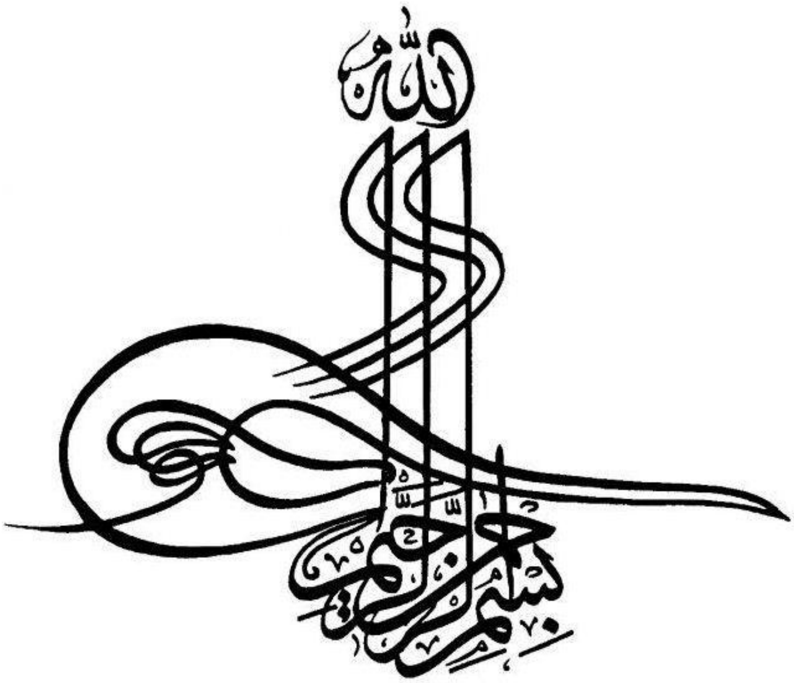

بسم الله الرحمن الرحیم

مجموعه ، الگو و دنباله

فصل اول ریاضی پایه دهم

رشته های تجربی و ریاضی فیزیک

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- حل تمامی تمرین‌ها ،فعالیت ها و کاردرکلاس های کتاب

مؤلف:

حبیب هاشمی

۱۳۹۶

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب فصل اول ریاضی پایه دهم ، مبحث «مجموعه، الگو و دنباله » نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.

۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.

۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.

۴- در این کتاب با نگاهی عمیق‌تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال‌ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.

۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.

۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.

۷-توجه به دانش قبلی دانش آموزان.

۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب.

در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبیب هاشمی

درس اول : مجموعه های متناهی و نامتناهی

۱-۱-۱مجموعه های اعداد

انسان در طول تاریخ بر حسب نیاز خود از مجموعه های مختلف اعداد استفاده کرده است.

برخی از این مجموعه ها که در سال های قبل با آنها آشنا شدید به شرح زیر است.

مجموعه اعداد طبیعی : $N = \{۱,۲,۳, \dots\}$

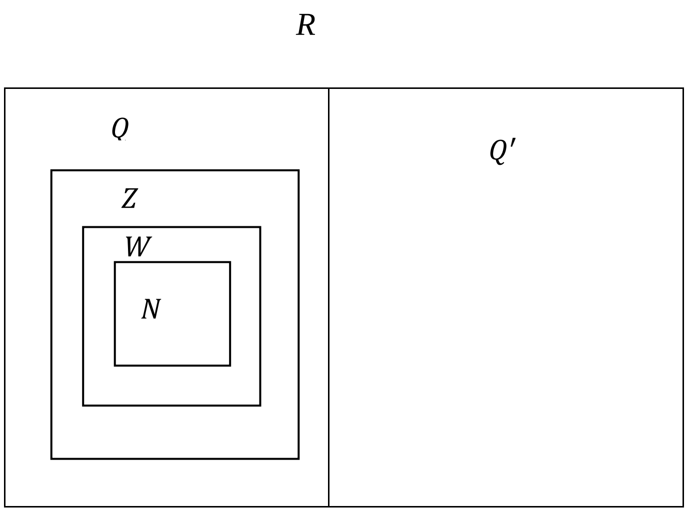
مجموعه اعداد حسابی : $w = \{۰,۱,۲,۳, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح : $z = \{\dots, -۲, -۱,۰, ۱,۲,۳, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا : $Q = \left\{\frac{m}{n} \middle| m,n \in z, n \neq ۰\right\}$

مجموعه اعداد گنگ : $Q' =$ مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد

مجموعه اعداد حقیقی : $R = Q \cup Q'$



نکته با توجه به شکل بالا داریم:

۱) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

۲) $R - Q = Q'$

۳) $R - Q' = Q$

۴) $Q \cap Q' = \emptyset$

بیشتر بدانیم: اعداد گویا به دو دسته تقسیم می شوند

دسته اول: اعداد گویای **مختوم** مانند

$$۰/۲ = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$$

$$۰/۳۵ = \frac{۳۵}{۱۰۰}$$

روش تشخیص اعداد گویا ی مختوم بدون تقسیم کردن صورت کسر بر مخرج

اگر یک کسر را تا جایی که امکان دارد صورت و مخرج آن را با هم ساده کنیم و مخرج کسر را به عاملهای اول تجزیه کنیم و به غیر از ۲ یا ۵ عامل دیگری نداشته باشد آن عدد یک عدد گویای مختوم است.

$$\frac{۳}{۵} \quad , \quad \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۲ \times ۵}$$

$$\frac{۳}{۴۰} = \frac{۳}{۲ \times ۲ \times ۲ \times ۵} = \frac{۲}{۲^{۳} \times ۵}$$

$$\frac{۱۶}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲۰} = \frac{۱}{۲^{۲} \times ۵}$$

دسته دوم: اعداد اعشاری **متناوب** : مانند

$$۰/۲۷۲۷۲۷... = ۰/\overline{۲۷}$$

$$۰/۲۳۵۱\,۳۵۱\,۳۵۱ = ۰/۲\overline{۳۵۱}$$

روش تشخیص اعداد گویا ی متناوب بدون تقسیم کردن صورت کسر بر مخرج

اگر یک کسر را تا جایی که امکان دارد صورت و مخرج آن با هم ساده کنیم و مخرج کسر را به عاملهای اول تجزیه کنیم مخرج هیچ کدام از عاملهای ۲ یا ۵ را نداشته باشد یا اگرعامل های ۲یا ۵ داشت عاملهای دیگری نیز داشته باشد در آن صورت آن عدد یک عدد گویای متناوب است

$$\frac{٤}{١٥}=\frac{٤}{٣\times ٥} \quad , \quad \frac{١٣}{٦٠}=\frac{١٣}{٢\times ٢\times ٣\times ٥} \quad , \quad \frac{٤}{٧}$$

نکته : اعداد اعشاری که نه مختوم هستند و نه متناوب جزء اعداد گنگ (اصم) به حساب می آیند. همچنین اعدادرادیکالی که جذر دقیق ندارند جزء اعداد گنگ (اصم) به حساب می آیند.

$\pi = ٣/١٤١٥١٩ \ldots$

$٠/١٠١٠٠١٠٠٠١٠٠٠٠ \ldots$

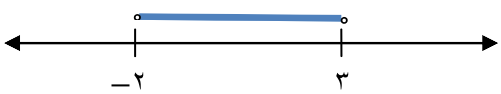
$\sqrt{٢}, \sqrt{٣}, \sqrt{٥},$

۲-۱-۱ بازه

بازه (فاصله): به هر زیر مجموعه ی پیوسته از اعداد حقیقی یک بازه می گوییم.

مثال:A مجموعه شامل اعداد حقیقی بین ۲- و ۳ یعنی

$A = \{x \in R \mid -٢ < X < ٣\}$



برای نشان دادن مجموعه A به زبان ساده تر (به صورت بازه) با نماد (۳ , ۲-) نمایش می دهیم.

انواع بازه: اگر $a, b \in R$, $a < b$ آن گاه داریم ۱) **بازه های باز**

الف) کراندار :

$(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$

مثال

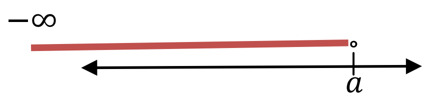
$(-۳,۴) = \{x \in R \mid -۳ < x < ۴\}$

ب)بی کران:

$(a,+\infty) = \{x \in R \mid x > ۰\}$

$(۳,+\infty) = \{x \in R \mid x > ۳\}$

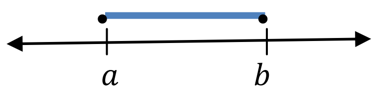
$(-\infty,a) = \{x \in R \mid x < a\}$



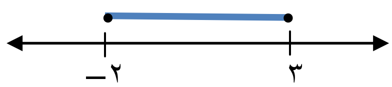
$(-\infty,۴) = \{x \in R \mid x < ۴\}$

۲) بازه ی بسته:

$[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$



$[-۲,۳] = \{x \in R \mid -۲ \leq x \leq ۳\}$

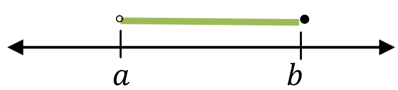


۳) بازه های نیم باز

الف) کراندار

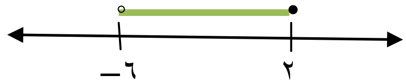
$[a,b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$



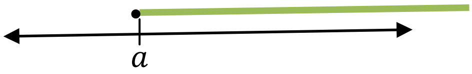
$[۴\,,۷) = \{x \in R \mid ۴ \leq x < ۷\}$

$(-٦\,,٢] = \{x \in R \mid -٦ < x \leq ٢\}$

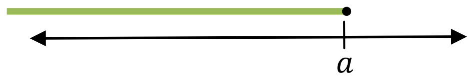


ب) بی کران

$[a\,,+\infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$



$(-\infty, a] = \{x \in R \mid x \leq a\}$

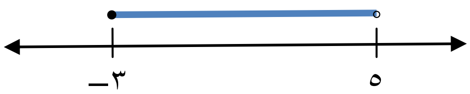


$[-٢, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq -٢\}$

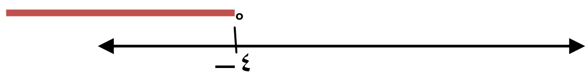
$(-\infty, ٥] = \{x \in R \mid x \leq ٥\}$

مثال: بازه های زیر را به صورت هندسی نمایش دهید:

$[-٣, ٥)$



$(-\infty, -٤)$



مثال: بازه های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید؟

$[-١, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq -١\}$

$[-٤, -١] = \{x \in R \mid -٤ \leq x \leq -١\}$

مثال: درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید:

الف) $-١ \in (-٢, ٠)$ درست

ب) $-٣ \in (-٣, ١)$ نادرست

پ) $٠ \in (-١, ٠]$ درست

ت) $\frac{٤}{٣} \in [\frac{١}{٢}, ٢)$ درست

ث) $-١ \in \{-٢, ١\}$ نادرست

دقت کنیم در مجموعه ؛**فقط** اعداد داده شده عضو مجموعه هستند درقسمت **ت** ۱- عضو مجموعه نیست (مجموعه را با بازه اشتباه نگیریم)

ج) $-۱ \in [-۲,۱)$ درست

چ) $\pi \in (۳,+\infty)$ درست

ح) $\sqrt{۳} \in (۰,۱]$ نادرست

خ) $[۲,۵) \subseteq (۲,۵]$ نادرست

د) $۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳} \in (۱,+\infty)$ درست

ذ) $\sqrt{۳} \in (-۲,۳)$ درست

ر) $(-۱,۳) \subseteq [-۱,۳)$ درست

ز) $[-۱,۳) \subseteq (-۱,۳)$ نادرست

س) $\{۰,۱\} \subseteq [-۱,۲)$ درست

ش) $[-۲,۳) \subseteq \{-۴,۴\}$ نادرست

نکته :تهی زیر مجموعه ی همه مجموعه هاست .

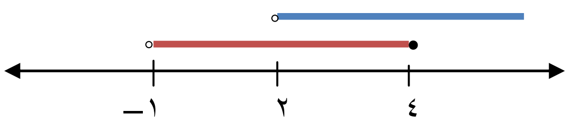
ژ) $\emptyset \subseteq [-۱۰,۰)$ درست

۳-۱-۱اعمال روی بازه ها

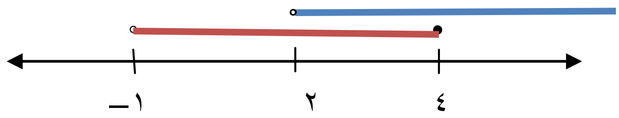
با توجه به مفهوم اجتماع، اشتراک و تفاضل در مجموعه ها می توان اجتماع ، اشتراک و تفاضل بازه ها را به دست آورد که بهتر است از نمایش هندسی (محور اعداد) استفاده کنیم به این صورت که نمایش هندسی هر دو بازه را روی یک محور رسم می کنیم و با توجه به شکل جواب را بدست می آوریم.

مثال:

$(-۱,۴] \cup (۲,+\infty) = (-۱,+\infty)$



$(-۱,۴] \cap (۲,+\infty) = (۲,۴]$



دقت کنیم چون $(۲,+\infty) \notin ۲$ پس در اشتراک قرار ندارد.

نکته: برای بدست آوردن **تفاضل** دو بازه مراحل زیر را انجام می دهیم

مرحله ۱) اشتراک دو بازه را به دست می آوریم.

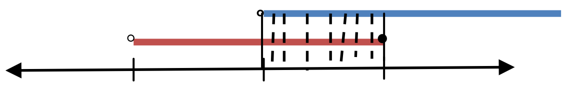
مرحله ۲) بازه ی اولی را روی محور رسم می کنیم و اشتراک را از آن حذف می کنیم

مرحله ۳) هر چه از مجموعه اول مانده است را به عنوان تفاضل در نظر می گیریم.

مثال:

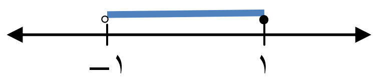
$(-۱,۳] - (۱,+\infty)$

مرحله ۱ اشتراک را بدست می آوریم.

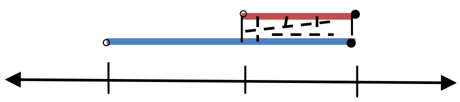


$(-۱,۳] \cap (۱,+\infty) = (۱,۳]$

مرحله ۲ بازه ی اولی یعنی $(-۱,۳]$ را روی محور رسم می کنیم و اشتراک را از آن حذف می کنیم.



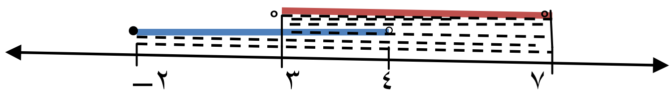
مرحله ۳ $\Rightarrow$



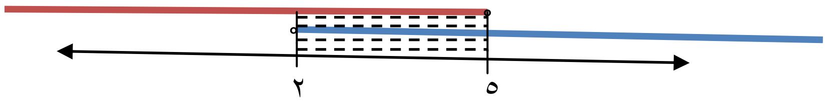
جواب نهایی: $(-۱,۱]$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

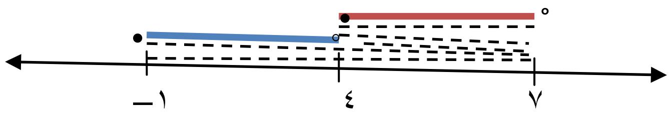
الف) $[-۲,۴) \cup (۳,۷) = [-۲,۷)$



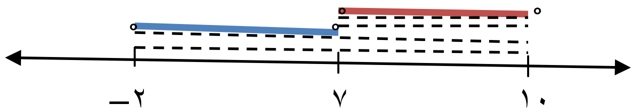
ب) $(۲,+\infty)\cap(-\infty,۵)=(۲,۵)$



پ) $[-۱,۴)\cup[۴,۷)=[-۱,۷)$

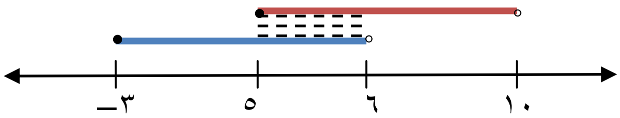


ت) $(-۲,۷)\cup(۷,۱۰]=(-۲,۱۰]-\{۷\}$



ث) $[-۳,۶)-[۵,۱۰)$

مرحله ۱



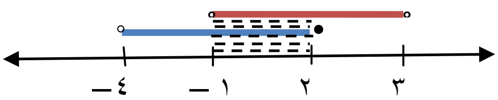
$[-۳,۶)\cap(۵,۱۰)=[۵,۶)$

مرحله ۳

مثال: اگر $B=(-۱,۳], A=(-٤,۲]$ باشند حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $A-B=$

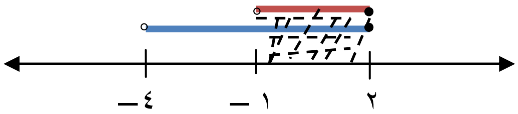
مرحله ۱ ابتدا اشتراک را بدست می آوریم.



$A\cap B=(-۱,۲]$

مرحله ۲ بازه اولی یعنی A را روی محور رسم می کنیم و اشتراک را از آن حذف می کنیم.

مرحله ۲



مرحله ۳

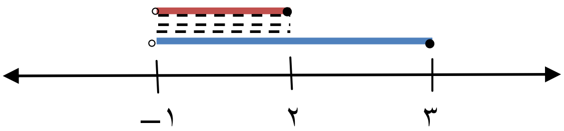
جواب نهایی : $(-۴,-۱]$

ب) $B-A=$

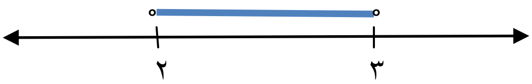
مرحله ۱ همانند قسمت الف

$B\cap A=(-۱,۲]$

مرحله ۲ بازه ی اولی یعنی B را روی محور رسم می کنیم و اشتراک قسمت هاشور خورده را از آن حذف می کنیم.

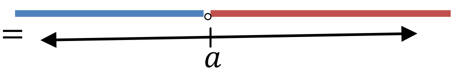


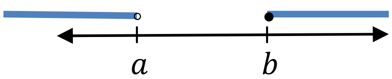
مرحله ۳



$(۲,۳]$ جواب نهایی

نکته: گاهی اجتماع دو یا چند بازه را به صورت تفاضلی می توان نشان داد. $(a<b)$

$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)=$  $=\{x|\ x<a$ یا $x>a\}=R-\{a\}$

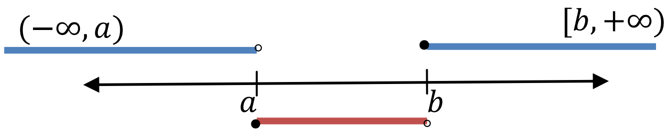
$(-\infty,a)\cup[b,+\infty)=$  $=\{x|\ x<a$ یا $x\geq b\}=R-[a,b)$

دقت کنیم برای نوشتن مجموعه $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ به صورت تفاضل کافی است مجموعه ای را پیدا کنیم که اجتماع آن مجموعه با $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ برابر R شود و آن مجموعه با مجموعه ی $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ اشتراکی نداشته باشد.

در این جا داریم

$$(-\infty, a) \cup [b, +\infty) \cup \underbrace{[a, b)}_{\text{بازه ی مورد نظر}} = R \Longrightarrow (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = R - [a, b)$$

اگر روی محور نمایش دهیم



از کل اعداد حقیقی بایستی $[a, b)$ را برداریم که همون $R - [a, b)$ میشود.

تست: $[-۱ , ۳) \cup (۳ , ۵)$ برابر است با:

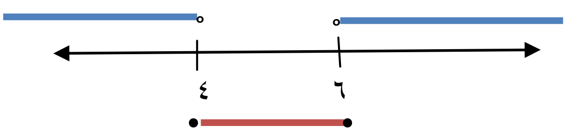
۱) $\{۳\}$ ۲) $(-۱,۵] - \{۳\}$ ۳) $[-۱,۵) - \{۳\}$ ۴) $(-۱,۵)$

طبق محور گزینه ۳

تست: اجتماع بازه های $(-\infty, ٤) \cup (٦, +\infty)$ را به کدام صورت زیر می توان نوشت؟

۱) $R - (٤,٦)$ ۲) $R - [٤,٦]$ ۳) $R - [٤,٦)$ ۴) $R - (٤,٦]$

از آنجایی که $(-\infty, ٤) \cup (٦, +\infty) \cup [٤/٦] = R$ پس $(-\infty, ٤) \cup (٦, +\infty) = \mathrm{R} - [٤/٦]$ به عبارتی

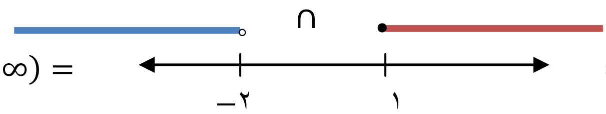
$(-\infty, ٤) \cup (٦, +\infty) =$  $= R - [٤/٦]$

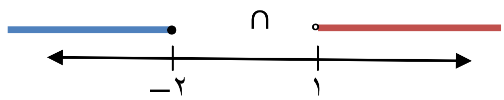
تست: کدام مجموعه ی زیر بیانگر $R-(-۲,۱]$ است؟

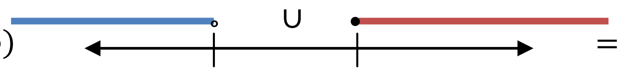
۱) $\{x\in R\mid x<-۲ \text{ و } x\geq ۱\}$ ۲) $\{x\in R\mid x\leq -۲ \text{ و } x> ۱\}$

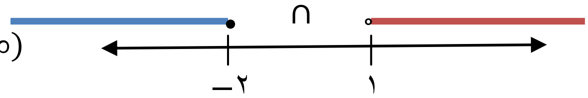
۳) $\{x\in R\mid x<-۲ \text{ یا } x\geq ۱\}$ ٤) $\{x\in R\mid x\leq -۲ \text{ یا } x> ۱\}$

نکته: کلمه «و» در مجموعه ها معادل اشتراک $(\cap)$ و کلمه ی « یا» معادل $(\cup)$ می باشد.

گزینه ۱ $(-\infty,-۲)\cap[۱,+\infty)=$  $=\emptyset$

گزینه ۲ $(-\infty,-۲]\cap(۱,+\infty)$  $=\emptyset$

گزینه ۳ $(-\infty,-۲)\cup[۱,+\infty)$  $=R-(-۲,۱]$

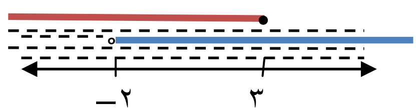
گزینه ٤ $(-\infty,-۲]\cup(۱,+\infty)$  $=R-(-۲,۱]$

پس گزینه ۴ صحیح است.

تست: مجموعه $A=\left\{x\in R\mid x>-۲ \text{ یا } x\leq ۳\right\}$ برابر است با:

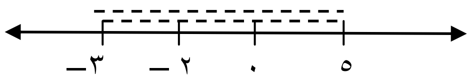
۱) $(-۲,۳]$ ۲) R ۳) $R-[-۲,۳)$ ٤) $\emptyset$

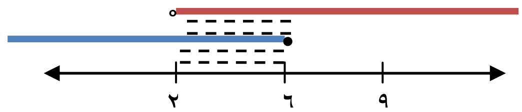
وقتی کلمه ی« یا» وجود دارد یعنی اجتماع بگیریم.

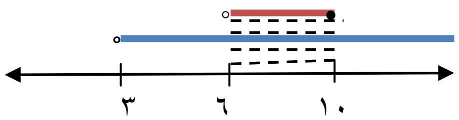
$\left\{x\in R\mid x>-۲ \text{ یا } x\leq ۳\right\}=(-۲,+\infty)\cup(-\infty,۳]=$  $=R$

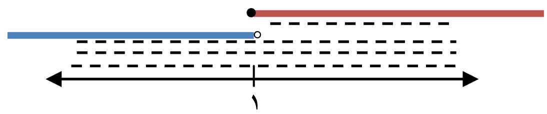
اگر اشتراک می خواست گزینه یک جواب درست بود.

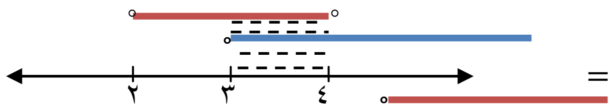
مثال: حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازه های آنها روی یک محور به دست آورید.(تمرین صفحه ۴ ریاضی دهم)

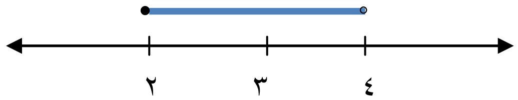
الف) $(-۳,۰)\cup(-۲,۵)=$  $=(-۳,۵)$

ب) $(-\infty,۶]\cap(۲,۹)=$  $=(۲,۶]$

پ) $(۳,+\infty)\cap(۶,۱۰]=$  $=(۶,۱۰]$

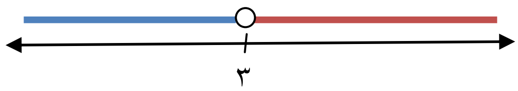
ت) $(-\infty,۱)\cup[۱,+\infty)=$  $=R=(-\infty,+\infty)$

ث) $(۳,+\infty)-[۲,۴)=$  $=[۴,+\infty)$

ج) $[۲,۴)-(۳,+\infty)=$  $=[۲,۳]$

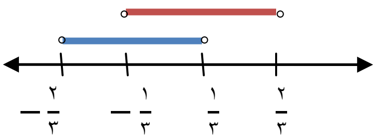
مثال: مجموعه ی $R-\{۳\}$ را روی محور نمایش دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

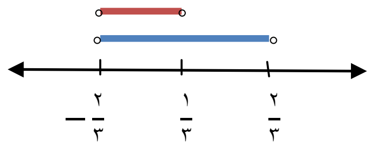
(تمرین ۵ صفحه ریاضی پایه دهم)

 $=(-\infty,۳)\cup(۳,+\infty)$

تست: اگر $A_n=(-\frac{۲}{n},\frac{n-۲}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعه ی $(A_۳\cup A_۶)-A_۳$ برابر کدام بازه است.

۱) $(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۲) $[-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۳) $(\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$ ۴) $[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$

$\left.\begin{matrix} A_۳=(-\frac{۲}{۳},\frac{۳-۲}{۳})=(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳}) \\ A_۶=(-\frac{۲}{۶},\frac{۶-۲}{۶})=(-\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}) \end{matrix}\right\}\Rightarrow A_۳\cup A_۶=$  $=(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳})$

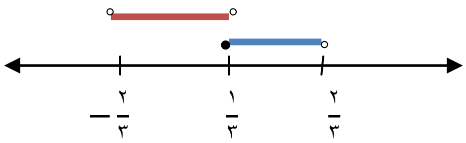
$(A_۳\cup A_۶)-A_۳=\left(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}\right)-\left(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳}\right)$  $=[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳})$

به دو دلیل زیر می توان اثبات کرد که $\frac{۱}{۳}$ باید بسته باشد

اول: چون در $\frac{۱}{۳}$ علامت بازه باز است پس $\frac{۱}{۳}$ برداشته نمی شود.

دوم: برای اینکه مطمئن شویم از جواب نهایی و عبارتی که برداشتیم (کم کردیم)

اجتماع بگیریم بازه ی اولیه حاصل شود در اینجا داریم

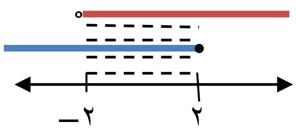
$\left[\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}\right) \cup \left(-\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۳}\right) =$  $= \left(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳}\right)$

تست: اگر عدد ۵ در بازه ی $[۳x-۱,۲x+۹)$ باشد بزرگترین بازه ای که x می تواند اختیار کند کدام است؟

۱) $[-۲,۲]$ ۲) $(-۲,۲]$ ۳) $[-۲,۳]$ ۴) $(-۲,۳]$

حل) چون عدد ۵ در بازه ی $[۳x-۱,۲x+۹)$ قرار دارد ، پس $۳x-۱\leq ۵ < ۲x+۹$ بنابراین

$$\begin{cases} ۳x-۱\leq ۵ \to ۳x\leq ۶ \to x\leq ۲ \\ ۵ < ۲x+۹ \to ۵-۹ < ۲x \to -۴ < ۲x \to -۲ < x \end{cases} \xRightarrow{\text{اشتراک بین جواب ها}}$$



جواب $= (-۲,۲]$

تمرین: حدود مقادیر m را چنان بیابید که بازه ی $(m-۱,m+۵)$ شامل عدد ۱ باشد.

مثال: اگر نقطه ی میانی بازه ی $[۵m-۱,۲m+۷]$ برابر ۳ باشد، مقدار m و طول بازه ی مذکور را تعیین کنید.

نکته: نقطه ی میانی بازه $[a,b]$ برابر است با $\frac{a+b}{۲}$

طول بازه ی $[a,b]$ برابر است با $b-a$

$$\text{نقطه میانی} = \frac{۵m-۱+۲m+۷}{۲} = ۳ \rightarrow \frac{۷m+۶}{۲} = ۳ \rightarrow ۷m+۶ = ۶ \rightarrow ۷m = ۰ \rightarrow m = ۰$$

$$m = ۰ \rightarrow [۵(۰)-۱,۲(۰)+۷] = [-۱,۷] \rightarrow \text{طول بازه} = ۷-(-۱) = ۸$$

تمرین: اگر $A=\{x \in R \mid x \geq ۱\}$, $B=\{x\in R \mid -۲<x<۳\}$, $c=\{x\in R \mid ۱<x\leq ۲\}$ بازه هایی

را که با مجموعه های زیر تعریف شده اند مشخص کنید.

الف) $A \cap B$

ب) $A \cup B$

پ) $C - B$

ت) $(A\cap B)\cup C$

ث) $(A\cap B)\cup (B\cap c)$

تمرین: نامعادلات زیر را حل کرده و مجموعه جواب را بصورت بازه و روی محور نشان دهید.

۱) $۲x+۵ \leq ۸x-۱$

۲) $-۲ \leq ۸x-۳ \leq ۵$

۳) $-۳ \leq ۱-۲x < ۳$

۴) $\frac{۱-x}{۲} < -۲$

۵) $-۱ < \frac{x-۵}{۲} \leq ۳$

۶) $\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۳}x + x + ۵ \leq ۳(x+۱)$

۷) $-۳ \leq x+۷ \leq ۳x-۲$

۸) $-۳ < ۳x-۵ < x-۲$

۴-۱-۱مجموعه های متناهی و نامتناهی

فرض کنید A مجموعه ی اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه ی اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

$$A=\{۱,۲,۳\}$$
$$B=\{....,-۱,۰,۱,۲,۳\}$$

ب) A چند عضو دارد؟ ۳ عضو

پ) درباره ی تعداد اعضای B چه می توان گفت؟ تعداد اعضا مشخص نیست(بیشمار عضو دارد)

مجموعه هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه های متناهی** می نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعه ی متناهی نیست؛ زیرا (نمی توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ تر است. چنین مجموعه هایی را **مجموعه های نامتناهی** می نامیم.

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید. درباره ی مجموعه های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

مجموعه	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه های متناهی)
مجموعه اعداد اول یک رقمی		*	۴ عضو {۲,۳,۵,۷}
مجموعه انسان های روی زمین		*	
مجموعه اعداد طبیعی فرد	*		
مجموعه سلول های عصبی مغز یک انسان		*	
مجموعه تمام دایره های به مرکز مبدأ مختصات	*		
مجموعه دانش آموزان مدرسه ی شما		*	
مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی		*	
مجموعه درخت های جنگل های آمازون		*	۳۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰
مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک	*		
مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۱۰	*		
بازه (۰,۱)	*		
مجموعه مولکول های موجود در یک مول مشخص از آب		*	

مثال: دو مجموعه ی متناهی نام ببرید. مجموعه ی دبیران ریاضی اهواز- مجموعه ی ماشین های موجود در یک نمایشگاه

مثال: دو مجموعه ی نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیر مجموعه ی دیگری باشد. مجموعه ی اعداد طبیعی که زیر مجموعه ی مجموعه اعداد حسابی است.یا دو بازه ی $[۰,۱)$, $(-۳,۷)$ که $[۰,۱) \subseteq (-۳,۷)$

یا مجموعه ی دایره های به مرکز مبدأ مختصات با شعاع عدد صحیح که زیر مجموعه ی مجموعه ی تمام دایره هایی به مرکز مبدأ مختصات است.

مثال: دو مجموعه ی نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و B-A تک عضوی باشد.

تذکر: (تعداد اعضای برخی از مجموعه های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را بدست آورد)

N و W که هر دو نامتناهی اند و $N \subseteq W$, $W - N = \overbrace{\{۰\}}^{\text{تک عضو}}$

یا

دو بازه ی $(۱,۲)$, $[۱,۲)$ که $[۱,۲) \subseteq [۱,۲)$, $[۱,۲) - (۱,۲) = \{۱\}$

فعالیت: الف) $\frac{۱}{۲}$ عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازه ی $(۰,۱)$ بنویسید.$\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۵}, \frac{۴}{۷}, \frac{۱}{۱۰۰۰}$

ب آیا می توان بین ۰و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله

پ در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه ی $(۰,۱)$ چه نتیجه ای می گیرید؟

نامتناهی اند

ت در مورد متناهی یا متناهی بودن Q چه می توان گفت؟ نامتناهی

ث اگر A دارای یک زیر مجموعه ی نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه نامتناهی خواهد بود.

مثال: فرض کنید U مجموعه ی تمام مضرب های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید. $U = \{۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,۳۰, \dots\}$

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟ نامتناهی

پ) یک زیر مجموعه ی متناهی از U بنویسید. $\{۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵\} =$ مضارب طبیعی ۵ کوچکتر از ۳۰

ت) دو زیر مجموعه ی نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

$C = \{۲۰,۴۰,۶۰,۸۰, \dots\}$ مضارب ۲۰ و $D = \{۱۰,۲۰,۳۰,۴۰, \dots\}$ مضارب ۱۰

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی

ب) مجموعه شمارنده های طبیعی عدد ۳۶. متناهی

پ) بازه $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$. نامتناهی

ت) $A = \{x \in N \mid ۱ < x < ۲\}$. متناهی (چون با توجه به مجموعه ی N، می شود $\emptyset$)

ث) مجموعه ی مضرب های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی

مثال: دو مجموعه ی نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه ای متناهی باشد.(۲,۵] و [۳,۲−) که اشتراک آنها مجموعه ی $\{۲\}$ است که متناهی است.

مثال: اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ متناهی

تمرین: اعضای هر یک از مجموعه های زیر را نشان دهید، سپس مجموعه های با پایان و بی پایان (نامتناهی) را مشخص کنید.

۱) مجموعه اعداد طبیعی فرد

۲) مجموعه اعداد طبیعی زوج کوچکتر از ۲۰

۳) مجموعه اعداد زوج

۴) مجموعه اعداد صحیح کوچکتر از ۱۳۹۶

۵) مجموعه اعداد طبیعی بزرگتر از ۱۰ و کوچکتر از ۲۰

۶) مجموعه اعداد صحیح بین ۶- و ۲-

۷) $A = \{x \in Z \mid -۱ \leq x \leq ۴\}$

۸) $B = \{x \in N \mid x > ۲۰۱۶\}$

۹) $c = \{۲,۴,۸, \dots, ۲^{۱۲۳۴}$

۱۰) $D = \left\{x \in Z \mid \frac{۱}{x} \in Z\right\}$

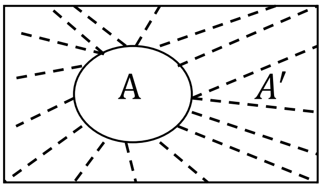
درس دوم : متمم یک مجموعه

۱-۲-۱مجموعه مرجع

تعریف مجموعه مرجع: در هر مبحث، مجموعه ای را که همه ی مجموعه های مورد بحث، زیر مجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می نامیم و با U نشان می دهیم.

۲-۲-۱متمم یک مجموعه

تعریف متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $U \subseteq A$ آنگاه مجموعه ی $U - A$ را متمم A می نامیم و با نماد A' نشان می دهیم.



به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

مثال: فرض کنیم $U = \{۱,۲,۳, \dots ,۱۰\}$, $A = \{۲,۴,۵,۶\}$ باشد A' را مشخص کنیم.

$$A' = U - A = \{۱,۲,۳, \dots ,۱۰\} - \{۲,۴,۵,۶\} = \{۱,۳,۷,۸,۹,۱۰\}$$

مثال: با فرض آنکه N مجموعه مرجع باشد هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.

$\{۱,۳,۵,۷,۹, \dots\}$	$\{۱,۴,۶,۸,۹,۱۰,۱۲,۱۴, \dots\}$
$\{۳,۶,۹,۱۲, \dots\}$	$\{۲,۴,۶,۸,۱۰, \dots\}$
$\{۱,۲,۳, \dots ,۹\}$	$\{۱,۲,۴,۵,۷,۸, \dots\}$
$\{۲, ۳, ۵ ,۷ ,۱۱,۱۳, \dots\}$	$\{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴ \dots\}$

مثال: N را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' نامتناهی باشد.

A:مجموعه ی اعداد طبیعی زوج

A': مجموعه ی اعداد طبیعی فرد

ب) مجموعه ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

نامتناهی $\mathrm{B} = \{۵,۶,۷,۸, \ldots\}$ مجموعه ی اعداد طبیعی بزرگتر از ۴

متناهی $B' = \{۱,۲,۳,۴\}$ مجموعه ی اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۴

پ) مجموعه ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

متناهی $\rightarrow$ اعداد اول طبیعی یک رقمی $\mathrm{C} = \{۲,۳,۵,۷\}$

نامتناهی $C' = \{۱,۴,۶,۸,۹, \ldots\} \rightarrow$

مثال: اگر مجموعه ی مرجع را Z در نظر بگیریم و $\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{z} |\ -۳ < x \leq ۲\}$ باشد A' را مشخص کنید.

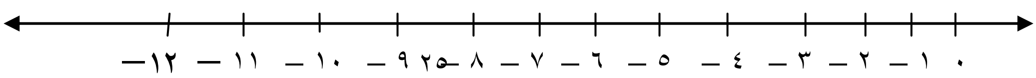
$\mathrm{A} = \{-۲, -۱,۰,۱,۲\}$

$$A' = Z - A = \{\ldots, -۳, -۲, -۱,۰,۱,۲,۳\} - \{-۲, -۱,۰,۱,۲\} = \{\ldots, -۴, -۳,۳,۴, \ldots\}$$

مثال: اگر Z را به عنوان مجموعه ی مرجع در نظر بگیریم، آنگاه N' را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

$$N' = \mathrm{Z} - N = \{\ldots, -۳, -۲, -۱,۰,۱,۲,۳, \ldots\} - \{۱,۲,۳, \ldots\} = \{\ldots, -۳, -۲, -۱,۰\}$$

مثال: اگر $A = \{x \in Z |\ x \leq -۱۰\}, U = \{x \in Z |\ x < -۳\}$ باشد A' را مشخص کنید.



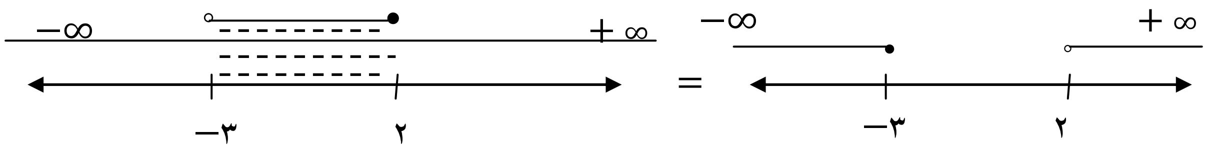
$U = \{-۴, -۵, -۶, \dots\}$

$A = \{-۱۰, -۱۱, -۱۲, \dots\}$

$A' = U - A = \{-۴, -۵, -۶, -۷, -۸, -۹\}$

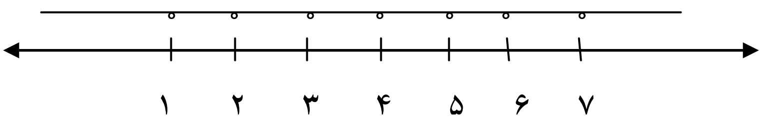
مثال: اگر مجموعه ی مرجع را R در نظر بگیریم و $\mathrm{B} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R} \mid -۳ < x \leq ۲\}$ باشد B' را مشخص کنید و آن را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$B' = R - B = (-\infty, +\infty) - (-۳, +۲] = (-\infty, -۳] \cup (۲, +\infty)$$



مثال : اگر R به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم در این صورت N' را روی محور نمایش دهید؟

$N' = \mathrm{R} - \mathrm{N}$



تمرین: R را به عنوان مجموعه ی مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه های زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $C = (۰, +\infty)$ ب) $D = (-\infty, ۱]$

مثال: اگر U مجموعه ی شمارنده های ۳۰ و A مجموعه شمارنده های ۶ باشد، حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) A' ب) $(A')'$ پ) $\emptyset'$

ت) U' ث) $A \cup A'$ ج) $A \cap A'$

الف)

$$U = \{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\}$$

$$A = \{۱,۲,۳,۶\}$$

$$A' = U - A = \{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\} - \{۱,۲,۳,۶\} = \{۵,۱۰,۱۵,۳۰\}$$

ب)

$$(A')' = U - A' = \{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\} - \{۵,۱۰,۱۵,۳۰\} = \{۱,۲,۳,۶\} = A \Longrightarrow \boxed{(A')' = A}$$

پ)

$$\emptyset' = U - \emptyset = \{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\} - \{\ \} = \{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\} = U \Longrightarrow \boxed{\emptyset' = U}$$

ت)

$$U' = U - U = \{۱,۲,۳,,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\} - \{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\} = \{\ \} \Longrightarrow \boxed{U' = \emptyset}$$

ث)

$$A \cup A' = \{۱,۲,۳,۶\} \cup \{۵,۱۰,۱۵,۳۰\} = \{۱,۲,۳,۵,۶,۱۵,۳۰\} = \mathrm{U} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{A} \cup A' = \mathrm{U}}$$

ج)

$$\mathrm{A} \cap A' = \{۱,۲,۳,۶\} \cap \{۵,۱۰,۱۵,۳۰\} = \emptyset \Longrightarrow \boxed{\mathrm{A} \cap A' = \emptyset}$$

مثال: فرض کنیم $U = \{۱,۲,۳,۴,۵\}, A = \{۱,۲,۳\}, B = \{۲,۴\}$ سپس حاصل عبارت های زیر را بدست آورید؟

الف) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) =?$

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{۱,۲,۳\} \cup \{۲,۴\} = \{۱,۲,۳,۴\}$$

ب) $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' =?$

$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' = \mathrm{U} - (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \{۱,۲,۳,۴,۵\} - \{۱,۲,۳,۴\} = \{۵\}$$

پ) $A' \cap B' =?$

$$A' = \{۴,۵\}, B' = \{۱,۳,۵\}$$

$$A' \cap B' = \{۴,۵\} \cap \{۱,۳,۵\} = \{۵\}$$

از قسمت ب و پ چه نتیجه ای می گیرید؟ با هم برابرند یعنی

$\boxed{(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' = A' \cap \mathrm{B}'}$ قانون دمورگان

ت) $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} =?$

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{۱,۲,۳\} \cap \{۲,۴\} = \{۲\}$$

ث) $(A \cap B)' = ?$

$(A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{۱,۲,۳,۴,۵\} - \{۲\} = \{۱,۳,۴,۵\}$

ج) $A' \cup B' = ?$

$A' \cup B' = \{۴,۵\} \cup \{۱,۳,۵\} = \{۱,۳,۴,۵\}$

از قسمت ث و ج چه نتیجه ای می گیرید؟ با هم برابرند

$\boxed{(A \cap B)' = A' \cup B'}$ قانون دمورگان

چ) $A - B = ?$

$A - B = \{۱,۲,۳\} - \{۲,۴\} = \{۱,۳\}$

ح) $A - (A \cap B) = ?$

$A - (A \cap B) = \{۱,۲,۳\} - \{۲\} = \{۱,۳\}$

از قسمت های چ و ح چه نتیجه ای می گیرید؟ با هم برابرند

$\boxed{A - B = A - (A \cap B)} \xrightarrow{\text{به طور کلی}} \boxed{\square - \triangle = \square - (\square \cap \triangle)}$

خ) $A \cap B' = ?$

$A \cap B' = \{۱,۲,۳\} \cap \{۱,۳,۵\} = \{۱,۳\}$

از قسمت چ و خ چه نتیجه ای می گیرید؟ با هم برابرند.

$\boxed{A - B = A \cap B'} \xrightarrow{\text{در حالت کلی}} \boxed{\square - \triangle = \square \cap \triangle'}$

مثال : الف) اگر $U = \{a,b,c,d,e\}$ مجموعه ی مرجع یاشد و $A = \{a,b\}$ و $B = \{a,b,c\}$ در این صورت $A \subseteq B$ می باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطه ی زیر مجموعه بودن برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l} A' = U - A = \{c,d,e\} \\ B' = \mathrm{U} - \mathrm{B} = \{\mathrm{d},\mathrm{e}\} \end{array}\right. \Longrightarrow B' \subseteq A'$$

ویژگی های مجموعه مرجع و متمم در یک نگاه

۱) $(A')' = A$	۲) $\emptyset' = U$
۳) $U' = \emptyset$	۴) $A \cup A' = U$
۵) $A \cap A' = \emptyset$	۶) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
۷) $(A \cap B)' = A' \cup B'$	۸) $A - B = A - (A \cap B)$
۹) $A - B = A \cap B'$	۱۰) $A \subseteq B \Longrightarrow B' \subseteq A'$

۳-۲-۱ تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

(اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت $n(A)$ استفاده می شود) مثلاَ اگر $G = \{۲,۳,۵,۷\}$ در این صورت می توانیم بنویسیم $n(G) = ۴$.در این بخش می خواهیم رابطه ای برای $n(A \cup B)$ به دست آوریم.

فعالیت: یک تیم کوه نوردی متشکل از ۴ دانش آموز و ۳ دانشجوی عضو یک موسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به طور داوطلبانه در روزهای جمعه ی هر هفته کوه های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک سازی می کنند.

اعضای دانش آموز این تیم مجموعه $A = \{$آنیتا، زهرا، الناز، الهام$\}$ و اعضای دانشجوی آن مجموعه $B = \{$فاطمه، معصومه، فرزانه$\}$ هستند. همان گونه که دیده می شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.

به هر دو مجموعه مثل B و A که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه ی جدا از هم یا مجزا می گوییم.

$A \cap B = \emptyset$

الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوه نوردی می باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{$فرزانه ، معصومه ، فاطمه ، الهام ، الناز ، زهرا ، آنیتا$\}$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰

ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ جمع تعداد عضوهای B و A با هم، برابر تعداد عضوهای $A \cup B$ است این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه B و A برقرار است؟ با شرط این که دو مجموعه اشتراکی نداشته باشند یعنی $A \cap B = \emptyset$ (جدا از هم)

فعالیت: الف) مجموعه ی شمارنده های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب BوA می نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

مجموعه شمارنده های عدد ۲۸ : $A = \{۱,۲,۴,۷,۱۴,۲۸\} \Longrightarrow n(A) = ۶$

مجموعه شمارنده های عدد ۳۰ : $B = \{۱,۲,۳,۵,۶,۱۰,۱۵,۳۰\} \Longrightarrow n(B) = ۸$

شمارنده های مشترک۲۸و۳۰ : $A \cap B = \{۱,۲\} \Longrightarrow n(A \cap B) = ۲$

: $A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۱۰,۱۴,۱۵,۲۸,۳۰\} \Longrightarrow n(A \cup B) = ۱۲$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

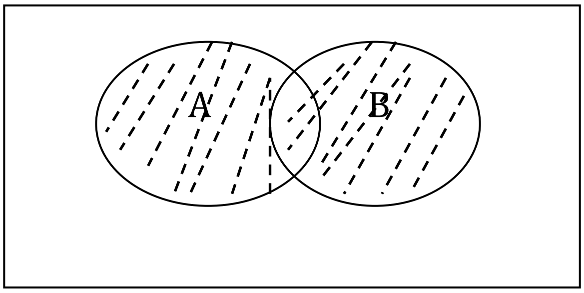
$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲

پ) چرا رابطه ای را که در مثال قبل به دست آوردید؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این مثال برقرار نیست؟ چون مجموعه های B و A عضوهای مشترک دارند، یعنی $A \cap B \neq \emptyset$

با توجه به جدول بالا داریم $۱۲ = ۲ - ۸ + ۶$

یعنی اگر B و A دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$



$(A \cup B)$ حداقل یکی رخ دهد

مثال: فرض کنیم B و A زیر مجموعه هایی از مجموعه ی مرجع U باشند، به طوری که

$n(U) = ۱۰۰, n(A) = ۶۰, n(B) = ۴۰$ و $n(A \cap B) = ۲۰$ مطلوب است، $n(A \cup B)$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Longrightarrow n(A \cup B) = ۶۰ + ۴۰ - ۲۰$$

$$\Longrightarrow n(A \cup B) = ۸۰$$

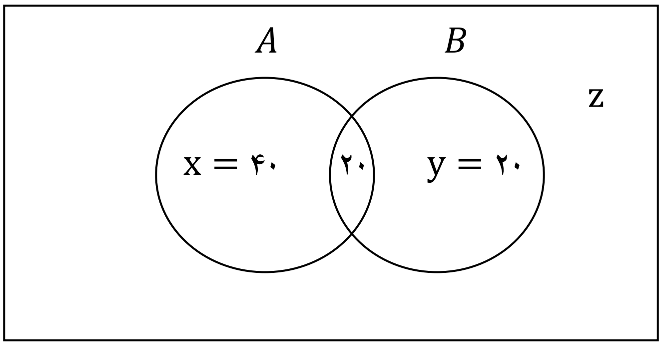
ب)روش دوم:به کمک نمودار ون

ابتدا اشتراک را می نویسیم

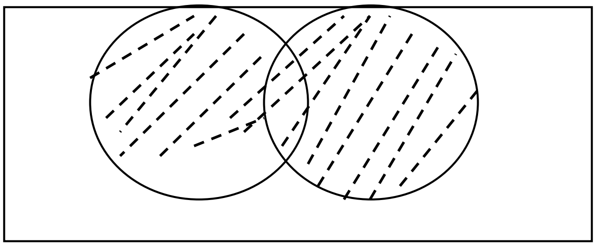
چون $n(A) = ۶۰$ پس $x = ۴۰$ چون $n(B) = ۴۰$، پس $y = ۲۰$

و چون $U = ۱۰۰$ پس $Z = ۲۰$

$U = ۱۰۰$



$n\,(A \cup B) = ۴۰ + ۲۰ + ۲۰ = ۸۰$



مثال: اگر $n(A) = ۱۵$، $n(A \cap B) = ۵$ و $n(A \cup B) = ۳۰$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Longrightarrow ۳۰ = ۱۵ + n(B) - ۵ \Longrightarrow n(B)$$

$$= ۳۰ - ۱۰ = ۲۰ \Longrightarrow n(B) = ۲۰$$

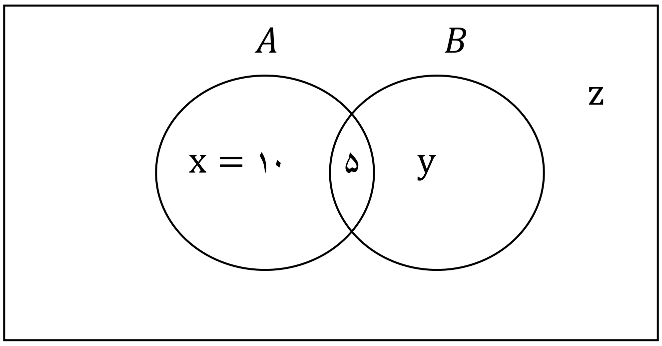
روش دوم:به کمک نمودار ون

دقت کنیم زمانیکه از نمودار ون استفاده می کنیم ابتدا اشتراک را می نویسم .

تذکر: اگر اشتراک را به ما نداده بود آن را x می گیریم ودر قسمت مربوط به اشتراک می نویسیم.

چون $n(A) = ۱۵$ پس $x = ۱۰$ از طرفی چون $(A \cup B) = ۳۰$ ، پس $y = ۱۵$

پس $n(B) = ۱۵ + ۵ = ۲۰$



نکته :مشخصه های اجتماع در سوال کلمات ؛ **یا – حداقل (لا اقل – دست کم)** می باشند.

نکته : هر وقت در سوال گفته بود A و B یعنی $(A \cap B)$

نکته : هر وقت در سوال گفته بود **هر دو** یعنی از اشتراک استفاده کنیم.

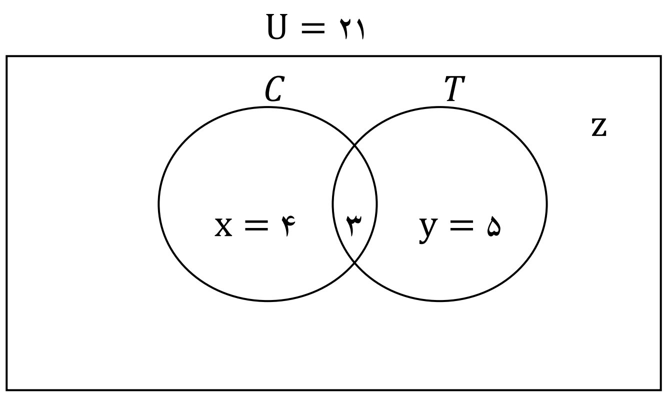
مثال: یک دوره جشنواره ی فیلم کوتاه با شرکت $\overbrace{۲۱}^{n(U)}$ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها $\overbrace{۷}^{n(C)}$ فیلم پویانمایی (کارتونی) و $\overbrace{۸}^{n(T)}$ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که $\overbrace{۳}^{n(c \cap T)}$ تا از فیلم های پویانمایی با مضمون طنز می باشندو مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که، پویانمایی یا طنز ند؟

روش اول حل: مجموعه ی شامل تمام فیلم ها را با U، مجموعه فیلم های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم های طنز را با T نشان می دهیم.

چون کلمه یا به کار رفته پس از اجتماع استفاده می کنیم.

$$n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = ۷ + ۸ - ۳ = ۱۲$$

روش دوم: طبق نمودار ون ابتدا اگر اشتراک را داده بود اشتراک را می نویسیم و با توجه به سوال نمودار ون را کامل می کنیم و به سوال پاسخ می دهیم.



چون $n(C) = ۷$ پس $x = ۴$ چون $\mathrm{n(T)} = ۸$ ، پس $y = ۵$

و چون $\mathrm{U} = ۲۱$ پس $Z = ۹$

پویانمایی یا طنز $= ۴ + ۳ + ۵ = ۱۲$

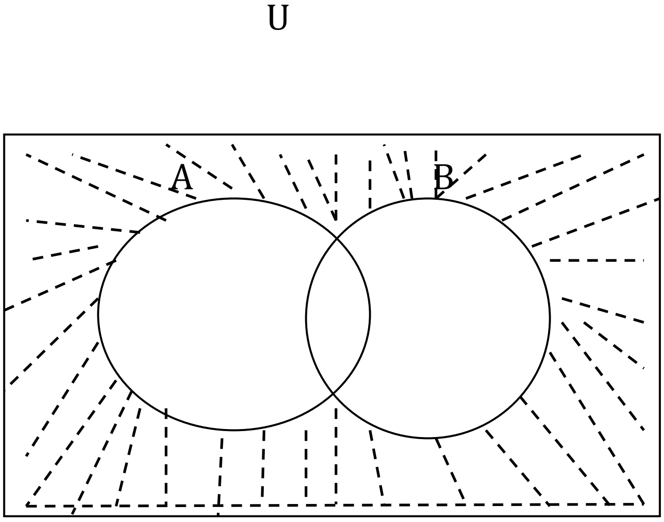
۴-۲-۱ تعداد عضوهای متمم یک مجموعه

با توجه به رابطه ی $A' = U - A$ می توان گفت

$$\mathrm{n}(A') = \mathrm{n(U)} - \mathrm{n(A)} \xrightarrow{\text{در حالت کلی}} n(\square)' = n(U) - n(\square)$$

حالت خاص: هیچکدام رخ ندهند. یعنی نه A رخ دهد **و** نه B یعنی $(A' \cap B')$

با توجه به قانون دمورگان $(A \cup B)' = A' \cap B'$ اشتراک متمم ها را به اجتماع تبدیل می کنیم (چون برای اجتماع فرمول داریم)



هیچکدام رخ ندهند

$$\underbrace{\mathbf{n}(A' \cap B') = \mathbf{n}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})'}_{\text{طبق قانون دمورگان}} = \underbrace{\mathbf{n}(\mathbf{U}) - (\mathbf{A} \cup \mathbf{B})}_{\text{طبق قانون متمم}}$$

$(A \cup B)' = A' \cap B' \rightarrow$ قانون دمورگان

$A' = U - A \rightarrow$ قانون متمم

نکته: مشخصه های متمم در سوال کلمات منفی مانند **نه – هیچکدام** می باشند.

نکته : برای حل سوالات مربوط به متمم آنها را به روش غیرمستقیم حل می کنیم یعنی به اجتماع یا تفاضل تبدیل می کنیم

مثال: فرض کنیم B و A زیر مجموعه هایی از مجموعه ی مرجع U باشند، به طوری که

$n(A \cap B) = ۲۰$ و $n(U) = ۱۰۰, n(A) = ۶۰, n(B) = ۴۰$ مطلوب است، $n(A' \cap B')$

$$n(A' \cap B') = \mathrm{n}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})' = \mathrm{n}(\mathrm{U}) - \overbrace{\mathrm{n}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})}^{\text{جواب درپایین}} = ۱۰۰ - ۸۰ = ۲۰$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Longrightarrow \mathrm{n}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = ۶۰ + ۴۰ - ۲۰$$

$$\Longrightarrow \mathrm{n}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = ۸۰$$

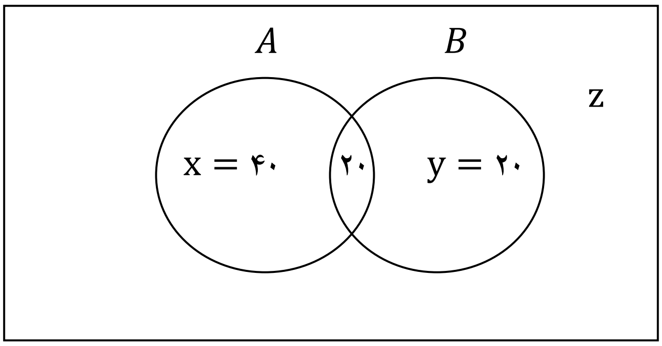
روش دوم:به کمک نمودار ون

ابتدا اشتراک را می نویسیم

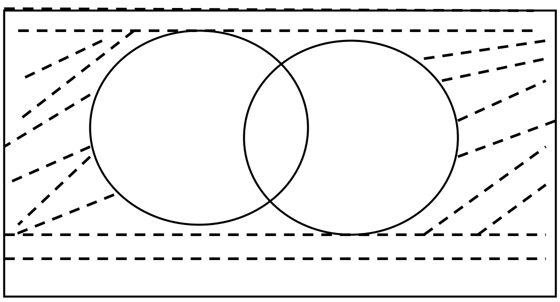
چون $n(A) = ۶۰$ پس $x = ۴۰$ چون $\mathrm{n}(\mathrm{B}) = ۴۰$، پس $y = ۲۰$

و چون $\mathrm{U} = ۱۰۰$ پس $Z = ۲۰$

$$\mathrm{U} = ۱۰۰$$



$$n(A' \cap B') = \mathrm{Z} = ۲۰$$



مثال: یک دوره جشنواره ی فیلم کوتاه با شرکت $\overbrace{۲۱}^{n(U)}$ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها $\overbrace{۷}^{n(C)}$ فیلم پویانمایی (کارتونی) و $\overbrace{۸}^{n(T)}$ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که $\overbrace{۳}^{n(c\cap T)}$ تا از فیلم های پویانمایی با مضمون طنز می باشندو مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که، غیر پویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل: مجموعه ی شامل تمام فیلم ها را با U، مجموعه فیلم های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم های طنز را با T نشان می دهیم.

$$\text{پویانمایی} = C \rightarrow \text{غیرپویانمایی} = C'$$

$$\text{طنز}\ T \rightarrow \text{غیرطنز} = T'$$

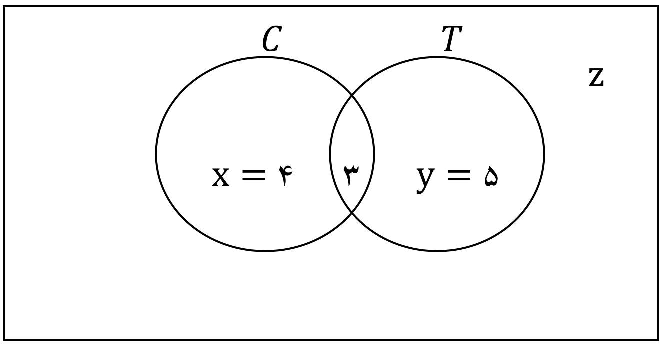
$$\text{غیرطنز}\ \underbrace{\text{و}}_{\text{اشتراک}}\ \text{غیر پویانمایی} = C' \cap T'$$

$$\mathrm{n}(C' \cap T') \xRightarrow{\text{طبق قانون مورگان}} n(C \cup T)' \xRightarrow{\text{طبق قانون متمم}} n(U) - n(C \cup T) = ۲۱ - ۱۲ = ۹$$

$$n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = ۷ + ۸ - ۳ = ۱۲$$

روش دوم: طبق نمودار ون ابتدا اگر اشتراک را داده بود اشتراک را می نویسیم و با توجه به سوال نمودار ون را کامل می کنیم و به سوال پاسخ می دهیم.

$U = ۲۱$



چون $n(C) = ۷$ پس $x = ۴$ چون $n(T) = ۸$ ، پس $y = ۵$

و چون $U = ۲۱$ پس $Z = ۹$

ب) غیر پویانمایی و غیر طنز $= z = \overbrace{۲۱}^{\text{کل}} - \overbrace{۱۲}^{\text{پویانمایی یا طنز}} = ۹$

۵-۲-۱تعداد عضو های تفاضل دو مجموعه