

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

ایستگاه ریاضی ۹

(کتاب کار)

روح‌الہ تختی پور

(مدرس کشوری)

باسمه تعالی

کزین برتر اندیشه بر نگذرد

به نام خداوند جان و خرد

«مقدمه»

کتابی که در دستان شماست، برای آشنایی بیشتر شما با مباحث کتاب ریاضی نهم با رویکرد حل مسئله و اکتشاف راهبردهای مناسب مسائل، با تمرینات متنوع مانند سئوالات **تشریحی**، نقطه چین **چهارگزینه ای**، صحیح ، غلط، دست ورزی و ... نوشته شده است.

دانش آموزان عزیز توجه داشته باشید که این کتاب را به عنوان یک مکمل یعنی کامل کننده مباحث کتاب درسی نگاه کنید. کتاب درسی را حل کنید و سپس برای تثبیت اطلاعات و سنجش میزان یادگیری و افزایش تسلط خود از قسمت های متنوع این کتاب استفاده کنید.

همکاران گرامی : بی شک این مجموعه دارای اشکالات و نارسایی هایی است که برای رفع آن نیازمند تذکرات، پیشنهادات و انتقادات شما همکاران محترم می باشیم. از شما اساتید و صاحب نظران تقاضا دارم تا با نظرات دلسوزانه خود ما را در امر هر چه بهتر کردن چنین مجموعه هایی یاری دهید. لطفا نظرات خود را به آدرس الکترونیکی www.Tahktipoor@gmail.com ارسال نمایید.

در پایان از آقای احمد سجادممنش و خانم ندا محسنی نژادوکلیه همکارانی که در تهیه و چاپ این کتاب ما را یاری دادند، تقدیر و تشکر می کنم.

«یادمان باشد که انسان را پاداشی بیش تر یا کم تر از مقدار تلاشش نیست.»

با تشکر

روح اله تختی پور - دزفول - تابستان ۱۳۹۴

۵ فصل اول :مجموعه ها
۱۷ آزمون فصل اول
۱۹ فصل دوم :عددهای حقیقی
۳۰ آزمون فصل دوم
۳۳ فصل سوم :استدلال واثبات در هندسه
۴۳ آزمون فصل سوم
۴۹ فصل چهارم: توان و ریشه
۵۸ آزمون فصل چهارم
۶۰ آزمون نوبت اول
۶۳ فصل پنجم :عبارت های جبری
۷۴ آزمون فصل پنجم
۷۸ فصل ششم :خط و معادله های خطی
۹۲ آزمون فصل ششم
۹۵ فصل هفتم :عبارت های گویا
۱۰۳ آزمون فصل هفتم
۱۰۶ فصل هشتم : حجم و مساحت
۱۱۴ آزمون فصل هشتم



خلاصه درس :

تعریف مجموعه : به دسته ای از اشیاء کاملاً مشخص و دو به دو متمایز (غیر تکراری) از هم، مجموعه می گوئیم.

◀ **مثال «۱» :** مجموعه ی اعداد طبیعی زوج یک رقمی

* مجموعه را به صورت آکولاد $\{ \}$ نشان می دهیم.

* مجموعه ها را با حروف بزرگ انگلیسی مانند A, B, C و... نامگذاری می کنیم.

* به هریک از اعداد یا کلمات درون مجموعه **عضو** گفته می شود و با علامت \in نشان می دهیم و اگر آن عدد متعلق به مجموعه نباشد، با علامت \notin مشخص می شود.

◀ **مثال «۲» :**

$$A = \{-3, 5, 7\} \Rightarrow 5 \in A, 10 \notin A$$

مجموعه تهی : مجموعه ای که عضوی نداشته باشد، **تهی** نامیده می شود و با علامت \emptyset (فی) یا $\{ \}$ نوشته می شود.

◀ **مثال «۳» :** مجموعه ی اعداد طبیعی بین ۴ و ۵ یک مجموعه تهی است. زیرا هیچ عدد طبیعی بین ۴ و ۵ وجود ندارد.

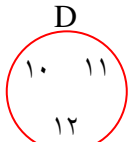
نکته ی مهم : در نوشتن اعضای مجموعه تکرار و ترتیب اعضای مجموعه مهم نیست.

◀ **مثال «۴» :** مجموعه های زیر همه باهم مساوی اند.

$$A = \{4, 5, 5, 6, \sqrt{36}\}, B = \left\{ \sqrt{16}, 6, \frac{25}{5}, 5 \right\}, C = \{4, 5, 6\}$$

نمودار ون : مجموعه را می توان با استفاده از منحنی های بسته نمایش داد.

یکی از اولین کسانی که از این نمودارهای خط بسته استفاده کرد، ریاضیدانی به نام **جان ون** بود.

◀ **مثال «۵» :** اگر $D = \{10, 11, 12\}$ باشد، نمودار آن به شکل  می باشد.

مجموعه های یکانی : مجموعه ای که فقط یک عضو داشته باشد مانند مجموعه ی اعداد طبیعی

که نه اول و نه مرکب باشد : $B = \{1\}$

زیر مجموعه : مجموعه A زیر مجموعه B است، هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد این مطلب

را به صورت $A \subseteq B$ نشان می دهیم و اگر A زیر مجموعه B نباشد می نویسیم : $A \not\subseteq B$

دو مجموعه برابر : دو مجموعه مانند D, E برابرند، هرگاه هر عضو E عضوی از D و هر عضو D نیز عضوی از E باشد و می نویسیم : $E=D$

◀ مثال «۶» :

$$\left\{ 6, \frac{3}{5}, \sqrt{49} \right\} = \left\{ \sqrt{36}, \frac{6}{10}, 7 \right\}$$

نکته ی «۱» : هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. $A \subseteq A$

نکته ی «۲» : مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه ای است. $\emptyset \subseteq A$

فعالیت :

جدول زیر را کامل کنید.

تعداد اعضای مجموعه	\emptyset	۱ عضوی	۲ عضوی	۳ عضوی	۴ عضوی	۵ عضوی
تعداد زیر مجموعه ها	۱	۲	۴	۸		

فکر می کنید مجموعه ی ۱۰ عضوی چند زیر مجموعه خواهد داشت؟
الگویی مناسب کشف کرده و تعداد زیر مجموعه ها را به صورت یک عبارت جبری بر حسب n بنویسید.

$\{ \} \Rightarrow$ ۱ = ۲^۰ = تعداد زیر مجموعه \Rightarrow مجموعه تهی باشد

$\{ a \} \Rightarrow$ ۲ = ۲^۱ = تعداد زیر مجموعه \Rightarrow مجموعه ۱ عضوی باشد

$\{ a, b \} \Rightarrow$ ۴ = ۲^۲ = تعداد زیر مجموعه \Rightarrow مجموعه ۲ عضوی باشد

تعداد زیر مجموعه \Rightarrow \Rightarrow مجموعه ۳ عضوی باشد

تعداد زیر مجموعه \Rightarrow \Rightarrow مجموعه n عضوی باشد

◀ **مثال ۷ :** مجموعه ای دارای ۵ عضو است این مجموعه چند زیر مجموعه دارد؟
(n تعداد اعضاست).

زیرمجموعه $2^5 = 32 = 2^n \Rightarrow$ تعداد زیرمجموعه

نمایش مجموعه ها :

(الف) مجموعه ی اعداد طبیعی :

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

(ب) مجموعه ی اعداد حسابی :

$$W = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

ج) مجموعه ی اعداد صحیح :

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$$

د) مجموعه ی عددهای طبیعی زوج :

$$E = \{2, 4, 6, \dots\} = \{2K | K \in N\}$$

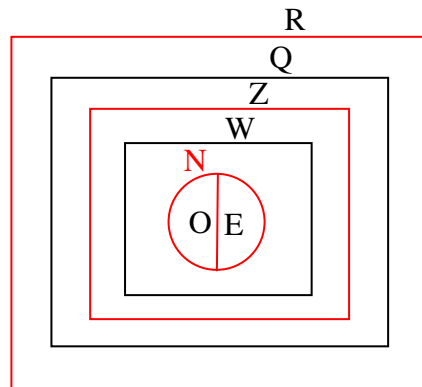
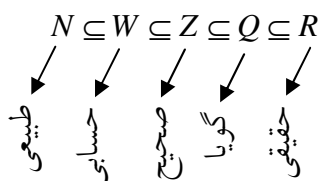
هـ) مجموعه ی عددهای طبیعی فرد :

$$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2K - 1 | K \in N\}$$

و) مجموعه ی عددهای گویا :

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

نکته :



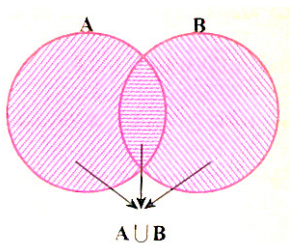
* در فصل «۲» مجموعه ی اعداد حقیقی و گویا را کامل و دقیق معرفی خواهیم کرد.

اجتماع مجموعه ها : اجتماع دو مجموعه B, A مجموعه ای است شامل همه ی اعضای که

حداقل در یکی از مجموعه های B, A باشند و با نماد $A \cup B$ نشان می دهیم به زبان ریاضی :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

نمودار ون

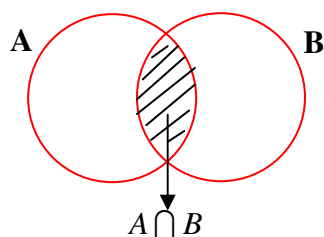


اشتراک مجموعه ها : اشتراک دو مجموعه B, A ، مجموعه ای است شامل همه ی عضوهایی

است که هم عضو A و هم عضو B هستند و با نماد $A \cap B$ نشان می دهیم.

به زبان ریاضی : $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$

نمودار ون :



◀ **مثال «۸»:** دو مجموعه ی $A = \{x | x \in N, x \leq 5\}$ ، $B = \{x | x \in Z, -3 < x \leq 3\}$ را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه های A, B را با اعضایشان بنویسید.
ب) $A \cup B$ ، $A \cap B$ را تشکیل دهید.

پاسخ:

الف) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

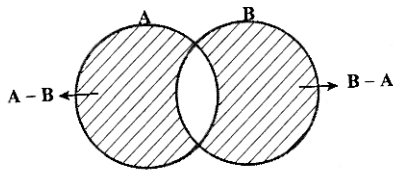
ب)

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

تفاضل دو مجموعه: مجموعه ی $A - B$ (منهای B) مجموعه ای است شامل همه ی عضوهایی که عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند.

نمودار ون



به زبان ریاضی: $A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$

◀ **مثال «۹»:** اگر $C = \{a, m, d\}$ و $E = \{b, m, d, h\}$ باشد در این صورت $E - C$ و $C - E$ را بنویسید.

پاسخ:

$$C - E = \{a, m, d\} - \{b, m, d, h\} = \{a\}$$

$$E - C = \{b, m, d, h\} - \{a, m, d\} = \{b, h\}$$

نکته: $C - E \neq E - C$

قرارداد: تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می دهیم.

◀ **مثال «۱۰»:** تعداد عضوهای $A = \{2, 3, 7\}$ می شود $n(A) = 3$

مجموعه متناهی: مجموعه ای که اعضای آن قابل شمارش باشد (محدود باشد)

مجموعه نامتناهی: مجموعه ای که تعداد اعضای آن قابل شمارش نباشد.

◀ مثال «۱۱»: کدام یک از مجموعه های زیر متناهی و کدام نامتناهی است؟

الف) H : مجموعه ی اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰۰

$$H = \{1, 2, 3, \dots, 999\}$$

ب) K : مجموعه ی اعداد طبیعی بزرگ تر از ۱۰۰۰

$$K = \{1001, 1002, 1003, \dots\}$$

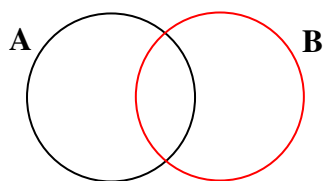
پاسخ: H متناهی است چون قابل شمارش یا محدود است و K نامتناهی است زیرا محدودیتی ندارد.

دو مجموعه جدا از هم: دو مجموعه غیرتهی A, B را مجزا گوئیم، هرگاه اشتراک بین این دو مجموعه تهی باشد.

مانند: $B = \{4, 5\}, A = \{2, 3\}$

نکته:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



◀ مثال «۱۲»: اجتماع دو مجموعه A, B دارای ۱۲ عضو است در صورتی که مجموعه A دارای

۸ عضو و مجموعه B دارای ۷ عضو باشد، اشتراک دو مجموعه چند عضو دارد؟

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$12 = 8 + 7 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 15 - 12 = 3$$

چند نکته مهم:

تفاضل	اشتراک	اجتماع
$A - \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$	$\phi \cup A = A$
$\phi - A = \phi$	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A - A = \phi$	$(A \cap B) \subseteq A$	$A \subseteq (A \cup B)$
$B \subseteq A \Rightarrow B - A = \phi$	$(A \cap B) \subseteq B$	$B \subseteq (A \cup B)$
	$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$	$B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$
	$A \cap B = \phi \Rightarrow \{A = \phi \text{ یا } B = \phi \text{ یا } A, B = \phi\}$	$A \cup B = \phi \Rightarrow A = \phi, B = \phi$

مجموعه ها و احتمال (یادآوری):

احتمال رخ دادن یک پیشامد = $\frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه ی حالت ها}}$ یا $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

◀ مثال «۱۳»: اگر تاسی را بیاندازیم احتمال اینکه:

الف) عدد رو شده شمارنده ۶ بیاید.

ب) عدد رو شده کم تر از ۴ بیاید.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$$

پاسخ: الف) S مجموعه ی کل حالت ها

$$A = \{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow n(A) = 4$$

A شمارنده های ۶

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ب) مجموعه اعداد کمتر از ۴ را B می نامیم:

$$B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow n(B) = 3$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



شگفتی اعداد

$$1 \times 9 + 2 = 11$$

$$12 \times 9 + 3 = 111$$

$$123 \times 9 + 4 = 1111$$

$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$

$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$

$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$

شما هم الگو را تا دو ردیف دیگر ادامه دهید.



۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) «جمعی از شاعران خوب» معرف یک مجموعه است.

ب) مجموعه $\{\emptyset, 5, \sqrt{25}\}$ دارای ۳ عضو است.

ج) دو مجموعه $\{4\}$ و $\{(-2)^2, 4\}$ باهم مساوی اند.

د) مجموعه $\{1000, 1001, 1002, 1003, 1004\}$ بی شمار عضو دارد.

هـ) اگر $B \subseteq A$ باشد، آنگاه $A \cup B = A$

و) اگر $B \subseteq D$ باشد آنگاه $B \cap D = D$

ز) $N \subseteq Z \subseteq Q$ (طبیعی: N ، صحیح: Z ، گویا: Q)

ح) مجموعه $\{8\}$ دارای ۸ زیر مجموعه است.

ط) مجموعه $W = \{k - 1 \mid k \in N\}$ معرف مجموعه اعداد حسابی است.

ی) مجموعه $M = \{x \in Z \mid x \leq 4\}$ دارای ۴ عضو است.

ر) هر عدد حسابی یک عدد گویا است.

۲. جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.

الف) مجموعه ای را که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه نامیده می شود.

ب) اگر $P \subseteq S$ آنگاه $P \cup S = \dots\dots\dots$ و $P \cap S = \dots\dots\dots$

ج) اشتراک دو مجموعه D, C هر یک از دو مجموعه D, C است.

د) حاصل $(B - A) \cup (A \cap B)$ برابر با مجموعه A است.

هـ) مجموعه $\{x \mid x \in A, x \notin B\}$ مساوی است با

و) مجموعه $E = \{\emptyset, -(-7), 7\}$ دارای زیر مجموعه است.

ز) اگر $K \subseteq H$ باشد، آنگاه $K - H = \dots\dots\dots$

۳. گزینه ی صحیح را علامت بزنید.

الف) کدام گزینه مجموعه ی تهی را مشخص می کند؟

(۱) اعداد زوج اول (۲) اعداد صحیح بین ۱- و ۱

(۳) اعداد گویای بین ۰ و ۱ (۴) اعداد طبیعی بین ۹ و ۱۰

ب) کدام عبارت یک مجموعه را مشخص نمی کند؟

(۱) دسته ای از گل های زیبا

۲) دسته ای از اعداد طبیعی کم تر از ۲۰

۳) حروف انگلیسی نقطه دار

۴) مجموعه ی اعداد اول سه رقمی

ج) مجموعه ی $D = \{-2, \sqrt{16}, \sqrt[5]{-1}, 2\}$ دارای چند عضو است؟

۱) عضو ۱ (۲) عضو ۲ (۳) عضو ۳ (۴) عضو ۴

د) مفهوم $\{x|x \in A, x \in B\}$ چیست؟

۱) $A \cup B$ (۲) $A \cap B$ (۳) $A - B$ (۴) $B - A$

ه) اگر $A = \{x \in N | x \leq 3\}$, $B = \{x \in W | x \geq 2\}$ آنگاه $A \cap B$ دارای چند عضو است؟

۱) بی شمار (۲) عضو ۳ (۳) عضو ۲ (۴) عضو ۴

و) اگر $A \subseteq B$ باشد، کدام رابطه ی زیر نادرست است؟

۱) $A - \phi = A$ (۲) $A - B = A$ (۳) $A \cup B = B$ (۴) $A \cap B = A$

ز) مجموعه ی اعداد طبیعی کوچک تر از صفر کدام است؟

۱) $\{\}$ (۲) $\{0\}$ (۳) $\{-1, -2, -3, \dots\}$ (۴) $\{x|x \in N\}$

ح) کدام یک از رابطه های زیر صحیح است؟

۱) $N \not\subseteq Z$ (۲) $Z \subseteq N$ (۳) $Q \subseteq Z$ (۴) $N \subseteq W$

ط) مجموعه $M = \{x|x \in N, x < \sqrt{10}\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ (۲) ۹ (۳) بی شمار (۴) ۳

ی) مجموعه $\{\frac{x}{x+1} | x \in N\}$ با کدام یک از مجموعه های زیر برابر است؟

۱) $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (۲) $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$
 ۳) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\}$ (۴) $\{\dots, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots\}$

۴. اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ باشد حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با نوشتن اعضاء بدست آورید.

الف) $A \cup B =$

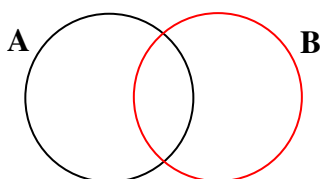
ب) $A \cap B =$

ج) $A - B =$

د) $B - A =$

۵. در شکل زیر مجموعه ی خواسته شده را هاشور بزینید.

$(A - B) \cup (B - A)$



۶. مقدار x, y را چنان بیابید که دو مجموعه $A = \{3, x + y\}$ ، $B = \{x, -9\}$ باهم مساوی باشند.

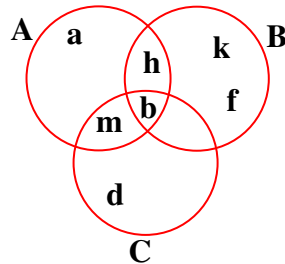
۷. جای خالی را به گونه ای پر کنید که عبارتی درست حاصل شود.

$$B \cap \emptyset = \dots\dots\dots, N \dots\dots\dots Z, A \cup A = \dots\dots\dots, \dots\dots\dots \notin Q$$

۸. با توجه به نمودار زیر اعضای مجموعه های خواسته شده را بیابید.

$$(A \cap B) \cap C =$$

$$(A \cup B) - C =$$



۹. اگر $B = \{7, 8, 9\}$ ، $E = \{8, 10\}$ ، $D = \{6, 7, 8\}$ باشد، هر یک از مجموعه های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

الف) $B \cup E =$

ب) $D \cap B =$

ج) $E \cup \emptyset =$

د) $(E \cup D) - B =$

ه) $(B \cup E) \cap D =$

۱۰. اگر $M = \{\emptyset, \{3, 4\}, 4\}$ باشد :

الف) مجموعه M چند عضو دارد؟

ب) مجموعه M چند زیر مجموعه دارد؟

ج) درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$4 \in M, \quad \{4\} \subseteq M, \quad \{3, 4\} \subseteq M, \quad 3 \notin M$$

۱۱. اگر $B = \{-2, 2, -5, 1\}$ ، $D = \{1, -\frac{1}{2}\}$ باشد درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

$$-5 \notin D, \quad 2 \in B, \quad 5 \notin D, \quad -20 \notin D$$

$$D \subseteq B, \quad B \subseteq D, \quad \{-2, -5\} \subseteq B$$

۱۲. مجموعه های زیر را با اعضاء مشخص کنید.

$$A = \{-5x \mid x \in Z, -2 \leq x < 1\} =$$

$$B = \{\frac{1}{x} \mid x \in N, x \leq 5\} =$$

$$C = \{\frac{10^x - 1}{9} \mid x \in W, x < 4\} =$$

$$D = \{3K + 2 \mid K \in N, K \leq 3\} =$$

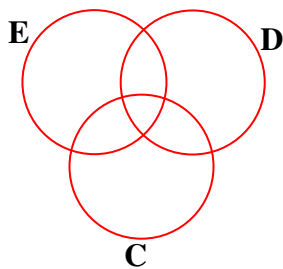
$$E = \{2K - 1 \mid K \in Z, -2 < K < 3\} =$$

۱۳. دو مجموعه $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$, $B = \{x \in W \mid x < 4\}$ را در نظر بگیرید.

الف) هر یک از مجموعه های A , B را با اعضایشان مشخص کنید.

$$A = \{ \quad \quad \quad \} \quad \text{و} \quad B = \{ \quad \quad \quad \}$$

ب) $A - B, A \cap B, A \cup B$ را با اعضا مشخص کنید.



۱۴. حاصل $(E \cup D) \cap (C \cup D)$ را هاشور بزنید.

$$A = \{5, 10, 15, 20, \dots\} =$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, \dots\} =$$

$$C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} =$$

$$D = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\} =$$

$$E = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} =$$

$$F = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\} =$$

۱۵. مجموعه های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

۱۶. جاهای خالی را طوری پر کنید که مجموعه های زیر باهم برابر باشند.

$$\{\dots, \sqrt{36}, 0.14, (-5)^2\} = \{6, \dots, 25, -7\}$$

۱۷. اگر $A = \{d, b, m\}$ باشد :

الف) همه ی زیر مجموعه های A را بنویسید.

ب) A دارای چند زیر مجموعه ی دو عضوی است؟

۱۸. تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه ۵ عضوی چند برابر تعداد زیر مجموعه های مجموعه ۳ عضوی است؟ راهنمایی : (از عبارت 2^n کمک بگیرید).

۱۹. یک مجموعه ۱۰ عضوی چند زیر مجموعه ۲ عضوی دارد؟ (ابتدا جدول زیر را کامل کنید).

تعداد اعضا	۲	۳	۴	۵
تعداد زیرمجموعه های ۲ عضوی	۱	۳	۶	۱۰

۲۰. اگر تاسی را بیاندازیم احتمال اینکه :

الف) عدد رو شده مضرب ۲ باشد.

ب) عدد رو شده اول بیاید.

ج) عدد رو شده کم تر از ۸ بیاید.

۲۱. اگر دو تاس را باهم بیاندازیم چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو عدد رو شده مثل هم باشند.

ب) هر دو عدد فرد بیایند.

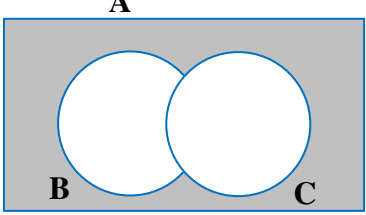
ج) مجموع دو عدد ۸ باشد.

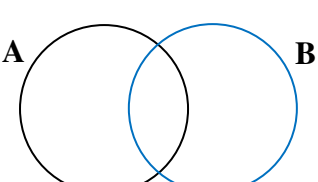
بسمه تعالی

درس مجموعه ها

مهرماه

آزمون مستمر فصل اول

بارم	ردیف	رسول اکرم (ص): انسان بلند مرتبه چون به فهم و دانایی رسد، متواضع می شود.
۲	۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>الف) هر عدد حسابی یک عدد گویا است.</p> <p>ب) مجموعه ی اعداد طبیعی کم تر از ۲ دارای دو عضو است.</p> <p>ج) مجموعه ی جواب $\{x x \in N, x^2 = 9\}$ برابر تهی است.</p> <p>د) $O = \{2K + 1 K \in N\}$ همه ی اعداد فرد را نشان می دهد.</p>
۲	۲	<p>هر عبارت را با عدد یا کلمه ی مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) مجموعه ی $\{2, \sqrt{4}, \sqrt{\sqrt{16}}, \frac{1}{5}\}$ دارای عضو است.</p> <p>ب) مجموعه ی $\{-3\}$ را مجموعه عضوی می نامیم.</p> <p>ج) اگر $A \subseteq B$ باشد، آن گاه $A \cap B = \dots\dots\dots$</p> <p>د) $\{K - 1 K \in N\}$ بیانگر مجموعه اعداد است.</p>
۲	۳	<p>گزینه ی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>الف) مجموعه $P = \{0, \emptyset, \{5\}\}$ دارای چند زیر مجموعه است؟</p> <p>(۱) یکی تا ۴ (۲) تا ۸ (۳) تا ۱۶ (۴)</p> <p>ب) کدام گزینه مساوی تهی است؟</p> <p>(۱) اعداد طبیعی مضرب ۳ و کم تر از ۱۰۰۰</p> <p>(۲) اعداد طبیعی کوچک تر از ۱</p> <p>(۳) $\{0\}$</p> <p>(۴) $\{\emptyset\}$</p> <p>ج) مجموعه ی $C = \{x x \in Z, x^2 = x\}$ با کدام یک از مجموعه های زیر مساوی است؟</p> <p>(۱) $\{-1\}$ (۲) $\{0, 1\}$ (۳) $\{-1, 1\}$ (۴) $\{2\}$</p> <p>د) در نمودار زیر قسمت هاشور خورده برابر است با :</p> <p>(۱) $A \cup (B \cap C)$</p> <p>(۲) $A \cap (B \cup C)$</p> <p>(۳) $A - (B \cup C)$</p> <p>(۴) $(B - C) \cup A$</p> 

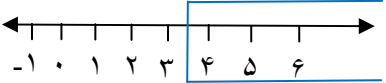
۴	اگر $O = \{1, 3, 5, 7\}$, $T = \{x x \in N, x \leq 4\}$, $S = \{2n+1 n \in N, n < 3\}$ باشد : الف) مجموعه های T, S را با اعضایشان مشخص کنید. ب) حاصل عبارات زیر را با اعضای آن ها بنویسید.
۱/۵	$S = \{ \quad \quad \quad \}$, $T = \{ \quad \quad \quad \}$
۱/۵	$S \cup T =$ $T \cap O =$ $T - S =$
۵	برای هر یک از جملات زیر یک شکل مناسب رسم کنید. الف) $A \cap B = \emptyset$ ب) $A \subseteq B \subseteq C$ ج) $A \cap B = A, B \cap C = \emptyset$
۶	اعضای مجموعه های زیر را بنویسید. $A = \{x+5 x \in Z, -2 \leq x < 2\} =$ $B = \{x^2 - 1 x \in W, x < 4\} =$
۷	مجموعه های زیر را با علائم ریاضی بنویسید. $C = \{2, 4, 6, 8, \dots\} =$ $D = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots\} =$
۸	حاصل $A - (A \cap B)$ را روی شکل زیر با هاشور زدن مشخص کنید. 
۹	دو مجموعه ی $A = \{x-1, 5\}$, $B = \{4, y+3\}$ باهم مساوی اند. مقادیر y, x را به دست آورید.
۱۰	تمام زیر مجموعه های $M = \{a, b, c\}$ را بنویسید.
۱۱	سؤال جایزه : مجموعه ی $A = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \dots\}$ را با علائم ریاضی بنویسید.

فصل دوم اعداد حقیقی

عددهای گویا: $Q = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ مثل $\frac{3}{8}, 0, -\frac{3}{7}, 5, 0, \frac{1}{2}$ یعنی هر عددی را که به توان

به شکل کسر نوشت به شرطی که صورت و مخرج عددی صحیح بوده و مخرج صفر نباشد.
* یک مجموعه را به سه حالت می توان نمایش داد: توصیفی، زبان نمادین (ریاضی)، نمایش هندسی (محور).

◀ **مثال «۱»:** مجموعه $A = \{7 \text{ و } 6 \text{ و } 5 \text{ و } 4\}$ را به حالت های مختلف نمایش دهید.

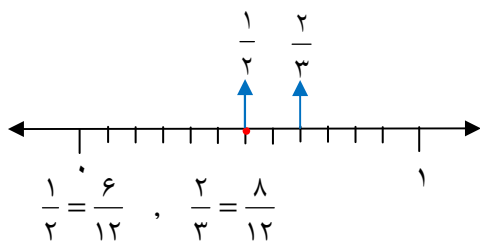
نمایش هندسی (محور)	زبان نمادین (علائم ریاضی)	توصیفی
	$\{x x \in \mathbb{N}, x \geq 4\}$	عددهای طبیعی بزرگ تر یا مساوی ۴

* پیدا کردن کسرهایی بین دو کسر دلخواه:

◀ **مثال «۲»:** می خواهیم چند کسر بنویسیم که بین دو کسر $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ باشد، روش های زیر را

بررسی می کنیم:

الف) نمایش هندسی: سعید ابتدا مخرج ها را یکسان کرد و سپس آن ها را روی محور نمایش داد.



واحدهای ۶ قسمتی را به ۱۲ واحد تقسیم نمود:

سعید نتیجه گرفت عددی مثل $\frac{7}{12}$ بین دو کسر $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ قرار دارد و به همین ترتیب کسرهایی دیگری بین این دو کسر پیدا کرد.

ب) محاسبات ریاضی: حامد میانگین دو کسر $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ را محاسبه کرد و ادعا کرد که حاصل بین دو

کسر قرار می گیرد یعنی:

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{3}{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3}$$

حالا بین $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{12}$ دو کسر دیگر پیدا می کنیم :

$$\text{میانگین} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{7}{12}}{2} = \frac{\frac{13}{12}}{2} = \frac{13}{24} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{13}{24} < \frac{7}{12} < \frac{3}{2}$$

پس دو کسر $\frac{13}{24}$, $\frac{7}{12}$ را بین کسرهای $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ پیدا کردیم. این روند را ادامه داده و بی شمارکسربین آن ها بدست می آوریم.

نکته : بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد و عددهای گویا را نمی توان با نوشتن اعضا نمایش داد.

ج) جمع کردن صورت ها باهم و مخرج ها باهم : بین $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$ یک کسر پیدا کنید.

$$\frac{1}{3} < \frac{1+2}{2+3} < \frac{2}{3}$$

د) اگر دو عدد گویا را به صورت اعشاری بنویسیم، به سادگی می توان عددی بین آن دو عدد بدست آورد.

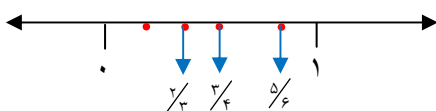
$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{5} = 0.4 \\ \frac{3}{4} = 0.75 \\ \frac{5}{8} = 0.625 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{4} > \frac{5}{8} > \frac{2}{5}$$

*** مقایسه کسر ها :**

الف) هم مخرج کردن کسر ها : نادیا برای مقایسه ی سه کسر $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ برای آن ها مخرج مشترک ۱۲ را انتخاب کرده و سپس آن ها را باهم مقایسه کرد.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \\ \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \\ \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5}{6} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$$

ب) نمایش هندسی : شادی کسر ها را به صورت تقریبی روی محور نمایش داده و سپس باهم مقایسه کرد.



ج) محاسبات ریاضی : شینا با ماشین حساب حاصل هر کسر را بدست آورد و سپس باهم مقایسه کرد. (تا دو رقم اعشار)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{6} \approx 0.83 \\ \frac{3}{4} \approx 0.75 \\ \frac{2}{3} \approx 0.66 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5}{6} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$$

** تبدیل کسر متعارفی به عدد اعشاری :

۱) عددهای اعشاری متناهی یا مختوم : اگر در تقسیم صورت بر مخرج، باقیمانده صفر شود، آن کسر را مختوم گویند.

$$\frac{2}{5} = 0.4 \quad , \quad \frac{3}{20} = 0.15 \quad \leftarrow \text{مثال «۳»}$$

نکته «۱» : اگر در تجزیه مخرج کسر فقط عامل های اول ۲ و ۵ باشند، حتماً آن کسر مختوم است.
 ۲) عددهای اعشاری متناوب ساده : اگر در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود، آن را متناوب ساده گویند.

$$\frac{1}{3} = 0.333333... = 0.\overline{3} \quad \leftarrow \text{مثال «۴»}$$

(خط تیره ی بالای عدد یعنی آن عدد تکرار می شود به عدد تکراری دوره ی گردش گویند).
 نکته «۲» : در مخرج کسرهایی که متناوب ساده اند، عامل های اول ۲ یا ۵ وجود ندارد.

۳) عددهای اعشاری متناوب مرکب : این نوع اعداد از تقسیم صورت بر مخرج کسرهایی حاصل می شوند که علاوه بر عامل های اول سازنده مخرج ۲ و ۵ از سایر عددهای اول نیز استفاده شود و خارج قسمت بعد از یک یا چند رقم به رقم های تکراری می رسد و دوره ی گردش پیدا می کند.
 مثال «۵» :

$$\frac{2}{15} = 0.13333... = 0.1\overline{3}$$

$$\frac{2302}{990} = 2/3 \overline{252525}... = 2/3 \overline{25}$$

بیش تر بدانیم

* حاصل جمع اعداد اعشاری متناوب : ابتدا اعداد را به صورت گسترده نوشته و سپس مانند اعداد معمولی محاسبه می کنیم.

مثال «۶» :

$$1/6\overline{2} + 3/25\overline{2} = 1/6 \overline{22222}... + 3/25 \overline{55555}... = 4/87\overline{77777}... = 4/87$$

* **اعداد گنگ یا اصم**: اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آن‌ها نامتناهی و دارای دوره ی تناوب نمی باشند، را اعداد گنگ گوئیم و با Q' نامگذاری می کنیم مانند:

$$0.\overline{11}, \sqrt{10}, 1 + \sqrt{2}$$

نکته:

الف) جمع دو عدد گویا و گنگ همواره گنگ است. $(2 + \sqrt{10}) \in Q'$

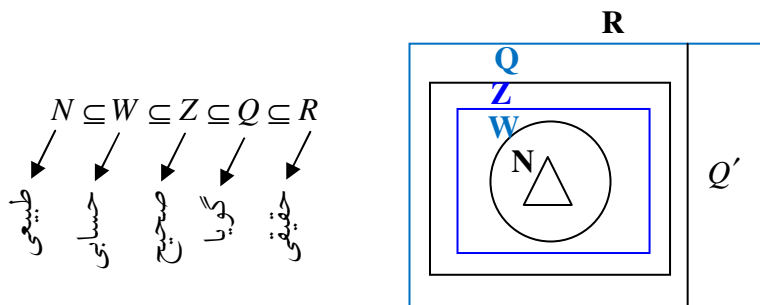
ب) ضرب عددی گنگ در عددی گویا عددی گنگ است. $3\sqrt{5} \in Q'$

ج) ضرب دو عدد گنگ ممکن است گنگ یا گویا باشد.

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \in Q', (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2 \in Q$$

* **مجموعه اعداد حقیقی**: از اجتماع مجموعه های گویا و گنگ مجموعه ی اعداد حقیقی به

دست می آید. یعنی: $Q \cup Q' = R$ (یعنی اعداد حقیقی)



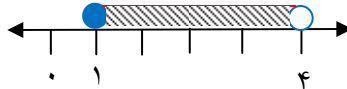
◀ مثال «۷»:

$$\sqrt{8} \in Q', \sqrt{9} \in Q, 0 \in Q, 0.200124... \in Q'$$

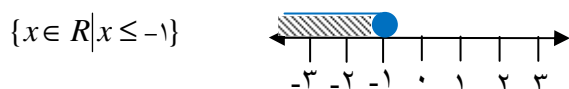
نمایش اعداد حقیقی روی محور: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ است پس همه ی اعداد حقیقی را می توان با خط ممتدی روی محور نشان داد: یک خط از ابتدای آن نقطه تا انتهای آن مجموعه رسم می کنیم. اگر آن نقطه انتهایی یا ابتدایی در مجموعه وجود داشته باشد، تو پر و در غیر این صورت تو خالی خواهد بود.

◀ مثال «۸»:

$$\{x \in R \mid 1 \leq x < 4\}$$



◀ مثال «۹» :



* **قدر مطلق** : فاصله ی نقطه ی نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می نامیم و یا علامت $|a|$ نوشته می شود. پس قدر مطلق صفر مساوی صفر و قدر مطلق اعداد مثبت برابر خود آن عدد است و قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه ی آن است «به طور کلی، قدر مطلق هر عدد، عددی مثبت است».

◀ مثال «۱۰» :

$$|5| = 5, \quad \left| -\frac{4}{5} \right| = \frac{4}{5}, \quad |-\sqrt{5}| = \sqrt{5}$$

$$|-20 - 30 + 5| = |-45| = 45$$

$$|0.5 + 6| = |6.5| = 6.5$$

نکته «۱» : قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد مساوی حاصل ضرب قدر مطلق آن هاست.

◀ مثال «۱۱» :

$$|(-5) \times (-4)| = |-5| \times |-4| = 5 \times 4 = 20$$

نکته «۲» : قدر مطلق مجموع دو عدد کوچک تر یا مساوی مجموع قدر مطلق آن دو عدد است.

◀ مثال «۱۲» :

$$|-7 + 4| \leq |-7| + |4|$$

$$\Rightarrow |-3| \leq 7 + 4$$

$$\Rightarrow 3 \leq 11$$

نکته «۳» : **تعریف قدر مطلق** : با نماد ریاضی

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

نکته «۴» : $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ یعنی قدر مطلق حاصل تقسیم دو عدد مساوی است با حاصل تقسیم قدر

مطلق آن دو عدد. ($y \neq 0$)

◀ مثال «۱۳» :

$$\left| \frac{-8}{7} \right| = \frac{|-8|}{|7|} = \frac{8}{7}$$

نکته «۵»: $\sqrt{a^2} = |a|$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \underbrace{|1-\sqrt{2}|}_{\text{عدد منفی}} = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}-1$$

◀ مثال «۱۴»:

نکته «۶»:

$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

◀ مثال «۱۵»:

$$|7| - |10| \leq |7 - 10|$$

$$7 - 10 \leq |-3|$$

$$-3 \leq 3$$

نمونه سئوالات فصل اعداد حقیقی

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.
 - (الف) $\sqrt{15}$ عددی گویا است.
 - (ب) مجموعه ی اعداد گویا را می توان با نوشتن اعضا نمایش داد.
 - (ج) $\frac{5}{12}$ بین دو کسر $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ قرار دارد.
 - (د) بین هر دو عدد گویا بی شمار عدد گویا وجود دارد.
 - (هـ) نمایش اعشاری $\frac{2}{5}$ عددی مختوم است.
 - (و) حاصل $\frac{1}{3}$ به صورت اعشار عددی متناوب است.
 - (ز) عدد $\frac{3}{4}$ از عدد $\frac{3}{5}$ کوچک تر است.
 - (ح) از اجتماع دو مجموعه ی Q, Z مجموعه همه ی اعداد حقیقی حاصل می شود.
 - (ط) عدد $\sqrt{1/44}$ عدد گنگ است.
 - (ی) اگر $a < 0$ باشد آنگاه $|a| = -a$

۲. جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.
 - (الف) بین هر دو عدد گویا..... عدد گویا وجود دارد.
 - (ب) مجموعه ی عددهای گویا به زبان نمادین : $\{\frac{a}{b} | \dots\}$
 - (ج) حاصل $1/453$ به صورت کسر مساوی است با
 - (د) عدد $\frac{7}{6}$ به صورت اعشار مساوی است با
 - (هـ) $N \subseteq W \subseteq \dots \subseteq Q \subseteq \dots$
 - (و) اجتماع مجموعه ی عددهای گویا و اصم را مجموعه اعداد گوییم.
 - (ز) عدد $\sqrt{29}$ بین دو عدد صحیح متوالی و قرار دارد.
 - (ح) عدد $2 + \sqrt{7}$ بین دو عدد صحیح متوالی و قرار دارد.
 - (ط) عدد $4 + \sqrt{13}$ بین دو عدد صحیح متوالی و قرار دارد.
 - (ی) فاصله ی هر نقطه روی محور تا مبدأ را آن عدد می نامیم.
 - (ک) قدر مطلق مجموع دو عدد از مجموع قدر مطلق آن دو عدد یا است.
 - (ل) حاصل عبارت $|-7 - 10 + 4|$ برابر است با

۳. گزینه ی مناسب را علامت بزنید.

الف) کدامیک از کسرهای زیر از $\frac{4}{5}$ بزرگ تر است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{9}{10}$ (۴) $\frac{3}{4}$

ب) کدام گزینه از کسرهای زیر مختوم یا متناهی است؟

(۱) $\frac{7}{6}$ (۲) $\frac{3}{11}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{5}$

ج) کدامیک از عددهای زیر گنگ (اصم) است؟

(۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) $3/14$ (۳) $0/11$ (۴) $\sqrt{21+4}$

د) حاصل ضرب دو عدد گنگ :

(۱) گنگ است (۲) گویاست

(۳) ممکن است گنگ یا گویا باشد (۴) نه گنگ و نه گویا باشد

هـ) عدد $(-3 - \sqrt{17})$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

(۱) 8 و 7 (۲) -7 و -6 (۳) -2 و -1 (۴) -8 و -7

ز) کدام عبارت زیر درست است؟

(۱) $R \subseteq Z$ (۲) $\sqrt{16} \notin N$ (۳) $(2 + \sqrt{2}) \in Q$ (۴) $-\sqrt{17} \in R$

ح) عدد $0/2923379 \dots$ به کدام مجموعه تعلق دارد؟

(۱) حسابی : W (۲) صحیح : Z (۳) گنگ : Q' (۴) گویا : Q

ط) حاصل عبارت $|\sqrt{5} - 7 + \sqrt{5}|$ برابر است با :

(۱) -7 (۲) 7 (۳) $2\sqrt{5} - 7$ (۴) $2\sqrt{5} + 7$

۴. بین دو عدد $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{5}$ سه کسر پیدا کنید.

۵. کسرهای زیر را باهم مقایسه کنید. (از کوچک به بزرگ مرتب کنید).

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $-\frac{3}{7}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{11}$, 0

۶. عددهای کسری را به اعشار و اعداد اعشاری را به کسر تبدیل کنید.

الف) $\frac{1}{5}$

ب) $\frac{2}{3}$

ج) $3/157$

د) $2/07$

۷. محاسبات زیر را انجام دهید. (برای دانش آموزان علاقمند)

الف) $0.\overline{3} + 0.\overline{7} =$

ب) $0.\overline{315} + 0.\overline{17} =$

ج) $20.\overline{18} + 1.\overline{41} =$

۸. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{-7 + \frac{1}{2}}{-3 + 8} \div \left(-\frac{5}{6}\right) =$

ب) $\left(-3\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) =$

ج) $\frac{3}{7} + \frac{-2}{5} \times \frac{15}{4} - \left(-\frac{1}{14}\right) =$

۹. در جای خالی علامت \in یا \notin یا \subseteq قرار دهید.

$\sqrt{3} \bigcirc Q'$, $0 \bigcirc W$, $\sqrt{17} \bigcirc Q$, $Q \bigcirc R$

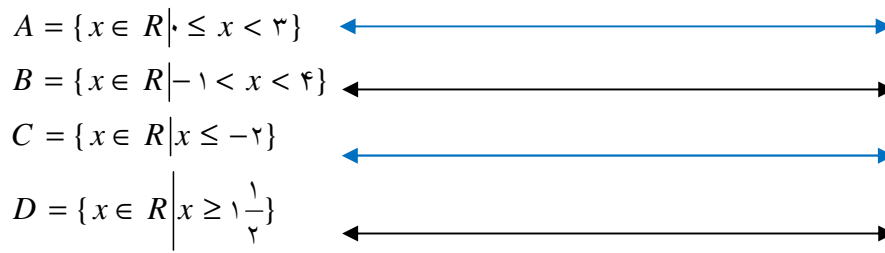
$Z \bigcirc Q$, $0.\overline{11} \bigcirc Q'$, $0.\overline{3} \bigcirc R$, $-\frac{1}{9} \bigcirc N$

۱۰. بین $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$ چهار عدد گنگ بنویسید.

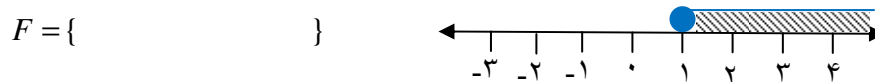
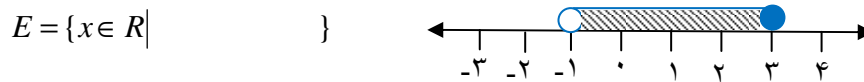
۱۱. بین ۵ و ۶ سه عدد گنگ بنویسید.

۱۲. $\sqrt{17}$ را روی محور اعداد نشان دهید.

۱۳. مجموعه های زیر را روی محور نشان دهید.



۱۴. با توجه به محور مجموعه ی متناظر آن را بنویسید.



۱۵. مجموعه های سمت چپ را به مجموعه مناسب در سمت راست وصل کنید.

سمت چپ	سمت راست
$Z \cap Q$	R
$Q \cup Q'$	ϕ
$Q \cap Q'$	Q
$R - Q'$	Z
$W \cap Z$	W

۱۶. الف) عدد $5 + \sqrt{20}$ - بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

ب) عدد $5 - \sqrt{50}$ - بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۷. الف) بین دو عدد ۶ و ۵ چند عدد طبیعی وجود دارد؟

ب) بین ۵ و ۶ چند عدد گویا وجود دارد؟ با ذکر مثال.

ج) بین ۵ و ۶ چند عدد گنگ وجود دارد؟ با ذکر مثال.

۱۸. حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $|-۸ - ۷/۵ + ۱۰| =$

ب) $|(-۴) \times (+۵)| =$

ج) $|۷ - ۵\sqrt{۳}| =$

د) $|۳^۲ - ۲۷| =$

ه) $|-\sqrt{۴۵} - \sqrt{۲۰} + ۳\sqrt{۵}| =$

و) $\sqrt{(۳ - \sqrt{۱۰})^۲} =$

ز) $\sqrt{(\sqrt{۵} - ۱)^۲} =$

۱۹. اگر $a = -۳$ و $b = -۷$ باشد حاصل $|a+b| - |ab|$ را به دست آورید.

۲۰. اگر $m = -\frac{۲}{۳}$ ، $n = \frac{۴}{۵}$ ، $P = \frac{-۳}{۱۰}$ باشد حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $|۶m - ۲۰n + ۵۰p| + ۱۰|P| + ۳|m| =$

ب) $\sqrt{(m+p)^۲} - \frac{۴۹}{۳۰} =$

۲۱. نتیجه منطقی از عبارات را دریافت کرده و تساوی ها را کامل کنید.

۱) $a > ۰ \Rightarrow |a| =$



۲) $a < ۰ \Rightarrow |a| =$

۳) $a > ۰, b > ۰ \Rightarrow |a+b| =$

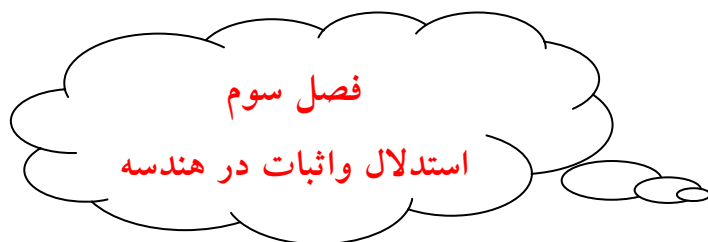
۴) $a < ۰, b < ۰ \Rightarrow |a+b| =$

بسمه تعالی
آزمون پایانی فصل اعداد حقیقی

ردیف	رسول اکرم (ص): بهترین علم آن است که مفید باشد	بارم
۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) کسر $\frac{۳}{۵}$ از $\frac{۵}{۶}$ بزرگ تر است. ب) $\sqrt{۱۴}$ بین دو عدد ۳ و ۴ قرار دارد. ج) $\sqrt{\frac{۴}{۵}}$ عددی گنگ است. د) قدر مطلق $\frac{۲}{۳}$ برابر با $-\frac{۲}{۳}$ است.	۲
۲	جملات زیر را کامل کنید. الف) نمایش اعشاری متناوب کسر $\frac{۱}{۳}$ برابر با است. ب) اعدادی که تعداد ارقام اعشاری آن ها نامتناهی و دوره ی تناوب ندارند، مجموعه نامیده می شوند. ج) عدد $\sqrt{۱۸} + ۲ -$ بین دو عدد صحیح متوالی و قرار دارد. د) به مجموعه ی تمام عددهای گویا و باهم مجموعه ی اعداد حقیقی گویند.	۲/۵
۳	گزینه ی مناسب را علامت بزنید. الف) کدام یک از اعداد زیر گویا است؟ (۱) عدد $0.\overline{۱۱}$ (۲) $۳\sqrt{۲}$ (۳) $۰/۰۱۱۰۲۱\dots$ (۴) $\frac{\sqrt{۵۰}}{\sqrt{۲}}$ ب) کدام گزینه عبارتی نادرست است؟ (۱) $Z \subseteq Q$ (۲) $Q \cap Q' = \emptyset$ (۳) $N \cup Z = \emptyset$ (۴) $Q \cup Q' = R$ ج) عدد کدام گزینه از سایر عددها کوچک تر است؟ (۱) $\frac{-۳}{۲}$ (۲) $\frac{-۲}{۳}$ (۳) $\frac{-۱}{۳}$ (۴) $\frac{-۳}{۱}$ د) عدد $۳ + \sqrt{۳۹}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ (۱) ۸ و ۹ (۲) ۹ و ۱۰ (۳) ۱۰ و ۱۱ (۴) ۷ و ۸	۲
۴	بین $\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۳}{۴}$ سه کسر مشخص کنید و سپس آن ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنید.	۱/۵

۰/۷۵	الف) حاصل عبارت زیر را به صورت عدد اعشاری بنویسید.	۵
۰/۱۵	$\frac{3\frac{1}{10}}{ -3 \times 3 - 1 } =$	
۰/۷۵	ب) کسر $\frac{7}{6}$ را به صورت عدد اعشاری متناوب بنویسید. ج) اگر $a = -3$ و $b = -7$ باشد حاصل $ a+b - ab $ را به دست آورید.	
۱/۵	در جای خالی علامت \in یا \notin یا \subseteq قرار دهید.	۶
	$Z \circ Q$, $\{-\frac{2}{3}, \sqrt{7}\} \circ R$, $\sqrt{0.09} \circ Q$	
	$-\frac{2}{3} \circ Z$, $0.11 \circ Q'$, $\frac{\sqrt{36}}{2} \circ N$	
۰/۷۵	الف) مجموعه $A = \{x \in R \mid 0 < x \leq 2\}$ را روی محور زیر نشان دهید.	۷
		
۰/۷۵	ب) با توجه به محور مجموعه ی متناظر با آن را بنویسید.	
۰/۷۵	$B = \{$  $\}$	
۰/۱۵	ج) آیا $-\sqrt{7}$ عضوی از مجموعه B است چرا؟	
۱/۵	حاصل عبارت زیر را به دست آورده و سپس روی محور نمایش دهید.	۸
	$3 + 2 - \sqrt{5} =$	
۱/۵	اگر $a = -2$, $B = \frac{3}{2}$, $C = -3$ باشد حاصل عبارت زیر را به دست آورید.	۹
	$ a - 2c + 4b + 5a =$	

<p>۰/۵</p> <p>۰/۵</p>	<p>الف) بین اعداد ۴ و ۵ دو عدد گنگ بیابید.</p> <p>ب) بین $\sqrt{7}$، $\sqrt{8}$ دو عدد گنگ بنویسید.</p>	<p>۱۰</p>
<p>۱</p> <p>۱</p> <p>۰/۵</p>	<p>حاصل عبارات زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) $\left -\frac{2}{3} \right \div \left -7 + \frac{1}{2} \right =$</p> <p>ب) $3 - \sqrt{7} + -2 - \sqrt{7} =$</p> <p>ج) $\sqrt{(5 - \sqrt{37})^2} =$</p>	<p>۱۱</p>
<p>۱</p>	<p>سؤال جایزه :</p> <p>عدد اعشاری متناوب $0.\overline{15}$ را به کسر تبدیل کنید.</p> <p style="text-align: right;">الگوی عددی جالب</p> <div style="background-color: #f0e68c; padding: 10px; text-align: center;"> <p>$6 \times 6 + 4 = 40$</p> <p>$66 \times 66 + 44 = 4400$</p> <p>$666 \times 666 + 444 = 444000$</p> <p>$6666 \times 6666 + 4444 = 44440000$</p> </div> <p>شما هم می توانید این الگو را تا دو ردیف دیگر ادامه دهید.</p>	<p>۱۲</p>



خلاصه درس :

* **استدلال** : استدلال دلیل آوردن و استفاده کردن از دانسته های قبلی است برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

* **اثبات** : به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، اثبات می گوئیم.

* **فرض و حکم مسئله** : اطلاعاتی که در مسئله داده و یا حقایقی که مرتبط با آن مسئله است و از قبل آن ها را می دانستیم، **فرض مسئله** و خواسته ی مسئله و مجهولات مربوط به آن، **حکم مسئله** هستند.

* **تعمیم یک خاصیت** : وقتی خاصیتی را برای یک عضو از مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی هایی که در استدلال خود به کار برده ایم، در سایر اعضای آن مجموعه نیز وجود داشته باشد، می توان درستی نتیجه ی بدست آمده را به همه ی اعضای آن مجموعه تعمیم داد.

* **هم نهشتی مثلث ها** : در سال قبل حالت های هم نهشتی را یاد گرفته اید :

۱. دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)
 ۲. دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)
 ۳. سه ضلع (ض ض ض)
 ۴. وتر و یک ضلع (و ض)
 ۵. وتر و یک زاویه تند (و ز)
- مخصوص مثلث قائم الزاویه

گام هایی برای حل مسئله هندسی :

۱. **درک و فهم مسئله** : صورت مسئله را با دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل دهنده ی آن را بشناسید. مفاهیمی همچون خط، پاره خط، عمود منصف، نیم ساز، مماس، شعاع، نوع مثلث، نوع چهار ضلعی و... می تواند در حل مسئله مؤثر باشد.

۲. **رسم شکل** : متناسب با داده های مسئله شکلی را رسم کرده و به کمک آن شکل گام های بعد را برمی داریم.

۳. **مشخص کردن فرض و حکم مسئله** : داده های مسئله (فرض) و خواسته های مسئله (حکم) را در یک جدول نوشته و مشخص می کنیم.

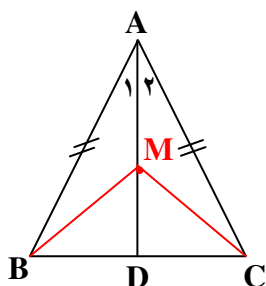
۴. **راهبرد حل مسئله** : برای رسیدن از فرض به حکم راه حل مناسبی پیدا کنید.

روش های مختلفی مانند هم نهشتی مثلث ها، تشابه دو شکل، رابطه فیثاغورس، زوایای محاطی و مرکزی، خطوط موازی و مورب و... در حل مسئله مفید خواهند بود.

◀ **مثال «۱»:** نشان دهید در هر مثلث متساوی الساقین، فاصله ی هر نقطه دلخواه روی نیم ساز زاویه ی رأس، از دو سر قاعده برابر است.

گام «۱»: در صورت مسئله از مثلث متساوی الساقین، نیم ساز، زاویه رأس و قاعده استفاده شده که از خواص مثلث متساوی الساقین (ساق ها برابر و زاویه های مجاور قاعده نیز برابرند) و نیم ساز بودن (زاویه رأس نصف می شود) کمک می گیریم.

گام «۲»: رسم شکل: مثلث متساوی الساقینی به قاعده \overline{BC} و رأس A رسم می کنیم.



فرض	$\overline{AB} = \overline{AC}$, $\hat{B} = \hat{C}$, $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$	گام «۳»:
حکم	$\overline{MB} = \overline{MC}$	

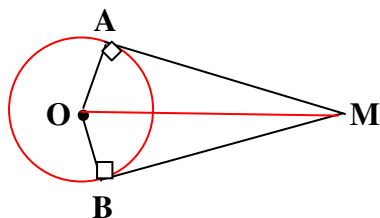
گام «۴»: نوع راهبرد هم نهشتی دو مثلث

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \quad \text{مثلث متساوی الساقین} \\ \overline{AM} = \overline{AM} \quad \text{مشترک} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad \text{نیم ساز} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{حالت (ض ز ض)}} \triangle AMB \cong \triangle AMC \Rightarrow \overline{MB} = \overline{MC}$$

◀ **مثال «۲»:** ثابت کنید اگر از یک نقطه خارج از دایره دو مماس بر دایره رسم شود، طول این دو مماس باهم برابرند.

گام اول: خاصیت خط مماس بر دایره را از پایه هشتم خواندیم: شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

گام دوم: رسم شکل: متناسب با داده های مسئله شکل مقابل را رسم می کنیم.



فرض	$\overline{OA} = \overline{OB}$, $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$	گام سوم:
حکم	$\overline{AM} = \overline{BM}$	

گام چهارم : راهبرد حل مسئله : هم نهشتی

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{OM} = \overline{OM} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{هر دو شعاع دایره} \\ \text{وتر مشترک} \end{array} \rightarrow \text{حالت : وتر و یک ضلع} \rightarrow \triangle OAM \cong \triangle OBM \Rightarrow \overline{AM} = \overline{BM}$$

شکل های متشابه : هرگاه در دو شکل همه ی ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشند (کوچک یا بزرگ یا بدون تغییر) و اندازه ی زاویه ها تغییر نکرده باشد، به آن دو شکل **متشابه** گوئیم.
نکته «۱» :

الف) دو مربع دلخواه همواره متشابه اند.

ب) دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه اند.

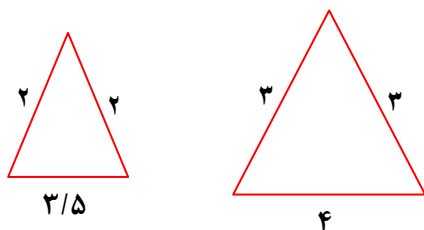
ج) هر دو شکل هم نهشت باهم متشابه اند.

د) دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیستند. زیرا ممکن است زاویه های نظیر مساوی نباشند.

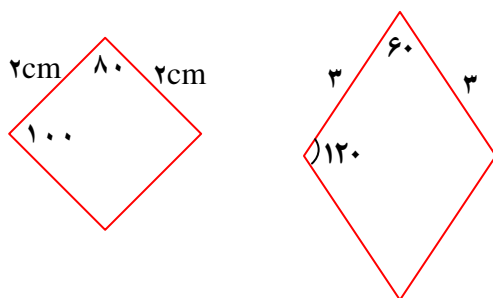
ه) دو مستطیل دلخواه همواره متشابه نیستند زیرا ممکن است اضلاع متناظر به یک نسبت تغییر نکرده باشند.

و) دو مثلث متساوی الساقین دلخواه همواره متشابه نیستند زیرا ممکن است زاویه های نظیر باهم برابر نبوده یا اضلاع متناظر متناسب نباشند (به یک اندازه تغییر نکرده باشند).

◀ **مثال «۳» :** مثلث های زیر متساوی الساقین هستند اما متشابه نیستند زیرا : $\frac{2}{3} \neq \frac{3/5}{4}$



◀ **مثال «۴» :** دو لوزی زیر باهم متشابه نیستند. زیرا زاویه های نظیر برابر نیستند.



نکته «۲» : نسبت اضلاع متناظر دو شکل متشابه را نسبت تشابه می گویند.

◀ **مثال «۵» :** دو مثلث ABC و DEF باهم متشابه اند و نسبت تشابه آن ها ۲ یا $\frac{1}{2}$ است. اگر

اضلاع مثلث ABC به اندازه ی ۳ و ۵ و ۶ و اضلاع مثلث DEF به اندازه ی $x-3$ و 10 و $2y+8$ باشند، مقدار X و Y را به دست آورید.

پاسخ:

$$\frac{3}{x-3} = \frac{5}{10} = \frac{6}{2y+8} \Rightarrow \begin{cases} x-3 = \frac{10 \times 3}{5} = 6 \rightarrow x-3=6 \rightarrow x=9 \\ 2y+8 = \frac{10 \times 6}{5} = 12 \rightarrow 2y+8=12 \\ 2y=12-8=4 \rightarrow y=2 \end{cases}$$

توجه: اگر از نسبت تشابه ۲ استفاده کنیم یعنی اضلاع مثلث ABC هر کدام ۲ برابر بزرگ شده اند پس در مثال قبل می توان نوشت:

$$\begin{aligned} x-3 &= 3 \times 2 \Rightarrow x-3=6 \rightarrow x=9 \\ 2y+8 &= 6 \times 2 \rightarrow 2y+8=12 \rightarrow y=2 \end{aligned}$$

نکته ۳:

الف) نسبت محیط های دو ضلعی با نسبت تشابه دو شکل مساوی است.

ب) نسبت مساحت های دو ضلعی با مجذور نسبت تشابه دو شکل مساوی است.

مثال «۴»: نسبت مساحت های دو پنج ضلعی منتظم برابر با $\frac{4}{9}$ است. اگر اندازه ی ضلع پنج

ضلعی بزرگ ۶ باشد، اندازه ی ضلع پنج ضلعی کوچک تر چند است؟

پاسخ: بنا به نکته ۳ قسمت «ب» داریم: اگر نسبت تشابه را $\frac{a}{b}$ فرض کنیم:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{6 \times 2}{3} = 4$$

نکته «۴»: در دو مثلث متشابه:

الف) نسبت محیط ها با نسبت تشابه برابر است.

ب) نسبت ارتفاع های متناظر با نسبت تشابه برابر است.

ج) نسبت میانه های متناظر با نسبت تشابه برابر است.

د) نسبت نیم سازه های متناظر با نسبت تشابه برابر است.

ه) نسبت مساحت ها با مجذور نسبت تشابه برابر است.

مثال «۵»: نسبت مساحت های دو مثلث متشابه $\frac{16}{25}$ است. نسبت ارتفاع های متناظر دو مثلث را

به دست آورید.

پاسخ: نسبت تشابه را $\frac{x}{y}$ می گیریم پس:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

نسبت تشابه

چون نسبت تشابه با نسبت ارتفاع های نظیر برابر است پس نسبت ارتفاع های دو مثلث هم $\frac{4}{5}$ است.

نمونه سئوالات فصل هندسه و استدلال

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

- (الف) اطلاعات داده شده و معلومات مسئله را فرض مسئله گوئیم.
 (ب) با مشاهده کردن و حواس پنج گانه هم می توان به درستی یک موضوع اطمینان کرد.
 (ج) اگر خاصیتی را برای یک عضو از مجموعه ثابت کردیم، آن خاصیت برای تمامی اعضای مجموعه درست است.

(د) برای حل مسائل هندسی، راه حل کلی و کلاسیک وجود ندارد.

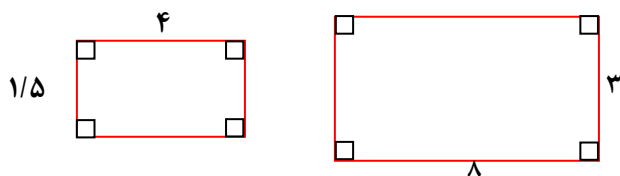
(ه) در هر مستطیل قطرها باهم برابرند.

(و) دو مستطیل دلخواه همواره متشابه اند.

(ز) دو لوزی دلخواه همواره متشابه اند.

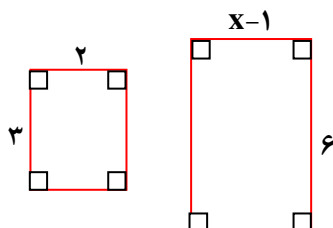
(ح) نسبت تشابه دو شکل مقابل $\frac{1}{2}$ است.

(و) هر دو مربع دلخواه متشابه اند.



۲. جملات زیر را کامل کنید.

- (الف) دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی را در هندسه گویند.
 (ب) به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، می گوئیم.
 (ج) اطلاعات داده شده در مسئله را و خواسته ی مسئله را گویند.
 (د) اولین گام در حل مسئله هندسی است.
 (ه) گام دوم در حل مسائل هندسی این است که با توجه به مسئله
 (و) در دو شکل متشابه اضلاع و زاویه های نظیر هستند.
 (ز) نسبت اضلاع متناظر دو شکل را گویند.
 (ح) دو لوزی در صورتی متشابه اند که نظیر باهم برابر باشند.
 (ط) دو مستطیل در صورتی متشابه اند که متناظر باشند.
 (ی) هر دو مربع دلخواه متشابه



(ک) هر دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه متشابه

(ل) مقدار x در شکل های متشابه زیر برابر است با

۳. گزینه ی مناسب را علامت بزنید.

الف) دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبل برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده را چه می نامند؟

- (۱) فرض مسئله (۲) حکم مسئله (۳) استدلال (۴) شهود

ب) اگر $a < 0$ و $b > 0$ باشد، کدام گزینه را می توان نتیجه گرفت؟

- (۱) $ab > 0$ (۲) $ab < 0$ (۳) $ab = 0$ (۴) $(a-b) > 0$

ج) کدام گزینه از حالت های هم نهشتی دو مثلث محسوب نمی شود؟

- (۱) (ض ز ض) (۲) (ز ض ز) (۳) (ض ض ض) (۴) (ز ز ز)

د) کدام مورد زیر همواره معتبر نیست؟

- (۱) دو زاویه متقابل به رأس باهم مساوی اند.
 (۲) هر نقطه که روی نیم ساز یک زاویه قرار دارد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
 (۳) هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد، از دو سر آن پاره خط به یک اندازه است.
 (۴) محل برخورد ارتفاع های هر مثلث درون آن مثلث قرار می گیرد.

ه) در دو شکل متشابه :

- (۱) اضلاع مساوی و زاویه ها متناسب اند
 (۲) اضلاع متناسب و زاویه ها برابرند.
 (۳) اضلاع و زوایا نامساوی اند
 (۴) اضلاع و زاویه ها به یک نسبت تغییر می کنند.

و) کدام شکل همواره با خودش متشابه است؟

- (۱) مستطیل (۲) لوزی (۳) مربع (۴) مثلث متساوی الساقین

ز) طول های اضلاع یک مثلث ۷ و ۹ و ۱۴ است. محیط مثلثی که با این مثلث متشابه بوده و بزرگ ترین ضلع آن ۲۱ باشد، چند است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۳۰ (۳) ۶۰ (۴) ۹۰

ح) دو لوزی متشابه اند و نسبت تشابه آن ها $\frac{۳}{۵}$ است. اگر ضلع لوزی کوچک ۴۵ سانتی متر باشد، ضلع لوزی بزرگ تر برابر است با :

- (۱) ۱۳۵ (۲) ۹۰ (۳) ۶۰ (۴) ۷۵

و) در یک نقشه مقیاس $\frac{1}{500}$ است. فاصله دو نقطه روی نقشه ۱۵ میلی متر است. فاصله این دو نقطه در اندازه ی واقعی چند متر است؟

- (۱) ۷۵۰۰ متر (۲) ۷۵۰ متر (۳) ۷۵ متر (۴) $7/5$ متر

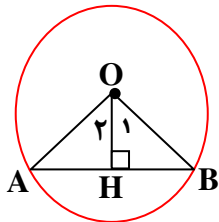
۴. سارا گفت همه ی اعداد طبیعی مثبت اند و چون اعداد طبیعی زیر مجموعه ای از اعداد گویا هستند، پس همه ی اعداد گویا نیز مثبت اند. آیا استدلال سارا معتبر است چرا؟

۵. در مسائل زیر فرض و حکم مسئله را مشخص کنید.
الف) ثابت کنید: در هر مستطیل قطرها باهم مساوی اند.

ب) نشان دهید: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.

۶. تساوی های زیر را کامل کرده تا نشان دهید خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود، آن وتر را نصف می کند.

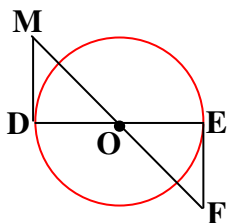
فرض	
حکم	



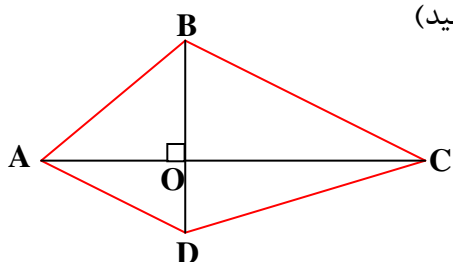
$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \dots\dots \text{دایره} \dots\dots \text{هر دو} \dots\dots \\ \overline{OH} = \dots\dots \dots\dots \text{چون} \dots\dots \end{array} \right\} \longrightarrow \text{حالت ()} \Rightarrow \dots\dots \cong \dots\dots$$

$$\Rightarrow \text{از تساوی اجزای متناظر دو مثلث} \quad \dots\dots = \dots\dots$$

۷. در شکل زیر O مرکز دایره و خط های DM و EF بر دایره مماس اند.
چرا $\overline{EF} = \overline{DM}$ ؟



۸. ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی محدب برهم عمود باشند، مساحت چهارضلعی نصف حاصل ضرب طول های دو قطر آن است. (عبارتها را کامل کنید)



فرض	
حکم	

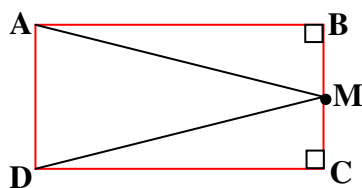
..... + مساحت مثلث ABC = مساحت چهارضلعی ABCD

$$= \frac{1}{2} \times \dots \times \dots + \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$$

$$= \frac{1}{2} AC (\dots + \dots)$$

$$= \frac{1}{2} \times \dots \times \dots$$

۹. در مستطیل زیر M وسط \overline{BC} است ثابت کنید مثلث AMD متساوی الساقین است.

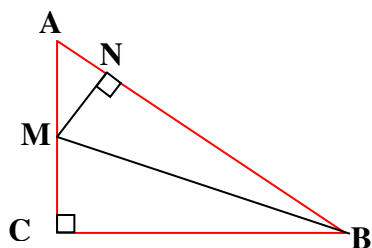


فرض	
حکم	

دلیل

..... } ⇒ () حالت ⇒ ≅ ⇒

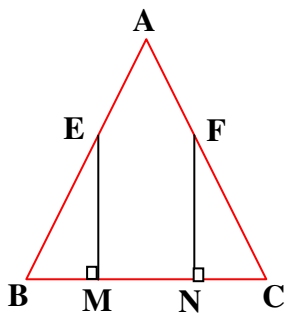
از تساوی اجزای متناظر دو مثلث نتیجه می گیریم که



۱۰. در شکل زیر \overline{BM} نیم ساز زاویه B است چرا $\overline{BC} = \overline{BN}$ ؟

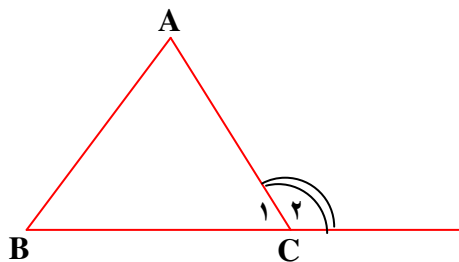
فرض	
حکم	

۱۱. مثلث ABC متساوی الساقین و E و F وسط ساق ها هستند چرا طول پاره خط های BM و CN برابر است؟



۱۲. نشان دهید در هر مثلث اندازه ی یک زاویه خارجی با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن برابر است.

یادآوری: زاویه ی خارجی یک چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می شود.



۱۳. ثابت کنید اگر در یک متوازی الاضلاع قطرها مساوی یکدیگر باشند آن چهارضلعی مستطیل است.

۱۴. نشان دهید طول دو مماس که از یک نقطه خارج از دایره بر آن دایره رسم می شوند، باهم برابرند.

۱۵. دو مستطیل به نسبت $\frac{3}{4}$ باهم متشابه اند اگر طول مستطیل بزرگ تر ۲۸ سانتی متر باشد، اندازه ی طول مستطیل کوچک تر چند سانتی متر است؟

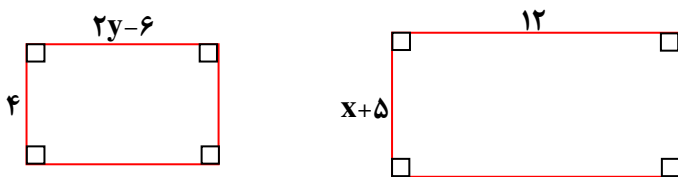
۱۶. مقیاس یک نقشه ۱ : ۱۰۰۰ است. اگر فاصله ی بین دو نقطه روی نقشه $\frac{2}{5}$ سانتی متر باشد، فاصله ی این دو نقطه در اندازه ی واقعی چند متر است؟

۱۷. الف) آیا دو دلخواه همواره متشابه اند چرا؟

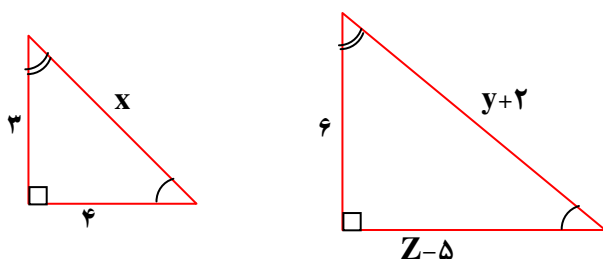
ب) آیا دو مستطیل دلخواه همواره متشابه اند؟ چرا؟

۱۸. الف) نسبت تشابه دو شکل هم نهشت را بنویسید.

ب) دو مستطیل زیر باهم مشابه اند. مقدار x, y را به دست آورید. (نسبت تشابه آن ها $\frac{2}{3}$ است).



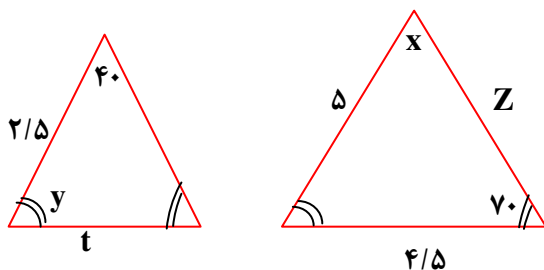
۱۹. دو مثلث زیر باهم متشابه اند مقادیر x, y, z را به دست آورید.



۲۰. مثلث ABC به ضلع ۴ و ۵ و ۶ با مثلث DEF به ضلع $\frac{1}{3}x + 9, 10, 8$ باهم متشابه اند:

الف) نسبت تشابه دو مثلث چند است؟

ب) مقدار x را به دست آورید.



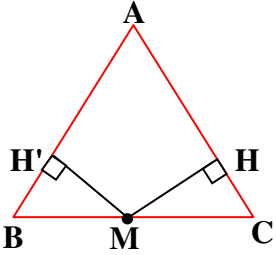
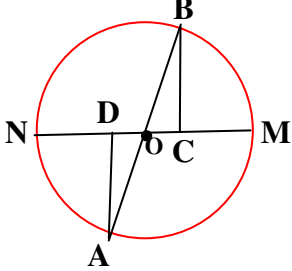
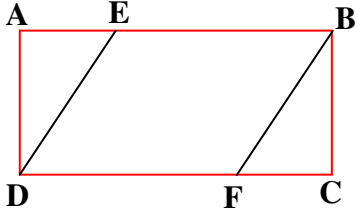
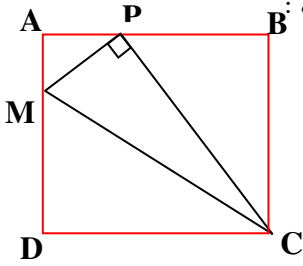
۲۱. دو مثلث متساوی الساقین زیر باهم متشابه اند.

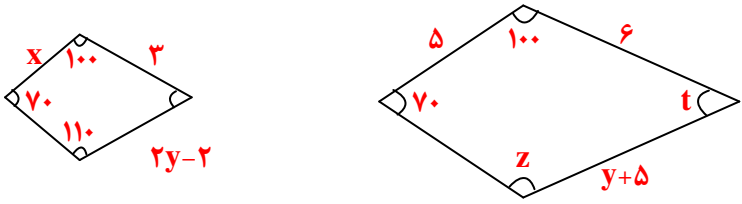
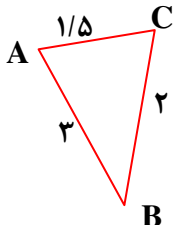
الف) مقادیر مجهول را روی شکل بنویسید.

ب) نسبت تشابه دو مثلث چند است؟

آزمون پایانی فصل هندسه و استدلال

ردیف	رسول اکرم (ص): طلب دانش بر هر مسلمان واجب است.	بارم
۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) اگر خاصیتی از یک عضو مجموعه را اثبات کردیم، می توان آن خاصیت را به سایر اعضا نیز تعمیم داد. ب) اگر $ab < 0$ باشد می توان نتیجه گرفت که حتماً $a < 0$ است. ج) دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه همواره متشابه اند. د) اطلاعات داده شده در مسئله را فرض مسئله گوئیم.	۲
۲	کامل کنید. الف) دلیل آوردن و استفاده از دانسته های قبلی برای معلوم شدن موضوعی را گویند. ب) در حل مسائل هندسی تشخیص فرض و مسئله اهمیت زیادی دارد. ج) اگر زاویه بین دو خط در نقشه ۵۰ درجه باشد، زاویه ی بین همان خطوط در طبیعت برابر است با د) هرگاه در دو شکل زاویه ها تغییر نکرده و اضلاع متناسب باشند به آن دو شکل می گوئیم.	۲
۳	گزینه ی مناسب را علامت بزیند. الف) کدام شکل همواره با نوع خودش متشابه است؟ ۱) لوزی ۲) مستطیل ۳) مثلث متساوی الاضلاع ۴) مثلث متساوی الساقین ب) نقشه شهرستان دزفول $\frac{1}{۲۰۰۰۰}$ کوچک شده است. اگر فاصله ی امامزاده های رودبند و سبزقبا ۲ کیلومتر باشد، فاصله ی این دو نقطه در نقشه چند سانتی متر است؟ ۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰ ج) کدام استدلال همواره معتبر نیست؟ ۱) مثلث متساوی الاضلاع است، در نتیجه هر زاویه ی آن ۶۰ درجه است. ۲) چهارضلعی متوازی الاضلاع بوده و یک زاویه قائمه دارد، در نتیجه آن چهارضلعی مستطیل است. ۳) زاویه رأس یک مثلث متساوی الساقین ۴۰ درجه است. در نتیجه هر زاویه مجاور به قاعده ۷۰ درجه است. ۴) دو پنج ضلعی منتظم متشابه اند در نتیجه آن دو پنج ضلعی هم نهشت اند. د) کدام گزینه ترتیب گام های حل مسئله هندسی را به درستی نشان می دهد؟ ۱) رسم شکل - درک و فهم مسئله - فرض و حکم - تشخیص راهبرد ۲) درک و فهم مسئله - رسم شکل - فرض و حکم - تشخیص راهبرد ۳) فرض و حکم - درک و فهم مسئله - رسم شکل - تشخیص راهبرد ۴) درک و فهم مسئله - فرض و حکم - تشخیص راهبرد - رسم شکل	۲


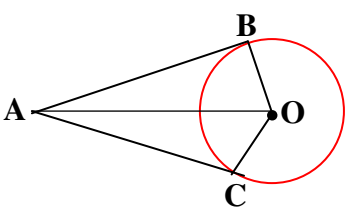
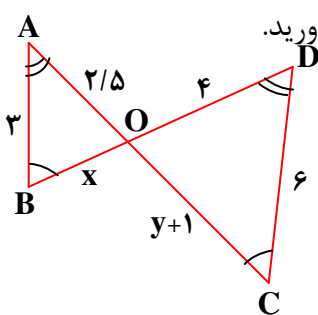
۱/۵	<p>ثابت کنید وسط قاعده ی هر مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن ها به یک فاصله است.</p> 	۴
۱/۵	<p>در شکل زیر O مرکز دایره و $\overline{DN}, \overline{CM}$ هر کدام یک سانتی متر از شعاع دایره کوچک ترند چرا $\overline{BC} = \overline{AD}$ ؟</p> 	۵
۱/۵	<p>چهارضلعی ABCD مستطیل و $\overline{AE} = \overline{FC} = ۱/۵$ چرا $\overline{DE} = \overline{FB}$ ؟</p> 	۶
۱/۵	<p>ABCD مربع است نشان دهید:</p> $\overline{MC} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{AB}^2}$ 	۷
۱ ۲	<p>الف) دو لوزی متشابه اند و نسبت تشابه آن ها $\frac{۳}{۷}$ است. اگر ضلع لوزی بزرگ ۲۱ سانتی متر باشد، لوزی کوچک چه قدر است؟</p>	۸

	<p>(ب) دو چهارضلعی زیر باهم متشابه اند مقادیر مجهول را به دست آورید.</p> 	
<p>۱ ۱</p>	<p>(الف) دو مثلث متساوی الساقین در چه شرایطی متشابه اند؟</p> <p>(ب) با رسم شکل و ذکر دلیل نشان دهید دو مستطیل دلخواه همواره متشابه نیستند؟</p>	<p>۹</p>
<p>۱ ۰/۵</p>	<p>(الف) مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ با مثلث DEF به اضلاع ۹ و $5y+2$ و ۱۵ متشابه است مقدار y را به دست آورید.</p> <p>(ب) نسبت تشابه دو مثلث چند است؟</p>	<p>۱۰</p>
<p>۱/۵</p>	<p>به کمک خطوط موازی مثلثی رسم کنید که با مثلث ABC متشابه بوده و نسبت آن ها ۲ باشد.</p> 	<p>۱۱</p>
	<p>تست هوش</p> <p>به جای علامت ؟ چه عددی مناسب است ؟ سعی کنید ارتباط منطقی بین اعداد پیدا کنید.</p> <p>۱۲ و ۱۵ و ۴ و ۳ و ۲ ۲۰ و ۲۸ و ۵ و ۴ و ۳ ۳۰ و ۴۵ و ۶ و ۵ و ۴ ۲۴ و ۶۶ و ۷ و ۶ و ۵ ۵۶ و ؟ و ۸ و ۷ و ۶</p>	

آزمون پیش نوبت اول

ردیف	رسول اکرم (ص): بهترین علم آن است که مفید باشد.	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) هر مجموعه زیر مجموعه خودش است.</p> <p>(ب) مجموعه $\{4, \frac{1}{3}, 2^2, \sqrt{16}\}$ دارای ۴ عضو است.</p> <p>(ج) عدد $\frac{3}{14}$ یک عدد گنگ است.</p> <p>(د) از اشتراک دو مجموعه گویا و گنگ مجموعه اعداد حقیقی به دست می آید.</p>	۱
۲	<p>جملات زیر را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.</p> <p>* مجموعه ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعه نام دارد.</p> <p>* تعداد زیر مجموعه های $\{\phi, e\}$ مساوی است.</p> <p>* فاصله ی بین یک نقطه تا مبدأ را آن عدد گوئیم.</p> <p>* دلیل آوردن و استفاده کردن از دانسته های قبلی را گویند.</p>	۱
۳	<p>گزینه مناسب را علامت بزینید.</p> <p>(الف) حاصل $(R - Q')$ برابر کدام مجموعه است؟</p> <p style="text-align: center;"> Z (۱) N (۲) Q (۳) ϕ (۴) </p> <p>(ب) کدام گزینه عبارتی نادرست است؟</p> <p>(۱) هر عدد حسابی یک عدد گویا است.</p> <p>(۲) بعضی از عددهای گویا، عدد صحیح هستند.</p> <p>(۳) هر عدد گویا یک عدد حسابی است.</p> <p>(۴) هر عدد صحیح یک عدد گویا است.</p> <p>(ج) نمایش کدام کسر زیر به صورت اعشاری، متناهی یا مختوم است؟</p> <p style="text-align: center;"> $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{3}{25}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) </p> <p>(د) عدد $2 + \sqrt{19}$ - ۲ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟</p> <p style="text-align: center;"> 2 و 3 (۱) 1 و 2 (۲) 5 و 6 (۳) 6 و 7 (۴) </p>	۱
۴	<p>اگر $B = \{x \in N \mid 8 \leq x < 12\}$, $A = \{7, 8, 9\}$ باشد :</p> <p>(الف) مجموعه B را با اعضایش مشخص کنید.</p> <p>(ب) حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با اعضا بنویسید.</p> <p>$A - B =$</p> <p>$A \cap B =$</p> <p>$A \cup B =$</p>	۰/۵ ۱/۵

۰/۷۵		با توجه به نمودار مقابل $(B - A) \cap C$ را هاشور بزنید.	۵
۰/۵		اگر تاسی را دو بار بیاندازیم : الف) مجموعه ی همه ی حالت های ممکن چند عضو دارد؟	۶
۰/۵	$n(s) = ?$	ب) احتمال اینکه مجموع دو عدد ۷ باشد، چند است؟	
۱		با توجه به نمودار زیر در جای خالی علامت \in یا \notin یا \subseteq قرار دهید.	۷
		$5 \in E$ $\{3, 0\} \in D$ $4 \in D$ $\{4\} \in B$	
۱		الف) مجموعه اعداد گویا را با نماد ریاضی بنویسید.	۸
۱		ب) مقدار x, y را طوری بیابید که مجموعه های B, A برابر باشند.	
		$A = \{9, x^2, -8\}$, $B = \{\frac{18}{y}, 16, 2y - 6, \sqrt{81}\}$	
۰/۵		الف) بین -1 و $-\frac{1}{p}$ دو کسر بنویسید.	۹
۰/۵		ب) نمایش اعشاری کسر $\frac{3}{5}$ را بنویسید.	
۰/۵		ج) عدد $3/0.2$ را به صورت کسر بنویسید.	
۱/۵		الف) حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.	۱۰
		$(3\frac{1}{2} - 2\frac{5}{6}) \div (-\frac{10}{9})$	
		ب) مجموعه اعداد گویا را به زبان ریاضی بنویسید.	
۰/۵		الف) بین $\sqrt{8}, \sqrt{5}$ یک عدد گنگ بنویسید.	۱۱
۰/۵		ب) عدد $0.123425\dots$ گویاست یا گنگ چرا؟	
۰/۵		ج) تساوی های زیر را کامل کنید.	
		$Q \cap Z = \dots\dots\dots$, $Q \cup Q' = \dots\dots\dots$	

۰/۷۵	الف) مجموعه A را روی محور نمایش دهید.	۱۲				
۰/۷۵	$A = \{x \in R \mid 2 \leq x\}$ 					
۰/۷۵	ب) اگر $a = \sqrt{2}, b = -5$ باشد حاصل $ -a + b $ را به دست آورید.					
۱	ثابت کنید قطر مربعی به ضلع a برابر است با $a\sqrt{2}$.	۱۳				
۱/۵	<p>نشان دهید طول دو مماسی که از نقطه ای خارج از دایره بر دایره رسم می شوند مساوی است.</p> 	۱۴				
	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">فرض</td> <td style="border: none;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">حکم</td> <td style="border: none;"></td> </tr> </table> <p style="text-align: right; color: red;">اثبات:</p>	فرض		حکم		
فرض						
حکم						
۰/۷۵	الف) آیا دو لوزی دلخواه همواره متشابه اند؟ چرا؟	۱۵				
۱	<p>ب) دو مثلث OAB, OCD متشابه اند. مقادیر x, y را به دست آورید.</p> 					
۱	<p style="text-align: right; color: red;">سؤال جایزه:</p> <p>اگر $A = \{x \in R \mid 1 \leq x < \sqrt{3}\}, B = \{x \in R \mid \sqrt{2} \leq x < 2\}$ باشد $A \cap B$ را با علائم ریاضی بنویسید.</p>	۱۶				

فصل ۴ توان و ریشه

خلاصه درس:

* **توان منفی**: توان های منفی را هم می توان محاسبه کرد. اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ باشد داریم:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

یعنی اگر عدد صحیح غیر صفری از صورت به مخرج یا از مخرج به صورت انتقال داده شود، توان آن عدد قرینه می شود.

◀ مثال «۱»:

$$9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}$$

$$(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \left(\frac{1}{-2}\right)^5 = \frac{1}{-32}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$$

یادآوری: هر عدد (غیر از صفر) به توان صفر برسد، حاصل یک می شود.

◀ مثال «۲»:

$$\left(\frac{3}{10}\right) \cdot (-2)^{-2} = 1 - \left(\frac{1}{(-2)^2}\right) = 1 - \frac{1}{-8} = 1 + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8}$$

نکته: کلیه ی قوانین عددهای توان دار برای توان های منفی هم صدق می کند. یعنی اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشند روابط زیر برقرارند:

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^0 = 1$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

◀ مثال «۳»: حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید.

الف) $\underbrace{3^{-4} \times (-5)^{-4}} \times (-15)^{-9} = (-15)^{-4} \times (-15)^{-9} = (-15)^{-13}$

ب) $12^{-7} \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{-7} \div (-8)^2 = \left(12 \times \frac{-2}{3}\right)^{-7} \div (-8)^2 = (-8)^{-7} \div (-8)^2 = (-8)^{-7-2} = (-8)^{-9}$

* **نماد علمی:** برای سهولت در محاسبه ی اعداد بسیار بزرگ یا کوچک آن ها را به صورت ضرب توانی از ۱۰ می نویسیم. این اعداد را به دو گروه تقسیم می کنیم: گروهی از اعداد مثبت بزرگ تر از یک و گروه دیگر اعداد مثبت کم تر از ۱.

الف) نماد علمی اعداد بسیار بزرگ: ابتدا از سمت چپ یک رقم جدا کرده (یک رقم صحیح) و سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از ۱۰ را نوشته و به صورت ضربی از یک عدد اعشاری در توانی از ۱۰ می نویسیم.

◀ **مثال «۴»:** نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

الف) 1023456000000

ب) $1278/95$

پاسخ:

$$1023456000000 = 1/023456 \times 10^{12}$$

توان ۱۲ یعنی تعداد ارقام بعد از ممیز.

$$1278/95 = 1/27895 \times 10^3$$

توان ۳ یعنی ممیز به تعداد ۳ رقم به سمت چپ حرکت کرده است.

ب) نماد علمی اعداد بسیار کوچک: ابتدا از سمت چپ یک رقم مخالف صفر جدا کرده و سپس به تعداد ارقام قبل از ممیز توانی منفی از ۱۰ را نوشته و به صورت ضربی از یک عدد اعشاری در توانی از ۱۰ می نویسیم.

◀ **مثال «۵»:** نماد علمی اعداد زیر را بنویسید.

الف) $0/000067 = 6/7 \times 10^{-5}$

ب) $0/01394 = 1/394 \times 10^{-2}$

به طور کلی: نماد علمی یک عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ می باشد که a عددی بین ۰ و ۱۰ و n عددی صحیح می باشد.

◀ **مثال «۶»:** حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

$$0/0012 \times 450000 = 1/2 \times 10^{-3} \times 4/5 \times 10^5 = \underbrace{1/2 \times 4/5}_{1/25} \times \underbrace{10^{-3} \times 10^5}_{10^2} = 5/4 \times 10^2$$

* **ریشه گیری:**

الف) ریشه دوم: هر عدد دارای دو ریشه دوم است که این ریشه ها قرینه ی یکدیگرند.

$$3^2 = (-3)^2 \Rightarrow 9 \text{ ریشه های دوم } = +3, -3$$

نکته: اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

ب) ریشه سوم: توان سوم (مکعب) عددی مانند ۲ برابر ۸ است. پس ریشه سوم ۸ برابر ۲ است و

می نویسیم:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

◀ مثال «۷» :

$$(-4)^3 = -64 \Rightarrow \sqrt[3]{-64} = -4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

به طور کلی: اگر b یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با $\sqrt[3]{b}$ نمایش می دهیم.
نکته: هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

*** ضرب و تقسیم رادیکال ها:** اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) مساوی باشند، می توان آن رادیکال ها را در هم ضرب یا برهم تقسیم کرد یعنی برای هر دو عدد a و b داریم:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad , \quad \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$$

$$\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad , \quad \sqrt[3]{a} \div \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0)$$

نکته «۱»: قوانین فوق برای ریشه های بالاتر از ۳ نیز درست می باشد.

◀ مثال «۸» :

$$\sqrt{7} \times \sqrt{3} = \sqrt{21} \quad , \quad \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{-216} = -6$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{5}{4}$$

نکته «۲»: اگر عبارت زیر رادیکال جمع یا تفریق باشد، نمی توان آن را به صورت چند رادیکال جداگانه نوشت یعنی:

$$\sqrt[3]{a+b} \neq \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$$

نکته «۳»: در ضرب و تقسیم رادیکال ها، ابتدا قسمت صحیح را محاسبه کرده و سپس رادیکال ها درهم ضرب یا برهم تقسیم می کنیم.

◀ مثال «۹» :

الف) $3\sqrt{5} \times 4\sqrt{2} = (3 \times 4) \times \sqrt{5 \times 2} = 12\sqrt{10}$

ب) $8\sqrt[3]{54} \div 2\sqrt[3]{2} = \frac{8\sqrt[3]{54}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{8}{2} \times \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = 4\sqrt[3]{27} = 4 \times 3 = 12$

*** جمع و تفریق رادیکال ها:** اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً مثل هم باشند، می توان آن ها را همانند عبارت های جبری باهم جمع یا تفریق کرد.

◀ مثال «۱۰» :

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} + 3\sqrt{11} - 8\sqrt{2} + 4\sqrt{11} &= (5-8)\sqrt{2} + (3+4)\sqrt{11} \\ &= -3\sqrt{2} + 7\sqrt{11} \end{aligned}$$

◀ مثال «۱۱» : عبارت زیر را ساده کنید.

$$\begin{aligned} \sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{63} &= \sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{4 \times 5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{9 \times 7} \\ &= 3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{7} - 3\sqrt{7} \\ &= -\sqrt{5} - 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

* **گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی** : گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی و یا ساده کردن محاسبات، لازم است که مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم. برای این منظور صورت و مخرج کسر را در عددی ضرب می کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود.

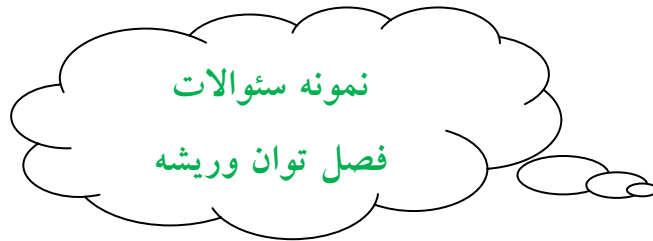
◀ مثال «۱۲» : مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt{7}} &= \frac{5}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7} \\ \frac{3}{\sqrt[3]{5}} &= \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5} \end{aligned}$$

نکته : اگر عدد مخرج ریشه دوم باشد، صورت و مخرج را در مخرج ضرب می کنیم و اگر عدد مخرج ریشه سوم داشته باشد، صورت و مخرج را در ریشه سوم همان عدد ضرب کرده ولی عدد زیر رادیکال باید توان ۲ داشته باشد. برای سایر ریشه ها نیز با همان ریشه ضرب کرده و توان عدد زیر رادیکال باید یک واحد کم تر از ریشه باشد. به عبارت دیگر اگر مخرج کسری $\sqrt[m]{a^n}$ با شرط $n < m$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[m]{a^{m-n}}$ ضرب می کنیم.

◀ مثال «۱۳» : مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{4}{\sqrt[5]{2}} = \frac{4}{\sqrt[5]{2}} \times \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \frac{4\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{4\sqrt[5]{16}}{2} = 2\sqrt[5]{16}$$



۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

(الف) حاصل 2^{-4} برابر $\frac{1}{16}$ است.

(ب) مقدار $2^{-1} + 2$ مساوی ۱ است.

(ج) 5^{-1} بزرگ تر از 5^{-2} است.

(د) نماد علمی 0.0016 می شود 1.6×10^{-3}

(ه) 4300 همان 4.3×10^4 است.

(و) ریشه سوم عدد 125 می شود 5 .

(ز) هر عدد دارای دو ریشه سوم است.

(ح) حاصل $\sqrt[3]{(-7)^3}$ برابر است با 7 .

(ط) اگر $x > 0$ و $y < 0$ باشد آنگاه $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = x - y$.

(ی) عبارت $\sqrt[3]{8+27}$ همان $(\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27})$ است.

۲. جملات زیر را کامل کنید.

(الف) حاصل $5^{-7} \div 5^3$ به صورت عدد توان دار برابر است با.....

(ب) در تساوی $10^6 = 10^x \times 10^{-2}$ مقدار x برابر با است.

(ج) نمایش علمی عدد 40300 می شود.....

(د) اعداد منفی ریشه دوم ، اما ریشه سوم

(ه) ریشه سوم عدد $-\frac{8}{27}$ عدد است.

(و) دو عدد رادیکالی که قسمت زیر رادیکال و آن ها یکسان باشند باهم جمع می شوند.

(ز) ساده شده ی عبارت $\sqrt{32} + \sqrt{72}$ برابر است با

(ح) اگر محیط مربعی $4\sqrt{5}$ باشد، مساحت مربع برابر با است.

۳. گزینه ی مناسب را علامت بزنید.

(الف) حاصل $(-4)^{-1} \times (-4)^{-1}$ کدام گزینه است؟

(۱) $(-4)^{-8}$ (۲) $(-4)^{-1}$ (۳) 4^{-1} (۴) 16^{-8}

ب) کدام گزینه نادرست است؟

$$\begin{array}{ll} (1) \quad 4^{-1} = \frac{1}{4} & (2) \quad (3^2)^{-4} = 2^{-12} \\ (3) \quad 3^{-2} = -9 & (4) \quad (7^{-2})^{\cdot} = 1 \end{array}$$

ج) نماد علمی عدد ۰/۰۰۰۵۴۷ برابر است با :

$$\begin{array}{ll} (1) \quad 547 \times 10^{-5} & (2) \quad 5/47 \times 10^4 \\ (3) \quad 547 \times 10^{-4} & (4) \quad 5/47 \times 10^{-4} \end{array}$$

د) حاصل $\sqrt{3} \div (\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{48})$ برابر است با :

$$(1) \quad 2\sqrt{3} \quad (2) \quad 5\sqrt{3} \quad (3) \quad 1 \quad (4) \quad 3$$

ه) ساده شده ی عبارت $5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{50}$ کدام است؟

$$(1) \quad 2\sqrt{3} + 10\sqrt{2} \quad (2) \quad 2\sqrt{3} \quad (3) \quad 2\sqrt{3} - \sqrt{52} \quad (4) \quad 7\sqrt{5} - \sqrt{50}$$

و) اگر $x < 0$ باشد حاصل عبارت $3\sqrt{x^2} - 2x$ برابر چه گزینه ای است؟

$$(1) \quad -5x \quad (2) \quad 5x \quad (3) \quad x \quad (4) \quad -x$$

۴. سئوالات ستون سمت راست را به جواب های مربوطه در ستون چپ وصل کنید.

سمت چپ	سمت راست
$1\frac{1}{3}$	$(-3)^{-2}$
$\frac{1}{9}$	$3^{-1} + (-5)^{\cdot}$
۱	$(\frac{1}{3})^{-2}$
۹	27×3^{-3}

۵. حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید.

$$5^{-4} \times 5^3 \times 25 =$$

$$20^{-8} \div 5^{-8} \times 4^6 =$$

$$8^{-5} \times 2^{-10} \div 16 =$$

$$\frac{a^5 b^x z^{-2}}{a^{-2} b^y z^x} =$$

۶. مقدار هر عبارت را به دست آورید.

$$5^{-1} + 1^{-2} - \frac{6}{5} =$$

$$(-2)^{\cdot} + (2^{-2})^{-2} - (-5)^2 =$$

$$(10 - 2^3) \div (2^4 \div 2^{-2}) =$$

۷. اعداد زیر را باهم مقایسه کنید. ($\lt \gt$)

$$6^{-1} \bigcirc 0$$

$$4^{-1} \bigcirc 4^{-2}$$

$$1^{-11} \bigcirc (-11)$$

۸. مقدار x را به دست آورید.

$$7^x \times 7^{-4} = 7^{10} \Rightarrow x =$$

$$(4^{-x})^5 = 4^{10} \Rightarrow x =$$

$$x^{-10} \div (-3)^{-10} = 6^{-10} \Rightarrow x =$$

۹. اعداد زیر را با نماد علمی نمایش دهید.

الف) $139400 =$

ب) $1200000 =$

ج) $0.0004 =$

د) $0.00672 =$

۱۰. حاصل عبارت های زیر را به دست آورده و به صورت نماد علمی بنویسید.

$$3 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^{11} =$$

$$25 \times 10^{-4} \div 5 \times 10^{-20} =$$

۱۱. نمایش اعشاری اعداد زیر را بنویسید.

$$2/3 \times 10^4 =$$

$$5/34 \times 10^6 =$$

$$6/0.3 \times 10^{-2} =$$

$$6 \times 10^{-7} =$$

۱۲. دور کره ی زمین در استوا تقریباً 4×10^7 متر است. اگر طول هر مورچه یک میلی متر باشد، چند مورچه لازم است تا باهم دور کره زمین در استوا را بپوشانند؟ (هر متر برابر ۱۰۰۰ میلی متر است).

۱۳. جرم زمین تقریباً 6×10^{24} کیلوگرم و جرم خورشید تقریباً 2×10^3 کیلوگرم است. جرم خورشید چند برابر جرم زمین است؟

۱۴. اندازه ی یک باکتری 5×10^{-7} است. این عدد را به صورت اعشاری بنویسید.

۱۵. جرم یک الکترون تقریباً $9/2 \times 10^{-25}$ گرم است. جرم یک دانش آموز ۴۶ کیلوگرمی چند برابر جرم یک الکترون است؟ حاصل را به صورت نماد علمی بنویسید. (یک کیلوگرم برابر ۱۰۰۰ گرم است).

۱۶. حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\sqrt{(-5)^2} =$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} =$$

$$\sqrt{(3-9)^2} =$$

$$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} =$$

$$\sqrt[3]{(-6)^3} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{-8}{1000}} =$$

$$\sqrt{-1} =$$

$$\sqrt[5]{(-2)^5} =$$

۱۷. اگر $x < 0$ و $y < 0$ باشد حاصل عبارت $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$ را به دست آورید.

۱۸. حاصل اعداد سطر اول را به جواب درست در سطر دوم وصل کنید.

$\sqrt{81} \times \sqrt{-27}$,	$\sqrt[3]{\frac{128}{2}}$,	$\sqrt{-64} \times \sqrt{1}$,	$\sqrt[3]{125} + \sqrt{\sqrt{16}}$
-۲۷	,	-۴	,	۴	,	۷

۱۹. جاهای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

$$\sqrt[3]{64} \times \sqrt{\dots} = \sqrt[3]{128} = \dots \sqrt{2}$$

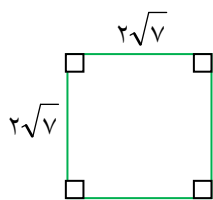
$$\sqrt{\frac{-125}{8}} = \frac{\sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots}} = \dots$$

۲۰. حاصل را به دست آورید.

$$\frac{\sqrt{90} \times \sqrt{4}}{\sqrt{40} \times \sqrt{9}} =$$

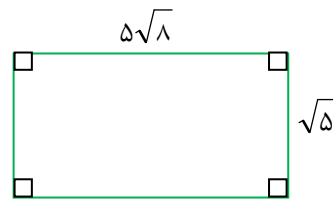
$$\frac{\sqrt[3]{60} \times \sqrt[3]{18}}{\sqrt{5}} =$$

۲۱. مساحت و محیط شکل های زیر را حساب کنید.



S=

P=



S=

P=

۲۲. حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\sqrt{48} - \sqrt{12} - \sqrt{27} =$$

$$\sqrt{128} - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - \sqrt{75} =$$

$$\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-24} + 4\sqrt[3]{3} =$$

$$\sqrt[3]{abc} \times \sqrt[3]{a^2b^5c^4} =$$

۲۳. مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{2}{\sqrt{6}} =$

ب) $\sqrt{\frac{5}{7}} =$

ج) $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3}} =$

د) $\sqrt[3]{\frac{11}{16}}$

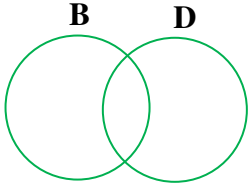

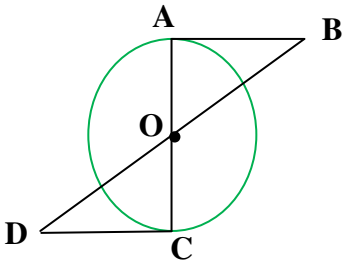
آزمون پایانی فصل توان و ریشه

ردیف	رسول اکرم (ص) بهترین اعمال امت من انتظار فرج است.	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>الف) $\frac{1}{\sqrt{-3}}$ برابر با 7^3 است.</p> <p>ب) نماد علمی 4300 می شود $4/3 \times 10^{-3}$.</p> <p>ج) ریشه سوم $\frac{-1}{216}$ عدد $\frac{-1}{36}$ است.</p> <p>د) رابطه $\sqrt{x^2} = -x$ با شرط $x < 0$ درست است.</p>	۲
۲	<p>گزینه ی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>الف) حاصل $18^{-7} \times (\frac{5}{6})^{-7}$ کدام گزینه است؟</p> <p>(۱) $(\frac{90}{6})^{-14}$ (۲) $(\frac{90}{6})^7$ (۳) 15^{-7} (۴) 15^{49}</p> <p>ب) نمایش اعشاری عدد $2/3 \times 10^{-3}$ برابر است با:</p> <p>(۱) $0/230$ (۲) $0/0023$ (۳) $0/023$ (۴) $0/0023$</p> <p>ج) بجای a چه عددی می توان قرار داد تا نامساوی $\sqrt{a} < \sqrt{16}$ درست باشد؟</p> <p>(۱) 64 (۲) 27 (۳) 125 (۴) 216</p> <p>د) مساحت مربعی به ضلع $5\sqrt{x}$ برابر چند مترمربع است؟ ($x > 0$)</p> <p>(۱) $25x$ (۲) $25x^2$ (۳) $5x$ (۴) $20\sqrt{x}$</p>	۲
۳	<p>جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) اعداد \sqrt{b}, \sqrt{b} - ریشه های دوم عدد هستند.</p> <p>ب) ریشه سوم عدد $\frac{-125}{64}$ برابر با است.</p> <p>ج) حاصل $\frac{2}{\sqrt{7}} \times \sqrt{7}$ برابر است با</p> <p>د) ساده شده ی حاصل ضرب $\sqrt[3]{2b^2} \times \sqrt[3]{4b}$ می شود</p>	۲
۴	<p>الف) علامت \Leftrightarrow بگذارید.</p> <p>$\sqrt{3^2 + 4^2} \bigcirc 5$</p> <p>ب) مقدار هر عبارت را به دست آورید.</p> <p>الف) $(-\frac{1}{5})^0 + (-3^{-2})^{-1} =$</p> <p>ب) $\sqrt[3]{\frac{-1}{27}} - \sqrt{(1 - \frac{1}{3})^2} =$</p>	۰/۵ ۱/۵

۱/۵	حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید. $3^{-y} \times 15^{-f} \times 5^{-y} =$ $2/6 \times 10^{-5} \div 1/3 \times 10^2 =$	
۰/۵ ۰/۵ ۱	نماد علمی اعداد زیر را بنویسید. $1394000 =$ $0.00000034 =$ $0.1234 \times 50000 =$	۶
۱ ۱/۵	حاصل عبارت های زیر را به دست آورید. الف) $4\sqrt{a^2 b^2} \times (-2\sqrt{a^2 b}) =$ ب) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{72} + \sqrt{128} =$	۷
۱/۵	مخرج کسرهای زیر را گویا کنید. $\frac{5}{2\sqrt{3}} =$ $\sqrt{\frac{7}{10}} =$ $\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}} =$	۸
۱/۵	در تساوی زیر مقدار a , b را محاسبه کنید. $2\sqrt{50} - \sqrt{48} + \sqrt{72} = a\sqrt{2} + b\sqrt{6}$	۹
۱/۵	اگر $a = 0.003$ و $b = 6 \times 10^{-5}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{a}{b}$ را به صورت نماد علمی بنویسید.	۱۰
۱/۵	حاصل عبارت زیر را به دست آورده و سپس ساده کنید. $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5}) - \sqrt{49} =$	۱۱
۱	سئوال جایزه : حاصل عبارت زیر را به دست آورید. $\sqrt[3]{\sqrt{2^{12}}} \times \sqrt[3]{64} \div \sqrt{-8} =$	۱۲

آزمون نوبت اول

ردیف	رسول اکرم (ص): انسان بلند مرتبه چون به فهم و دانایی رسد، متواضع می شود.	بارم
۱	<p>گزینه ی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>الف) مجموعه ی اعداد گویا بین ۶ و ۱۰ چند عضو دارد؟ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) بی شمار</p> <p>ب) کدام گزینه همواره درست است؟ (۱) $Z \subseteq N$ (۲) $W \subseteq N$ (۳) $Q \subseteq R$ (۴) $Q \subseteq Z$</p> <p>ج) اگر $a = -2$ و $b = -3/5$ باشد، حاصل $a+b$ برابر است با: (۱) ۱۱ (۲) -۱۱ (۳) ۵/۵ (۴) -۵/۵</p> <p>د) مستطیلی به ابعاد ۴ و ۵ با مستطیلی به ابعاد $2x+1$ و ۱۰ متشابه اند مقدار x چند است؟ (۱) ۳/۵ (۲) ۷ (۳) ۱/۵ (۴) ۳</p>	۱
۲	<p>جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) مجموعه ای شامل همه ی عضوهای است که هم عضو A و هم عضو B هستند این مجموعه را دو مجموعه A و B می نامند. (اجتماع، اشتراک)</p> <p>ب) اگر در نمایش اعشاری یک کسر همه ی رقم های اعشاری آن مشخص شود و به انتها برسد به آن کسر گویند.</p> <p>ج) قدرمطلق حاصل ضرب دو عدد مساوی حاصل ضرب آن هاست.</p> <p>د) به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه بدهد، می گوئیم.</p>	۱
۳	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>الف) $\sqrt{-64}$ با $-\sqrt{64}$ برابر است. ب) دو مستطیل دلخواه همواره متشابه اند. ج) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. د) مجموعه $\{x \in N x < 1\}$ بی شمار عضو دارد.</p>	۱
۴	<p>هر یک از اعداد سطر اول را به جواب مربوطه در سطر دوم وصل کنید. (دو جواب اضافی است).</p> <p>$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[3]{2}$, $2^{-2} - (\frac{1}{2})^2$, $-25+17-2$ ۴ , ۵ , -۱۰ , ۱۰ , $\frac{1}{4}$, ۰</p>	۱
۵	<p>اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ باشند حاصل $(A-B) \cup (A \cap B)$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.</p>	۱/۵

۰/۷۵	الف) مجموعه مقابل را با علائم ریاضی بنویسید. $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\} =$	۶
۰/۷۵	ب) مجموعه $B - (B \cap D)$ را روی شکل نشان دهید. 	
۰/۵	الف) بین $\frac{3}{4}, \frac{2}{5}$ دو کسر بنویسید.	۷
۰/۵	ب) عدد $\frac{2}{3}$ را با نماد اعشاری متناوب بنویسید.	
۰/۵	ج) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.	
۰/۵	$(1/2 + 3/7) \div 10 =$	
۰/۵	الف) عدد $2 + \sqrt{7}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟	۸
۰/۷۵	ب) مجموعه مقابل را روی محور نمایش دهید. $M = \{x \in R \mid -1 < x \leq 3\}$ 	
۱	حاصل عبارات زیر را به دست آورید. الف) $ 4 - 3^2 \times (-2 + 5) =$ ب) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} =$	۹
۱/۵	در شکل زیر O مرکز دایره $\overline{CD}, \overline{AB}$ دو مماس بر دایره رسم شده اند. چرا طول دو مماس باهم برابر است؟ (چرا $\overline{AB} = \overline{CD}$.) 	۱۰
۰/۵	الف) چرا دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیستند؟	۱۱
۱	ب) مثلث ABC به ضلع های ۸ و ۱۰ و ۱۶ با مثلث DEF به اضلاع $2x-2$ و $2x$ و $2x+14$ باهم متشابه اند. مقدار X را پیدا کنید.	

۱	در یک نقشه مقیاس ۱۰۰۰ : ۱ است. فاصله ی دو نقطه روی نقشه ۳ سانتی متر است. فاصله این دو نقطه در اندازه ی واقعی چند متر است؟	۱۲
۰/۷۵	در جای خالی علامت \in یا \notin یا \subseteq قرار دهید. $-\sqrt{25} \bigcirc N$, $\sqrt[3]{\frac{-1}{1000}} \bigcirc Q$, $\{\pi, \sqrt{3}\} \bigcirc R$	۱۳
۱	عبارت زیر را ساده کنید. $\frac{12 \times (3^4)^2 \times 1^2}{(3^2)^2 \times (\frac{1}{3})^{-4}} = \frac{\quad}{\quad} =$	۱۴
۱	اعداد زیر را به صورت نماد علمی بنویسید. الف) $0.0000001394 =$ ب) $139400000 =$	۱۵
۱/۵	الف) عبارت رادیکالی زیر را ساده کنید. $(2\sqrt{75} - 5\sqrt{27} + 3\sqrt{12}) \div 3\sqrt{3} =$ ب) مخرج کسر مقابل را گویا کنید. $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5x}}$	۱۶
۱	سؤال جایزه : مجموعه A را با علائم ریاضی بنویسید. $A = \{5, 55, 555, 5555, \dots\} =$	۱۷

فصل پنجم

عبارت های جبری و معادله

خلاصه درس :

* **یک جمله ای** : یک جمله ای از حاصل ضرب اعداد حقیقی در متغیرها به دست می آید. یک جمله ای از دو قسمت تشکیل می شود : ضریب عددی و عبارت حرفی.

◀ **مثال «۱»** : $\sqrt{5}ax^3$ (ضریب $\sqrt{5}$ و a^3x^3 عبارت حرفی است).

نکته «۱» : فرم کلی یک جمله ای به صورت ax^n است که در آن $a \in R$ و x متغیر و $n \in W$ می باشد. یعنی حتماً توان متغیر باید عضو مجموعه اعداد حسابی (W) باشد.

◀ **مثال «۲»** : **عبارت $5\sqrt{x}$ یک جمله ای نیست زیرا** : $5\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}}$ و توان متغیر عضوی از مجموعه اعداد حسابی نیست.

نکته «۲» : هر عدد حقیقی یک جمله ای است زیرا توان آن متغیر صفر است.

◀ **مثال «۳»** : عددی مثل $\underline{7}$ یک جمله ای است زیرا : $7 = 7x^0$

تذکر مهم : اگر در یک عبارت توان حروف منفی بوده و یا حروف در مخرج یا زیر رادیکال باشند، آن عبارت تک جمله ای نیست.

* **یک جمله ای** : توان متغیری را که در یک جمله ای وجود دارد، درجه ی یک جمله ای نسبت به آن متغیر می نامند.

◀ **مثال «۴»** : جدول را کامل کنید.

درجه نسبت به همه ی متغیرها	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x	یک جمله ای
$4+1=5$	۱	۴	$\sqrt{7}x^4y$
$1+0=1$	۰	۱	$\frac{3}{8}x$

* **یک جمله ای های متشابه** : چند تا یک جمله ای که حروف و توان مساوی داشته باشند، متشابه هستند.

◀ **مثال «۵»** : یک جمله ای های $3x^2y$ ، $-5yx^2$ ، $4x^2y$ ، $4y^3x$ متشابه نیستند.

* **جمع و تفریق یک جمله ای های متشابه** : ضرایب عددی آن ها را باهم جمع یا تفریق کرده و قسمت حرفی مشترک را می نویسیم.

نکته «۳» : جملات غیر متشابه باهم جمع یا تفریق نمی شوند. مثل $5y-2x$ (ساده تر نمی شود).

* ضرب و تقسیم یک جمله ای ها : برای بدست آوردن حاصل ضرب دو یک جمله ای کافی است ضرایب عددی را در هم و حروف متناظر را نیز در هم ضرب کنیم. برای تقسیم نیز ضرایب عددی را برهم و حروف متناظر را نیز برهم تقسیم می کنیم.

◀ مثال «۶»: حاصل عبارت زیر را بدست آورده و سپس ساده کنید.

$$\overbrace{5x(4x^2 - 6y)} - 7x^2 + 10xy = \underline{20x^3} - \underline{30xy} - \underline{7x^2} + \underline{10xy} = 13x^3 - 20xy$$

* درجه ی چند جمله ای : بزرگ ترین درجه نسبت به آن متغیر را در نظر می گیریم.

◀ مثال «۷»: در چند جمله ای $7a^2b^2 + 10a^2b^3 + 2$ درجه نسبت به a مساوی ۳ و درجه نسبت به b مساوی ۵ است.

نکته «۴»: در چند جمله ای ها، جملات را نسبت به توان های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می کنند.

◀ مثال «۸»: چند جمله ای $7x^2a + 7x^2a^2 + 5x^2a^3 - 4x + 2$ را نسبت به متغیر x مرتب کنید.

پاسخ : $7x^2a + 5x^2a^3 - 4x + 2$

* اتحاد جبری : اگر دو عبارت جبری به گونه ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان مقدار یکسانی داشته باشیم، در این صورت برابری جبری حاصل از آن ها را اتحاد جبری می نامیم.

◀ مثال «۹»: آیا $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ یک اتحاد است؟

پاسخ : به ازای چند مقدار مختلف مانند $x=2$ یا $x=-5$ و... عبارت را آزمایش می کنیم.

$$x = 2 \Rightarrow (2+3)^2 = 2^2 + 6 \times 2 + 9 \Rightarrow 5^2 = 4 + 12 + 9 = 25$$

$$x = -5 \Rightarrow (-5+3)^2 = (-5)^2 + 6 \times (-5) + 9 \Rightarrow (-2)^2 = 25 + (-30) + 9 = 4$$

در نتیجه $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ یک اتحاد است.

* اتحاد مربع دو جمله ای:

الف) جبری :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ب) کلامی :

مربع جمله دوم + ۲ برابر حاصل ضرب جمله ها + مربع جمله اول = (جمله دوم + جمله اول)^۲

◀ مثال «۱۰»:

$$(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

$$(x^2 - yz)^2 = (x^2)^2 + 2x^2(-yz) + (-yz)^2 = x^4 - 2x^2yz + y^2z^2$$

* اتحاد مزدوج :

الف) جبری

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ب) کلامی :

مربع جمله دوم - مربع جمله اول = (جمله دوم - جمله اول) (جمله دوم + جمله اول)

◀ مثال «۱۱» :

$$(x+5)(x-5) = x^2 - 25$$

$$(ab - \frac{3}{4})(ab + \frac{3}{4}) = a^2b^2 - \frac{9}{16}$$

اثبات اتحاد مزدوج :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

* اتحاد جمله مشترک :

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

◀ مثال «۱۲» :

$$(x+1)(x+3) = x^2 + (1+3)x + 1 \times 3 = x^2 + 4x + 3$$

* اتحاد مکعب دو جمله ای (برای مطالعه بیش تر):

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

◀ مثال «۱۳» :

$$(x+5)^3 = x^3 + 3x^2(5) + 3x(5)^2 + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$$

* اتحاد مجموع مکعب دو جمله ای (برای مطالعه بیش تر):

(اتحاد چاق و لاغر)

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

* اتحاد تفاضل مکعب دو جمله ای (برای مطالعه بیش تر):

(اتحاد چاق و لاغر)

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

◀ مثال «۱۴» :

$$(t-2)(t^2+2t+4)=t^3-8$$

$$(a+3)(a^2-3a+9)=a^3+27$$

* اتحاد مربع سه جمله ای :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

◀ مثال «۱۵» :

$$(x+y^2+5)^2 = x^2 + y^4 + 25 + 2xy^2 + 10x + 10y^2$$

* اتحادهای فرعی :

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b), \quad a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

کاربرد اتحادها : استفاده از اتحادها برخی محاسبات با اعداد بزرگ را ساده تر می کند.

◀ مثال «۱۶» :

$$998 \times 1002 = (1000-2)(1000+2) = 1000^2 - 2^2 = 1000000 - 4 = 999996$$

* تجزیه : گاهی اوقات نیاز است که یک عبارت جبری را به صورت حاصل ضرب چند عبارت جبری دیگر بنویسیم که به این کار تجزیه گویند.

* روش های تجزیه :

الف) فاکتورگیری : برای فاکتورگیری مراحل زیر را انجام می دهیم :

۱. ب.م.م ضرایب جملات را تعیین می کنیم.
۲. حروف مشترک با توان کم تر را مشخص می کنیم.
۳. ب.م.م ضرایب و حروف مشترک با توان کم تر را به عنوان فاکتور در نظر می گیریم.
۴. تک تک جملات را بر عامل فاکتور تقسیم کرده و حاصل را درون پرانتز می نویسیم.

◀ مثال «۱۷» : تجزیه کنید.

$$15a^2b + 10a^2b^2 = 5a^2b(3a + 2b)$$

ب) با استفاده از اتحادها : به کمک اتحادهایی مانند : اتحاد مزدوج، اتحاد یک جمله مشترک و اتحاد چاق و لاغر می توان چند جمله ای ها را تجزیه کرد.

◀ مثال «۱۸» : تجزیه کنید.

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

اتحاد مزدوج

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$$

ضرب مجموع

اتحاد یک جمله مشترک

باید دو عدد را که مجموع آن ها ۴ و حاصل ضرب آن ها ۳ باشد، پیدا کنیم.

$$x^2 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$$

ج) دسته بندی و فاکتورگیری: در بعضی از عبارات ها نیاز است که ابتدا جملات را دسته بندی کرده و سپس به کمک اتحادها یا فاکتورگیری چند جمله ای ها را تجزیه کنیم.

◀ مثال «۱۹»: تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= (x^3 + 1) + (3x^2 + 3x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) + 3x(x + 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1 + 3x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 1) = (x + 1)(x + 1)^2 \end{aligned}$$

نکته «۵»:

چگونگی تشخیص اتحاد مزدوج برای تجزیه:

- ۱) جملات چند جمله ای نباید هم علامت باشند.
 - ۲) بتوانیم آن ها را به صورت مربع کامل بنویسیم.
- مثلاً $x^2 + 4$ یا $x^2 - 5$ اتحاد مزدوج نیستند.

*** نامعادلات:** جواب های یک نامعادله مقادیری از متغیر هستند که به ازای آن ها نامساوی برقرار شود. همه ی جواب های یک نامعادله یک مجموعه تشکیل می دهند که آن را مجموعه ی جواب آن معادله می نامند.

نکته «۶»:

- ۱) اگر $a < b$ آنگاه $a + c < b + c$
- ۲) اگر $a < b$ آنگاه $a - c < b - c$
- ۳) اگر $a < b$ و $0 < c$ آنگاه $ac < bc$
- ۴) اگر $a < b$ و $c < 0$ آنگاه $ac > bc$

نکته «۷»:

اگر طرفین یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب یا بر یک عدد منفی تقسیم کنیم، جهت نامساوی عوض می شود.

◀ مثال «۲۰»: مجموعه جواب نامعادله ی زیر را به دست آورده و آن را روی محور نمایش دهید.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} &\stackrel{\times 6}{\rightarrow} 6\left(\frac{x}{3}\right) - 6\left(\frac{1}{2}\right) < 6\left(\frac{x-1}{6}\right) \\ &\Rightarrow 2x - 3 < x - 1 \\ &\stackrel{+(-x)}{\rightarrow} 2x - x - 3 < x - x - 1 \\ &\Rightarrow x - 3 < -1 \\ &\stackrel{+3}{\rightarrow} x - 3 + 3 < -1 + 3 \Rightarrow x < 2 \text{ یا } \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\} \end{aligned}$$



نکته «۸»:

- * اگر $a > 1$ و $m > n$ آنگاه $a^m > a^n$
- * اگر $0 < a < 1$ و $m > n$ آنگاه $a^m < a^n$
- * اگر $a > 1$ و $m > n$ آنگاه $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$
- * اگر $0 < a < 1$ و $m > n$ آنگاه $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$

◀ مثال «۲۱»:

$$0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^1, \quad \sqrt{\frac{1}{2}} > \sqrt{\frac{1}{4}}$$

سئوالات امتحانی

فصل عبارات های جبری

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) \sqrt{ax} یک جمله ای است.

ب) دو جمله ی $3x^2y$ و yx^2 متشابه اند.

ج) درجه ی جمله ی x^2u نسبت به متغیر u برابر صفر است.

د) عبارت x^2+9 را به کمک اتحاد مزدوج می توان تجزیه کرد.

ه) $\{x|x < 1\}$ مجموعه جواب $x+1 < 2$ است.

و) اگر $a-b=1$ باشد آنگاه $a > b$.

ز) دو مجموعه $\{x \in N, -2 < x \leq 6\}$ و $\{6 \text{ و } \dots \text{ و } 1 \text{ و } 0 \text{ و } -1\}$ باهم برابرند.

ح) اگر $2x < 6$ باشد آنگاه $x > 3$.

۲. جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.

* درجه ی یک جمله ای $5a^2xy^2$ نسبت به متغیر a برابر با است.

* ضریب عددی جمله $-\sqrt{3}xb$ برابر است با

* اعداد مخالف صفر یک جمله ای هایی از درجه هستند.

* به تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای همه ی مقادیری که به جای متغیرها قرار می دهیم، برابر باشند گوییم.

* $x^2-25=(x-5)(x+5)$ از نوع اتحاد است.

* اگر بتوان یک چند جمله ای را به صورت ضرب دو یا چند جمله ای نوشت به طوری که درجه ی آن ها کم تر باشد، گوییم آن چند جمله ای را کرده ایم.

* عبارت x^2-9 به کمک اتحاد تجزیه پذیر است.

* اگر طرفین یک نامساوی را در عددی منفی ضرب کنیم نامساوی تغییر می کند.

* مجموعه جواب نامعادله $-3 < 1-2x$ عبارت است از

* استاندارد شده ی عبارت $3x-x^2+5$ می شود

۳. جاهای خالی را با جملات مناسب کامل کنید.

$$(a+1)^2 = a^2 + \dots + 1$$

$$(2+a)(2-a) = 4 - \dots$$

$$(1+b)^2 = \dots + 2b + \dots$$

$$(m + \dots)(m - \dots) = m^2 - 36$$

$$(ax - \dots)^2 = \dots - \dots + 9$$

$$(\sqrt{v} - \dots)(\dots + y) = v - y^2$$

$$(xy - \frac{1}{2})^2 = \dots - \dots + \frac{1}{4}$$

$$(x+3)(x+2) = x^2 + \dots + \dots$$

$$(\dots - \dots)^2 = 36x^2 - 12xy + \dots$$

$$(a-4)(a-5) = \dots + 20 - \dots$$

۴. با استفاده از اتحاد مربع دو جمله ای حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$(x+5)^2 =$$

$$(2a+b)^2 =$$

$$(x-3y)^2 =$$

$$(a^2 - \frac{3}{4})^2 =$$

۵. جدول زیر را کامل کنید.

عبارت	متغیرها	درجه نسبت به X	ضریب عددی
$\sqrt{8}xy^2$			
x^2yz			
\sqrt{m}			

۶. ثابت کنید :

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

۷. به کمک اتحادهای مزدوج و یک جمله مشترک، حاصل را به دست آورید.

$$(3-5x)(3+5x) =$$

$$(t - \frac{2}{3})(t + \frac{2}{3}) =$$

$$(4ax - \sqrt{v})(4ax + \sqrt{v}) =$$

$$(\frac{1}{3} - 2x)(\frac{1}{3} + 2x) =$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) =$$

$$(x-1)(x+5) =$$

$$(b-6)(b-3) =$$

$$(4x+5)(4x+3) =$$

۸. عبارت های زیر را تجزیه کنید.

$$x^2 - 9 =$$

$$b^2 - 25 =$$

$$16x^2 - 36y^2 =$$

$$9a^2 - \frac{1}{49} =$$

$$x^2 + 8x + 15 =$$

$$x^2 - 7x + 12 =$$

$$x^2 + x - 2 =$$

$$x^2 - 6x + 8 =$$

۹. حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$(x + 3)^2 =$$

$$\left(3x - \frac{4}{5}\right)\left(3x + \frac{4}{5}\right)$$

$$(a - 7)(a + 10) =$$

۱۰. تجزیه کنید.

$$x^2z - y^2z =$$

$$3x^2 - 30x + 75 =$$

$$x^4 - 1 =$$

۱۱. حاصل را به کمک اتحادها به دست آورید.

$$99^2 =$$

$$550^2 - 450^2 =$$

$$98 \times 102 =$$

$$9/7 \times 10/3 =$$

$$201 \times 199 =$$

۱۲. کدام یک از دو تساوی زیر اتحاد نمی باشد؟ چرا؟

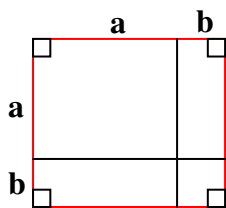
الف) $3x - y = y - 3x$

ب) $x(x+1) = x^2 + x$

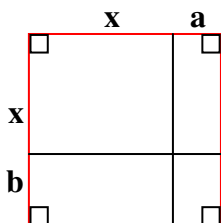
۱۳. سارا مستطیلی با طول ۳ و عرض ۲ رسم کرد. ریحانه طول و عرض این مستطیل را به اندازه ی X واحد افزایش دهید. مساحت مستطیل جدید چقدر می شود؟

۱۴. اگر $A = x^2 + 2x + 3$ و $B = 2x^2 - 2x + 4$ باشد، حاصل $A - 2B$ را به دست آورده و آن را استاندارد کنید.

۱۵. به کمک شکل زیر فرمول کدام یک از اتحادها به دست می آید؟ چگونه؟



۱۶. به کمک شکل مقابل، اتحاد یک جمله مشترک را اثبات کنید.



۱۷. اگر $A=x+5$ و $B=x-3$ باشد حاصل $A \times B - 2x$ را به دست آورید.

۱۸. اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2} + 6$ را به دست آورید.

۱۹. به کمک دسته بندی و فاکتورگیری عبارت های زیر را تجزیه کنید.

الف) $4x+ny+4y+nx=$

ب) $x^2 + xy + zx + zy =$

۲۰. نامعادلات زیر را حل کرده و مجموعه جواب آن ها را روی محور نشان دهید.

الف) $3x+3 \leq x+3$

ب) $x+6 > 5x-2$

ج) $5+2(3-2x) < 2-x$

۲۱. نامعادله $x^2 + \frac{x}{2} \geq (x-1)^2$ را حل کنید.

۲۲. مجموعه جواب هر یک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

$$\frac{3x-2}{5} \leq \frac{x-2}{3}$$

$$\frac{2}{3}(x+7) \geq \frac{1}{2}(3-x)$$

۲۳. اگر $1 \leq x \leq 4$ ، $A \leq \frac{2x+7}{3} \leq B$ مقادیر A و B را محاسبه کنید.

(راهنمایی: طرفین رابطه دومی را در ۳ ضرب، سپس ۷ واحد کم و در نهایت بر ۲ تقسیم کرده و با رابطه اولی مقایسه کنید).

۲۴. نامعادله ی زیر را حل کرده و مجموعه جواب را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

$$3x > x + \frac{x-1}{3}$$

۲۵. حاصل را به ساده ترین صورت بنویسید. (ابتدا عبارت ها را تجزیه کنید).

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 9} =$$

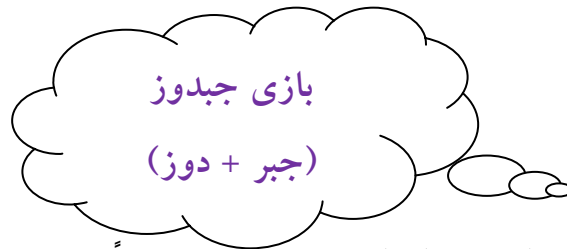
$$\frac{3x^2 - 9x}{x^2 - 5x + 6} =$$

آزمون پایانی فصل عبارات های جبری

ردیف	امام صادق (ع) : زکات دانش آن است که به اهلش بیاموزند. (تحت الحقل ص ۶۶۳)	بارم
۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) $x\sqrt{y}$ یک جمله ای است. ب) عبارت $2x^3y^2$ نسبت به متغیر y از درجه ۳ است. ج) عبارت $x^2+xy=x(x+y)$ یک اتحاد است. د) حاصل 295×305 را می توان به کمک اتحاد مزدوج بدست آورد.	۱
۲	جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید. * ضریب عددی $\frac{\sqrt{5}}{4}xyz^2$ برابر است با * درجه ی $2a^5b^2$ نسبت به a و b مساوی است. * توان حروفی یک جمله ای ها متعلق به مجموعه است. * به تساوی بین دو عبارت جبری که به ازای همه ی مقادیر برابر باشند، گوییم.	۱
۳	گزینه ی مناسب را علامت بزنید. الف) کدام گزینه یک جمله ای است؟ (۱) \sqrt{a} (۲) $\frac{3}{a}$ (۳) 5 (۴) a^{-2} ب) کدام جمله با $5xy^4$ متشابه است؟ (۱) -5 (۲) y^4x (۳) $-5x^4y$ (۴) $-5y^4$ ج) ساده شده ی عبارت $x-[(y-x)-(y-1)]$ برابر است با : (۱) $2x+1$ (۲) $-2x+1$ (۳) $2x-1$ (۴) $2x-2y+1$ د) کدام گزینه را می توان با اتحاد مزدوج تجزیه کرد؟ (۱) (x^2+4) (۲) $(4x^2+6x+9)$ (۳) $(16x^2-y^2)$ (۴) $(9x^2+20x)$	۱
۴	حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید. $15x^2 + 24y^2 - (3x + 2y)(5x + 6y) =$	۲
۵	حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید. الف) $(2x-3y)^2 =$ ب) $(5a-3)(5a+7) =$ ج) $(3x-4m)(3x+4m) =$	۳

۶	اگر $A = -5 + 2x^2 - 3x$ و $B = x^2 + 6x$ باشد : الف) عبارت A را به صورت استاندارد بنویسید. ب) حاصل $2B - A$ را به دست آورید.	۶
۰/۵	الف) $b^2 - 16 =$	۷
۰/۵	ب) $x^2 - 8a + 15 =$	
۱	ج) $a(x + y) + b(x + y)$	
۱/۵	$\frac{3x^2 - 9x}{x^2 - 5x + 6} =$	۸
۱/۵	$51^2 =$ $(\sqrt{5} - 0.3)(\sqrt{5} + \frac{3}{10}) =$	۹
۱	$(2x+5)(2x-.....) = - 25$ $(.....+2x)^2 = 1 + + 4x^2$	۱۰
۲	الف) $-3x + 14 < x + 2$	۱۱
۱	ج) $x(x-6) \leq x^2 + 2$	

۱	<p>علامت عددهای حقیقی a و b و c را طوری تعیین کنید که $\frac{b}{ac} > 0$ باشد. (جدول را کامل کنید).</p> <table border="1" data-bbox="577 331 949 645"> <thead> <tr> <th>a</th> <th>b</th> <th>C</th> <th>$\frac{b}{ac} > 0$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>+</td> <td>+</td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>+</td> <td></td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> </tbody> </table>	a	b	C	$\frac{b}{ac} > 0$	+	+		+	+		-	+		-		+			-	+	۱۲
a	b	C	$\frac{b}{ac} > 0$																			
+	+		+																			
+		-	+																			
	-		+																			
		-	+																			
۱/۵	<p>سؤال جایزه :</p> <p>یکی از عبارات های زیر را به دلخواه تجزیه کنید.</p> <p>الف) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 =$</p> <p>ب) $2x^2 - 5x + 3 =$</p> <p>الگوی عددی جالب : شما هم می توانید حداقل دو ردیف دیگر به الگو اضافه کنید. درسته ؟</p> <div style="background-color: #f0e68c; padding: 10px; text-align: center;"> $3 \times 3 + 1 = 10$ $33 \times 33 + 11 = 1100$ $333 \times 333 + 111 = 111000$ $3333 \times 3333 + 1111 = 11110000$ </div>	۱۳																				



این بازی دارای دو جدول است. در ابتدا دو مهره همسان (مثلاً دو عدد دکمه) در مرکز جدول کوچک قرار دارد. هر کس در نوبت خود یکی از مهره ها را به دلخواه برمی گزیند و بر روی یکی از عبارت های جدول کوچک قرار می دهد. با این حرکت او می تواند در جدول بزرگ عبارتی را که از حاصل ضرب دو عبارت ساده مهره دار بدست می آید تصاحب کند و با x یا 0 به خود اختصاص دهد. هر کس که بتواند سه خانه متوالی (افقی، عمودی، مورب) را به خود اختصاص دهد، برنده است. دقت کنید که نفر اولی که مهره انتخاب می کند، عبارت جبری درجه دومی را از آن خود نمی کند و نفر دومی که مهره انتخاب می کند، اولین عبارت درجه ی دو را از جدول 6×6 از آن خود می کند.

$x+1$	$x-3$	$x+2$
$x-4$		$x+4$
$x-2$	$x+3$	$x-1$

x^2+2x+1	x^2+x-2	x^2-x-6	x^2-9	x^2-1	x^2-3x+2
x^2+6x+8	$x^2+7x+12$	x^2+3x+2	x^2+2x-3	x^2-2x-8	x^2-x-12
x^2-x-2	x^2-4x+3	x^2-4x+4	x^2-6x+9	x^2+4x+3	x^2+3x-4
x^2+x-6	x^2+x-12	x^2-2x-3	x^2-5x+4	x^2-5x+6	$x^2-7x+12$
x^2+5x+4	x^2+4x+4	x^2+2x-8	$x^2+8x+16$	x^2-3x-4	x^2-4
x^2-6x+8	x^2-16	x^2-2x+1	x^2+5x+6	x^2+6x+9	$x^2-8x+16$

فصل ششم خط و معادله های خطی

خلاصه درس :

* **معادله خط :** رابطه بین طول و عرض نقاط تشکیل دهنده ی یک خط را معادله ی آن خط می گویند.

فرم کلی و استاندارد خط به صورت زیر است :

$$y = ax + b$$

در حالت هایی که نمودار رابطه بین دو مقدار به صورت خط راستی باشد، گوییم آن دو مقدار باهم رابطه خطی دارند. ویژگی مشترک رابطه خطی آن است که نسبت افزایش یا کاهش یک متغیر به افزایش و کاهش متغیر دیگر مقداری ثابت است.

فعالیت :

سارا و اکرم دو خواهر هستند وقتی اکرم به دنیا آمد، سارا ۴ ساله بود، وقتی سارا ۷ ساله شود اکرم چند سال خواهد داشت؟ (جدول را کامل کنید).

سارا (y)	۴	۷	۱۰
اکرم (x)	۰	۸

اگر سن سارا را y و سن اکرم را x بگیریم خواهیم داشت : $y = x + 4$
که یک معادله ی خط است.

سؤال : آیا رابطه بین طول ضلع مربع و مساحت مربع یک رابطه خطی است؟

پاسخ : خیر - زیرا اگر ضلع مربع را x و مساحت مربع را y در نظر بگیریم خواهیم داشت : $y = x^2$

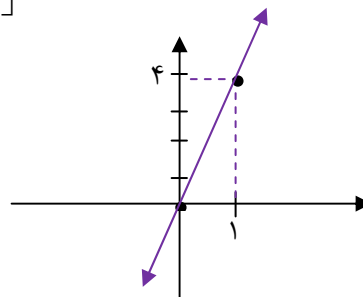
ضلع	۱	۲	۳	۴
مساحت مربع	۱	۴	۹	۱۶

* **رسم خط :** برای رسم خط دو نقطه کافی است. در معادله ی خط عددی دلخواهی مانند ۰ و ۱ و ۲ و قرار می دهیم و مقدار y را به دست می آوریم.

◀ مثال «۱»: خط $y=4x$ را رسم کنید.

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4 \times 0=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=4 \times 1=4 \Rightarrow y=4 \end{array} \right\} \rightarrow$$

x	۰	۱
y	۰	۴
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$



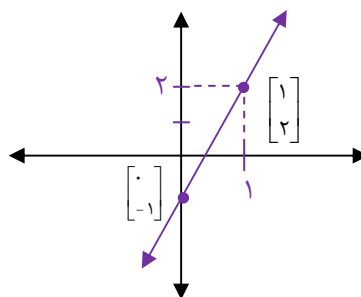
نکته «۱»: معادله ای که به فرم $y = ax$ باشد، مبدأ گذر نام دارد.

◀ مثال «۲»: خط به معادله $y=3x-1$ را رسم کنید.

$$x=0 \Rightarrow y=3 \times 0 - 1 = -1$$

$$x=1 \Rightarrow y=3 \times 1 - 1 = 2$$

x	۰	۱
y	-۱	۲
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



نکته «۲»: در معادله $y = ax + b$ اگر a عددی کسری باشد، بهتر است پس از اینکه به x صفر دادیم در نقطه دوم بجای x از مخرج کسر استفاده کنیم تا مقدار y عددی صحیح بدست آید و کار راحت تر شود، مانند $y = \frac{2}{5}x$ (بجای x از ۵ استفاده کنید).

نکته «۳»: شرط اینکه نقطه ای روی خط قرار گیرد آن است که مختصات نقطه در معادله صدق کند یعنی با قرار دادن طول و عرض نقطه بجای x و y در معادله، رابطه ای صحیح برقرار شود.

◀ مثال «۳»: آیا نقطه ی $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \end{bmatrix}$ روی خط $y = 3x - 5$ قرار دارد؟

مهدی به روش تحلیلی عمل کرد یعنی بجای x و y از -1 و -8 کمک گرفت:

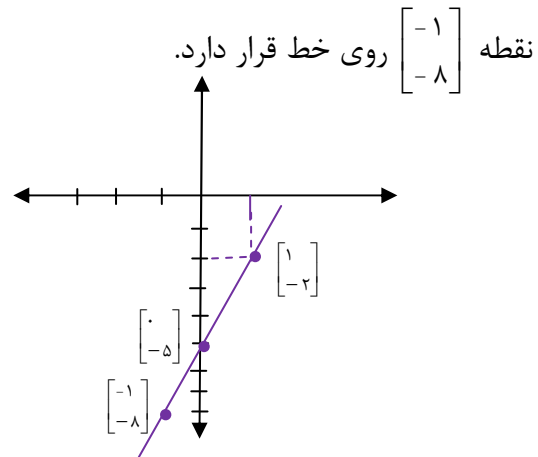
$$y = 3x - 5$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$-8 = 3 \times -1 - 5 \Rightarrow -8 = -8$$

سینا روش هندسی (ترسیمی) را انتخاب کرد و ابتدا معادله خط را رسم کرد و ملاحظه کرد که

x	0	1
y	-5	-2
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$



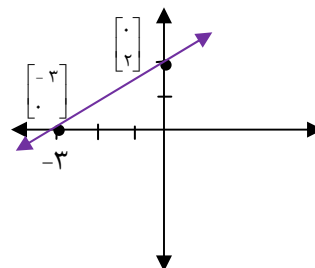
نکته «۴»: در رسم معادلاتی که به فرم $ax + by = c$ هستند، یک بار $x = 0$ و بار دیگر $y = 0$ قرار می دهیم.

مثال «۴»: خط به معادله $-2x + 3y = 6$ را رسم کنید.

$$x = 0 \Rightarrow \overbrace{-2 \times 0 + 3y} = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$$

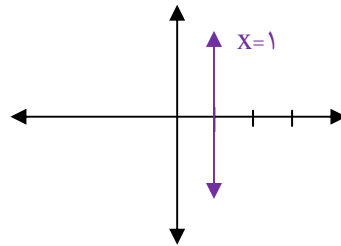
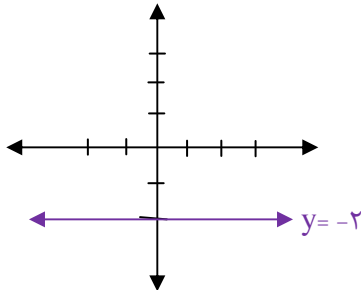
$$y = 0 \Rightarrow \overbrace{-2x + 3 \times 0} = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{-2} = -3$$

x	0	-3
y	2	0
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$



* **خط های موازی با محورهای مختصات :** حالت کلی خطوط به معادله $y=m$ موازی محور x ها (طول ها) و خطوط به معادله $x=n$ موازی محور y ها (عرض ها) است که در آن m یا n اعداد معلوم و ثابتی هستند.

◀ **مثال «۵» :** خطوط $x=1$ و $y=-2$ را رسم کنید.



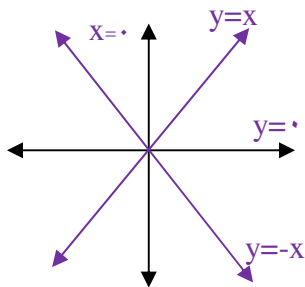
نکته «۵» :

(۱) معادله $y=0$ محور طول ها (x ها) :

(۲) معادله $x=0$ محور عرض ها (y ها) :

(۳) معادله $y=x$ نیم ساز ناحیه اول و سوم :

(۴) معادله $y=-x$ نیم ساز ناحیه دوم و چهارم :



* **شیب و عرض از مبدأ خط :**

در معادله $y = ax + b$ ضریب x یعنی a را شیب خط و b را عرض از مبدأ خط گویند.

نکته «۶» : برای به دست آوردن شیب و عرض از مبدأ خطوط باید آن را به فرم $y = ax + b$ تبدیل کرد.

◀ **مثال «۶» :** شیب و عرض از مبدأ هر یک از خط های زیر را مشخص کنید.

الف) $y = 4x \Rightarrow$ عرض از مبدأ $= 0$ و شیب $= 4$

ب) $y = x - 5 \Rightarrow$ عرض از مبدأ $= -5$ و شیب $= 1$

ج) $12x + 4y = 16 \Rightarrow 4y = -12x + 16$
 $\Rightarrow y = \frac{-12}{4}x + \frac{16}{4}$
 $\Rightarrow y = -3x + 4 \Rightarrow$ عرض از مبدأ $= 4$ و شیب $= -3$

نکته «۷» : شرط اینکه چند خط باهم موازی باشند این است که شیب برابر داشته باشند.

نکته «۸» : شرط اینکه دو خط برهم عمود باشند این است که شیب دو خط قرینه و معکوس

یکدیگر باشند یا $a \times a' = -1$

◀ **مثال «۷»:** خط های $y=9x$ و $y=9x+10$ موازیند.

خط های $y=2x+1$ و $y=-\frac{1}{2}x$ برهم عمودند. زیرا شیب دو خط قرینه و معکوس یکدیگر است یا
 $2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$

نکته «۹»: شیب خطی که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ می گذرد عبارت است از :

$$\mathbf{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} \quad (\text{شیب})$$

◀ **مثال «۸»:** معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix}$ می گذرد.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - (-4)}{6 - 2} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow a = 4$$

$$y = ax + b$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow 12 = 4 \times 6 + b \Rightarrow b = 12 - 24 = -12 \Rightarrow b = -12$$

$$y = ax + b \Rightarrow \boxed{y = 4x - 12}$$

نکته «۱۰»: طول نقطه ای که در آن نقطه، خط محور طول ها را قطع کند، طول از مبدأ گویند. برای محاسبه طول از مبدأ، در معادله ی خط مقدار y را صفر قرار می دهیم.

◀ **مثال «۹»:** طول از مبدأ خط $y=4x-7$ را بیابید.

$$y = 0 \Rightarrow 4x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$$

* **دستگاه معادلات خطی:**

در ریاضی ششم و هفتم با مسئله ای مانند زیر برخورد داشته اید. با چه راهبردی آن را حل می کردید؟

مسئله: در یک مزرعه روی هم ۲۰ مرغ و گاو وجود دارد. مجموع پاهای همه ی آن ها ۵۶ عدد است در این مزرعه چند مرغ و چند گاو وجود دارد؟

حل: این مسئله با راهبردهایی مانند رسم شکل، حدس و آزمایش و تشکیل معادله یک مجهولی و دو مجهولی قابل حل است. به عنوان نمونه از طریق **تشکیل معادله دو مجهولی** آن را حل می کنیم: تعداد مرغ ها را x و تعداد گاوها را y می گیریم پس $x+y=20$ هر مرغ ۲ پا و هرگاو ۴ پا دارد پس $2x+4y=56$ این دو معادله را در کنار هم قرار داده و یک دستگاه تشکیل می دهیم:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases}$$

الف) حل دستگاه از روش حذفی: یکی از مجهولات را در عددی ضرب کرده بطوریکه ضرایب یکی از مجهولات قرینه شوند سپس با جمع نمودن دو معادله، یکی از مجهولات بدست آید.

$$-2 \begin{cases} x+y=20 \\ 2x+4y=56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y=-40 \\ 2x+4y=56 \end{cases}$$

جمع $\underline{\hspace{10em}}$

$$2y=16$$

$$y=\frac{16}{2}=8 \Rightarrow \boxed{y=8} \text{ تعداد گاوها}$$

$$x+y=20 \xrightarrow{y=8} x+8=20 \Rightarrow x=20-8=12 \Rightarrow \boxed{x=12} \text{ تعداد مرغ ها}$$

ب) روش جایگزینی (تبدیلی): در این روش در یکی از معادلات، یک مجهول را برحسب دیگری حساب کرده و در معادله دیگر جایگزین می کنیم تا یک معادله یک مجهولی ساخته شود. مسئله قبل را به این روش هم حل می کنیم.

$$\begin{cases} x+y=20 \rightarrow x=20-y \\ 2x+4y=56 \rightarrow 2(20-y)+4y=56 \rightarrow 40-2y+4y=56 \\ 2y=56-40=16 \\ y=\frac{16}{2}=8 \\ y=8 \rightarrow x=20-8=12 \end{cases}$$

ج) روش قیاسی: از هر دو معادله یکی از مجهولات را برحسب دیگری حساب کرده و مساوی هم قرار می دهیم تا یک معادله یک مجهولی بدست آید. مثال قبل:

$$\begin{aligned} x+y=20 &\rightarrow x=20-y & (1) \\ 2x+4y=56 &\Rightarrow 2x=56-4y \rightarrow x=28-2y & (2) \end{aligned}$$

عبارت های ۱ و ۲ را مساوی هم قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} 20-y &= 28-2y \\ \Rightarrow y &= 8 \rightarrow x=20-8=12 \end{aligned}$$

د) روش ترسیمی: هر دو معادله را در یک دستگاه مختصات رسم کرده، محل تقاطع دو خط جواب معادله است.

مثال: محل برخورد دو خط $x+y=3$ و $-2x+y=-3$ را از روش رسم خطوط پیدا کنید.

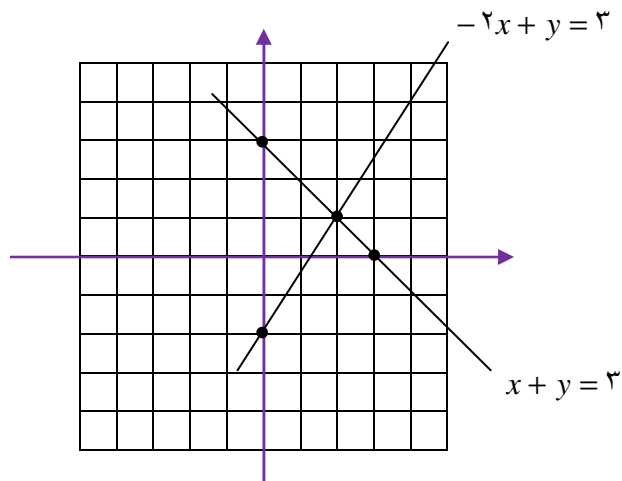
حل : هر یک از معادلات دستگاه را معادله ی یک خط راست در نظر گرفته و روی صفحه مختصات رسم می کنیم.

$$x+y=3$$

x	۰	۳
y	۳	۰
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$

$$-2x+y=-3$$

x	۰	۲
y	-۳	۱
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۰ \\ -۳ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$



طبق شکل محل برخورد دو خط، نقطه $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ است.

نکته : در دستگاه $\begin{cases} ax+by=C \\ a'x+b'y=C' \end{cases}$ داریم :

(الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد ، آن گاه دستگاه دارای یک جواب است.

(ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ آن گاه دستگاه جواب ندارد. یعنی دو خط با هم موازی هستند و نقطه برخوردی ندارند.

مثال : دستگاه $\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 4x+8y=10 \end{cases}$ جواب ندارد زیرا : $\frac{2}{4} = \frac{4}{8} \neq \frac{6}{10}$

فعالیت :

حالا شما شیب هر خط را جداگانه بدست آورید و نشان دهید دو خط با هم موازی هستند.

$$2x + 4y = 6 \Rightarrow 4y = \dots \Rightarrow y = \dots$$

در نتیجه شیب خط $2x + 4y = 6$ برابر است با :

$$4x + 8y = 10 \Rightarrow 8y = \dots \Rightarrow y = \dots$$

پس شیب خط $4x + 8y = 10$ برابر است با :

از روابط بالا چه نتیجه ای می گیرید؟ دو خط فوق نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

سئوالات امتحانی

معادله خط

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) شیب خط $y=4$ برابر ۴ است.

ب) خط $y=2x+1$ مبدأ گذر است.

ج) معادله $y=0$ معادله محور طول هاست.

د) خط $x=-3$ بر محور طول ها عمود است.

هـ) خط $y=-2$ با محور طول ها موازی است.

و) خط $y=5x$ با خط $y=-5x$ موازی است.

ز) معادله ی خطی که از نقاط $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ می گذرد : $y=5$ است.

ح) شیب خط $-2x+y=3$ برابر با ۲ است.

ط) نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی خط $y=2x-1$ قرار دارد.

ی) معادله ی $y=x^2+1$ معادله ی خطی است.

ک) معادله محور طول ها، $y=0$ می باشد.

م) خط $x=3$ موازی محور طول ها است.

۲. جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.

* دو خط موازی دارای مساوی اند.

* شیب خط $y = \frac{3}{5}x - 2$ برابر است.

* فرم کلی معادله خط مبدأ گذر است.

* عرض از مبدأ خط $5y=10x+15$ برابر است با.....

* معادله ی خطی که از نقاط $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ می گذرد :

* نسبت مقدار عرض به مقدار طول یک نقطه را خط گویند.

* از محل برخورد دو خط $y=-3$ و $x=2$ نقطه $\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$ حاصل می شود.

* شیب خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ می گذرد برابر است با

* در حالت کلی $x=b$ معادله ی خطی است موازی محور (طول ها، عرض ها)

* معادله $y=x+3$ یک معادله است. (خطی، غیر خطی)

* خط $x=2$ با محور طول ها زاویه درجه تشکیل می دهد. (۹۰، ۱۸۰)

* شیب خط $y=4$ برابر است با

* معادله خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم می شود

* وقتی می گوییم شیب جاده ۵ درصد است یعنی در هر افقی به اندازه ی بالاتر می رویم.

۳. گزینه ی مناسب را علامت بزنید.

الف) کدام یک از نقاط زیر روی خط $y = -x + 7$ قرار دارد؟

(۱) $\begin{bmatrix} 12 \\ -5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -12 \\ -5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}$

ب) مقدار b برابر چه عددی باشد تا خط $y = 2x + b$ از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ بگذرد؟

(۱) $b = 0$ (۲) $b = 4$ (۳) $b = -4$ (۴) $b = 5$

ج) مختصات نقطه ای از خط $4x - 3y = 14$ که طولش ۲ باشد، کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} 2 \\ 11/5 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

د) معادله خطی که از نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ می گذرد، کدام است؟

(۱) $x = 3$ (۲) $y = -2$ (۳) $y = -\frac{2}{3}x$ (۴) $y = -\frac{3}{2}x$

هـ) خط $y = 2 - \frac{1}{3}x$ با کدامیک از خطوط زیر موازی است؟

(۱) $2x + 3y = 4$ (۲) $y = 2x - 1$ (۳) $y = 6 + 6x$ (۴) $y = -6x + 3$

و) معادله ی خطی که شیب آن ۳- بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ بگذرد، کدام است؟

(۱) $y = 3x + 5$ (۲) $y = -3x$ (۳) $y = 3x - 5$ (۴) $y = -3x + 5$

ز) دو خط $y = \frac{2}{3}x + 4$ و $3y = 2x + 9$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

(۱) موازیند (۲) عمودند (۳) منطبق اند (۴) متقاطع اند

ح) معادله ی نیم ساز ناحیه ی اول و سوم عبارت است از:

(۱) $y = 0$ (۲) $y = -x$ (۳) $y = x$ (۴) $x = 0$

ط) عرض از مبدا خط $y + 3x + 6 = 0$ برابر است با :

(۱) ۲ (۲) -۶ (۳) -۲ (۴) -۳

۴. خط های زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

الف) $y = 3x$

ب) $y = \frac{2}{5}x$

ج) $y = 3x + 1$

د) $y = \frac{2}{3}x - 5$

۵. معادله ی خطی را بنویسید که با خط $5y = 10x + 5$ موازی بوده و از $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۶. معادله ی خطی را بنویسید که شیب آن $-\frac{1}{3}$ بوده و عرض از مبدأ آن $+1$ باشد.

۷. معادله ی خطی را بنویسید که با خط $x - y = 1$ موازی بوده و از مبدأ مختصات بگذرد.

۸. معادله ی خطی را بنویسید که با محور طول ها موازی بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۹. معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۰. شیب و عرض از مبدأ خط های زیر را تعیین کنید.

الف) $y = \frac{2}{3}x - 5$

ب) $2y = 6x + 8$

ج) $4x - 3y = 12$

۱۱. خط های زیر را رسم کنید.

الف) $5x + 3y = 15$

$$6x - 9y = 18 \text{ ب)}$$

۱۲. معادله ی خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۳. عدد b را چنان تعیین کنید که خط $y = 2x + b$ از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ عبور کند.

۱۴. عدد m را چنان بیابید که خط $y = 3x + (m - 4)$ مبدأ گذر باشد.

۱۵. آیا نقطه ی $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ روی خط $2y + 3x = -7$ قرار دارد چرا؟

۱۶. مقدار m را طوری تعیین کنید که دو خط زیر باهم موازی باشند.

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = (m + 1)x + 3 \end{cases}$$

۱۷. عدد a را چنان بیابید که نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی خط $y = ax - 4$ واقع باشد.

۱۸. شیب خطی را پیدا کنید که از دو نقطه $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۹. مختصات نقطه ای از خط $y = \frac{1}{4}x + 3$ را بنویسید که عرض آن -7 باشد.

۲۰. آیا خط $y = -6x$ از نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 12 \end{bmatrix}$ می گذرد چرا؟

۲۱. خط های $x + 4y = 7$ و $3x + 12y = 4$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۲۲. هر یک از دستگاه های زیر را حل کنید

$$\text{(روش حذفی)} \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$

$$\text{(روش جایگزینی)} \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\text{(روش دلخواه)} \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{(روش دلخواه)} \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

* هر یک از مسائل زیر را با تشکیل معادلات دو مجهولی حل کنید.

۲۳. دو برابر طول مستطیلی مساوی ۳ برابر عرض آن است. اگر محیط مستطیل، ۳۲ متر باشد، طول و عرض آن چند متر است؟

۲۴. در شکل زیر $2x + y = 70$ و $x - y = 11$ اندازه ی x و y را به دست آورید. (اندازه ها برحسب میلی متر هستند).



۲۵. در یک مزرعه تعدادی گوسفند و مرغ وجود دارد اگر تعداد سرهای آن ها ۳۵ و مجموع پاهای آن ها ۱۲۰ تا باشد چند گوسفند و چند مرغ وجود دارد؟

۲۶. دو زاویه مکمل یکدیگرند و اختلاف آن ها ۳۰ درجه است. اندازه ی هر زاویه را حساب کنید.

۲۷. سن خواهر مریم ۳ برابر سن اوست و اختلاف سن آن‌ها ۱۸ سال است. سن هر یک را تعیین کنید.

۲۸. هواپیمایی می‌خواهد از روی باند بلند شود. ابتدا ۳۰۰ متر روی باند حرکت می‌کند. تا سرعت لازم را پیدا کند. سپس با زاویه ۴۵ درجه از زمین بلند می‌شود. وقتی به بالای انتهای باند می‌رسد، ۱۴۰ متر ارتفاع گرفته است. طول کل باند چقدر است؟

۲۹. شیب جاده ای ۵ درصد است. اگر ۴۰۰ متر به صورت افقی حرکت کنیم، چند متر بالاتر می‌رویم؟

۳۰. دستگاه روبرو را به روش **ترسیمی** حل کنید.

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

۳۱. دستگاه مقابل را به روش **حذفی** حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = 3 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = -2 \end{cases}$$

۳۲. معادله ی خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x + 3y = -14$, $2x - y = 7$ بگذرد و شیب آن مساوی ۲- باشد.

آزمون پایانی معادلات خط

ردیف	امام علی (ع): غیبت کردن، نشانه منافی است. (میزان الحکمه ج ۹ ص ۴۴۵)	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) خط $y = 2x + 1$ از مبدأ مختصات می گذرد.</p> <p>(ب) نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی خط $y = \frac{1}{2}x + 2$ قرار دارد.</p> <p>(ج) شیب خط $2y = 4x$ برابر ۴ است.</p> <p>(د) دو خط $2y = 4x - 1$ و $y - 2x = 2$ با هم موازی هستند.</p>	۲
۲	<p>گزینه مناسب را علامت بزنید.</p> <p>* معادله ی خطی که از نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ گذشته و موازی محور X ها باشد، کدام است؟</p> <p>(۱) $x = 2$ (۲) $y = 2$ (۳) $y = \frac{3}{2}x$ (۴) $y = \frac{2}{3}x$</p> <p>* خط $y = -2x + 3$ از کدام یک از نقاط زیر می گذرد؟</p> <p>(۱) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$</p> <p>* معادله ی خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$ می گذرد، کدام است؟</p> <p>(۱) $y = -2x$ (۲) $y = -\frac{1}{2}x$ (۳) $x = 3$ (۴) $y = -6$</p> <p>* معادله ی خطی که شیب آن ۳- بوده و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ بگذرد، کدام است؟</p> <p>(۱) $y = 3x + 5$ (۲) $y = -3x$ (۳) $y = 3x - 5$ (۴) $y = -3x + 5$</p>	۲
۳	<p>کامل کنید.</p> <p>(الف) در معادله ی $4y = 8x - 10$ شیب خط برابر با است.</p> <p>(ب) نسبت تفاضل عرض ها به تفاضل طول های دو نقطه را گذرنده از آن دو نقطه گویند.</p> <p>(ج) عرض از مبدأ خط $2y - 20x = 14$ برابر است با.....</p> <p>(د) زاویه بین دو خط $y = 3$ و $x = -2$ برابر با درجه است.</p>	۲
۴	<p>هر یک از خط های زیر را رسم کنید.</p>	۲/۵

(الف) $y = \frac{2}{5}x - 4$

	$3x - 4y = 12$ (ب)	
۱	الف) معادله ی خطی را بنویسید که شیب آن -5 بوده و از $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ بگذرد.	
۰/۵	ب) معادله ی خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات و نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ بگذرد.	
۱	مقدار b را چنان بیابید که نقطه ی $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ روی خط $y = \frac{2}{3}x + b$ واقع باشد.	۶
۱	الف) عرض از مبدأ خط $6x + 3y = -9$ را مشخص کنید.	۷
۱	ب) شیب خطی را بنویسید که از نقاط $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.	
۲	دستگاه زیر را به روش حذفی حل کنید.	۸
	$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$	
۱	در یک پارکینگ روی هم ۲۰ موتورسیکلت و ماشین سواری وجود دارد. اگر مجموع چرخ های آن ها ۵۶ عدد باشد، در این پارکینگ چند موتور و چند ماشین وجود دارد (معادله ی دو مجهولی تشکیل دهید، حل آن لازم نیست).	۹

۱/۵	شیب و عرض از مبدأ خط $4y + 8x - 12 = 0$ را بیابید. (با راه حل)	۱۰
۱/۵	<p>دستگاه زیر را به روش جایگزینی حل کنید.</p> $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + 2y = 2 \end{cases}$	۱۱
۱/۵	معادله ی خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x + 3y = -14, 2x - y = 7$ بگذرد و شیب آن مساوی ۳ باشد	۱۲
۱	<p>سؤال جایزه :</p> <p>معادله ی خطی را بنویسید که از محل تقاطع دو خط به معادلات $2y - 3x = 17, y = 5 - 2x$ گذشته و بر خط $\frac{x}{4} + 3y + 1 = 0$ عمود باشد.</p> <p>الگوی عددی جالب: شما هم می توانید الگو را تا سه ردیف دیگر ادامه دهید. درسته؟</p> $13 \times 13 + 1 = 170$ $133 \times 133 + 11 = 17700$ $1333 \times 1333 + 111 = 1777000$ $13333 \times 13333 + 1111 = 177770000$	۱۳

فصل هفتم عبارت های گویا

خلاصه درس:

*** عبارت گویا:** عبارت کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای هستند.

$$\frac{\sqrt{7}x}{x^2}, \frac{2x-7}{x^2+3x}, \frac{-a}{b}, \frac{x^3}{2} \quad \text{مانند:}$$

نکته: عبارت هایی مانند $\sqrt[3]{x}$, $\frac{2}{\sqrt{x-3}}$, $|a-b|$ گویا نیستند.

عبارت های گویا در ریاضی، علوم، پزشکی، مهندسی و اقتصاد کاربرد دارند.

*** ممکن است یک عبارت گویا به ازای بعضی مقادیر تعریف نشده باشد یعنی مخرج کسر صفر شود.**

در این صورت باید مقادیری از متغیر را که به ازای آن ها مخرج کسر صفر می شود، حذف کنیم.

سؤال: عبارت گویای $\frac{x+5}{x^2-3x}$ به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

پاسخ: مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه های آن را پیدا می کنیم:

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

یعنی کسر فوق به ازای ۰ و ۳ تعریف نشده است.

*** ساده کردن یک عبارت گویا:** صورت و مخرج کسر را به صورت حاصل ضرب دو یا چند

عبارت جبری می نویسیم و سپس عبارت های مساوی را از صورت و مخرج باهم ساده می کنیم.

یادآوری: در تجزیه از فاکتورگیری و اتحادها کمک می گیریم.

◀ **مثال «۱»:** عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^2-9}{6x+18} = \frac{(x-3)(\cancel{x+3})}{6(\cancel{x+3})} = \frac{x-3}{6}$$

*** ضرب و تقسیم عبارت های گویا:** همانند عملیات اعداد گویا انجام می دهیم:

در ضرب، صورت در صورت و مخرج در مخرج ضرب می شود:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

در تقسیم، کسر اول در معکوس کسر دوم ضرب می شود:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

ب) تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای : تک تک جملات صورت را بر جمله مخرج تقسیم می کنیم.

◀ مثال «۶» :

$$\frac{\lambda m^3 + \epsilon m^2 + m}{2m} = \frac{\lambda m^3}{2m} + \frac{\epsilon m^2}{2m} + \frac{m}{2m} = \epsilon m^2 + 3m + \frac{1}{2}$$

ج) تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای :

ابتدا تقسیم های معمولی را از ابتدایی یادآوری می کنیم :

مقسوم ۲۹	۳	→	مقسوم علیه	}	رابطه های تقسیم :	
۲۷	۹	→	خارج قسمت			$3 \times 9 + 2 = 29$
۲	باقیمانده					$2 < 3$

مراحل تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای شبیه مراحل تقسیم معمولی است :

مرحله ی اول : ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را به شکل استاندارد از بالاترین توان به کمترین توان متغیر می نویسیم.

$$2x^3 - x^2 + x + 4 \quad | \quad x+1$$

مرحله ی دوم : اولین جمله مقسوم را بر اولین جمله مقسوم علیه تقسیم کرده و حاصل را در خارج قسمت می نویسیم.

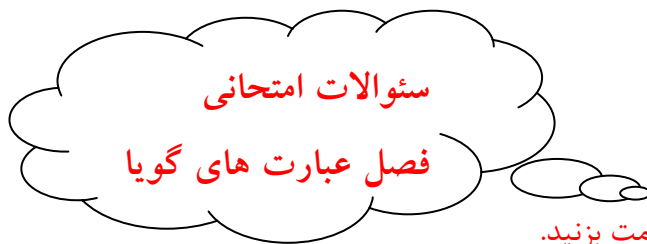
$$\frac{2x^3}{x} = 2x^2$$

مرحله ی سوم : خارج قسمت بدست آمده در مرحله ی قبل را در مقسوم علیه ضرب می کنیم و حاصل را زیر مقسوم می نویسیم و کم می کنیم (درواقع باید عبارت دومی را قرینه کنیم).

$$\begin{array}{r} \cancel{2x^3} - x^2 + x + 4 \quad | \quad x+1 \\ -(2x^3 + 2x^2) \\ \hline -3x^2 + x + 4 \end{array}$$

مرحله ی چهارم : چند جمله ای به دست آمده ی جدید را مانند یک مقسوم علیه جدید می گیریم. مراحل دوم و سوم را تکرار می کنیم. این عمل را آن قدر تکرار می کنیم تا درجه ی عبارت باقی مانده از مقسوم علیه کم تر باشد.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + x + 4 \quad | \quad x+1 \\ -(2x^3 + 2x^2) \\ \hline -3x^2 + x + 4 \\ -(-3x^2 - 3x) \\ \hline 4x + 4 \\ -(4x + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$



۱. گزینه مناسب را علامت بزنید.

الف) کدام عبارت گویا نیست؟

(۱) $\frac{-a}{b}$ (۲) $\frac{۱۰}{x+۲}$ (۳) $\frac{\sqrt{x}}{۵}$ (۴) $\frac{۱}{x}$

ب) ساده شده ی عبارت $\frac{-۴۲x^r y^r}{۶x^r y}$ برابر است با :

(۱) $\frac{-۷x}{y}$ (۲) $\frac{-۷y}{x}$ (۳) $-۷xy$ (۴) $-۷xy^r$

ج) عبارت گویای $\frac{x+۵}{x-۳}$ به ازای چه مقداری تعریف نشده است؟

(۱) $x=۳$ (۲) $x=-۳$ (۳) $x=۵$ (۴) $x=-۵$

د) ساده شده ی عبارت $\frac{x^r+۳x^r}{x^r+۳x}$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{x}{۳}$ (۲) $\frac{x+۳}{x}$ (۳) $x+۳$ (۴) x

ه) کدامیک از عبارات های زیر گویا است؟

(۱) \sqrt{xy} (۲) $\frac{\sqrt{a}}{a+b}$ (۳) $\frac{۲}{۵}x$ (۴) $|x-y|$

و) حاصل کدام گزینه مساوی ۱- است؟

(۱) $\frac{۳m+۴}{۳m-۴}$ (۲) $\frac{۲x-۵}{۵-۲x}$ (۳) $\frac{۲x+۳}{۳+۲x}$ (۴) $\frac{۳-b}{۳+b}$

۲. مشخص کنید کدام یک از عبارات های زیر گویا هستند؟

$\frac{۸}{a+۱۰}$, $\frac{\sqrt{۳x}}{۵}$, $\frac{۲}{\sqrt[۲]{x}}$, $\frac{x\sqrt{y+۳}}{x^r}$, γ

۳. هر یک از عبارات های زیر به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟

الف) $\frac{x+20}{x}$

ب) $\frac{3x}{x^2-16}$

ج) $\frac{x+7}{x(x-2)}$

د) $\frac{2m+3}{m^2-5m+6}$

۴. حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{28y^2x}{14yx^2} =$

ب) $\frac{t-7}{7-t} =$

ج) $\frac{12x+24}{4x^2+8x} =$

د) $\frac{x^2-3x}{x^2-9} =$

۵. الف) به ازای چه مقداری از X عبارت گویای زیر تعریف نشده است؟

$$\frac{5x-4}{x^2-2x}$$

ب) عبارت گویایی را بیابید که اگر با $\frac{x+1}{x-1}$ جمع شود، حاصل آن برابر ۳ شود.

۶. در جای خالی چه عبارتی قرار دهیم تا تساوی برقرار باشد؟

$$\frac{3x}{x-5} = \frac{\dots\dots\dots}{x^2 - x - 20}$$

$$\frac{\dots\dots\dots \times (x-7)}{x^2 - 49} = 10$$

۷. حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید.

$$\frac{-5x+8}{x+9} + \frac{4x-17}{x+9} =$$

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{x+1}{y-1} =$$

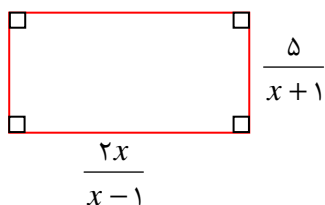
$$\frac{x^2+1}{x^2-4x-21} - \frac{x-3}{x+3} =$$

۸. مساحت یک مستطیل برحسب m به صورت $2m^2 - 4m + 2$ و عرض آن $m-1$ می باشد. طول این مستطیل را برحسب m به دست آورید.

۹. حاصل عبارت زیر را به دست آورده و جواب را ساده کنید.

$$\frac{\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 1}{1 - \frac{6}{x^2} - \frac{1}{x}} =$$

۱۰. مساحت و محیط مستطیل زیر را حساب کنید.



۱۱. ضرب و تقسیم های زیر را انجام دهید (ابتدا در صورت امکان عبارت ها را ساده کنید).

$$\frac{a}{2b} \times \frac{3b}{2a^2} \times \frac{4}{a} =$$

$$\frac{x^2 - 16}{x + 4} \times \frac{x + 2}{x^2 - 8x + 16} =$$

$$\frac{b^2 - 1}{7 - b} \div \frac{b + 1}{b^2 - 49} =$$

۱۲. اگر نسبت $2X - Y$ به $X + Y$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، نسبت X به Y چقدر خواهد بود؟

۱۳. ساده شده ی عبارت $\frac{x^2 - 4}{10x} \times \frac{5x^2}{x^2 - 2x}$ کدامیک از عبارت های زیر است؟

(الف) $X - 1$ (ب) $\frac{x + 2}{2x}$ (ج) $\frac{x + 2}{2}$ (د) $\frac{x - 1}{2x}$

۱۴. کیومرث در برگه امتحانی خود حاصل عبارتی را به اشتباه چنین نوشته است. اشتباه او را توضیح دهید.

$$\frac{3x + 1}{2} - \frac{1 - x}{2} = \frac{3x + 1 - 1 - x}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

۱۵. (الف) عبارت $\frac{2}{3x - 1}$ به ازای چه مقداری تعریف نشده است؟

(ب) حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2} \div \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} =$$

۱۶. مریم در تقسیم $\frac{x^2 + 2x - 5}{x - 1}$ خارج قسمت خود را $x + x^2$ و باقی مانده تقسیم را $3X - 5$

محاسبه کرده است. آیا مریم تقسیم را کامل و درست انجام داده است چرا؟ (امتحان کنید).

۱۷. تقسیم کنید.

$$2x^3 - 4x^2 + 2x \quad | \quad x - 2$$

$$5x^3 + 4x^2 - x + 3 \quad | \quad x^2 + 1$$

۱۸. اگر خارج قسمت تقسیم $x^2 - 7x + b$ بر $x + a$ برابر $x - 2$ و باقی مانده مساوی ۵ باشد، مقادیر a و b را بیابید. (از رابطه های تقسیم استفاده کنید).

۱۹. الف) حاصل $(4x^3 - 3x^2 + x + 7) \div (x^2 - 2)$ را به دست آورید.

ب) رابطه های تقسیم را بنویسید.

۲۰. مقدار k را چنان بیابید که چند جمله ای $6x^3 - 5x^2 - x - k$ بر $2x - 1$ بخش پذیر باشد. (راهنمایی: تقسیم را انجام دهید و باقی مانده را مساوی صفر قرار دهید).

الگوی عددی جالب: شما هم می توانید الگو را تا سه ردیف دیگر ادامه دهید. جالبه نه؟

$$11 \times 11 = 121$$

$$101 \times 101 = 10201$$

$$1001 \times 1001 = 1002001$$

$$10001 \times 10001 = 100020001$$

«آزمون پایانی فصل ۷» عبارات های گویا

بارم	رسول اکرم (ص): انسان بلند مرتبه چون به فهم و دانایی رسد، متواضع می شود.	ردیف
۲	<p>گزینه ی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>الف) به ازای چه مقداری از X عبارت $\frac{x-5}{x}$ تعریف نشده است؟</p> <p>(۱) $X=1$ (۲) $X=-1$ (۳) $X=5$ (۴) $X=0$</p> <p>ب) کدام عبارت گویا نیست؟</p> <p>(۱) $\frac{x}{y}$ (۲) $\frac{1}{x}$ (۳) \sqrt{x} (۴) $\frac{5}{6}$</p> <p>ج) ساده شده ی $\frac{18a^7b}{60a^2b}$ کدام است؟</p> <p>(۱) $\frac{10}{3}a$ (۲) $\frac{3}{10}a$ (۳) $\frac{3b}{10a}$ (۴) $\frac{10}{3}ba$</p> <p>د) حاصل کدام گزینه با $\frac{(x+y)z}{b}$ برابر است؟</p> <p>(۱) $\frac{1}{b}z(y+x)$ (۲) $\frac{xz+y}{b}$ (۳) $\frac{z}{b}(xy)$ (۴) $b(x+y)z$</p>	۱
۲	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>* $\frac{\sqrt{x^6}}{2}$ عبارتی گویا است.</p> <p>* ساده شده ی $\frac{ax+a}{a}$ برابر است با $x+a$</p> <p>* عبارت $\frac{x+7}{x-1}$ به ازای $x=-1$ تعریف نشده است.</p> <p>* حاصل $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$ برابر با $\frac{a^2-b^2}{ab}$ است.</p>	۲
۲	<p>هر یک از عبارات زیر به ازای چه مقادیری تعریف نشده است؟</p> <p>$\frac{x+1}{4x^2+20x}$</p> <p>$\frac{5}{x^2+x-12}$</p>	۳

۲	$\frac{a^r - 9}{3a + 9} =$ $\frac{x^r - y^r}{y - x} =$	۴	عبارات زیر را ساده کنید.
۲	$\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}\right)\left(\frac{x^r - y^r}{2y}\right)$	۵	حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.
۰/۵	$\frac{z(x+y)}{t} = \dots\dots\dots(x+y)$	۶	الف) در جای خالی عبارتی مناسب بنویسید تا تساوی برقرار شود. ب) حاصل را بدست آورده و ساده کنید.
۱/۵	$\left(\frac{4x^r}{3xy}\right) \div \left(\frac{8x}{y^r}\right) =$		
۲	<p>الف) $\frac{x-7}{x+3} - \frac{x+4}{x+3} =$</p> <p>ب) $\frac{2a^r - 16}{a^r - 4} + \frac{a+4}{a+2} =$</p>	۷	حاصل عبارات زیر را بدست آورید.
۲		۸	اگر $A = \frac{3}{2x-4}$ ، $A+B = \frac{x+5}{2(x^r-4)}$ باشد مقدار عبارت B را بیابید.
۲	$x^r + x^r + 3 \left \frac{-1+x^r}{\quad} \right.$	۹	تقسیم زیر را انجام دهید. (ابتدا عبارات را استاندارد کنید.)

۲	<p>به ازای چه مقداری از k چند جمله ای $x^3 + 2x^2 - x + k - 1$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است؟</p>	۱۰
۱/۵	<p>سئوال جایزه : اگر خارج قسمت تقسیم $x^2 - 7x + b$ بر $x + a$ برابر $x - 2$ و باقی مانده ۵ باشد، مقادیر a , b را بیابید.</p> <p>الگوی عددی جالب : شما هم می توانید الگو را تا سه ردیف دیگر ادامه دهید. جالبه نه؟</p> <div style="background-color: #f0e68c; padding: 10px; text-align: center;"> $9 \times 9 + 9 = 90$ $99 \times 99 + 99 = 9900$ $999 \times 999 + 999 = 999000$ $9999 \times 9999 + 9999 = 99990000$ </div>	۱۱

فصل هشتم حجم و مساحت

خلاصه درس :

* حجم و مساحت کره :

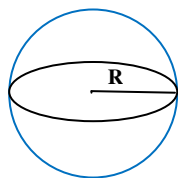
انواع حجم :
 ۱. منشوری
 ۲. کروی
 ۳. هرمی

- حجم های منشوری را به طور کامل در ریاضی هفتم یاد گرفتید.

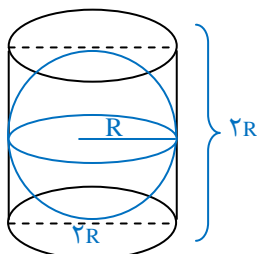
تعریف دایره : دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که همه ی آن نقاط از یک نقطه در همان صفحه به نام مرکز به یک فاصله است. به این اندازه ی ثابت شعاع دایره می گوئیم.

تعریف کره : کره را همانند دایره تعریف می کنیم : کره مجموعه نقاطی از فضا است که همه ی آن نقاط از یک نقطه در فضا به نام مرکز به یک فاصله هستند. مانند انواع توپ و کره ی زمین.

* اگر یک کره را به طور کامل درون یک استوانه قرار دهیم، به طوری که از طرف بالا و پایین بر استوانه مماس شود، گوئیم کره در استوانه محاط شده و استوانه نیز بر کره محیط شده است.



نکته : اگر کره ای در یک استوانه محاط شود، ارتفاع استوانه برابر قطر کره و شعاع قاعده استوانه با شعاع کره مساوی است.



*** حجم کره :**

با توجه به شکل بالا و یک آزمایش ساده ثابت می شود :

$$\text{حجم کره} = \text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi R^2 (2R) = 2\pi R^3$$

$$\Rightarrow \text{حجم نیم کره} = \frac{2}{3} \pi R^3 \Rightarrow \text{حجم کره} = 2 \left(\frac{2}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

در نتیجه :

$$S = 4\pi R^2$$

*** مساحت کره :** مساحت کره ای به شعاع R برابر است با :

◀ **مثال «۱» :** حجم و مساحت کره ای به قطر ۱۲cm را به دست آورید.

$$\Rightarrow \text{شعاع} = 12 \div 2 = 6 \quad \text{قطر کره} = 12$$

پاسخ :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3/14 \times 6^3 = \frac{4}{3} \times 3/14 \times 216 = 904/32$$

$$S = 4\pi R^2 = 4 \times 3/14 \times 6^2 = 4 \times 3/14 \times 36 = 452/16$$

نکته «۱» : از دوران نیم دایره حول قطر آن کره بدست می آید.

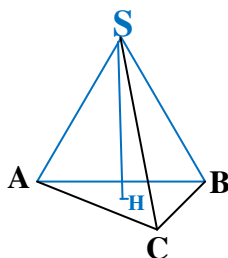
نکته «۲» : از دوران ربع دایره حول شعاع آن نیم کره بدست می آید.

*** حجم هرم و مخروط :**

(الف) هرم : هرم شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین (چند ضلعی محدب) به نام قاعده است.

ارتفاع هرم : به فاصله ی رأس هرم تا قاعده را ارتفاع هرم گویند.

◀ **مثال «۲» :** رأس : S ، شکل قاعده : مثلث ، تعداد وجه ها : ۳ وجه ، شکل وجه ها : مثلثی ، نام قاعده : مثلث ABC.



نکته : وجه جانبی (پهلوهایی هرم) همگی مثلثی شکل هستند.

* حجم هرم :

کلامی : ارتفاع × مساحت قاعده × $\frac{1}{3}$ = حجم هرم

جبری : $V = \frac{1}{3}sh$ هرم

◀ مثال «۳»: حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع ۵cm و ارتفاع هرم ۹ سانتی متر را حساب کنید.

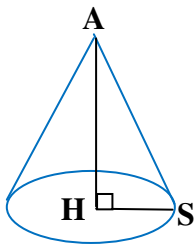
$$S = 5 \times 5 = 25 \Rightarrow V = \frac{s.h}{3} = \frac{25 \times 9}{3} = 75 \text{ cm}^3$$

نکته «۱»: واحد حجم مترمکعب یا سانتی مترمکعب است و در مایعات معمولاً لیتر است.

نکته «۲»: اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های آن ها باهم برابرند.

* مخروط : مخروط شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

\overline{AH} ارتفاع، A رأس و \overline{HS} شعاع قاعده و \overline{AS} مولد مخروط است.



نکته : از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائم آن مخروط بدست می آید.

* حجم مخروط :

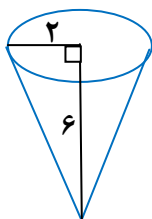
کلامی : ارتفاع × مساحت قاعده × $\frac{1}{3}$ = حجم مخروط

جبری : $V = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

R شعاع قاعده (دایره) و h ارتفاع مخروط و $\pi \approx 3/14$

◀ مثال «۴»: حجم مخروط زیر را حساب کنید.

$$V = \frac{sh}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{3/14 \times 2 \times 2 \times 6}{3} = 25/12$$



*** سطح و حجم :**

- (۱) از دوران مستطیل حول طول یا عرض آن، استوانه بدست می آید.
- (۲) از دوران مربع حول یکی از اضلاع آن، استوانه بدست می آید.
- (۳) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع زاویه ی قائمه، مخروط حاصل می شود.
- (۴) از دوران مثلث قائم الزاویه حول وتر دو مخروط حاصل می شود.
- (۵) از دوران مثلث متساوی الاضلاع حول یک ضلع آن دو مخروط مساوی پدید می آید.
- (۶) از دوران مربع حول یک قطر آن دو مخروط هم قاعده و مساوی پدید می آید.
- (۷) از دوران لوزی حول یک قطر آن دو مخروط برابر و به هم چسبیده بدست می آید.
- (۸) از دوران نیم دایره حول قطر آن کره بدست می آید.
- (۹) از دوران ربع دایره حول شعاع آن نیم کره بدست می آید.

◀ **مثال «۵» :** حجم حاصل از دوران نیم دایره ای به قطر 10 cm را حول قطر آن پیدا کنید.

پاسخ : از دوران نیم دایره حول قطر آن کره پدید می آید بنابراین :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{500}{3} \pi \quad (\text{شعاع کره } 5 = 10 \div 2)$$

* مساحت کل مکعبی به ضلع a برابر است با $6a^2$.

* مساحت کل مکعب مستطیلی به ابعاد a و b و c برابر است با $2(bc + ac + ab)$

نمونه سئوالات امتحانی سطح و حجم

۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.
- (الف) کره مجموعه نقاطی از صفحه است که همه ی نقاط آن از یک نقطه به یک فاصله اند.
- (ب) از دوران نیم دایره حول قطر آن نیم کره پدید می آید.
- (ج) قاعده ی مخروط دایره ای و قاعده ی هرم یک چند ضلعی است.
- (د) نحوه ی محاسبه حجم هرم و مخروط مثل هم است.
- (ه) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن هرم پدید می آید.
- (و) حجم هرمی با مساحت قاعده ی ۲۰ و ارتفاع ۶ برابر است با ۴۰.
- (ز) ممکن است در حالت خاصی حجم کره با مساحت کره برابر شود.
- (ح) حجم هرمی که مساحت قاعده ی آن $9\sqrt{3}$ و ارتفاع هرم $\sqrt{27}$ سانتی متر باشد، ۲۷ سانتی متر مکعب است.

۲. کامل کنید.

- * به فاصله ی رأس هرم تا قاعده ی آن را هرم گویند.
- * شکل وجه های جانبی هرم به صورت است.
- * اگر دو هرم قاعده های هم مساحت و ارتفاع برابر داشته باشند آنگاه حجم های آن دو
- * حجم هرم مربع القاعده ای به اضلاع ۴ و ارتفاع هرم ۶ باشد، برابر است با
- * حجم هرم به صورت جبری برابر است با
- * مخروط شبیه هرم است که قاعده ی آن به شکل است.
- * از دوران مستطیل حول طول آن بدست می آید.
- * از دوران نیم دایره حول قطر آن پدید می آید.
- * از دوران ربع دایره حول شعاع آن به وجود می آید.
- * مساحت کل مکعبی به ضلع ۵ cm برابر است با
- * از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن بدست می آید.
- * نسبت مساحت کره به حجم آن مساوی برابر شعاع کره است.
- * اگر مساحت قاعده و ارتفاع یک هرم با مساحت قاعده و ارتفاع یک مخروط برابر باشد، نسبت حجم های این دو شکل برابر است با

۳. گزینه ی مناسب را علامت بزنید.

الف) از دوران مربع حول یک ضلع آن چه شکلی پدید می آید؟

- (۱) هرم (۲) استوانه (۳) مخروط (۴) کره

ب) اگر شعاع کره ای را ۳ برابر کنیم، حجم آن چند برابر می شود؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۸

ج) حجم هرم مربع القاعده ای به قطر قاعده $10\sqrt{2}$ و ارتفاع ۱۵ چند است؟

- (۱) ۲۰۰ (۲) ۳۰۰ (۳) ۵۰۰ (۴) ۶۰۰

د) نسبت عددی حجم کره به مساحت کره کدام است؟

- (۱) $4R$ (۲) $3R$ (۳) $\frac{1}{4}R$ (۴) $\frac{1}{3}R$

هـ) حجم مخروطی به شعاع ۱ cm و ارتفاع ۳ cm چند سانتی متر مکعب است؟

- (۱) $3/14$ (۲) $6/28$ (۳) $9/42$ (۴) $\pi/3$

و) مساحت کره ای به قطر ۶ سانتی متر برابر است با :

- (۱) 12π (۲) 36π (۳) 72π (۴) 144π

ز) مکعب مستطیلی به ابعاد ۴ و ۵ موجود است اگر مساحت کل این مکعب مستطیل ۹۴ سانتی

متر مربع باشد، ارتفاع این شکل چند است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

ح) کره ای به قطر ۴ cm را درون استوانه ای محاط کرده ایم، حجم استوانه چند سانتی متر مکعب

است؟

- (۱) 4π (۲) 48π (۳) 12π (۴) 16π

۴. حجم و مساحت کره ای به شعاع ۳cm را بدست آورید.

۵. سطح کره ای را پیدا کنید که حجم آن 36π باشد (برحسب π)

۶. کره ای در استوانه ای به قطر ۶ سانتی متر محاط شده است :

الف) حجم کره را بدست آورید.

ب) مساحت کره را بدست آورید.

ج) حجم استوانه را پیدا کنید.

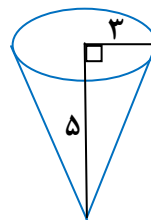
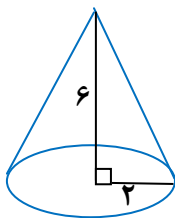
۶. مهدی نیم کره ای توپر به قطر ۲۰ سانتی متر دارد. می خواهد سطح آن را با کاغذ کادو بپوشاند. حداقل چند سانتی متر مربع کاغذ کادو به کار می رود؟

۷. حجم هرمی که قاعده ی آن یک لوزی به قطرهای ۸ و ۶ و ارتفاع هرم ۹ سانتی متر باشد، را حساب کنید.

۸. حجم هرم مربع القاعده ای به قطر قاعده ی $3\sqrt{2}$ و ارتفاع ۵ متر چند مترمکعب است؟

۹. قاعده ی یک هرم مستطیلی به ابعاد ۶ و ۱۰ سانتی متر است. اگر ارتفاع هرم ۱۵ سانتی متر باشد، حجم هرم را پیدا کنید.

۱۰. حجم شکل های زیر را به دست آورید.



۱۱. الف) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن چه شکلی حاصل می شود؟

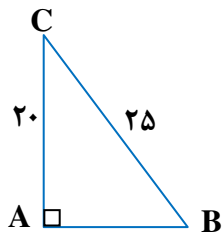
ب) حجم مخروطی به شعاع قاعده ۴ cm و ارتفاع ۱۲ cm را حساب کنید.

۱۲. وتر و یک ضلع قائم مثلث قائم الزاویه ای به ترتیب ۱۰ و ۶ می باشند. این مثلث را حول ضلع ۶ سانتی متر دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بدست آورید

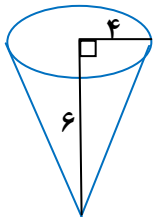
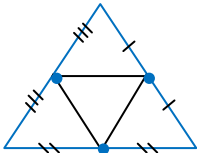
۱۳. گنجایش مخروطی ۲۸۲۶۰ لیتر است. اگر شعاع قاعده ی آن ۳ متر باشد، ارتفاع آن چند متر است (هر مترمکعب ۱۰۰۰ لیتر است).

۱۴. الف) اگر هرم منتظمی با قاعده ی مثلث را از بالا نگاه کنیم، چه شکلی دیده می شود؟

ب) مثلث قائم الزاویه ABC را حول ضلع AC دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بدست آورید.

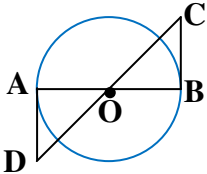


۱۵. در استوانه ای که ارتفاع و قطر قاعده ی آن باهم برابرند، کره ای محاط شده است. نسبت حجم کره به حجم استوانه را پیدا کنید.

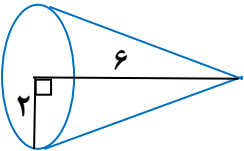
۰/۵	الف) شکل وجه های جانبی یک هرم چگونه است؟	۶
۱	ب) در چه شرایطی هرم را منتظم می گوئیم؟	
۰/۵	ج) قاعده ی هرم محدب است یا مقعر؟	
۱/۵	قاعده ی هرمی به شکل مستطیل به ابعاد ۸ و ۶ سانتی متر است. اگر ارتفاع هرم ۱۰ سانتی متر باشد، حجم هرم را حساب کنید.	۷
۱/۵	حجم هرمی ۲۲۵ سانتی متر مکعب و مساحت قاعده ی آن ۷۵ سانتی مترمربع است. ارتفاع هرم چند سانتی متر است؟	۸
۱/۵	حجم شکل زیر را بدست آورید.	۹
		
۱/۵	مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائم ۳ و ۴ سانتی متر را حول ضلع ۴ سانتی متر دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را بدست آورید.	۱۰
۰/۵	الف) شکل زیر گسترده کدام حجم است؟ (مخروط، هرم، منشور)	۱۱
		
۲	ب) حجم مخروطی ۳۱۴ سانتی متر مکعب و ارتفاع آن ۱۲ سانتی متر است. شعاع قاعده مخروط را حساب کنید.	

آزمون نوبت دوم

ردیف	استفاده از ماشین حساب مانعی ندارد.	بارم										
۱	<p>درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.</p> <p>(الف) شاعران معروف قرن معاصر یک مجموعه را مشخص می کند.</p> <p>(ب) هر دو لوزی دلخواه همواره باهم متشابه هستند.</p> <p>(ج) درجه یک جمله ای $-3x^2y$ نسبت به متغیر y برابر یک است.</p> <p>(د) نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی خط $y = \frac{1}{2}x + 1$ قرار دارد.</p>	۱										
۲	<p>گزینه ی مناسب را علامت بزنید.</p> <p>(A) کدام گزینه نادرست است؟</p> <p>(۱) $Q \cup Q' = R$ (۲) $Q \cap Q' = \emptyset$ (۳) $Q \cap R = Q$ (۴) $Q' \cap Z = Z$</p> <p>(B) عدد $1 + \sqrt{48}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟</p> <p>(۱) ۶ و ۷ (۲) ۷ و ۸ (۳) ۸ و ۹ (۴) ۹ و ۱۰</p> <p>(C) اگر $x - y = 0$ باشد، می توان نتیجه گرفت:</p> <p>(۱) $x > y$ (۲) $x < y$ (۳) $x = y$ (۴) $x + y = 0$</p> <p>(D) کدام گزینه یک جمله ای است؟</p> <p>(۱) ۵ (۲) $\frac{2}{x}$ (۳) \sqrt{x} (۴) x^{-3}</p>	۱										
۳	<p>جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.</p> <p>(۱) اجتماع عضوهای دو مجموعه اعداد گویا و اعداد گنگ را می گویند.</p> <p>(۲) اطلاعات داده شده ی مسئله را و خواسته ی مسئله را می نامیم.</p> <p>(۳) برای محاسبه عرض از مبدا خط، در معادله مقدار y را مساوی قرار می دهیم.</p> <p>(۴) از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن بدست می آید.</p>	۱/۲۵										
۴	<p>سؤال را به جواب مربوطه در ستون سمت چپ وصل کنید.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>سؤال</th> <th>جواب</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>(الف) شیب خط $9x - 12 = 3y$؟</td> <td>۱</td> </tr> <tr> <td>(ب) عرض از مبدا خط $3x + 4y = 4$؟</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td>(ج) ریشه سوم عدد ۶۴؟</td> <td>۳</td> </tr> <tr> <td>(د) حاصل $2^{-2} + \frac{7}{3^2}$ = ؟</td> <td>۴</td> </tr> </tbody> </table>	سؤال	جواب	(الف) شیب خط $9x - 12 = 3y$ ؟	۱	(ب) عرض از مبدا خط $3x + 4y = 4$ ؟	۲	(ج) ریشه سوم عدد ۶۴؟	۳	(د) حاصل $2^{-2} + \frac{7}{3^2}$ = ؟	۴	۱
سؤال	جواب											
(الف) شیب خط $9x - 12 = 3y$ ؟	۱											
(ب) عرض از مبدا خط $3x + 4y = 4$ ؟	۲											
(ج) ریشه سوم عدد ۶۴؟	۳											
(د) حاصل $2^{-2} + \frac{7}{3^2}$ = ؟	۴											

۰/۵	الف) مجموعه A را با اعضا مشخص کنید.	۵
	$A = \{3x - 1 \mid x \in N, x \leq 2\} = \{$	
۰/۷۵	ب) مجموعه B را به زبان ریاضی بنویسید.	
	$B = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\} = \{$	
۱	اگر $M = \{۷ و ۶ و ۵\}$ و $H = \{۷ و ۸ و ۹\}$ باشد، $M \cap H$ و $M - H$ را مشخص کنید.	۶
۰/۵	الف) بین $\frac{2}{5}$ ، $\frac{3}{4}$ دو کسر بنویسید.	۷
۰/۵	ب) مجموعه $C = \{x \in R \mid 0 \leq x < 3\}$ را روی محور نشان دهید.	
۰/۷۵	اگر $a = -3$ و $b = -5$ مقدار $ a + a + b $ را بدست آورید.	۸
۰/۷۵	در شکل زیر O مرکز دایره و $\overline{AD}, \overline{BC}$ بر دایره مماسند نشان دهید: $\overline{AD} = \overline{BC}$.	۹
		
۰/۵	الف) مثلث ABC به اضلاع ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به اضلاع $x-1$ و 10 و $x+7$ باهم متشابه هستند، مقدار x را پیدا کنید.	۱۰
۰/۵	ب) در یک نقشه مقیاس $\frac{1}{500}$ است. فاصله ی دو نقطه روی نقشه ۲ سانتی متر است. فاصله ی این دو نقطه در اندازه ی واقعی چند متر است؟	

۰/۵	الف) حاصل را به صورت عددی توان دار بنویسید. $3^{-5} \times 7^{-2} \div 21^4 =$	۱
۰/۵	ب) عدد زیر را با نماد علمی نمایش دهید. $0.000000078 =$	
۰/۷۵	حاصل عبارت زیر را به دست آورید و جواب را ساده کنید. $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) =$	۱۲
۰/۵	مخرج کسر $\frac{5}{\sqrt{2}x}$ را گویا کنید.	۱۳
۰/۷۵	با استفاده از اتحادها، حاصل را بدست آورید. $(a-5)^2$	۱۴
۱	تجزیه کنید. $a^2 - 9 =$ $x^2 - 7x + 12 =$	۱۵
۰/۷۵	نامعادله زیر را حل کنید. $5(3-2x) \leq -2x+3$	۱۶
۱	خط $y = \frac{2}{3}x - 4$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.	۱۷

۱	$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases}$	دستگاه مقابل را به روش حذفی حل کنید.	۱۸
۰/۵		معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۵ بوده و با خط $y = \frac{2}{3}x - 4$ موازی باشد.	۱۹
۱	$x^2 - 5x - 24 \mid x - 8$	تقسیم زیر را انجام دهید.	۲۰
۰/۵	$n - \frac{n^r}{n - m} =$	حاصل را بدست آورید.	۲۱
۰/۵		الف) حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع قاعده ۵ و ارتفاع ۱۲ را بیابید.	۲۲
۰/۷۵		ب) حجم مخروط زیر را بدست آورید.	