqrt[4]{|x^5|} \Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{|x^5|}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt[4]{|x|}}{x}=\pm\lim_{x\to 0}\sqrt[4]{|x|}=0 \Rightarrow f'(0)=0$$

$$3)\ f(x)=\sqrt[3]{x^3}=x \Rightarrow f'(x)=1 \Rightarrow f'(0)=1$$

$$4)\ f(x)=\sqrt[4]{x^4}=|x| \Rightarrow f'(0)$$ وجود ندارد.

@samansalamian

بررسی مشتق پذیری در توابع رادیکالی

اگر به ۴ تابع فوق و وضعیت مشتق آن ها در $x=\circ$ دقت کنیم

به جمع بندی زیر می رسیم :

در تابع $f(x)=\sqrt[n]{(x-a)^m}$ با فرض آن که a جزء دامنهٔ تابع است :

۱) اگر $n>m$ (یعنی توان از فرجه کمتر) باشد، $f'(a)$ وجود ندارد.

۲) اگر $m>n$ (یعنی توان از فرجه بیشتر) باشد، f در a مشتق پذیر است و $f'(a)=\circ$.

۳) اگر $n=$ یک عدد فرد $=m$ باشد، f در a مشتق پذیربوده ولی $f'(a)\neq\circ$ است.

۴) اگر $n=$ یک عدد زوج $=m$ باشد، f در a مشتق پذیرنیست.

بررسی مشتق پذیری در توابع رادیکالی

تابع $f(x)=\sqrt[9]{x^{7}(x-2)^{8}(x+2)^{10}(x+3)^{3}}$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

ریشه های درون رادیکال برای مشتق ناپذیری تابع f ، تنها کاندید های ما هستندو این ریشه ها عبارتند از : $x=0$ با مرتبهٔ تکرار ۷، $x=2$ با مرتبهٔ ۸، $x=-2$ با مرتبهٔ ۱۰، و $x=-3$ با مرتبهٔ ۳. اما به جز در $x=-2$ که مرتبهٔ تکرار آن ۱۰ بوده و از فرجه بیشتر می باشد، در مابقی ریشه ها، مرتبهٔ مربوطه از فرجه کمتر و در نتیجه تابع در این ریشه ها مشتق ناپذیر است. پس تابع f در $x=0$، $x=2$ و $x=-3$ مشتق ناپذیر است. پس این تابع در ۳ نقطه مشتق ناپذیر است.

بررسی مشتق پذیری توابع جزء صحیح

تابع f به معادلهٔ $f(x)=[g(x)]$ به ازای نقاطی که $g(x)\notin\mathbb{Z}$ پیوسته، مشتق پذیر و مشتق آن صفر است. و به ازای نقاطی که $g(x)\in\mathbb{Z}$ است، اگر طول این نقاط، طول $\min$ نسبی تابع g باشد، باز هم پیوسته، مشتق پذیر و مشتق آن صفر است و در سایر حالات دیگر، ناپیوسته و مشتق ناپذیر است(فرض کنید g پیوسته باشد). به بیان دیگر، تابع$[g(x)]$در هر نقطه ای، از هر سمتی که پیوستگی داشته باشد، مشتق پذیر است و مشتق آن مساوی صفر است. در واقع مشتق ناپذیری توابع شامل جزء صحیح تنها به دلیل مشکلات ناپیوستگی آن هاست و این ناپیوستگی به ازای طول نقاطی که عبارت داخل جزءصحیح را صحیح$(\mathbb{Z})$ می کنند رخ داده و تابع را مشتق ناپذیر می کند.

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

بررسی مشتق پذیری توابع جزء صحیح

تابع $f(x)=[x^{۲}-۴x+۵]$ در چند نقطه به طول صحیح از بازهٔ $(-۲,۳)$ مشتق پذیر نیست؟

تابع f به ازای طول نقاطی که عبارت داخل جزء صحیح را عددی صحیح می کنند، ناپیوسته است و در نتیجه مشتق پذیر نیست. پس به ظاهر به ازای ۴ طول صحیحی که درون بازهٔ مزبور قرار دارند یعنی $x=-۱,۰,۱,۲$ تابع f مشتق ناپذیر است. اما دقت کنید که $x=۲$ طول نقطهٔ min نسبی عبارت داخل جزء صحیح است.

$$g(x)=x^{۲}-۴x+۵ \xrightarrow{g'(x)=۲x-۴} g'(۲)=۰ \Rightarrow$$

x		۲	
$g'(x)$	$-$	۰	$+$
	↘	min	↗

پس تابع f در این نقطه پیوسته و مشتق پذیر است و داریم : $f'(۲)=۰$

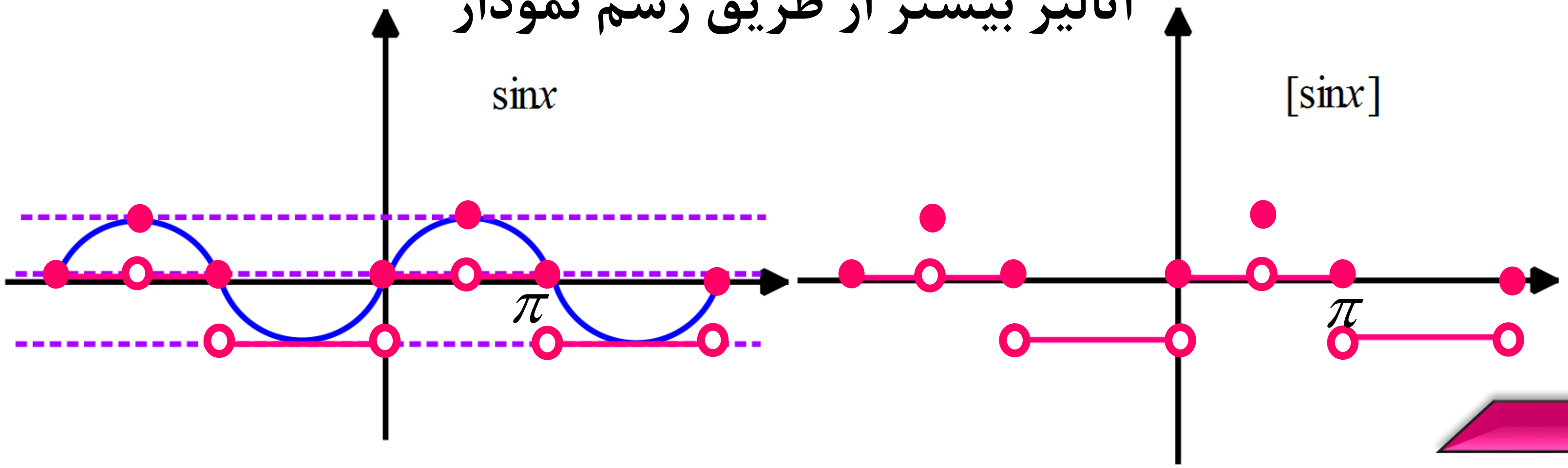
بنابراین تابع f تنها در ۳ نقطه با طول های ۱و۰و۱- مشتق پذیر نیست.

بررسی مشتق پذیری توابع جزء صحیح

تابع $f(x)=[\sin x]$ در $x=\pi$ از لحاظ مشتق چه وضعیتی دارد؟

$\sin x$ در $x=\pi$ مقداری صحیح دارد و هم چنین در موقعیت نزولی است، پس این تابع در $x=\pi$ تنها پیوستگی چپ دارد و در نتیجه تابع f نیز در $x=\pi$ فقط مشتق چپ دارد و $f'_-(\pi)=0$

آنالیز بیشتر از طریق رسم نمودار



@samansalamian

عامل های ضربی صفرکننده و رفع مشتق ناپذیری

به توابع زیر و توضیحاتشان دقت کنید :

$$\sqrt[3]{x-1} \quad , \quad |x-1|$$

هردو در $x=1$ پیوسته و مشتق ناپذیر هستند.

$$\operatorname{sgn}(x-1) \quad , \quad [x] \quad , \quad \begin{cases} \sin\frac{1}{x-1} & x \neq 1 \\ \bullet & x=1 \end{cases}$$

هرسه در $x=1$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر هستند.

@samansalamian

عامل های ضربی صفرکننده و رفع مشتق ناپذیری

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

در کنار هریک عامل صفرکنندهٔ (ضریب صفرکنندهٔ) $(x-1)$ و $(x-1)^2$

را قرار می دهم :

$$\begin{cases}(x-1)^2\sin\dfrac{1}{x-1} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases} \ ,\ (x-1)^2[x] \ ,\ (x-1)^2\operatorname{sgn}(x-1)$$

هرسه در $x=1$ مشتق پذیر هستند و $f'(1)=0$ است.

$$(x-1)|x-1| \quad , \quad (x-1)\sqrt[3]{x-1}$$

هردو در $x=1$ مشتق پذیر هستند و $f'(1)=0$ است.

@samansalamian

عامل های ضربی صفرکننده و رفع مشتق ناپذیری

به عنوان نمونه مشتق پذیری $f(x)=(x-۱)^{۲}\operatorname{sgn}(x-۱)$ را در $x=۱$ بررسی می کنم :

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)^{۲}\operatorname{sgn}(x-۱)-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x-۱)\operatorname{sgn}(x-۱)=۰\times(\pm ۱)=۰$$

این مطالب را به فرم زیر برایتان جمع بندی کرده ام :

۱)اگر f در $x=a$ پیوسته و مشتق ناپذیر باشد، تابع $(x-a)f(x)$ و یا (درحالت کلی تر $(x-a)^{n}f(x)$ به ازای $n\geq ۱$) در a مشتق پذیر است.

۲)اگر f در $x=a$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر باشد، تابع $(x-a)^{۲}f(x)$ و یا (درحالت کلی تر $(x-a)^{n}f(x)$ به ازای $n\geq ۲$) در a مشتق پذیر است.

@samansalamian

می توان گفت در واقع $(x-a)$ اول تابع را از ناپیوسته بودن انداخته و $(x-a)$ دوم نیز در ادامه، آن را مشتق پذیر کرده است.

عامل های ضربی صفرکننده و رفع مشتق ناپذیری

وضعیت مشتق پذیری دو تابع $f(x)=\sqrt[۵]{x-۱}\sqrt[۳]{x-۱}$ و $g(x)=\cos\frac{\pi}{۲}x|x-۱|$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

از تابع f شروع می کنیم. $\sqrt[۳]{x-۱}$ در $x=۱$ پیوسته و مشتق ناپذیر است ولی در عامل ضربی صفرشوندهٔ $\sqrt[۵]{x-۱}$ ضرب شده است. به سراغ تعریف مشتق می رویم :

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۵]{x-۱}\sqrt[۳]{x-۱}}{x-۱}\xrightarrow{\text{درجهٔ صفرشوندگی مخرج از صورت بیشتر است.}}f'(۱)=\infty$$

پس تابع f در $x=۱$ مشتق ناپذیر است. می پردازیم به تابع g :

$$g'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{(\cos\frac{\pi}{۲}x)|x-۱|-۰}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\pm(\cos\frac{\pi}{۲}x)(x-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(\pm\cos\frac{\pi}{۲}x)=۰$$

پس تابع g در $x=۱$ مشتق پذیر است.

عامل های ضربی صفرکننده و رفع مشتق ناپذیری

در تابع $f(x)=\left|(x-2)(x+1)\right|(x^2+x)\sqrt[5]{x(x+2)^3}$ کدام مورد زیر **نادرست** است؟

۱) $f'(0)=0$ ۲) $f'(-1)=0$ ۳) $f'(2)\neq 0$ ۴) $f'(-2)=0$

همانطور که در تخته های قبل توضیح دادم توابع رادیکالی، قدرمطلقی، sgn و براکت، اگر در عامل های ضربی مناسب $(x-a)$ یا $(x-a)^2$ ضرب شوند، پس از مشتق پذیری، مشتق آن ها صفر می شود. مثلاً مشتق پذیری $f(x)=(x-2)^2[x]$ را در $x=2$ ببینید :

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2[x]}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-2)[x]=0\times\underbrace{((1)or(2))}_{\text{حد راست یا چپ}}=0$$

@samansalamian

عامل های ضربی صفرکننده و رفع مشتق ناپذیری

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

حال دقت کنید :

• $x=0$ ریشهٔ مرتبهٔ یک داخل رادیکال است، از طرفی عامل ضربی صفرشونده نیز به ازای آن وجود دارد، پس $f'(0)=0$

$x=-1$ ، ریشهٔ مرتبهٔ یک داخل قدرمطلق می باشد که عامل ضربی صفرشوندهٔ آن نیز وجود دارد، پس $f'(-1)=0$

$x=2$ ، ریشهٔ سادهٔ داخل قدرمطلق می باشد ولی هیچ عامل ضربی صفرشونده ای به ازای آن وجود ندارد، پس $f'(2)$ موجود نمی باشد.

و بالاخره $x=-2$ ریشهٔ داخل رادیکال است(مرتبهٔ آن از فرجه کمتر است) که به ازای آن نیز عامل ضربی صفرشونده وجود ندارد، پس $f'(-2)$ وجود ندارد. و گزینهٔ ۴ صحیح است.

@samansalamian

ریشهٔ مرتبهٔ n اُم

اگر $x=a$ ریشهٔ مرتبهٔ n اُم معادلهٔ $g(x)=0$ باشد، آن گاه :

$$\underbrace{g(a)=g'(a)=g''(a)=\dots g^{(n-1)}(a)=0}_{\text{مشتق } (n-1) \text{ اُم}} \quad , \quad \underbrace{g^{(n)}(a)\neq 0}_{\text{مشتق } n \text{ اُم}}$$

عبارت $1-\cos x=0$ در $x=2\pi$ ریشهٔ مرتبهٔ دوم دارد. زیرا :

$$\begin{cases} g(x)=1-\cos x \Rightarrow g(2\pi)=1-\cos 2\pi=1-1=0 \\ g'(x)=\sin x \Rightarrow g'(2\pi)=\sin 2\pi=0 \\ g''(x)=\cos x \Rightarrow g''(2\pi)=\cos 2\pi\neq 0 \end{cases}$$

ریشهٔ مرتبهٔ n اُم

تابع با ضابطهٔ $y=(x^{3}+3x^{2}+ax+b)[x]$ در $x=2$ مشتق پذیر است. $a+b$ چند است؟

اگر $x=a$ ریشهٔ مرتبهٔ دوم $g(x)=0$ باشد، آن گاه این ریشه هم در معادلهٔ $g(x)=0$ و هم در مشتق آن یعنی $g'(x)=0$ صدق می کند. $(g(a)=g'(a)=0)$

باتوجه به مطالب گفته شده $x=2$ باید هم در معادلهٔ $g(x)=x^{3}+3x^{2}+ax+b=0$ و هم در $g'(x)=0$ صدق کند، یعنی :

$$\begin{cases} g(2)=0 \Rightarrow 8+12+2a+b=0 \Rightarrow 2a+b=-20 \\ g'(x)=3x^{2}+6x+a \xrightarrow{g'(2)=0} 12+12+a=0 \Rightarrow a=-24 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{2a+b=-20} b=28 \Rightarrow a+b=4$$

@samansalamian

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

تابع مشتق

تابع $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ را تابع مشتق تابع f می گویند. دامنهٔ تابع f' نقاطی است که تابع f' در آن ها تعریف می شود(یا موجود است)، به عبارت دیگر دامنهٔ f' ، همان نقاط مشتق پذیر تابع f است.

دامنهٔ تابع مشتق تابع $f(x)=x(x-[x])$ کدام است؟

۱) $\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ۳) $\mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{R}-\{0\}$

تابع $f(x)=x^2-x[x]$ در تمام اعداد صحیح، به جز $x=0$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است. در $x=0$ نیز براساس آن چه که در تخته های قبل به شما آموختم مشتق پذیر نمی باشد (برای مشتق پذیری باید عامل ضربی x^2 توی براکت ضرب بشه) بنابراین f در همهٔ اعداد صحیح مشتق ناپذیر است(این تابع در اعداد غیر صحیح پیوسته و مشتق آن صفر می باشد). پس دامنهٔ تابع مشتق تابع f ، برابر $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ است. یعنی گزینهٔ ۲ صحیح می باشد.

@samansalamian

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS

Salamian

مدرسه تخصصی ریاضیات

سامان سلامیان

فرمول های مشتق گیری

تابع	مشتق تابع
عدد ثابت a	0
ax^n	anx^{n-1}
u عبارتی برحسب x	u'
v عبارتی برحسب x	v'
uv	$u'v+v'u$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$
u^m	$mu'u^{m-1}$

@samansalamian

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS
Salamian
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

فرمول های مشتق گیری

تابع		مشتق تابع
f^{n}	$\longrightarrow$	$nf'f^{n-1}$
$\sqrt[p]{u^{m}}$	$\longrightarrow$	$\dfrac{mu'}{p\sqrt[p]{u^{p-m}}}$
مثال : $\sqrt[۷]{x^{۳}}$	$\longrightarrow$	$\dfrac{۳}{۷\sqrt[۷]{x^{۴}}}$
$\sqrt{u}$	$\longrightarrow$	$\dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$

@samansalamian

فرمول های مشتق گیری

مشتق تابع هموگرافیک

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

مثال

$$\left(\frac{3x+4}{6x+5}\right)' = \frac{3\times5-4\times6}{(6x+5)^2} = \frac{-9}{(6x+5)^2}$$

مشتق تابع شبه هموگرافیک

$$\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2}\times u'$$

مثال

$$\left(\frac{3x^2+4}{6x^2+5}\right)' = \frac{-9}{(6x^2+5)^2}\times(x^2)' = \frac{-9}{(6x^2+5)^2}\times(2x)$$

فرمول های مشتق گیری

مشتق تابع به معادلهٔ $y=\dfrac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}$ بیابید.

قرداد کلاسهامونو یادتونه؟ ساده – سپس درسته؟؟

یادتونه تأکید کردم که کاربردش زیاده؟پس سرتو ننداز پایین مشتق بگیر،اگه ساده تر میشه،تا حد امکان ساده ش کن

پس ابتدا صورت و مخرج تابع را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم تا عبارت کمی ساده تر شود و سپس از آن مشتق می گیریم :

$$y=\frac{۱}{x+\sqrt{۱+x^۲}}\times\frac{x-\sqrt{۱+x^۲}}{x-\sqrt{۱+x^۲}}=\frac{x-\sqrt{۱+x^۲}}{x^۲-(۱+x^۲)}=\sqrt{۱+x^۲}-x\Rightarrow y'=\frac{۲x}{۲\sqrt{۱+x^۲}}-۱$$

@samansalamian

فرمول های مشتق گیری توابع مثلثاتی

مشتق تابع	تابع
$u'\cos u$	$\sin u$
$-u'\sin u$	$\cos u$
$u'(1+\tan^2 u)$	$\tan u$
$-u'(1+\cot^2 u)$	$\cot u$

مثال : $\sin\sqrt{x} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS
Salamian
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

فرمول های مشتق گیری توابع مثلثاتی

تابع	مشتق تابع
$\sin^m u$	$mu'\cos u\sin^{m-۱}u$
$\cos^m u$	$-mu'\sin u\cos^{m-۱}u$
$\tan^m u$	$mu'(۱+\tan^۲ u)\tan^{m-۱}u$
$\cot^m u$	$-mu'(۱+\cot^۲ u)\cot^{m-۱}u$

مثال : $\cot^۳(x^۲+۳x) \rightarrow -۳(۲x+۳)(۱+\cot^۲(x^۲+۳x))\cot^۲(x^۲+۳x)$

@samansalamian

فرمول های مشتق گیری توابع مثلثاتی

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS
Salamian
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

مقدار مشتق عبارت $\sin\left(x+\frac{۳\pi}{۴}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)+\cos\left(x+\frac{۳\pi}{۴}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$ در $x=\frac{\pi}{۱۲}$ را بیابید.

طبق قضیهٔ ساده – سپس و با استفاده از فرمول مثلثاتی $\sin a\cos b+\cos a\sin b=\sin(a+b)$ تابع را کمی ساده تر نموده و سپس مشتق می گیریم : (می بینی که با حذف ریاضیات پایه در واقع تست مشتق رو هم حذف کردی !!!!)

$$f(x)=\sin\left(\left(x+\frac{۳\pi}{۴}\right)+\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{۲}+۲x\right)=\cos ۲x\Rightarrow f'(x)=-۲\sin ۲x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)=-۲\sin\frac{\pi}{۶}=-۲\left(\frac{۱}{۲}\right)=-۱$$

@samansalamian

فرمول های مشتق گیری توابع مثلثاتی

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

اگر $f(x)=\sin^{۲}\frac{x}{۸}\cos^{۲}\frac{x}{۴}\cos^{۲}\frac{x}{۴}$ ، آن گاه حاصل $f'(\frac{\pi}{۱۲})$ چند است؟

باز هم در صورت امکان تابع را ساده کن سپس مشتق بگیر. اینجا فرمول $\sin ۲a=۲\sin a\cos a$ و یا به بیـان دیگر $\sin a\cos a=\frac{۱}{۲}\sin ۲a$ به ما کمک می کند.یادتان هست این فرمول را کجا دیده اید؟در مثلثات ☺

$$f(x)=\left(\left(\sin\frac{x}{۴}\cos\frac{x}{۴}\right)\cos\frac{x}{۲}\right)^{۲}=\left(\left(\frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۲}\right)\cos\frac{x}{۲}\right)^{۲}=\left(\frac{۱}{۲}\left(\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}\right)\right)^{۲}=\left(\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\sin x\right)\right)^{۲}$$

$$=\frac{۱}{۱۶}\sin^{۲}x\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۱۶}(۲\sin x\cos x)=\frac{۱}{۱۶}(\sin ۲x)$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{۱۲}\right)=\frac{۱}{۱۶}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۳۲}$$

@samansalamian

فرمول های مشتق گیری توابع معکوس مثلثاتی

تابع	مشتق تابع
$\sin^{-1} u$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\cos^{-1} u$	$\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\tan^{-1} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$
$\cot^{-1} u$	$\dfrac{-u'}{1+u^2}$

مثال $\tan^{-1}(x^2+1) \longrightarrow \dfrac{2x}{1+(x^2+1)^2}$

فرمول های مشتق گیری توابع معکوس مثلثاتی

اگر $f(x)=(\tan^{-1}(2\tan x))^2$ ، آن گاه حاصل $f'(\frac{\pi}{4})$ چند است؟

گفتیم : $(u^n)'=nu'u^{n-1}$ بنابراین :

$$f'(x)=2\times(\tan^{-1}(2\tan x))'(\tan^{-1}(2\tan x))=2\times\frac{(2\tan x)'}{1+(2\tan x)^2}\times\tan^{-1}(2\tan x)$$

$$=2\times\frac{2\times(1+\tan^2 x)}{1+(2\tan x)^2}\times\tan^{-1}(2\tan x)\Rightarrow f'(\frac{\pi}{4})=2\times\frac{2(1+1)}{1+(2)^2}\times\tan^{-1}(2)=\frac{8}{5}\tan^{-1}(2)$$

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

یک تیپ مهم از سوالات مربوط به مشتق گیری

در برخی از تست ها به شما یک یا چند تابع پیچیده داده می شود و سپس رابطه ای بین آن توابع و مشتق های آن ها خواسته می شود، مثلاً از شما $f'g+g'f$ را می خواهند. در این گونه تست ها، به هیچ عنوان در نگاه اول به فکرمشتق گیری و در نتیجه ساختن آن چه مسئله از شما می خواهد نباشید، بلکه ابتدا سعی کنید با ایجاد رابطه ای بین توابع f و g و سپس مشتق گیری از آن، به خواستهٔ مسئله دسترسی پیداکنید زیرا این فرآیند زمان کمتری از شما خواهد گرفت. مثلاً با کمی تأمل می توان دریافت که $f'g+g'f$ همان مشتق تابع fg است، پس بهتر است ابتدا f را در g ضرب کنیم که در این صورت حتماً به تابع ساده تری خواهیم رسید و سپس از آن مشتق بگیریم.

یک تیپ مهم از سوالات مربوط به مشتق گیری

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

اگر $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^{۲}-x-۳}}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x-\sqrt{x^{۲}-x-۳}}}$ ، آن گاه حاصل

$f'(۴)\,g(۴)-g'(۴)\,f(۴)$ برابر با چه عددی خواهد شد؟

باهوشا سرشونو نمیندازن پایین سریع مشتق بگیرن، بعد بذارن تو رابطه ای که سوال ازشون خواسته بلکه کمی فکر می کنند و به سادگی می فهمند که $f'g-g'f$ همان صورت کسر مشتق $\dfrac{f}{g}$ هست،

یعنی : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-g'f}{g^{۲}}$

@samansalamian

یک تیپ مهم از سوالات مربوط به مشتق گیری

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

پس در واقع آن چه که مسئله از ما خواسته است همان $\left(\frac{f}{g}\right)' \times g^{۲}$ به ازای $x=۴$ است. پس ابتدا f را بر g تقسیم می کنیم.

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^{۲}-x-۳}}}{\frac{۱}{\sqrt{x-\sqrt{x^{۲}-x-۳}}}}=\left(\sqrt{x+\sqrt{x^{۲}-x-۳}}\right)\left(\sqrt{x-\sqrt{x^{۲}-x-۳}}\right)=\sqrt{x^{۲}-(\sqrt{x^{۲}-x-۳})^{۲}}$$

$$=\sqrt{x^{۲}-(x^{۲}-x-۳)}=\sqrt{x+۳}$$

می بینید به تابع ساده ای رسیدیم و کافیه از همین تابع مشتق بگیریم عدد گذاری کنیم : $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}$

@samansalamian

$$f'(۴)g(۴)-g'(۴)f(۴)=\left(\frac{f}{g}\right)'(۴)\times g^{۲}(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}\times(۱)^{۲}=\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

الف) تابع $f(x)=e^x$ را تابع نمایی طبیعی می نامند. در این تابع داریم :

(مشتق تابع نمایی طبیعی) $(e^x)'=e^x$

و یا در حالت کلی : $(e^u)'=u'e^u$

تابع $f(x)=a^x$ با شرط $a>0$ و $a\neq 1$ را تابع نمایی می نامند. در این تابع در حالت کلی مشتق گیری داریم :

$$(a^u)'=u'a^u\ln a$$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

مشتق توابع زیر را بدست آورید.

$$y = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = (\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$y = ۳^{\cot x} \Rightarrow y' = (\cot x)' ۳^{\cot x} \ln ۳ = -(۱ + \cot^{۲} x) ۳^{\cot x} \ln ۳$$

$$y = \sqrt{۲ - e^{x}} \Rightarrow y' = \frac{(۲ - e^{x})'}{۲\sqrt{۲ - e^{x}}} = \frac{-e^{x}}{۲\sqrt{۲ - e^{x}}}$$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

ب) تابع $f(x)=\ln x$ را تابع لگاریتم طبیعی می نامند ($\log_e^x=\ln x$) .

در این تابع داریم : $(\ln x)'=\frac{۱}{x}$ و یا در حالت کلی : $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

اگر $f(x)=\ln|x|$، آن گاه $f'(x)$ را پیدا کنید.

دامنهٔ تابع f ، $\mathbb{R}-\{۰\}$ است. در این تابع داریم :

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & x>۰\\ \ln(-x) & x<۰\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x>۰\\ \frac{-۱}{-x}=\frac{۱}{x} & x<۰\end{cases}$$

و در نتیجه به ازای هر $x\neq۰$ ، داریم : $(\ln|x|)'=\frac{۱}{x}$

یعنی قدر مطلق هیچ نقشی نداشت. پس : $(\ln|x|)'=\frac{۱}{x}$

و یا در حالت کلی : $(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

مشتق توابع زیر را بدست آورید.

$$y=\ln|\tan x| \Rightarrow y'=\frac{(\tan x)'}{\tan x}=\frac{(1+\tan^2 x)}{\tan x}$$

دو تا **log** که تفریق میشن جلوهاشون تقسیم میشن :

$$y=\ln\frac{x+1}{x^2+1} \Rightarrow y=\ln(x+1)-\ln(x^2+1) \Rightarrow y'=\frac{(x+1)'}{x+1}-\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}$$

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

مشتق توابع زیر را بدست آورید.

در مشتق گیری توابع لگاریتمی، می توانید ابتدا با استفاده از قوانین مربوط به لگاریتم ها

تابع را ساده کرده و سپس مشتق بگیریم.

$$y=\log_b^{\sin x} \xrightarrow{\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}} y=\frac{\log_e^{\sin x}}{\log_e^b}=\frac{\ln\sin x}{\ln b}\Rightarrow y'=\frac{1}{\ln b}(\ln\sin x)'=\frac{1}{\ln b}\times\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y=\log x \xrightarrow{\log_b^a=\frac{\log_c^a}{\log_c^b}} y=\frac{\log_e^{x}}{\log_e^{10}}=\frac{\ln x}{\ln 10}\Rightarrow y'=\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{1}{x}\right)$$

@samansalamian

وقتی تابعی به صورت حاصل ضرب چند عامل است، برای مشتق گیری از آن بهتر است، ابتدا از طرفین ln بگیریم و سپس مشتق بگیریم :

$$y'(۱)=?\Rightarrow \quad y=(x+۱)e^{\cos\pi x}\cos\pi x$$

$$\ln y=\ln((x+۱)e^{\cos\pi x}\cos\pi x)=\ln(x+۱)+\overbrace{\ln e^{\cos\pi x}}^{\cos\pi x}+\ln\cos\pi x \xrightarrow{\text{مشتق گیری از طرفین}}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{۱}{x+۱}-\pi\sin\pi x+\frac{-\pi\sin\pi x}{\cos\pi x}\xrightarrow{x=۱}\frac{y'(۱)}{y(۱)}=\frac{۱}{۲}-۰+۰=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{y(۱)=-۲e^{-۱}}y'(۱)=(-۲e^{-۱})(\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{e}$$

$$f'(۱)=?\Rightarrow\ f(x)=x(x+۱)^{۲}(x^{۳}+۳x-۱)$$

$$\ln f(x)=\ln(x(x+۱)^{۲}(x^{۳}+۳x-۱))=\ln x+۲\ln(x+۱)+\ln(x^{۳}+۳x-۱)\xrightarrow{\text{مشتق گیری از طرفین}}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x+۱}+\frac{۳x^{۲}+۳}{x^{۳}+۳x-۱}\Rightarrow\frac{f'(۱)}{f(۱)}=۱+۱+\frac{۶}{۳}=۴\xrightarrow{f(۱)=۱۲}$$

$$\Rightarrow\ f'(۱)=۴\times۱۲=۴۸$$

@samansalamian

معادلهٔ دیفرانسیل

معادله ای که رابطه ای بین y و مشتقات اول یا بالاتر آن را بیان می کند، یک معادلهٔ دیفرانسیل نامیده می شود.

چند تابع به معادلهٔ $y=e^{ax}+e^{-bx}$ در معادلهٔ دیفرانسیل $y''+3y'+2y=0$ صدق می کند؟

ابتدا y' و y'' را به دست می آوریم و سپس در معادلهٔ دیفرانسیل مزبور قرار می دهیم :

$$y'=ae^{ax}-be^{-bx},\; y''=a^2e^{ax}+b^2e^{-bx} \xrightarrow{\text{جایگزین}} (a^2e^{ax}+b^2e^{-bx})+3(ae^{ax}-be^{-bx})+2(e^{ax}+e^{-bx})=0$$

$$\Rightarrow (a^2+3a+2)e^{ax}+(b^2-3b+2)e^{-bx}=0$$

@samansalamian

معادلهٔ دیفرانسیل

بدیهی است برای آن که تساوی فوق برقرار باشد، باید $a^{2}+3a+2=0$ و $b^{2}-3b+2=0$ بنابراین $a=-1,-2$ و $b=1,2$. حال با این مقادیر، ۳ تابع مختلف می توان ساخت. ببینید :

$$\begin{cases} a=-1,b=1 \Rightarrow y=e^{-x}+e^{-x} \\ a=-1,b=2 \Rightarrow y=e^{-x}+e^{-2x} \\ a=-2,b=1 \Rightarrow y=e^{-2x}+e^{-x} \\ a=-2,b=2 \Rightarrow y=e^{-2x}+e^{-2x} \end{cases}$$

یکسان هستند :

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق در توابع شامل قدر مطلق

مدرسه تخصصی ریاضیات سامان سلامیان

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS Salamian

قدر مطلق دیدی تعیین علامت کن

$$f'(۱)=?\Rightarrow f(x)=\sqrt[۳]{(|x|-|x-۳|)^۲}$$

$$if \quad x\to ۱\Rightarrow \begin{cases} x>۰\Rightarrow |x|=x \\ x-۳<۰\Rightarrow |x-۳|=-(x-۳) \end{cases}\Rightarrow f(x)=\sqrt[۳]{(x+(x-۳))^۲}=\sqrt[۳]{(۲x-۳)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۴}{۳\sqrt[۳]{(۲x-۳)}}\Rightarrow f'(۱)=-\frac{۴}{۳}$$

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق در توابع شامل قدر مطلق

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

در ریشه های درون قدرمطلق ها با مرتبهٔ بیشتر از یک، مشتق صفر است.

$$f'_+(1)=?\Rightarrow f(x)=\left|(x-1)\ln x\right|$$

$x=1$ ریشهٔ مرتبهٔ دوم درون قدرمطلق است (هم $(x-1)$ و هم $\ln x$ هر دو در $x=1$ مساوی صفر می شوند)، پس تابع f در $x=1$ (براساس نکتهٔ بالا) مشتق پذیر است یعنی $f'(1)$ وجود دارد و مقدار آن صفر است. یعنی : $f'(1)=f'_-(1)=f'_+(1)=0$

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق در توابع شامل جزء صحیح

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

براکت دیدی تعیین عدد کن

اگر تابعی در $x = a$ پیوسته و دارای عامل جزء صحیح باشد و بخواهیم مشتق تابع را در نقطهٔ معینی بررسی کنیم، ابتدا در همسایگی آن نقطهٔ مورد نظر، مقدار جزء صحیح را لحاظ می کنیم، آن گاه از تابع مشتق می گیریم :

اول پیوستگی را چک کنید : پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ وجود ندارد و نمی توانید براکت را تعیین عدد کرده سپس مشتق بگیرید : $f'_{-}(۱) = ? \Rightarrow f(x) = (x+۱)[۲x+۱]$

مشتق چپ وجود ندارد

پیوستگی راست را دارد.

$$f'_{+}(۱) = ? \Rightarrow f(x) = (x+۱)[۲x+۱] \xrightarrow[\text{(ساده-سپس)}]{\text{براکت را تعیین عدد کن}} ۳(x+۱)$$

حالا برو سراغ مشتق گیری : $f'_{+}(۱) \Rightarrow (۳(x+۱))' = ۳$

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق توابع شامل عامل صفرکننده

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

وقتی مشتق یک تابع خفنِ وحشتناک و شلوغ رو ازتون پرسیدن بدونین که طراح خیلی هواتونو داشته چون سوال آسّونه همینه. این تیپ مشتق فقط ظاهرش خفنه به شاگردام میگم

ظاهِرُها صعب، باطنُها سهل ☺

واسه حل این تیپ تست مشتق باید مشتق عامل صفرشونده را در بقیهٔ تابع به ازای ریشه ضرب کنید تا به راحتی به جواب برسید.

اگر برای حل این تیپ تست از فرمول های مشتق گیری عادی استفاده کنی ممکنه عبارت رو از چیزی که هست طولانی ترش کنی و نتونی به جواب برسونیش یا به جواب غلط برسی که همیشه در گزینه ها هست...

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق توابع شامل عامل صفرکننده

اگر تابعی به صورت $f(x)=g(x)h(x)$ باشد و g در a مشتق پذیر و

• $g(a)=$ و h نیز در a پیوسته باشد، آن گاه : $f'(a)=g'(a)h(a)$

وبه بیان دیگر :

$f'(a)=$ (مشتق عامل صفرشونده به ازای a) $\times$ (مابقی تابع به ازای a)

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق توابع شامل عامل صفرکننده

اثبات : از $g(a)=0$ نتیجه می شود که $f(a)=0$ ، بنابراین :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)h(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}\cdot h(x)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}h(x)$$

$$=g'(a)\lim_{x\to a}h(x)\ \overset{h \text{ در } a \text{ پیوسته}}{=\!=\!=\!=}\ g'(a)h(a)$$

اگر h در a پیوسته نباشد، حاصل فوق به صورت $g'(a)\lim\limits_{x\to a}h(x)$ خواهد بود.

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق توابع شامل عامل صفرکننده

اگر $f(x)=\dfrac{x^{۲}(x+۱)}{(۲x-۱)^{۳}}\cos\dfrac{\pi}{۳x^{۲}-۱}$ ، حاصل $f'(۱)$ را بیابید.

$$f'(۱)=\underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{۳x^{۲}-۱}\right)'}_{x=۱\ \text{به ازای}}\underbrace{\left(\frac{x^{۲}(x+۱)}{(۲x-۱)^{۳}}\right)}_{x=۱\ \text{به ازای}}=\underbrace{\left(\frac{۶\pi x}{(۳x^{۲}-۱)^{۲}}\sin\frac{\pi}{۳x^{۲}-۱}\right)}_{x=۱\ \text{به ازای}}(۲)=۳\pi$$

عامل صفرشونده در $x=۱$: $\cos\dfrac{\pi}{۳x^{۲}-۱}$

بخش پیوسته درا $x=۱$: $\dfrac{x^{۲}(x+۱)}{(۲x-۱)^{۳}}$

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق توابع شامل عامل صفرکننده

اگر $f(x)=(e^x-e)h(x)$ ، آن گاه $f'(۱)$ کدام است ؟

۱) $eh(۱)$ ۲) $e\lim\limits_{x\to ۱} h(x)$ ۳) $\circ$ ۴) $eh'(۱)$

عامل (e^x-e) به ازای $x=۱$ عامل ضربی صفرشونده است، اما معلوم نیست که تابع h در $x=۱$ پیوسته باشد یا نباشد، بنابراین :

$$f'(a)=\underbrace{(e^x-e)'}_{x=۱\ \text{به ازای}}\times\lim_{x\to ۱} h(x)=e\lim_{x\to ۱} h(x)$$

گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح می باشد.

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق توابع شامل عامل صفرکننده

مطلب مهم :

اگر در تابع f بیش از یک عامل صفرکننده در $x = a$ موجود باشد و یا به عبارت دقیق تر، مرتبهٔ عامل ضربی صفرشونده در $x = a$ بیش از یک باشد، آن گاه $f'(a) = ۰$ است.

مثلاً در $f(x) = \dfrac{x^۲(x+۱)}{(۲x-۱)^۳}\cos^۲\dfrac{\pi}{۳x^۲-۱}$ می توانیم بلافاصله بگوییم $f'(۱) = ۰$ است

زیرا $\cos^۲\dfrac{\pi}{۳x^۲-۱}$ در واقع $\cos\dfrac{\pi}{۳x^۲-۱} \times \cos\dfrac{\pi}{۳x^۲-۱}$ است،

یعنی تابع بیش از یک عامل صفرکننده دارد.

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق توابع شامل عامل صفرکننده

اگر $f(x)=(x^{۲}+۲x-۸)\left(\cot^{-۱}\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{x}\right)-\frac{\pi}{۶}\right)\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{x}\right)$ آن گاه $f'(۲)$ چند است ؟

$(x^{۲}+۲x-۸)$ و $\left(\cot^{-۱}\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{x}\right)-\frac{\pi}{۶}\right)$ ، هردو به ازای $x=۲$ حاصلی برابر صفر دارند، یعنی تابع

f دارای بیش از یک عامل صفرشونده است بنابراین: $f'(۲)=۰$

محاسبهٔ مشتق توابع شامل عامل صفرکننده

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

اگر $f(x)=(x-a)^n h(x)$ و h در a پیوسته باشد، آن گاه :

$$۱)\ f(a)=f'(a)=\dots f^{(n-۱)}(a)=۰$$

$$۲)\ f^{(n)}(a)=n!h(a)$$

$f^{(n)}$ به معنای مشتق nاُم تابع f است.

@samansalamian

محاسبهٔ مشتق توابع شامل عامل صفرکننده

مشتق دوم تابع $y=\dfrac{(x^{۳}-۸)(x-۲)}{x^{۲}+۱}$ به ازای $x=۲$ را بیابید.

براساس نکتهٔ فوق

$$y=\frac{(x-۲)(x^{۲}+۲x+۴)(x-۲)}{x^{۲}+۱}=\frac{(x-۲)^{۲}(x^{۲}+۲x+۴)}{x^{۲}+۱}$$

$$y''(۲)=۲!\times\underbrace{\left(\frac{x^{۲}+۲x+۴}{x^{۲}+۱}\right)}_{x=۲\ \text{به ازای}}=۲\times\left(\frac{۱۲}{۵}\right)=\frac{۲۴}{۵}$$

دقت : $y'(۲)=۰$ است.

@samansalamian

مدرسه تخصصی ریاضیات سامان سلامیان

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS Salamian

مشتق تابع مرکب یا قاعدهٔ زنجیری

اگر تابع g در a و تابع f در $g(a)$ مشتق پذیر باشد، آن گاه :

$$(fog)'(a) = g'(a)\,f'(g(a))$$

این فرمول گاهی اوقات به صورت $(f(u))' = u'f'(u)$ مطرح می شود و قابل تعمیم به فرمول زیر نیز هست :

$$(fogoh)'(a) = h'(a)g'(h(a))\,f'(g(h(a)))$$

اگر $g(۲) = f'(۲) = g'(۲) = ۲$ ، آن گاه $(fog)'(۲)$ چند است؟

از قاعدهٔ زنجیری استفاده می کنیم :

$$(fog)'(۲) = g'(۲)\,f'(g(۲)) = ۲f'(۲) = ۲(۲) = ۴$$

مشتق تابع مرکب یا قاعدهٔ زنجیری

اگر مشتق تابع $fog(x)$ برابر $\cos 2x$ باشد و $g(x)=\tan x$، آن گاه $f'(x^3)$ را به دست آورید.

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$(fog)'(x)=\cos 2x \Rightarrow g'(x)f'(g(x))=\cos 2x$$

به جای $\tan x$ قرار می دهیم x^3

$$(1+\tan^2 x)f'(\tan x)=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \Rightarrow f'(\tan x)=\frac{1-\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x^3)=\frac{1-x^6}{(1+x^6)^2}$$

صورت دیگری از قاعدهٔ زنجیری

$$y' = f(u) \Rightarrow y' = u' \times f'(u) \xrightarrow{\text{براساس قاعدهٔ زنجیری}} \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

اگر $y = ۲u^۲ - u$ و $u = \sin ۲x$ ، آن گاه مشتق y نسبت به x در $x = \frac{\pi}{۶}$ را بیابید.

$$\begin{cases} y = ۲u^۲ - u \Rightarrow (\text{مشتق } y \text{ نسبت به } u) \ \frac{dy}{du} = ۴u - ۱ \\ u = \sin ۲x \Rightarrow (\text{مشتق } y \text{ نسبت به } u) \ \frac{du}{dx} = ۲\cos ۲x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}} \frac{dy}{dx} = (۴u - ۱) \times (۲\cos ۲x)$$

$$\xrightarrow[u = \sin ۲x]{x = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} \frac{dy}{dx} = \left(۴\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) - ۱\right) \times \left(۲\cos\frac{\pi}{۳}\right) = \left(۲\sqrt{۳} - ۱\right)\left(۲ \times \frac{۱}{۲}\right) = ۲\sqrt{۳} - ۱$$

@samansalamian

بررسی مشتق در توابع زوج و فرد

با فرض متقارن بودن دامنه (در توابع زوج نسبت به محور

y ها و توابع فرد نسبت مبدأ مختصات)

زوج $f: f(-x)=f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} -f'(-x)=f'(x) \Rightarrow f'(-x)=-f'(x) \Rightarrow$ f' فرد است.

فرد $f: f(-x)=-f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} -f'(-x)=-f'(x) \Rightarrow f'(-x)=f'(x) \Rightarrow$ f' زوج است.

جمع بندی :

اگر f تابعی زوج و مشتق پذیر باشد، f' تابعی فرد و اگر f فرد باشد، f' تابعی زوج است.

@samansalamian

بررسی مشتق در توابع زوج و فرد

اگر $f(x)=\frac{x^6+x^2+1}{x^2+1}$ ، آن گاه حاصل $f'(\frac{1}{5})+f'(-\frac{1}{5})$ را بدست آورید.

تابع f زوج است $(f(-x)=f(x))$، پس f' فرد است و در نتیجه : $f'(-\frac{1}{5})=-f'(\frac{1}{5})$

و از آن جا : $f'(\frac{1}{5})+f'(-\frac{1}{5})=0$

نحوهٔ تشخیص راه حل این تست : تقارن $\frac{1}{5}$ و $-\frac{1}{5}$ ، حل تست های زیاد و تجربه و تمرین و تکرار و تکرار و رتکرار تا حرفه ای شدن و دست تو جیب تست زدن

وضعیت مشتق های چپ و راست در توابع زوج و فرد

فرض کنید f در $x=a$ مشتق ناپذیر و $f'_{-}(a)\neq f'_{+}(a)$

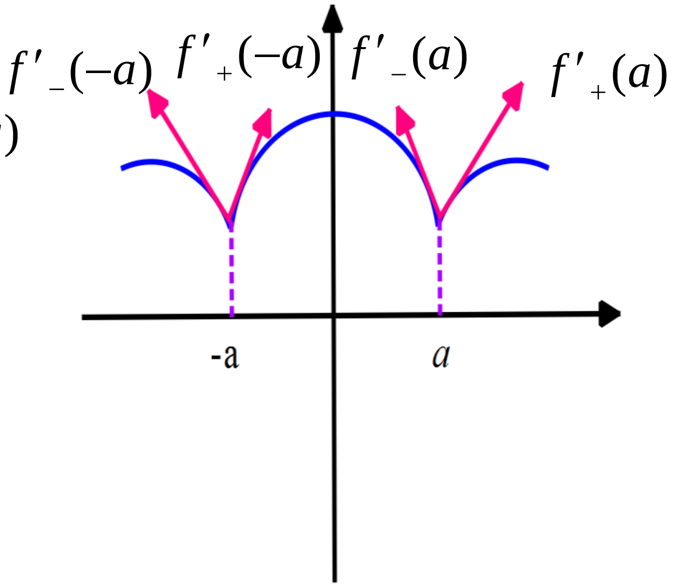
۱)اگر f تابعی زوج باشد، آن گاه : $f'_{-}(-a)=-f'_{+}(a)$ و $f'_{+}(-a)=-f'_{-}(a)$

۲)اگر f تابعی فرد باشد، آن گاه : $f'_{-}(-a)=f'_{+}(a)$ و $f'_{+}(-a)=f'_{-}(a)$

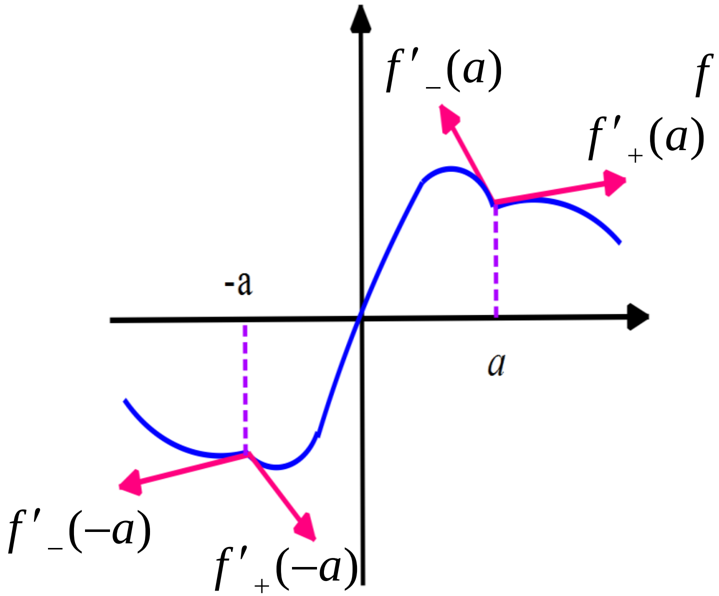
@samansalamian

وضعیت مشتق های چپ و راست در توابع زوج و فرد

درک شهودی :



f تابعی زوج است.



f تابعی فرد است.

مثال : در تابع فرد f ، $f'_+(-۲)=۶$. می توان از $f'_+(-۲)$ فقط دربارهٔ $f'_-(۲)$ اظهارنظرکرد و می توان $f'_-(۲)=۶$ را نتیجه گرفت.

مشتق ضمنی

به دو معادلهٔ زیر توجه کنید :

الف) $y = x^{۱۰} - ۵x^{۲} - ۴$

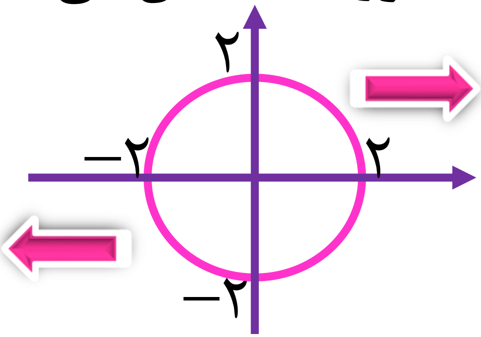
ب) $y^{۲} + x^{۲} - ۴ = ۰$

در معادلهٔ (الف) y صراحتاً برحسب x مطرح شده و یک تابع صریح شده داریم.

در معادلهٔ (ب) اینگونه نیست و بین x و y یک رابطهٔ صریح وجود ندارد و به چنین عبارت هایی که رابطهٔ بین x و y به صورت $f(x,y)=۰$ است نه $y=f(x)$ ، یک عبارت ضمنی می گوییم. گاهی یک عبارت ضمنی را می توانیم بـه صـورت (های) صریح نیز بنویسیم. مثلاً در $y^{۲} + x^{۲} - ۴ = ۰$ می توانیم آن را به صورت های صریح زیر بنویسیم :

$$y^{۲} = ۴ - x^{۲} \Rightarrow y = \pm\sqrt{۴ - x^{۲}}$$

معادلهٔ دو نیم دایره را در بالا و پایین محور xها نشان می دهد.



$y = \sqrt{۴ - x^{۲}}$

$y = -\sqrt{۴ - x^{۲}}$

@samansalamian

مشتق ضمنی

البته عبارت های ضمنی ای نیز وجود دارند که نمی توانیم آن ها را به صورت صریح دربیاوریم. مانند : $xy^{۳} - \sin(xy) - ۳ = ۰$

یک عبارت ضمنی می تواند معادلهٔ یک تابع باشد یا نباشد. مثلاً عبارت ضمنی معادلهٔ یک تابع است ولی همانگونه که ملاحظه کردید عبارت ضمنی معادلهٔ یک تابع نیست(نمودار یک دایره است)

ممکن است ازخودتان بپرسید که مگر مشتق را برای توابع تعریف نمی کردیم پس چگونه می توانیم از عبارت های ضمنی ای که ممکن است تابع نباشند مشتق بگیریم ؟

در پاسخ می توان گفت اگر در یک معادلهٔ ضمنی هیچ تابع مشتق پذیری صدق نکرد نمی توانیم مشتق بگیریم.

@samansalamian

مشتق ضمنی

مثلاً در عبارت ضمنی $y^2+x^2-2x+1=0$ ، هیچ تابع مشتق پذیری صدق نمی کند.

$$y^2+x^2-2x+1=0 \Rightarrow y^2+(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1, y=0$$

به بیان دیگر در عبارت ضمنی مزبور فقط نقطهٔ A(۱،۰) صدق می کند و تابع در حوالی آن تعریف نمی شود، بنابراین مشتق وجود ندارد. و لذا می توان گفت هیچ تابع مشتق پذیری در عبارت ضمنی مربوطه صدق نمی کند و در نتیجه نمی توانیم از عبارت مزبور مشتق بگیریم.

اینک فرض می کنیم تابع های مشتق پذیری در f(x,y)=۰ صدق می کنند، و می خواهیم در تخته های بعدی روش های مشتق گیری از این عبارت ضمنی را مطرح کنیم :

روش های مشتق گیری از عبارات ضمنی

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

روش اول(روش مستقیم) :

در این روش براساس قاعدهٔ زنجیری مشتق، مستقیماً از عبارت موردنظر برحسب x یا y (x متغیر مستقل باشد یا y) مشتق می گیریم.

به زیروند های عبارات دقت کنید زیرا از هر عبارت نسبت به زیروند خودش باید مشتق بگیرید یعنی :

مثلاً عبارت روبرو نسبت بهx مشتق گرفته خواهد شد و داریم : $(x^۴)'_x = ۴x^۳$

$$(x^۴y^۴)'_x = (x^۴)'y^۴ + (y^۴)'x^۴ = ۴x^۳y^۴ + ۴y^۳y'x^۴$$

$$(x^۴y^۴)'_y = (x^۴)'y^۴ + (y^۴)'x^۴ = ۴x^۳x'y^۴ + ۴y^۳x^۴$$

@samansalamian

معمولاً x'_y را با x' و y'_x را با y' نمایش می دهند.

روش های مشتق گیری از عبارات ضمنی

اگر $5x^2y^3 - \sin x^2 + \tan y^2 = y$ ، آن گاه y'_x و x'_y را پیدا کنید.

y'_x بدین معناست که مشتق **y** نسبت به **x** مورد نیاز است و یا به عبارت دیگر، **x** متغیر مستقل و **y** به آن وابسته است. اکنون به طور مستقیم به مشتق گیری می پردازیم و از دو طرف تساوی برحسب **x** مشتق می گیریم.

$$(5x^2y^3)' - (\sin x^2)' + (\tan y^2)' = y' \Rightarrow 5\left((x^2)'y^3 + (y^3)'x^2\right) - \left((x^2)'\cos x^2\right) + \left((y^2)'(1+\tan^2 y^2)\right) = y'$$

$$\Rightarrow 5(2xy^3 + 3y'y^2x^2) - (2x\cos x^2) + \left((2y'y(1+\tan^2 y^2)\right) = y' \Rightarrow 10xy^3 + 15y'y^2x^2 - 2x\cos x^2 + 2yy'(1+\tan^2 y^2) = y'$$

$$\Rightarrow \left(15y^2x^2 + 2y(1+\tan^2 y^2) - 1\right)y' = -10xy^3 + 2x\cos x^2 \Rightarrow y' = \frac{-(10xy^3 - 2x\cos x^2)}{15y^2x^2 + 2y(1+\tan^2 y^2) - 1}$$

و به طریق مشابه می توانیم x'_y را به دست آوریم، یعنی از طرفین نسبت به **y** مشتق بگیریم :

$$5x^2y^3 - \sin x^2 + \tan y^2 = y \Rightarrow 5(2x'xy^3 + 3y^2x^2) - 2x'x\cos x^2 + 2y(1+\tan^2 y^2) = 1$$

$$\Rightarrow x' = \frac{-(15y^2x^2 + 2y(1+\tan^2 y^2) - 1)}{(10xy^3 - 2x\cos x^2)}$$

@samansalamian

روش های مشتق گیری از عبارات ضمنی

روش دوم (استفاده از مشتقات جزئی) :

از این روش در کتاب درسی صحبتی به میان نیامده است اما من توصیه می کنم این روش را به خوبی فرابگیرید :

$$y'_x = \frac{-f'_x}{f'_y} \quad , \quad x'_y = \frac{-f'_y}{f'_x}$$

به f'_x مشتق جزئی عبارت ضمنی **f** نسبت به **x** می گویند و برای محاسبهٔ آن فرض می کنیم **y** عددی ثابت مانند **k** است. f'_x را به صورت $f'_x(x,y)$ نیز نشان می دهند. به صورت مشابه، f'_y یعنی مشتق جزئی **f** نسبت به **y** و در محاسبهٔ آن **x** ثابت فرض می شود. به عنوان مثال :

$$x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 3x^2 + 0 + 6xy^2 = 3x^2 + 6xy^2 \\ f'_y = 0 + 3y^2 + 6x^2y = 3y^2 + 6x^2y \end{cases}$$

روش های مشتق گیری از عبارات ضمنی

از رابطهٔ $y=\sin(x-۲y)+\sqrt{x-y}$ ، حاصل $y'(۲,۱)$ را بدست آورید.

گام اول : طرف ثانی را صفرکنید(همه را ببرید یکطرف و عبارت را برابر صفر قرار دهید).

$$\sin(x-۲y)+\sqrt{x-y}-y=۰ \Rightarrow y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\cos(x-۲y)+\frac{۱}{۲\sqrt{x-y}}}{-۲\cos(x-۲y)-\frac{۱}{۲\sqrt{x-y}}-۱}$$

$$\xrightarrow{x=۲,\,y=۱} y'_x=-\frac{\cos۰+\frac{۱}{۲}}{-۲\cos۰-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۱+\frac{۱}{۲}}{-۲-\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۷}$$

مطالبی دربارهٔ f و f^{-1}

۱)اگر در تابعی مانند **f** جای **x** و **y** را عوض کنیم به معکوس تابع **f** می رسیم،

حال برای آن که معکوس تابع **f** نیز، تابع باشد، باید :

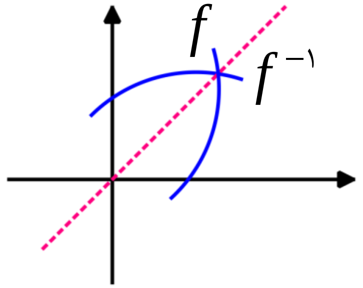
تابع **f** یک به یک و یا به عبارت دیگر اکیداً یکنوا باشد، به این شرط، شرط معکوس پذیری می گویند.

۲)دامنه و برد تابع f و f^{-1} عکس یک دیگر است، یعنی : $R_f = D_{f^{-1}}$ و $D_f = R_{f^{-1}}$

۳)نمودار دو تابع f و f^{-1} نسبت به نیم ساز ربع اول و سوم **(y=x)** متقارن هستند.

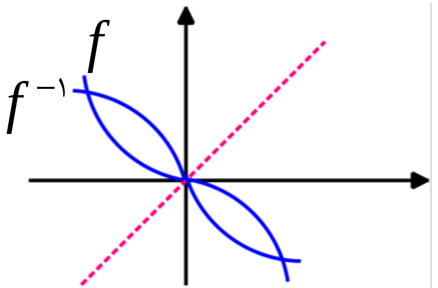
اگر تابع **f** خط **y=x** را در **A** قطع کنـد،

تابع f^{-1} نیز از **A** می گذرد.



اما ممکن است f و f^{-1} یک دیگر را در نقـاطی

غیرواقع بر **y=x** نیز قطع کنند.



مطالبی دربارهٔ f و f^{-1}

می توانیم بگوییم در صورتی که تابع f اکیداً صعودی باشد، نقاط تقاطع f و f^{-1} روی $y=x$ خواهد بود و به همین دلیل وقتی f اکیداً صعودی باشد، برای یافتن نقاط تلاقی آن با f^{-1} می توانیم تابع f را با $y=x$ قطع دهیم.

۴) ترکیب دو تابع f و f^{-1} همانی است، یعنی :

$$\begin{cases} f^{-1}of(x)=x \\ x\in D_f \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} fof^{-1}(x)=x \\ x\in D_{f^{-1}} \end{cases}$$

توجه کنید که در حالت کلی $f^{-1}of(x)\neq fof^{-1}(x)$، به دلیل آن که ممکن است $D_f\neq D_{f^{-1}}$ و یا $D_f\neq R_f$

مشتق تابع معکوس

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

اگر تابع **f** در **a** مشتق پذیر و $f'(a) \neq 0$ و هم چنین در یک همسایگی این نقطه (یعنی **a**) پیوسته و یک به یک باشد، آن گاه :

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}}$$

به بیان دیگر :

مشتق تابع f^{-1} به ازای طول A'(یا عرض **A**) برابر معکوس مشتق تابع **f** به ازای طول **A** است.

@samansalamian

مشتق تابع معکوس

اثبات :

$$f^{-1}(f(x)) = x \xrightarrow{\text{مشتق می گیریم}} f'(x)(f^{-1})'\big(f(x)\big) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}$$

و اگر نقطهٔ **A** را با مختصات $A\left|\begin{array}{l} x = a \\ f(x) = b \end{array}\right.$ در نظر بگیریم به همان رابطهٔ مطرح شده درتختهٔ قبل یعنــی $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$ می رسیم.

مثال : $f(x) = x - \frac{3}{2}\sqrt{6-x} \Rightarrow (f^{-1})'(-1) = ?$

$$x - \frac{3}{2}\sqrt{6-x} = -1 \xrightarrow{\text{حدس } \mathbf{x}} x = 2 \Rightarrow A(2,-1) \in f \Rightarrow (f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{-1}{2\sqrt{6-x}}\right) \Rightarrow f'(2) = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{11}{8} \Rightarrow (f^{-1})'(-1) = \frac{8}{11}$$

@samansalamian

مشتق دوم تابع معکوس

هرگاه $f(x)=x^{3}+5x$ مفروض باشد، $(f^{-1})''(6)$ را بیابید.

به ۲ روش برایتان حل می کنم :

۱) در روش اول کافیست از طرفین رابطهٔ $(f^{-1})'\big(f(x)\big)=\dfrac{1}{f'(x)}$ مشتق بگیریم:

$$f'(x)\Big((f^{-1})''\big(f(x)\big)\Big)=\frac{-f''(x)}{\big(f'(x)\big)^{2}}\Rightarrow (f^{-1})''\big(f(x)\big)=\frac{-f''(x)}{\big(f'(x)\big)^{3}}$$

اکنون مانند گذشته، طول نقطه ای از تابع **f** را پیدا می کنیم که به ازای آن حاصل تابع برابر ۶ باشد، یعنی :

$$x^{3}+5x=6\Rightarrow x=1\Rightarrow A\Big|_{6}^{1}\Rightarrow (f^{-1})''(6)=\frac{-f''(1)}{\big(f'(1)\big)^{3}}$$

$$f'(x)=3x^{2}+5\Rightarrow f'(1)=8,\ f''(x)=6x\Rightarrow f''(1)=6$$

$$(f^{-1})''(6)=\frac{-6}{8^{3}}=\frac{-3}{256}$$

@samansalamian

مشتق دوم تابع معکوس

روش دوم : بدون نیاز به فرمول های مشتق گیری توابع وارون، کافی است ابتدا خود تابع را معکوس کرده و سپس از آن دو بار مشتق بگیریم :

$$y = x^{۳} + ۵x \xrightarrow[\text{(جای x و y را عوض می کنیم)}]{\text{تابع را معکوس می کنیم}} x = y^{۳} + ۵y$$

آن چه که اکنون به دست آمده معادلهٔ ضمنی تابع معکوس تابع $y = x^{۳} + ۵x$ است، از این عبارت ضمنی دو بار مشتق می گیریم و y'' را به عنوان $(f^{-۱})''$ به ازای $A'(۶,۱)$ محاسبه می کنیم :

@samansalamian

مشتق دوم تابع معکوس

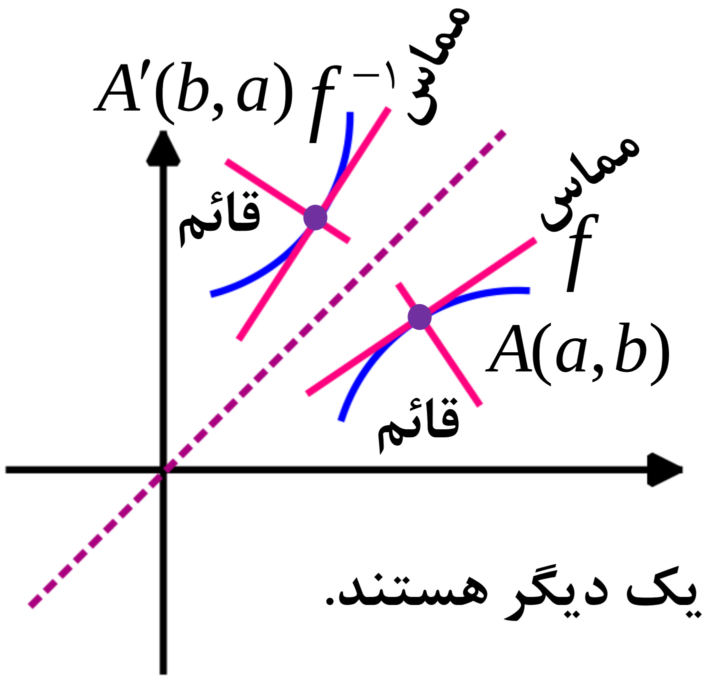
روش دوم :

مشتق اول : $۱=۳y^{۲}y'+۵y' \xrightarrow{A'(۶,۱)} ۱=۳(۱)^{۲}y'+۵y' \Rightarrow y'=\frac{۱}{۸}=(f^{-۱})'(۶)$

مشتق دوم : $۰=۶yy'^{۲}+۳y^{۲}y''+۵y'' \xrightarrow{A'(۶,۱),\ y'=\frac{۱}{۸}} ۰=۶(۱)(\frac{۱}{۸})^{۲}+۳(۱)^{۲}y''+۵y''$

$$\Rightarrow y''=-\frac{۳}{۲۵۶}=(f^{-۱})'(۶)$$

وضعیت خطوط مماس و قائم بر تابع معکوس



شیب خط مماس یا قائم بر f^{-1} در A' $= \dfrac{1}{\text{شیب خط مماس یا قائم بر } f \text{ در } A}$

جالبه بدونید :

ضابطه های خطوط مماس یا قائم بر دو منحنی f و f^{-1} در نقاط A و A' معکوس یک دیگر هستند.

یعنی اگر معادلهٔ مماس در A، $y = mx + h$ باشد، معادلهٔ مماس در A' معکوس آن یعنی $x = my + h$ و یا به عبارتی دیگر $y = \dfrac{x}{m} - \dfrac{h}{m}$ است.

وضعیت خطوط مماس و قائم بر تابع معکوس

خط $y=۲x-۵$ بر نمودار تابع معکوس پذیر f در $x=۳$ مماس است، ضریب زاویهٔ خط قائم بر نمودار تابع $f^{-۱}$ در $x=۱$ را بدست آورید.

$y=۲x-۵$ (با شیب ۲) در $x=۳$ بر نمودار تابع f مماس شده است، پس نتیجه می گیریم که عرض نقطهٔ تماس برابر عرض خط مماس در این نقطه است یعنی $A(۳,۱)$، پس :

$$\text{شیب قائم در } A' = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{\text{شیب مماس بر } f \text{ در } A(۳,۱)} = \text{شیب مماس بر } f^{-۱} \text{ در } A'(۱,۳)$$

مشتق توابع وارون

در دو حالت زیر تابع پیوسته f^{-1} مشتق پذیر نیست.

۱)اگر تابع f در نقطهٔ $A(a,b)$ مشتق ناپذیر و زاویه دار باشد (مشتق چپ و راست با یکدیگر نابرابر باشد)، تابع f^{-1} در نقطهٔ متناظر آن، یعنی $A'(b,a)$ نیز مشتق ناپذیر و زاویه دار خواهد شد.(چون f و f^{-1} نسبت به $y=x$ قرینهٔ هم هستند)

۲)در تخته های قبل فرمول $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$ را بیان و اثبات کردم(یادتونه؟؟) پس بر طبق آن می توان گفت در نقاطی که $f'(x)=0$ باشد، تابع f^{-1} در متناظر آن نقاط مشتق پذیر نیست. به بیان دیگر، هرجا نمودار f مماس افقی داشته باشد، تابع f^{-1} در متناظر آن نقاط، مشتق پذیر نیست.

مشتق توابع وارون

تابع معکوس تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-3 & x<2\\ x+3 & x\ge 2\end{cases}$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

دلیل حذف مساوی رو می دونید دیگه ؟ نابرابری مشتق چپ و راست

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & x<2\\ 1 & x>2\end{cases}$$

تابع f پیوسته است. از طرفی f' در $x=2$ وجود ندارد $(f'_-(2)=12 \;,\; f'_+(2)=1)$، پس f^{-1} در نقطه ای به طول متناظر آن، مشتق پذیر نخواهد بود. هم چنین $f'(0)=0$ است، پس تابع f^{-1} در نقطهٔ متناظر آن نیز مشتق پذیر نیست. بنابراین روی هم، تابع f^{-1} در دو نقطه مشتق پذیر نیست.

مفاهیم مشتقات مراتب بالاتر

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

f در a مشتق دوم دارد هرگاه :

۱) f در a پیوسته باشد.

۲) $f'_-(a) = f'_+(a)$

۳) $f''_-(a) = f''_+(a)$

تعمیم یافتهٔ مطلب بالا

f در a مشتق n اُم دارد هرگاه :

۱) f در a پیوسته باشد.

۲) $f'_-(a) = f'_+(a)$

n) $f^{(n-1)}_-(a) = f^{(n-1)}_+(a)$

n+۱) $f^{(n)}_-(a) = f^{(n)}_+(a)$

@samansalamian

مفاهیم مشتقات مراتب بالاتر

اگر مشتق دوم تابع $f(x)=\begin{cases} x^{3} & x\le 1 \\ ax^{2}+bx+c & x>1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته

باشد، $f(2)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۷ ۴) ۱/۲

از پیوستگی f'' در $x=1$ نتیجه می گیریم که $f''(1)$ موجود است و لذا بر اساس آن چه گفتیم سه شرط زیر برقرار خواهد بود :

۱)پیوستگی f درa :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow 1=a+b+c$$

مفاهیم مشتقات مراتب بالاتر

۲) $f'_{-}(a)=f'_{+}(a)$:

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x<1\\ 2ax+b & x>1\end{cases}\Rightarrow f'_{-}(1)=f'_{+}(1)\Rightarrow 3=2a+b$$

۳) $f''_{-}(a)=f''_{+}(a)$:

$$f''(x)=\begin{cases}6x & x<1\\ 2a & x>1\end{cases}\Rightarrow f''_{-}(1)=f''_{+}(1)\Rightarrow 6=2a\Rightarrow a=3\xrightarrow{2a+b=3} b=-3$$

$$\xrightarrow{a+b+c=1} c=1\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^3 & x\le 1\\ 3x^2-3x+1 & x>1\end{cases}\Rightarrow f(2)=3(2)^2-3(2)+1=7$$

گزینهٔ ۳ صحیح است.

مفاهیم مشتقات مراتب بالاتر

در تابع $f(x)=x^{۳}|x|$، مشتق در $x=۰$ از کدام مرتبه به بعد وجود ندارد ؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) این تابع از هر مرتبه ای مشتق پذیر است.

ابتدا تابع را از حالت قدرمطلقی خارج می کنیم :

$$f(x)=x^{۳}|x|=\begin{cases} x^{۴} & x\geq ۰ \\ -x^{۴} & x<۰ \end{cases}$$

۱) f در $x=۰$ پیوسته است.

۲) $$f'(x)=\begin{cases} ۴x^{۳} & x>۰ \\ -۴x^{۳} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f'_{+}(۰)=f'_{-}(۰)=۰$$

۳) $$f''(x)=\begin{cases} ۱۲x^{۲} & x>۰ \\ -۱۲x^{۲} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f''_{+}(۰)=f''_{-}(۰)=۰$$

مفاهیم مشتقات مراتب بالاتر

۴) $f'''(x)=\begin{cases}۲۴x & x>۰\\ -۲۴x & x<۰\end{cases} \Rightarrow f'''_+(۰)=f'''_-(۰)=۰$

۵) $f^{(۴)}(x)=\begin{cases}۲۴ & x>۰\\ -۲۴ & x<۰\end{cases} \Rightarrow f^{(۴)}_+(۰)=۲۴,\ f^{(۴)}_-(۰)=-۲۴ \Rightarrow f^{(۴)}_+(۰)\neq f^{(۴)}_-(۰)$

و این یعنی تابع مزبور در $x=۰$ از مرتبهٔ چهارم به بعد مشتق ندارد ($f^{(۴)}(۰)$ وجود ندارد). به بیان دیگر تابع f در $x=۰$ فقط سه مرتبه مشتق پذیر است پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

تابع $f(x)=x^n|x|$ در $x=۰$، n مرتبه مشتق پذیر است و از مرتبهٔ $(n+۱)$ اُم به بعد مشتق ندارد.

مفاهیم مشتقات مراتب بالاتر

حداقل مقدار $n \in \mathbb{N}$ برای آن کــه تــابع $f(x) = x^n[x]$ در $x = ۰$ مشـــتق سوم داشته باشد، چه قدر است ؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) هر مقداری از n قابل قبول است.

در این تست نیز مانند تست قبل، شروع ما با حذف $[x]$ و تعیین مقدار برای آن در حوالی $x = ۰$ است.

در بررسی مشتق n اُم توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح در $x = a$ ، ابتدا تابع را در حوالی a ضابطه بندی می کنیم، یعنی قدرمطلق و جزء صحیح آن را حذف می کنیم.

$$f(x) = x^n[x] = \begin{cases} ۰ & ۰ \leq x < ۱ \\ -x^n & -۱ \leq x < ۰ \end{cases}$$

@samansalamian

مفاهیم مشتقات مراتب بالاتر

۱) $if \quad n \geq 1 \Rightarrow$ f در $x=0$ پیوسته است.

۲) $f'(x)=\begin{cases} 0 & 0<x<1 \\ -nx^{n-1} & -1<x<0 \end{cases} \Rightarrow if \quad n \geq 2 \Rightarrow f'_{+}(0)=f'_{-}(0)=0$

۳) $f''(x)=\begin{cases} 0 & 0<x<1 \\ -n(n-1)x^{n-2} & -1<x<0 \end{cases} \Rightarrow if \quad n \geq 3 \Rightarrow f''_{+}(0)=f''_{-}(0)=0$

۴) $f'''(x)=\begin{cases} 0 & 0<x<1 \\ -n(n-1)(n-2)x^{n-3} & -1<x<0 \end{cases} \Rightarrow if \quad n \geq 4 \Rightarrow f'''_{+}(0)=f'''_{-}(0)=0$

پس اگر $n \geq 4$ باشد، $f'''_{+}(0)=f'''_{-}(0)=0$ و هم چنین هر سه شرط لازم قبلی نیز برقرار خواهد بود و لذا می گوییم تابع f در $x=0$ مشتق سوم خواهد داشت. بنابراین گزینهٔ ۳ صحیح است.

تابع $f(x)=x^n[x]$ در $x=0$، $(n-1)$ مرتبه مشتق پذیر است و از مرتبهٔ n اُم به بعد مشتق ندارد.

مشتق nاُم توابع کسری

روش کلی حل این مدل تست : تا چند مشتق را محاسبه کنید، به ریتم پی برده و فرمول مورد نظر را بیابید.

در تخته های امروز چند فرمول مهم را که با چند بار مشتق گیری می توان به آنها رسید را برایتان بدست آورده و به همراه حل نمونه سوال به شما آموزش می دهم.

هشدار : برای حل این گونه تست ها باید حوصله، دقت و تمرکز کافی داشته باشید و از همه مهم تر اینکه قبلاً در خانه چند بار برای خود نحوهٔ دستیابی به فرمول ها را اثبات کرده باشید تا سرجلسهٔ کنکور ناامید نشده و تست را رها نکنید. یادتان باشد تستی که همه آن را رها می کنند می تواند سکوی پرش تو باشد.

مشتق nاُم توابع کسری

$$f(x)=\frac{۱}{(cx+d)^k}\Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{(-c)^n\left(k(k+۱)\ldots(k+n-۱)\right)}{(cx+d)^{k+n}}$$

مشتق دهم تابع روبرو را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{۱۱}{(۲x-۳)^۴}\Rightarrow f^{(۱۰)}(x)=\frac{۱۱(-۲)^{۱۰}\left(۴\times۵\times\ldots(۴+۱۰-۱)\right)}{(۲x-۳)^{۴+۱۰}}=\frac{۱۱(-۲)^{۱۰}(۴\times۵\times\ldots\times۱۳)}{(۲x-۳)^{۱۴}}$$

اگر رابطهٔ بالا سرجلسهٔ کنکور به ذهنتان نرسید چه ایـده ای داریـد ؟ رهـا کردن تست و به سراغ تست بعدی رفتن؟☹ اما من پیشنهاد بهتری دارم...

مشتق nاُم توابع کسری

و اما توصیهٔ من : همانطور که گفتم اگر تنها به حفظ کردن فرمول بسنده کنید بـا احتمـال بالایی روز کنکور دچار آشفتگی خواهید شد، لازم به ذکراست که قرار نیست در کنکور ۹۵ لزوماً از همین فرمول ها استفاده شود . (با خودتون نگید هر جور شده این چند تـا فرمـول روحفظشون می کنم)تست تکراری مطرح نمیشه که بگی مدلشو حفظ می کنم،

ریاضیات حفظی نیست. تنها زمانی از پس این تست ها برمی آیید کـه از آنهـا چنـد بـاری مشتق بگیرید تا به ریتم پی ببرید و بتوانید از دل مشتق ها فرمول لازم را بسازید (اولی رو براتون اثبات می کنم تا ببینید چگونه باید برخورد کنید) :

مشتق nاُم توابع کسری

به فرض مثال من از تابع مطرح شده ۲ بار مشتق گرفتم و نتیجهٔ زیر حاصل شد :

$$f(x)=\frac{۱۱}{(۲x-۳)^{۴}}\Rightarrow f'(x)=\frac{۱۱\left(-۲\times ۴(۲x-۳)^{۳}\right)}{(۲x-۳)^{۸}}=\frac{۱۱\left((-۲)\times ۴\right)}{(۲x-۳)^{۵}}\Rightarrow f''(x)=\frac{۱۱((-۲)^{۲}\times ۴\times ۵)}{(۲x-۳)^{۶}}$$

دارم چی می بینم؟

۱) به ازای هربارمشتق گیری یک واحد به توان مخرج اضافه می شود. پس اگر توان مخرج **k** باشد، بعـد از **n** بار مشتق گیری توان آن **k+n** خواهد بود.

۲) به ازای هربار مشتق گیری، یک بار قرینهٔ ضریب **x** در مخرج، در عبارت صورت ضرب می شود.

این هم دلیل حضور $(-c)^{n}$ در فرمول.

مشتق nاُم توابع کسری

۳) به ازای هربار مشتق گیری، توان مخرج در عبارت صورت ضرب می شود، هم چنین توجه کنید که همواره : عـــدد پایانی این عددِ حاصل ضربی (که شبیه اعداد فاکتوریلی است)، یک واحد از توان مخرج کمتر است.

۴)عدد ۱۱ هم به عنوان یک ضریب ثابت هیچ نقشی نداشت و عیناً در هر مشتقی(ازهر مرتبه ای) ظاهر می شود.

و به این ترتیب به فرمولی که در اولین تختهٔ امروز بیان کردم می رسیم :

$$f(x)=\frac{۱}{(cx+d)^k} \Rightarrow f^{(n)}(x)=\frac{(-c)^n\left(k(k+۱)...(k+n-۱)\right)}{(cx+d)^{k+n}}$$

@samansalamian

مشتق nاُم توابع کسری

برای تمرین بیشتر مشتق هفتم توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y=\dfrac{۱۰}{۳+۵x}$ ب) $y=\dfrac{۲x+۱}{۳x+۲}$

الف) $y=\dfrac{۱۰}{(۳+۵x)^{۱}}\Rightarrow y^{(۷)}=\dfrac{۱۰\times(-۵)^{۷}(۱\times۲\times\ldots\times۷)}{(۳+۵x)^{۸}}=\dfrac{-۱۰\times(۵)^{۷}\times۷!}{(۳+۵x)^{۸}}$

ب) $y=\dfrac{۲x+۱}{۳x+۲}\xrightarrow{\text{ظاهر تابع را تغییر می دهیم.}}y=\dfrac{\frac{۲}{۳}(۳x+۲)-\frac{۴}{۳}+۱}{۳x+۲}=\dfrac{۲}{۳}+\dfrac{\frac{-۱}{۳}}{(۳x+۲)}$

$$\Rightarrow y^{(۷)}=۰+\dfrac{\left(-\frac{۱}{۳}\right)(-۳)^{۷}(۱\times۲\times\ldots\times۷)}{(۳x+۲)^{۸}}=\dfrac{۳^{۶}\times۷!}{(۳x+۲)^{۸}}$$

مشتق nاُم توابع کسری

حال اگر تابع کسری ظاهری مانند آنچه که گفته شد نداشت باید چه کرد؟

مشتق nاُم تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}+۴}{(۲-x)}$ در $x=۱$ کدام است؟ $(n\geq ۲)$

۱) صفر ۲) $(-۱)^{n}n!$ ۳) $۸(-۱)^{n}n!$ ۴) $۸n!$

ابتدا کمی ظاهر تابع را تغییر می دهیم :

$$f(x)=\frac{(x^{۲}-۴)+۸}{-(x-۲)}=-(x+۲)+\frac{۸}{۲-x}\Rightarrow f^{(n)}(x)=۰+\frac{۸(+۱)^{n}(۱\times ۲\times \ldots \times n)}{(۲-x)^{n+۱}}=\frac{۸n!}{(۲-x)^{n+۱}}\Rightarrow f^{(n)}(۱)=۸n!$$

پس گزینهٔ ۴ صحیح است. توجه داشته باشید که عبارت $-(x+۲)$ از مرحلهٔ دوم مشتق گیری به بعد تبدیل به صفر و حذف می شود.

مشتق nاُم در توابع مثلثاتی

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

در اینجا فقط به مشتقات nاُم توابع sin(ax+b) و cos(ax+b) می پردازیم، یعنی توابع دیگر مثلثاتی را ابتدا باید برحسب این دو تابع بنویسیم تا بتوانیم مشتق موردنظر آن ها را پیدا کنیم :

$$f(x)=\sin(ax+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=a^n\sin\left(\frac{n\pi}{۲}+(ax+b)\right)$$

$$f(x)=\cos(ax+b)\Rightarrow f^{(n)}(x)=a^n\cos\left(\frac{n\pi}{۲}+(ax+b)\right)$$

@samansalamian

مشتق nاُم در توابع مثلثاتی

مشتق دهم تابع $f(x)=۴\sin x\cos^۲ x$ به ازای $x=\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) $۳^{۱۰}-۱$ ۲) $-۳^{۱۰}+۱$ ۳) $۳^{۱۰}+۱$ ۴) $-۳^{۱۰}-۱$

دو فرمول مثلثاتی sin۲a=۲sinacosa و ۲sinacosb=sin(a+b)+sin(a-b) از ریاضیات پایه را بخاطر دارید؟؟؟

در حل این تست گره گشاست.

$$f(x)=۴\sin x\cos^۲ x=۲(۲\sin x\cos x)\cos x=۲\sin ۲x\cos x=\sin ۳x+\sin x\Rightarrow$$

$$f^{(۱۰)}(x)=۳^{۱۰}\sin(\underbrace{\frac{۱۰\pi}{۲}+۳x}_{۵\pi+۳x})+\sin(\underbrace{\frac{۱۰\pi}{۲}+x}_{۵\pi+x})=-۳^{۱۰}\sin ۳x-\sin x\Rightarrow f^{(۱۰)}(\frac{\pi}{۲})=-۳^{۱۰}(-۱)-(۱)=۳^{۱۰}-۱$$

پس گزینۀ ۱ صحیح است.

به خاطر داشته باشید که وجود مضارب فرد π در کمان نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس، باعث منفی شدن آن ها می شود.

مشتقات مراتب بالاتر و توابع زوج و فرد

اگر $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^۶+\cos x-۳}$ ، حاصل $f^{(۴)}(۰)$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۶}$ ۳) -۱ ۴) ۰

ابتدا به زوج یا فرد بودن تابع دقت کنید، این تابع فرده چون $\big(f(-x)=-f(x)\big)$ ، پس f' زوج و f'' فرد، f''' زوج و خلاصه $f^{(۴)}$ فرد است. از قبل نیز می دانیم که توابع فرد یا در مبدأ مختصات تعریف نمی شوند و یا در صورت تعریف شدن، مقدارشان الزاماً صفر است (زیرا نمودار توابع فرد باید نسبت به مبدأ متقارن باشــد). از طرفی در گزینه ها برای تابع فرد $f^{(۴)}$ در مبدأ مختصات چهار مقدار ارائه شده است و این بدان معنی اســت که تابع فرد $f^{(۴)}$ در مبدأ مختصات تعریف می شود و لذا $f^{(۴)}(۰)=۰$.

پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

عامل های صفر کننده در مشتقات مراتب بالاتر

اگر $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^{۴}+\cos x-۳}$ ، حاصل $f^{(۳)}(۰)$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۲) $-\dfrac{۱}{۶}$ ۳) -۱ ۴) ۰

اشتباه نکنید!!! این همان تست قبلی نیست در این تست $f^{(۳)}(۰)$ از شما پرسیده و مطمئناً نمی توانید از زوج بودن تابع در $f^{(۳)}$ استفاده کنید زیرا توابع زوج در مبدأ مختصات می توانند هر مقداری داشته باشند کـه آن مقـدار لزومـاً صـفر نیست و در حل این تست باید از ایدهٔ دیگری استفاده کنید، اینکه $x-\sin x$ در $x=۰$ ریشهٔ مرتبهٔ سوم دارد، به ما بسیار کمک خواهد کرد زیرا :

$$g(x)=x-\sin x\Rightarrow\begin{cases}g(۰)=۰\\ g'(x)=۱-\cos x\Rightarrow g'(۰)=۰\\ g''(x)=\sin x\Rightarrow g''(۰)=۰\\ g^{(۳)}(x)=\cos x\Rightarrow g^{(۳)}(۰)\neq ۰\end{cases}$$

@samansalamian

عامل های صفر کننده در مشتقات مراتب بالاتر

یادآوری :

x=a را ریشهٔ مرتبهٔ n اُم معادلهٔ g(x)=۰ می گوییم، هرگاه :

$$\underbrace{g(a)=g'(a)=g''(a)=\dots=g^{(n-1)}(a)=0}_{n\ \text{تا}} \quad \text{و} \quad g^{(n)}(a)\neq 0$$

پس x=۰ ریشهٔ مرتبهٔ سومِ x-sinx است و ما نیز به مشتق سوم f در x=۰ نیاز داریم، بنابراین کافی است مشتق سوم x-sinx را به ازای x=۰ به دست آوریم و آن گاه این مقدار را در مابقی تابع،

یعنی : $\dfrac{1}{x^4+\cos x-3}$ به ازای x=۰ ضرب کنیم، عدد بدست آمده همان $f^{(3)}(0)$ است. یعنی :

$$\begin{cases} g(x)=x-\sin x \Rightarrow g^{(3)}(0)=1 \\ h(x)=\dfrac{1}{x^4+\cos x-3} \Rightarrow h(0)=\dfrac{1}{0+1-3}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{(3)}(0)=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

پس گزینهٔ ۳ صحیح است.

@samansalamian

آهنگ متوسط تغییر

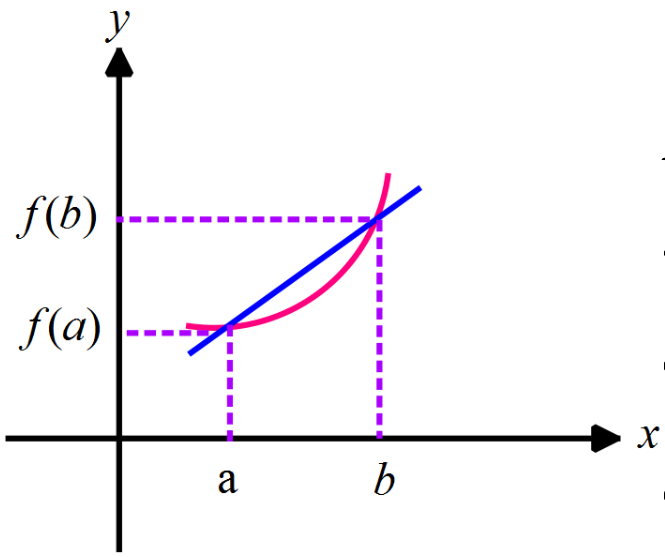
اگر تابع fدر بازهٔ [a,b] پیوسته باشد، $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ را آهنگ متوسط متغیر f در بازهٔ [a,b] می گویند.

به بیانی دیگر، متوسط تغییرات f در [a,b] مساوی $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ است.

@samansalamian

آهنگ متوسط تغییر

تعبیر هندسی : آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ [a,b] همان شیب خط قاطعی است که از دو نقطه به طول های b,a ، واقع بر نمودار تابع f می گذرد.



اگر b بی نهایت به a نزدیک شود و یا به عبارتی دیگر $b \to a$ ، آن گاه باید از به کار بردن عبارت آهنگ متوسط تغییر f در بازهٔ [a,b] صرف نظر کنیم به دلیل آن که دیگر بازه ای در کار نیست(فاصلهٔ بین a و b به صفر میل می کند)، یعنی آهنگ تغییر در یک آن(لحظه) در a اتفاق افتاده است و به همین دلیل ساده، به جای آهنگ متوسط تغییر از عبارت آهنگ آنی (لحظه ای) تغییر f در a استفاده می کنیم.

هم چنین از قبل می دانیم :

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a)$$

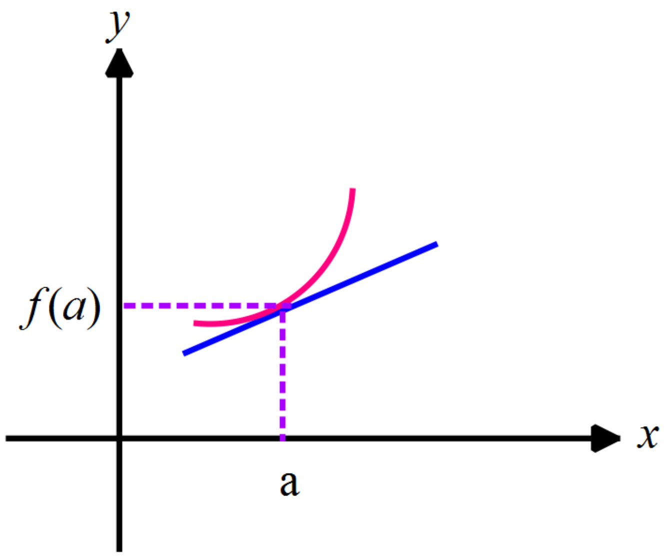
@samansalamian

آهنگ آنی(لحظه ای) تغییر

اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد، $f'(a)$ را آهنگ آنی تغییر f در a می گویند.

چنان چه متغیر f زمان باشد، $f'(a)$ همان تغییر سرعت f در t=a است (یعنی وقتی متغیر زمان است، می توانیم به جای کلمۀ آهنگ از سرعت نیز استفاده کنیم).

تعبیر هندسی : آهنگ آنـی تغییـر f در a ، همان شیب خط مماس بر نمـودار f در x=a است.



@samansalamian

تست آهنگ متوسط و لحظه ای

یک ظرف آب مشتمل بر ۴۰ لیتر آب است، در لحظهٔ t=۰ یک سوراخ در ظرف ایجاد می شود، اگر حجم آب باقیمانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطهٔ $V(t)=۴۰(۱-\frac{t}{۱۰۰})^۲$ به دست آید، در چه زمانی، آهنگ آنی تغییر v برابر آهنگ متوسط تغییر آن از t=۰ تا t=۱۰۰ (ثانیه) است؟

۱) ۲۵   ۲) ۱۲/۵   ۳) ۵۰   ۴) ۴۵

تست آهنگ متوسط و لحظه ای

آهنگ آنی تغییر حجم (v) در لحظهٔ t^* (یا سرعت لحظه ای تغییر v درt) بر اساس آن چه گفته شد، برابر است با V'_t (مشتق v برحسب t) در زمان t^* . آهنگ متوسط تغییر حجم نیز در بازهٔ زمانی [۰،۱۰۰] برابر $\frac{V(100)-V(0)}{100-0}$ می باشد و در نتیجه کافی است که با قرار دادن $V'(t)=\frac{V(100)-V(0)}{100-0}$ زمان مناسب(t^*) را به دست آوریم :

$$V(t)=40\left(1-\frac{t}{100}\right)^2 \Rightarrow V'_t=2\times 40\times\left(-\frac{1}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right) \quad , \quad \frac{V(100)-V(0)}{100-0}=\frac{0-40}{100}$$

$$\xrightarrow{V'(t)=\frac{V(100)-V(0)}{100-0}} 2\times 40\times\left(-\frac{1}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{0-40}{100}\Rightarrow 1-\frac{t}{100}=\frac{1}{2}$$

@samansalamian

$$\Rightarrow t^*=50 \ s$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

تست آهنگ متوسط و لحظه ای

یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=۲t^۳+\sqrt{t}$ گرم است. آهنـــگ رشـــد جرم تودهٔ باکتری در لحظهٔ t=۴ کدام است؟

۱) ۹۶/۲۵ ۲) ۴۸/۱۲۵ ۳) ۱۹۲/۵ ۴) ۲۴/۰۶

تنها کافی است مشتق m را نسبت به t تعیین و دست آخر مقدار آن را به ازای t=۴ محاسبه کنیم :

$$m'_t=۶t^۲+\frac{۱}{۲\sqrt{t}}\Rightarrow m'_t(۴)=۶(۴)^۲+\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}=۹۶/۲۵\Rightarrow$$ گزینهٔ (۱) صحیح است.

کاربرد آهنگ تغییر در علم اقتصاد

فرض کنید یک شرکت تولیدی x واحد (مقدار) کالا تولید می کند، بدیهی است برای تولید آن ها می بایست هزینه ای بپردازد و چون هزینهٔ تولید همواره ثابت نیست و به عواملی چون تعداد کالای تولید شده، هزینهٔ تبلیغات، تورم و چندین و چند عامل دیگر بستگی دارد، شرکت ها معمولاً براساس اطلاعات آماری و مشابه سازی، هزینهٔ تولید محصولاتشان را برحسب تابعی از تعداد آن محصول، ارائه می کنند که در علم اقتصاد به آن تابع هزینهٔ تولید x کالا $(c(x))$ می گویند. بدیهی است بلافاصله از فروش محصولی که هزینهٔ تولید آن تابعی از تعداد کالای تولید شده است، درآمدی حاصل می شود که به آن تابع درآمد $(R(x))$ می گویند و اگر هزینه ها را از درآمدها کم کنیم به تابع سود شرکت $(p(x))$ می رسیم، پس :

کاربرد آهنگ تغییر در علم اقتصاد

اگر شرکتی x واحد(مقدار) کالا تولید کند، آن گاه :

$C(x)$: تابع هزینه است. $R(x)$: تابع درآمد است. $P(x)$: تابع سود است.

و همچنین :

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

اگر هرکدام از توابع مطرح شده را بر x تقسیم کنیم به توابع متوسط آن ها می رسیم یعنی :

$\frac{C(x)}{x}$: تابع هزینهٔ متوسط است. $\frac{R(x)}{x}$: تابع درآمد متوسط است. $\frac{P(x)}{x}$: تابع سود متوسط است.

کاربرد آهنگ تغییر در علم اقتصاد

اما جالب تر آن است که بدانید در علم اقتصاد از واژهٔ آهنگ تغییر استفاده نمی شود و به جای آن لغت نهایی به کار می رود. یعنی وقتی $C'(x)$ را محاسبه می کنیم، نمی گوییم آهنگ تغییر تابع هزینه را به ازای **x** واحد کالا تعیین کرده ایم، بلکه می گوییم هزینهٔ نهایی تولید **x** واحد کالا را بدست آورده ایم و مفهوم شهودی و قابل درک آن، این است که وقتی شرکتی **x** واحد کالا تولید می کند، هزینهٔ تقریبی **(x+۱)** اُمین کالا برابر $C'(x)$ است.

(حتماً از قبل به یاد دارید که $C'(x) \sim C(x+1) - C(x)$. بنابراین :

$C'(x)$: تابع هزینهٔ نهایی است.　　$R'(x)$: تابع درآمد نهایی است.　　$P'(x)$: تابع سود نهایی است.

@samansalamian

SPECIALIZED SCHOOL OF MATHEMATICS
Salamian
مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

کاربرد آهنگ تغییر در علم اقتصاد

هزینهٔ تولید x واحد کالا مساوی $C(x)=4000+50x+0/4x^2$ تومان است. به ازای چه تعداد تولید کالا، هزینهٔ نهایی برابر هزینهٔ متوسط است؟

۱) ۷۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۵۰

$$\begin{cases} \dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{4000+50x+0/4x^2}{x}=\dfrac{4000}{x}+50+0/4x \\ C'(x)=50+0/8x \end{cases} \xrightarrow{C'(x)=\frac{C(x)}{x}}$$

$$\Rightarrow 50+0/8x=\frac{4000}{x}+50+0/4x \Rightarrow \frac{4000}{x}=0/4x$$

$$\Rightarrow 0/4x^2=4000 \Rightarrow x^2=10000 \Rightarrow x=100$$

پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

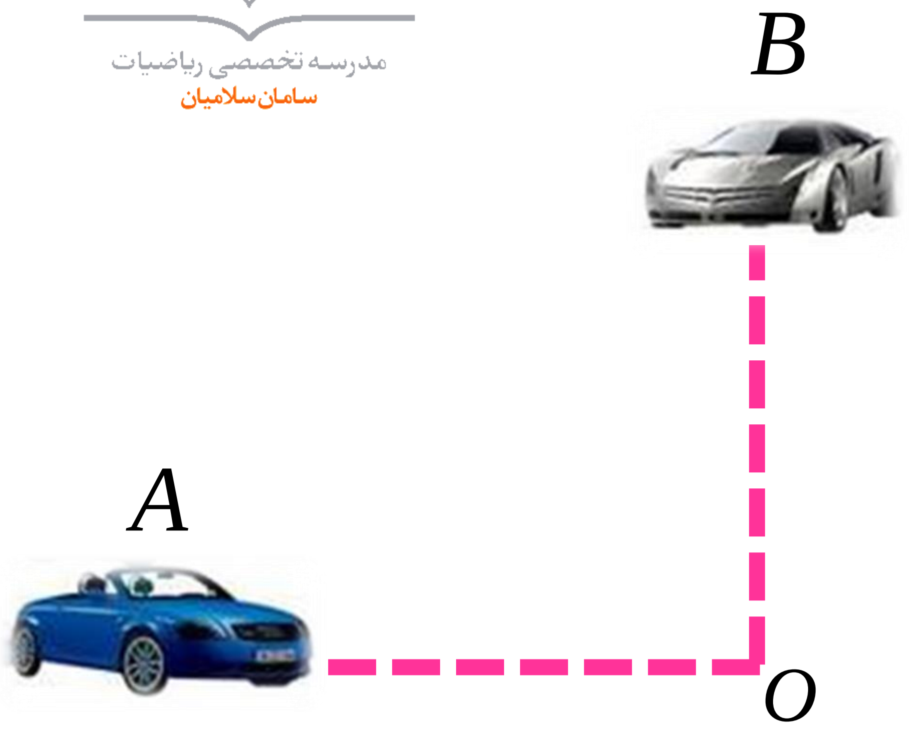
آهنگ های تغییر وابسته

در اکثر موارد چند متغیر مانند z,y,x,... علی رغم آن که به یک دیگر وابستگی دارند، یعنی بین هم دارای رابطه یا اتحاد به خصوصی هستند، هر کدام وابسته به متغیر دیگری نیز هستند که این متغیر در اکثر موارد می تواند زمان باشد.

برای درک کامل جملات بالا، به مثال مطرح شده در تختهٔ بعدی توجه کنید :

@samansalamian

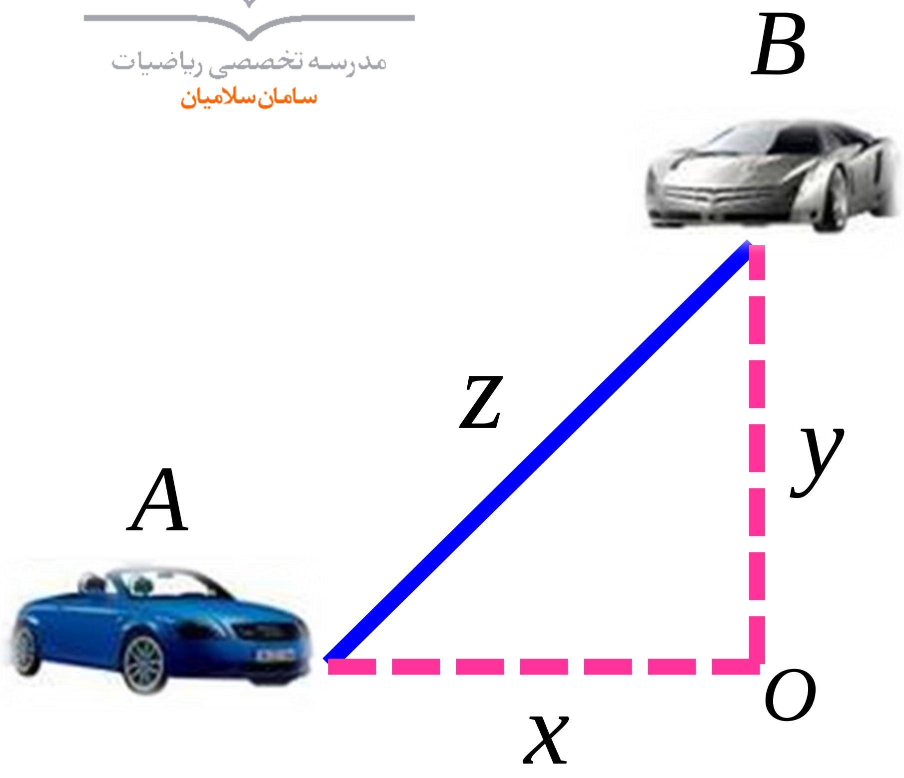
آهنگ های تغییر وابسته



به شکل مقابل خوب نگاه کنید. دو اتومبیل A و B را نشان می دهد که اتومبیل A با سرعت ۵۰ km/h از غرب و اتومبیل B با سرعت ۱۰۰ km/h از شمال در حال نزدیک شدن به محل تقاطع دو جاده می باشند. از شما پرسیده می شود وقتی فاصلهٔ اتومبیل A تا نقطهٔ O مساوی ۴ km و اتومبیل B برابر ۳ km است، در آن لحظهٔ به خصوص، این دو اتومبیل با چه سرعتی به یک دیگر نزدیک می شوند ؟

@samansalamian

آهنگ های تغییر وابسته



برای پاسخ به این سوال یکبار دیگر شـــکل را بـــه همـــراه جزئیـــات بیشتر ترسیم می کنم. ببینید : آن چه در این سوال پرسیده شـــده است، سرعت تغییرات Z در لحظهٔ بخصوصی می باشد. مـــی تـــوانیم بگوییم Z'_t مورد سوال قرار گرفته است (t زمان است.) واضح است که بین z,y,x رابطهٔ فیثاغورث به صورت مقابل برقرار است :

$$x^۲ + y^۲ = z^۲$$

@samansalamian

آهنگ های تغییر وابسته

هم چنین می دانیم هرکدام از این متغیرها خود به متغیر دیگری نیز وابسته هستند، در این مسئله هر سه متغیر وابسته به زمان هستند و آن چه مورد سوال نیز قرار گرفته است، آهنگ تغییر متغیر z نسبت به زمان (t) در یک لحظهٔ بخصوص است. اکنون باید از رابطهٔ فیثاغورث مزبور نسبت به زمان مشتق بگیریم :

$$۲xx'_t + ۲yy'_t = ۲zz'_t$$

حال نوبت آن است که مقادیر معلوم را قرار دهیم تا Z'_t پیدا شود، داریم :

$$x = ۴ ,\quad y = ۳ \xrightarrow{x^۲ + y^۲ = z^۲} z = ۵$$

(سرعت اتومبیل A) $x'_t = -۵۰ \dfrac{km}{h}$ (سرعت اتومبیل B) $y'_t = -۱۰۰ \dfrac{km}{h}$

قرار دادن علامت منفی الزامی است.

@samansalamian

آهنگ های تغییر وابسته

وقتی متحرکی به مقصد مورد نظری نزدیک می شود، علامت سرعت آن را منفی و وقتی دور می شود، علامت سرعت آن را مثبت در نظر می گیریم.

به همین دلیل نیز چون دو اتومبیل **A** و **B** هر دو در حال نزدیک شدن به نقطهٔ **O** هستند، علامت x'_t و y'_t را منفی در نظر می گیریم. به بیان دیگر می توان گفت مگر اینطور نیست که **x** و **y** هردو تابعی از زمان هستند؟؟ پس وقتی با افزایش **t** ، **x** و **y** کاهش می یابند می توانیم بگوییم توابع **x(t)** و **y(t)** نزولی بوده و مشتق هر تابع نزولی هم منفی است پس به همین دلیل x'_t و y'_t را منفی در نظر می گیریم.

آهنگ های تغییر وابسته

مدرسه تخصصی ریاضیات
سامان سلامیان

حال به سوال برمی گردیم و به سراغ پیدا کردن تنها مقدار باقی مانـــده یعنـــی Z'_t از طریق جاگذاری باقی مقادیر یافته شده در رابطهٔ $۲zz'_t = ۲xx'_t + ۲yy'_t$ می رویم.

$$۲(۴)(-۵۰) + ۲(۳)(-۱۰۰) = ۲(۵)\,z'_t \Rightarrow z'_t = -۱۰۰\frac{km}{h}$$

علامت منفی Z'_t نشانگر کم شدن Z است به بیان دیگر برخورد ماشین ها به یکدیگر را نشان می دهد.

@samansalamian

الگوی حل مسائل کمیت های وابسته

۱) رابطه ای بین متغیرهای موجود در مسئله می نویسیم. ترسیم نموداری از مسئله در این زمینه بسیار راه گشاست.

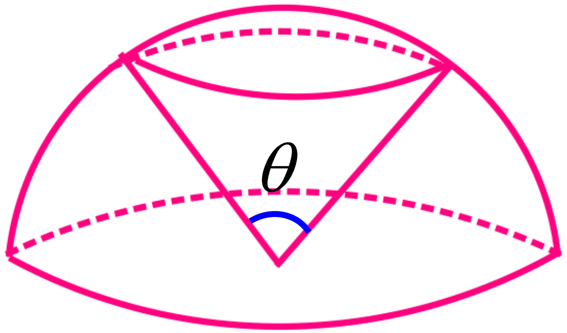
۲) از رابطهٔ حاصل شده نسبت به متغیر مورد نظر (اکثر موارد زمان) مشتق می گیریم.

۳) با قرار دادن مقادیر معلوم در رابطهٔ اخیر، مجهول مورد نظر را بدست می آوریم. البته دقت داریم که :

به ازای کاهش یک متغیر، آهنگ تغییرات آن را منفی و به ازای افزایش آن، آهنگ تغییراتش را مثبت در نظر بگیریم.

الگوی حل مسائل کمیت های وابسته

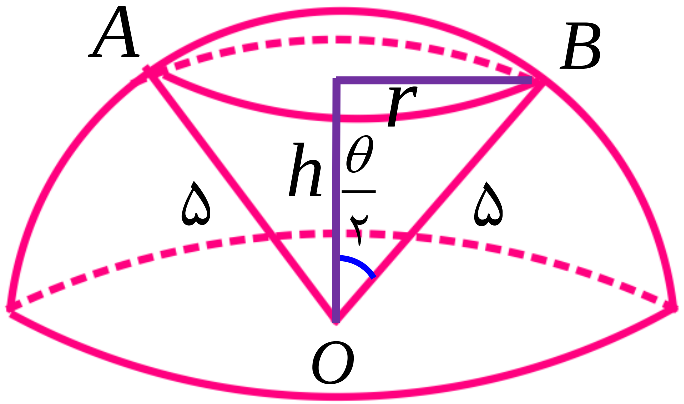
مخروطی درون نیم کره ای به شعاع ۵ m ، مطابق شکل زیر محاط شده است. اگر قاعدهٔ مخروط به موازات سطح قاعدهٔ نیم کره با آهنگ ۰/۲ m/s به طرف پایین حرکت کند، در لحظه ای که فاصلهٔ آن با کف نیم کره ۳ m باشد، آهنگ تغییر زاویهٔ رأس مخروط کدام است؟



۱) ۰/۴ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۱

@samansalamian

الگوی حل مسائل کمیت های وابسته



دوباره به شکل مقابل دقت کنید. مثلث **OAB** متساوی الساقین است. پس ارتفاع نظیر رأس **O**، نیمساز آن نیز می باشد و در نتیجه زاویهٔ را نصف می کند. ارتفاع مخروط را **h** و شعاع قاعدهٔ آن را **r** می نامیم. داریم :

$$\cos\frac{\theta}{۲}=\frac{h}{۵}\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به زمان}}-\frac{۱}{۲}\theta'_t\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{h'_t}{۵}$$

در لحظهٔ مورد بررسی **h=۳** می باشد، پس $\cos\frac{\theta}{۲}=\frac{h}{۵}=\frac{۳}{۵}$ و از آن جا $\sin\frac{\theta}{۲}=\sqrt{۱-\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}}=\frac{۴}{۵}$

حال محاسبات را ادامه می دهیم :

الگوی حل مسائل کمیت های وابسته

$$-\frac{۱}{۲}\theta'_t \sin\frac{\theta}{۲} = \frac{h'_t}{۵} \xrightarrow{\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{۴}{۵},\, h'_t=-۰/۲} -\frac{۱}{۲}\theta'_t \times \frac{۴}{۵} = \frac{-۰/۲}{۵} \Rightarrow \theta'_t = \frac{۱}{۱۰}\frac{Rad}{s}$$

پس گزینهٔ (۴) صحیح است.

الان ممکنه بپرسی چر از کسینوس استفاده کردیم ؟؟

چون اگه از سینوس استفاده می کردیم گره می خوردیم بـه r'_t و مـا از سـرعت تغییرات اون هیچ خبری نداریم!!!