فهرست

حل معادلهٔ درجه دو

در سال قبل با معادلهٔ درجه‌دوم و روش‌های حل آن آشنا شدید. روش‌هایی که بیشتر از بقیه به کار ما می‌آیند، «حل معادلهٔ درجه‌دوم به روش تجزیه» و «حل معادلهٔ درجه‌دوم به روش کلی» هستند.

معادلهٔ درجه‌دوم در حالت کلی به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ (با شرط $a\neq ۰$) است.

ریشه‌های این معادله در حالت کلی از رابطهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ محاسبه می‌شوند که دلتای معادله از رابطهٔ $\Delta=b^۲-۴ac$ به دست می‌آید.

◀ با توجه به این‌که مقدار عددی دلتا، باید زیر رادیکال قرار گیرد، تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم بستگی به علامت دلتا دارد:

۱) اگر $\Delta>۰$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است: $x_۱=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}\,,\,x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$

۲) اگر $\Delta=۰$ باشد، معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف است: $x=-\frac{b}{۲a}$

۳) اگر $\Delta<۰$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

دو حالت از معادلهٔ درجه‌دوم کاربرد زیادی دارند و خوب است آن‌ها را بلد باشیم:

۱) اگر $a+b+c=۰$ باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله ۱ و $\frac{c}{a}$ هستند.

۲) اگر $a-b+c=۰$ باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادله ۱- و $-\frac{c}{a}$ هستند.

تست **مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $(۳x^۲-۱۷x+۱۴)(۵x^۲+۲۷x+۲۲)=۰$ کدام است؟**

۱) $-\frac{۱۷}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳}$

پاسخ گزینهٔ «۲» جواب‌های معادلهٔ $(۳x^۲-۱۷x+۱۴)(۵x^۲+۲۷x+۲۲)=۰$ از حل دو معادلهٔ زیر به دست می‌آیند:

$$۳x^۲-۱۷x+۱۴=۰ \quad , \quad ۵x^۲+۲۷x+۲۲=۰$$

در معادلهٔ $۳x^۲-۱۷x+۱۴=۰$ رابطهٔ $a+b+c=۰$ برقرار است، پس ریشه‌ها برابر با ۱ و $\frac{۱۴}{۳}$ هستند.

در معادلهٔ $۵x^۲+۲۷x+۲۲=۰$ هم رابطهٔ $a-b+c=۰$ برقرار است، پس ریشه‌ها ۱- و $-\frac{۲۲}{۵}$ هستند. بزرگ‌ترین ریشه $\frac{۱۴}{۳}$ و کوچک‌ترین ریشه $-\frac{۲۲}{۵}$ است که مجموعشان برابر است با: $\frac{۱۴}{۳}+\frac{-۲۲}{۵}=\frac{۴}{۱۵}$

تست **در ضرب دو عدد طبیعی که یکی از دیگری ۶ واحد کوچک‌تر است اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان ۳ واحد کوچک‌تر می‌شود. برای آزمایش، حاصل‌ضرب را بر عدد کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت ۲۹ و باقی‌مانده ۲۰ می‌شود. مجموع این دو عدد کدام است؟**

۱) ۵۶ ۲) ۵۷ ۳) ۵۸ ۴) ۵۹

پاسخ گزینهٔ «۱» دو عدد را x و $x+۶$ می‌گیریم. ضرب صحیح آن‌ها $x^۲+۶x$ است.

در ضرب اشتباهشان، رقم دهگان، ۳ واحد کوچک‌تر حساب‌شده، پس عدد از مقدار واقعی‌اش ۳۰ واحد کم‌تر شده است: $x^۲+۶x-۳۰$

برای آزمایش، حاصل‌ضرب اشتباه (یعنی $x^۲+۶x-۳۰$) را بر عدد کوچک‌تر (یعنی x) تقسیم کرده‌ایم؛ خارج قسمت ۲۹ و باقی‌مانده ۲۰ شده است:

$$\begin{array}{l|l} x^۲+۶x-۳۰ & x \\ \vdots & ۲۹ \\ \hline ۲۰ & \end{array}$$

رابطهٔ تقسیم را برای تقسیم بالا می‌نویسیم: $x^۲+۶x-۳۰=۲۹(x)+۲۰$

معادلهٔ صفحه قبل را حل می‌کنیم تا عدد کوچک‌تر (یعنی x) به دست آید:

$$x^2+6x-30=29x+20 \Rightarrow x^2-23x-50=0 \Rightarrow (x-25)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=25 \ ☑ \\ x=-2 \ ☒ \end{cases}$$

چون در سؤال گفته هر دو عدد، طبیعی هستند پس فقط $x=25$ قابل‌قبول است. در این حالت عدد بزرگ‌تر برابر با $25+6=31$ است و در نتیجه مجموع دو عدد برابر است با: $25+31=56$.

تست اگر معادلهٔ $(3x+4)((m+1)x^2+4x+m-2)=0$ دارای ۳ ریشهٔ متمایز باشد، m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ گزینهٔ «۲» برای آن‌که معادلهٔ فوق دارای ۳ ریشهٔ متمایز باشد، باید معادلهٔ $(m+1)x^2+4x+m-2=0$ دارای ۲ ریشهٔ متمایز باشد که هیچ‌کدام از آن‌ها $x=-\frac{4}{3}$ نباشند؛ پس دو شرط زیر را باید لحاظ کنیم:

۱) دلتای معادلهٔ $(m+1)x^2+4x+m-2=0$ باید مثبت باشد:

$$\Delta>0 \Rightarrow 4^2-4(m+1)(m-2)>0 \xrightarrow{\div 4} 4-(m+1)(m-2)>0 \Rightarrow 4-m^2+m+2>0 \Rightarrow m^2-m-6<0$$

$$\Rightarrow (m-3)(m+2)<0 \Rightarrow -2<m<3$$

۲) معادلهٔ $(m+1)x^2+4x+m-2=0$ نباید ریشهٔ $x=-\frac{4}{3}$ داشته باشد (زیرا در این صورت با ریشهٔ عبارت $(3x+4)$ مشترک‌شده و معادله در مجموع دارای ۲ ریشه می‌شود)، پس:

$$(m+1)x^2+4x+m-2=0 \xrightarrow{x=-\frac{4}{3}} (m+1)(-\frac{4}{3})^2+4(-\frac{4}{3})+m-2=0 \Rightarrow \frac{16}{9}(m+1)-\frac{16}{3}+m-2=0$$

$$\xrightarrow{\times 9} 16m+16-48+9m-18=0 \Rightarrow 25m-50=0 \Rightarrow m=2 \Rightarrow$$ پس m نباید ۲ باشد

حالا بین دو شرط بالا اشتراک می‌گیریم:

$$(1)\cap(2)=(-2<m<3)\cap(m\neq 2) \Rightarrow m\in(-2,3)-\{2\} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{-1,0,1\}$$

پس m، سه مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد.

مجموع، تفاضل و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دو

ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ از رابطهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند که در آن $\Delta=b^2-4ac$ است. می‌خواهیم «مجموع ریشه‌ها $(\alpha+\beta)$»، «قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها $(|\alpha-\beta|)$» و «حاصل‌ضرب ریشه‌ها $(\alpha\beta)$» را برحسب ضرایب معادلهٔ درجه دو (یعنی a، b و c) به دست آوریم. اگر فرض کنیم $\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ است، آن‌گاه داریم:

۱ مجموع ریشه‌ها: $S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}}$

۲ حاصل‌ضرب ریشه‌ها: $P=\alpha\beta=(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a})(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a})=\frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{P=\alpha\beta=\frac{c}{a}}$

۳ قدرمطلق تفاضل ریشه‌ها: $M=|\alpha-\beta|=|\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}|=|\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \boxed{M=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{S^2-4P}}$

تست **اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + kx + ۳۲ = ۰$، مکعب ریشهٔ دیگر باشد، مقدار مثبت k کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

پاسخ گزینهٔ «۲» ریشه‌های معادله را α و β در نظر می‌گیریم. یکی از آن‌ها مکعب دیگری است، پس $\beta = \alpha^۳$. حال S و P را به دست می‌آوریم:

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = -\frac{k}{۲} \Rightarrow \alpha + \alpha^۳ = -\frac{k}{۲}$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{۳۲}{۲} \Rightarrow \alpha\alpha^۳ = ۱۶ \Rightarrow \alpha^۴ = ۱۶$$

با حل معادلهٔ دوم مقدار α را به دست می‌آوریم و در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم:

$$\alpha^۴ = ۱۶ \Rightarrow \alpha = \pm ۲ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۲ : \alpha + \alpha^۳ = -\frac{k}{۲} \Rightarrow ۲ + ۸ = -\frac{k}{۲} \Rightarrow k = -۲۰ \ ✗ \\ \alpha = -۲ : \alpha + \alpha^۳ = -\frac{k}{۲} \Rightarrow -۲ - ۸ = -\frac{k}{۲} \Rightarrow k = ۲۰ \ ✓ \end{cases}$$

مثال **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $۲x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشند، بدون حل معادله، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. $(\alpha > \beta)$**

۱) $\alpha + \beta$ ۲) $\alpha\beta$ ۳) $\beta - \alpha$

۴) $\alpha^۲ + \beta^۲$ ۵) $\alpha^۳ + \beta^۳$ ۶) $\alpha^۴ + \beta^۴$

۷) $\alpha^۵ + \beta^۵$ ۸) $\alpha^۶ + \beta^۶$ ۹) $\alpha^۳ - \beta^۳$

۱۰) $\alpha^۴ - \beta^۴$ ۱۱) $\frac{\alpha + ۱}{\beta} - \frac{\beta + ۱}{\alpha}$ ۱۲) $۲\alpha^۲ - ۴\alpha$

۱۳) $۲\alpha^۲ + ۴\beta$ ۱۴) $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}$

پاسخ در معادلهٔ $۲x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ با ضرایب $a = ۲$، $b = -۴$ و $c = ۱$، ابتدا جمع، تفریق و ضرب ریشه‌ها را در سه قسمت اول به دست می‌آوریم و در قسمت‌های بعدی از آن‌ها کمک می‌گیریم. برای بعضی از قسمت‌ها که کاربرد زیادی دارند، رابطه‌شان را هم بیان می‌کنیم.

۱) $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۴}{۲} = ۲ \Rightarrow \boxed{S = ۲}$

۲) $\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \boxed{P = \frac{۱}{۲}}$

۳) $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(-۴)^۲ - ۴(۲)(۱)}}{|۲|} = \frac{\sqrt{۸}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲} \xrightarrow{\alpha > \beta} \alpha - \beta = \sqrt{۲} \Rightarrow \boxed{\beta - \alpha = -\sqrt{۲}}$

۴) $\alpha^۲ + \beta^۲ = (\underbrace{\alpha + \beta}_{S})^۲ - ۲\underbrace{\alpha\beta}_{P} = S^۲ - ۲P = ۲^۲ - ۲(\frac{۱}{۲}) = ۴ - ۱ = ۳ \Rightarrow \boxed{\alpha^۲ + \beta^۲ = ۳}$

نکته مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ درجه دو زیاد استفاده می‌شود، پس رابطهٔ آن را بلد باشید: $\boxed{\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P}$

۵) $\alpha^۳ - \beta^۳ = (\alpha + \beta)^۳ - ۳\alpha^۲\beta - ۳\alpha\beta^۲ = (\underbrace{\alpha + \beta}_{S})^۳ - ۳\underbrace{\alpha\beta}_{P}(\underbrace{\alpha + \beta}_{S}) = S^۳ - ۳PS = ۲^۳ - ۳(\frac{۱}{۲})(۲) = ۸ - ۳ = ۵ \Rightarrow \boxed{\alpha^۳ + \beta^۳ = ۵}$

نکته مجموع مکعبات ریشه‌های معادلهٔ درجه دو هم زیاد استفاده می‌شود! آن را هم بلد باشید: $\boxed{\alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳PS}$

۶) $\alpha^۴ + \beta^۴ = (\alpha^۲ + \beta^۲)^۲ - ۲\alpha^۲\beta^۲ = (\alpha^۲ + \beta^۲)^۲ - ۲(\alpha\beta)^۲ = (۳)^۲ - ۲(\frac{۱}{۲})^۲ = ۹ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱۷}{۲} \Rightarrow \boxed{\alpha^۴ + \beta^۴ = \frac{۱۷}{۲}}$

۷ برای به دست آوردن $\alpha^۵+\beta^۵$، از دو تساوی $\alpha^۲+\beta^۲=۳$ و $\alpha^۳+\beta^۳=۵$ کمک می‌گیریم. آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و امیدواریم بعدش اتفاق‌های خوبی بیفتد!

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha^۲+\beta^۲)=۳\\(\alpha^۳+\beta^۳)=۵\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha^۲+\beta^۲)(\alpha^۳+\beta^۳)=(۳)(۵) \Rightarrow \alpha^۵+\alpha^۲\beta^۳+\alpha^۳\beta^۲+\beta^۵=۱۵$$

$$\Rightarrow \alpha^۵+\beta^۵+\alpha^۲\beta^۲(\alpha+\beta)=۱۵ \Rightarrow \alpha^۵+\beta^۵+(\frac{۱}{۲})^۲(۲)=\alpha^۵+\beta^۵+\frac{۱}{۲}=۱۵ \Rightarrow \alpha^۵+\beta^۵=\frac{۲۹}{۲}$$

۸ از تساوی $a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab$ استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^۶+\beta^۶=(\alpha^۳+\beta^۳)^۲-۲\alpha^۳\beta^۳=(\alpha^۳+\beta^۳)^۲-۲(\alpha\beta)^۳=۵^۲-۲(\frac{۱}{۲})^۳=۲۵-\frac{۱}{۴}=\frac{۹۹}{۴} \Rightarrow \alpha^۶+\beta^۶=\frac{۹۹}{۴}$$

۹ عبارت داده‌شده را با کمک اتحاد چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم و با استفاده از قسمت‌های قبل، حاصل آن را به دست می‌آوریم:

$$\alpha^۳-\beta^۳=\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\sqrt{۲}}(\underbrace{\alpha^۲+\beta^۲}_{۳}+\underbrace{\alpha\beta}_{\frac{۱}{۲}})=\sqrt{۲}(\frac{۷}{۲})=\frac{۷}{۲}\sqrt{۲} \Rightarrow \boxed{\alpha^۳-\beta^۳=\frac{۷}{۲}\sqrt{۲}}$$

۱۰ عبارت داده‌شده را با اتحاد مزدوج در دو مرحله تجزیه می‌کنیم:

$$\alpha^۴-\beta^۴=(\alpha^۲-\beta^۲)(\alpha^۲+\beta^۲)=\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\sqrt{۲}}\underbrace{(\alpha+\beta)}_{۲}\underbrace{(\alpha^۲+\beta^۲)}_{۳}=(\sqrt{۲})(۲)(۳)=۶\sqrt{۲} \Rightarrow \boxed{\alpha^۴-\beta^۴=۶\sqrt{۲}}$$

۱۱
$$\frac{\alpha+۱}{\beta}-\frac{\beta+۱}{\alpha}=\frac{\alpha(\alpha+۱)-\beta(\beta+۱)}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^۲+\alpha-\beta^۲-\beta}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha^۲-\beta^۲)+(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}=\frac{\overbrace{(\alpha-\beta)}^{\sqrt{۲}}\overbrace{(\alpha+\beta)}^{۲}+\overbrace{(\alpha-\beta)}^{\sqrt{۲}}}{\underbrace{\alpha\beta}_{\frac{۱}{۲}}}$$

$$=\frac{۲\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۳\sqrt{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۳\times۲\sqrt{۲} \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha+۱}{\beta}-\frac{\beta+۱}{\alpha}=۶\sqrt{۲}}$$

۱۲ α جواب معادله است، پس در معادله صدق می‌کند و می‌توانیم آن را جای x قرار دهیم:

$$۲x^۲-۴x+۱=۰ \xrightarrow{x=\alpha} ۲\alpha^۲-۴\alpha+۱=۰ \Rightarrow \boxed{۲\alpha^۲-۴\alpha=-۱}$$

۱۳ مشابه قسمت (۱۲) داریم:

$$۲\alpha^۲-۴\alpha+۱=۰ \Rightarrow ۲\alpha^۲=۴\alpha-۱$$

پس می‌توانیم جای $۲\alpha^۲$، عبارت $۴\alpha-۱$ را جای‌گذاری کنیم:

$$۲\alpha^۲+۴\beta=۴\alpha-۱+۴\beta=۴\underbrace{(\alpha+\beta)}_{۲}-۱=۸-۱=۷ \Rightarrow \boxed{۲\alpha^۲+۴\beta=۷}$$

۱۴ برای محاسبهٔ $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$ آن را برابر با یک حرف (مثلاً A) قرار می‌دهیم و با توان دو رساندن دو طرف، حاصل عبارت خواسته‌شده را به دست می‌آوریم، در این‌جا چون $\alpha>\beta$ است، پس $\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}$ عددی منفی است. ما حاصل $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ را به دست می‌آوریم و سپس آن را قرینه می‌کنیم:

$$A=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta} \xrightarrow{\text{توان ۲}} A^۲=\underbrace{\alpha+\beta}_{۲}-۲\sqrt{\underbrace{\alpha\beta}_{\frac{۱}{۲}}} \Rightarrow A^۲=۲-۲\sqrt{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow A^۲=۲-\sqrt{\frac{۴}{۲}}=۲-\sqrt{۲} \Rightarrow A=\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}=\sqrt{۲-\sqrt{۲}} \Rightarrow \sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=-\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$$

نکته اگر $\alpha>\beta>۰$ باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}=\sqrt{S\pm۲\sqrt{P}}}$$

تست **مجموعهٔ مقادیر m که به ازای آن‌ها معادلهٔ $(m+2)x^2+4x+m=1$ دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد، کدام است؟**

۱) $-2<m<1$ ۲) $-3<m<2$ ۳) $2<m<3$ ۴) $1<m<2$

پاسخ گزینهٔ «۴» معادله را به شکل $(m+2)x^2+4x+(m-1)=0$ می‌نویسیم.

برای آن‌که معادلهٔ درجه دو، دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی باشد، باید سه شرط $\Delta>0$، $S<0$ و $P>0$ را داشته باشد:

۱) چون معادله دارای دو جواب حقیقی است، دلتا باید مثبت باشد:

$$\Delta>0 \Rightarrow 16-4(m+2)(m-1)>0 \xrightarrow{\div 4} 4-(m+2)(m-1)>0 \Rightarrow 4-m^2-m+2>0 \Rightarrow m^2+m-6<0$$
$$\Rightarrow (m+3)(m-2)<0 \Rightarrow \boxed{-3<m<2}$$

۲) چون هر دو ریشه منفی هستند، باید جمع ریشه‌ها منفی باشد:

$$S<0 \Rightarrow -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow \frac{b}{a}>0 \Rightarrow \frac{4}{m+2}>0 \Rightarrow m+2>0 \Rightarrow \boxed{m>-2}$$

۳) چون هر دو ریشه منفی هستند، باید ضرب ریشه‌ها مثبت باشد:

$$P>0 \Rightarrow \frac{c}{a}>0 \Rightarrow \frac{m-1}{m+2}>0 \Rightarrow \boxed{m>1 \text{ یا } m<-2}$$

حالا باید بین سه شرط بالا اشتراک بگیریم:

$$(1)\cap(2)\cap(3)=(-3<m<2)\cap(m>-2)\cap(m>1 \text{ یا } m<-2)=\boxed{1<m<2}$$

تست **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+4x+2=0$ باشند، حاصل $\alpha^3+8\alpha^{-3}$ کدام است؟**

۱) -48 ۲) -44 ۳) -40 ۴) -36

پاسخ گزینهٔ «۳» حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$P=\frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta=2$$

β را برحسب α به دست می‌آوریم:

$$\alpha\beta=2 \Rightarrow \beta=\frac{2}{\alpha}$$

پس می‌توانیم به جای $\frac{2}{\alpha}$، β را قرار دهیم. حالا عبارتِ خواسته‌شده را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\alpha^3+8\alpha^{-3}=\alpha^3+\frac{8}{\alpha^3}=\alpha^3+\left(\frac{2}{\alpha}\right)^3=\alpha^3+\beta^3$$

می‌دانیم مجموع مکعبات ریشه‌ها از رابطهٔ $\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS$ به دست می‌آید، پس:

$$\alpha^3+\beta^3=S^3-3PS=(-4)^3-3(2)(-4)=-64+24=-40$$

تست **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-4x-3=0$ باشند، حاصل $\alpha^3\beta-3\beta^2$ کدام است؟**

۱) -30 ۲) 30 ۳) -66 ۴) 66

پاسخ گزینهٔ «۳» در معادلهٔ $x^2-4x-3=0$ با ریشه‌های α و β داریم:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=4 \Rightarrow S=4$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=-3 \Rightarrow P=-3$$

عبارت داده‌شده را ساده‌تر می‌کنیم و از تساوی‌های بالا در آن استفاده می‌کنیم:

$$\alpha^3\beta-3\beta^2=\underbrace{(\alpha\beta)}_{-3}\alpha^2-3\beta^2=-3\alpha^2-3\beta^2=-3(\alpha^2+\beta^2)=-3(S^2-2P)=-3(4^2-2(-3))=-3(16+6)=-66$$

حل معادله به روش تغییر متغیر

برخی معادلات هستن که شاید قیافهٔ ترسناکی داشته باشن ولی قلب کوچکی دارن و خیلی راحت رام می‌شن و آن‌ها را حل می‌کنیم! در این معادلات با جای‌گذاری t به جای یک عبارتِ برحسب x، می‌توان معادله را به شکل یک معادلهٔ ساده‌تر درآورد؛ پس معادله را برحسب t حل کرده و مقادیر t را به دست می‌آوریم. در نهایت باید عبارتی که جای آن t قرار داده‌ایم را مساوی با جواب‌های t قرار دهیم و آن‌ها را حل کنیم و مجهول اصلی یعنی x را به دست آوریم. قسمتی از سؤالات «حل معادله به روش تغییر متغیر» را در قسمت «معادلات گویا و گنگ» بررسی خواهیم کرد.

مثال معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $(x^۲-۱)^۴+(x^۲-۱)^۲-۲=۰$ ب) $(x^۲-۳x-۲)^۲-۱۰(x^۲-۳x)+۳۶=۰$

پاسخ الف) بهترین انتخاب برای تغییر متغیر این است که $(x^۲-۱)^۲$ را t بگیریم: $t=(x^۲-۱)^۲$

پس معادله به شکل مقابل درمی‌آید: $(x^۲-۱)^۴+(x^۲-۱)^۲-۲=۰ \xrightarrow{(x^۲-۱)^۲=t} t^۲+t-۲=۰ \Rightarrow (t-۱)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \\ t=-۲ \end{cases}$

حالا با جای‌گذاری $t=۱$ و $t=-۲$، مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$t=۱ \Rightarrow (x^۲-۱)^۲=۱ \Rightarrow x^۲-۱=\pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} x^۲-۱=۱ \Rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{۲}} \\ x^۲-۱=-۱ \Rightarrow x^۲=۰ \Rightarrow \boxed{x=۰} \end{cases}$$

$$t=-۲ \Rightarrow \underbrace{(x^۲-۱)^۲}_{\text{همواره نامنفی}}=-۲ \quad \text{(جواب ندارد.)}$$

پس معادله دارای سه جواب $x=\sqrt{۲}$، $x=-\sqrt{۲}$ و $x=۰$ است.

ب) در معادلهٔ فوق تغییر متغیر روبه‌رو را اعمال می‌کنیم: $x^۲-۳x-۲=t$

پس $x^۲-۳x$ برابر است با: $x^۲-۳x-۲=t \Rightarrow x^۲-۳x=t+۲$

با جای‌گذاری تساوی‌های بالا، معادله را برحسب t حل می‌کنیم:

$$(\underbrace{x^۲-۳x-۲}_{t})^۲-۱۰(\underbrace{x^۲-۳x}_{t+۲})+۳۶=۰ \Rightarrow t^۲-۱۰(t+۲)+۳۶=۰ \Rightarrow t^۲-۱۰t+۱۶=۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۲ \\ t=۸ \end{cases}$$

با جای‌گذاری $t=۲$ و $t=۸$ در رابطهٔ $x^۲-۳x-۲=t$، مقدار x را به دست می‌آوریم:

$$x^۲-۳x-۲=t \xrightarrow{t=۲} x^۲-۳x-۲=۲ \Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=۴} \\ \boxed{x=-۱} \end{cases}$$

$$x^۲-۳x-۲=t \xrightarrow{t=۸} x^۲-۳x-۲=۸ \Rightarrow x^۲-۳x-۱۰=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=۵} \\ \boxed{x=-۲} \end{cases}$$

پس این معادله دارای چهار ریشهٔ $x=۴$، $x=-۱$، $x=۵$ و $x=-۲$ است.

تست به ازای کدام مجموعه‌مقادیر m، معادلهٔ $mx^۴-۲(m-۳)x^۲+m+۲=۰$ دارای ۴ جواب حقیقی متمایز است؟

۱) $-۲<m<\frac{۹}{۸}$ ۲) $m<-۲$ یا $m>۳$ ۳) $-۲<m<۳$ ۴) $m<-۲$

پاسخ گزینهٔ «۴» معادلهٔ $ax^۴+bx^۲+c=۰$ با تغییر متغیر $t=x^۲$ به معادلهٔ درجه‌دوم $at^۲+bt+c=۰$ تبدیل می‌شود. فقط جواب‌های مثبتِ (یا صفر) t به درد ما می‌خورند. به ازای هر جواب مثبت برای t، معادلهٔ اولیه دارای دو جواب $x=\pm\sqrt{t}$ است. پس اگر بخواهیم معادلهٔ $ax^۴+bx^۲+c=۰$ دارای چهار جواب متمایز باشد، باید معادلهٔ $at^۲+bt+c=۰$ دارای دو جواب مثبت باشد.

معادلهٔ $mx^۴-۲(m-۳)x^۲+(m+۲)=۰$ با تغییر متغیر $x^۲=t$ به معادلهٔ $mt^۲-۲(m-۳)t+(m+۲)=۰$ تبدیل می‌شود. برای آن‌که این معادله دارای دو ریشهٔ مثبت باشد، باید هر سه شرط زیر را داشته باشد:

$$۱)\ \Delta>۰ \Rightarrow ۴(m-۳)^۲-۴m(m+۲)>۰ \xrightarrow{\div ۴} \cancel{m^۲}-۶m+۹-\cancel{m^۲}-۲m>۰ \Rightarrow m<\frac{۹}{۸}$$

$$۲)\ S>۰ \Rightarrow -\frac{b}{a}>۰ \Rightarrow \frac{۲(m-۳)}{m}>۰ \Rightarrow m>۳ \text{ یا } m<۰$$

$$۳)\ P>۰ \Rightarrow \frac{c}{a}>۰ \Rightarrow \frac{m+۲}{m}>۰ \Rightarrow m>۰ \text{ یا } m<-۲$$

حالا بین سه شرط بالا اشتراک می‌گیریم تا محدودهٔ m به دست آید: $m<-۲$

تست **به ازای کدام محدوده برای m، معادلهٔ $mx-(2m+1)\sqrt{x}+m+2=0$ دارای یک جواب حقیقی است؟**

۱) $(0,\frac{1}{4})$ ۲) $(-2,0)$ ۳) $(-2,\frac{1}{4})$ ۴) $(-2,0)\cup\{\frac{1}{4}\}$

پاسخ گزینهٔ «۴» معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$ با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$، به معادلهٔ درجه‌دوم $at^2+bt+c=0$ تبدیل می‌شود. فقط جواب‌های مثبت (یا صفر) t به درد ما می‌خورند. به ازای هر جواب مثبت برای t، معادلهٔ اولیه دارای یک جواب $x=t^2$ است. پس اگر بخواهیم معادلهٔ $ax+b\sqrt{x}+c=0$ دارای یک جواب باشد، باید معادلهٔ $at^2+bt+c=0$ دارای یک جواب مثبت باشد $(c\neq 0)$.

معادلهٔ $mx-(2m+1)\sqrt{x}+(m+2)=0$ با تغییر متغیر $t=\sqrt{x}$ به معادلهٔ $mt^2-(2m+1)t+(m+2)=0$ تبدیل می‌شود. برای آن‌که این معادله دارای یک جواب باشد، باید یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

۱) معادله یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی داشته باشد: $P<0$ و $\Delta>0$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta>0 \Rightarrow (2m+1)^2-4m(m+2)>0 \Rightarrow -4m+1>0 \Rightarrow m<\frac{1}{4}\\ P<0 \Rightarrow \frac{m+2}{m}<0 \Rightarrow -2<m<0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -2<m<0$$

۲) معادله دارای یک ریشهٔ مضاعف مثبت باشد: $\Delta=0$ و $S>0$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta=0 \Rightarrow -4m+1=0 \Rightarrow m=\frac{1}{4}\\ S>0 \Rightarrow \frac{2m+1}{m}>0 \Rightarrow m>0 \text{ یا } m<-\frac{1}{2}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m=\frac{1}{4}$$

پس m می‌تواند در محدودهٔ $(-2,0)\cup\{\frac{1}{4}\}$ باشد.

تست **اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^4+kx^2+9=0$، چهار جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشند، ریشهٔ کوچک‌تر کدام است؟**

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -9

پاسخ گزینهٔ «۳» ریشه‌های معادلهٔ $x^4+kx^2+9=0$ حتماً به صورت $\pm\alpha$ و $\pm\beta$ هستند. (چون اگر $x=\alpha$ در این معادله صدق کند، حتماً $x=-\alpha$ هم صدق می‌کند.) اگر فرض کنیم $\alpha>\beta>0$ باشد، آن‌گاه ترتیب ریشه‌ها از کوچک به بزرگ به صورت زیر است:

$-\alpha,-\beta,\beta,\alpha$

چون این ۴ عدد، جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی‌اند، پس تفاضل هر دو جملهٔ متوالی آن برابر قدرنسبت است:

$$\left.\begin{array}{l}d=\alpha-\beta\\ d=\beta-(-\beta)=2\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha-\beta=2\beta \Rightarrow \alpha=3\beta$$

با تغییر متغیر $x^2=t$، معادله به شکل $t^2+kt+9=0$ درمی‌آید که ریشه‌های آن هم α^2 و β^2 هستند؛ بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها را می‌نویسیم:

$$P=\frac{c}{a} \Rightarrow \alpha^2\beta^2=9 \xrightarrow{\alpha=3\beta} 9\beta^4=9 \Rightarrow \beta^4=1 \xrightarrow{\beta>0} \beta=1$$

پس $\alpha=3\beta=3$ است و ریشه‌های معادلهٔ اولیه به صورت $-3,-1,1,3$ هستند که کوچک‌ترین آن‌ها -3 است.

نوشتن معادلهٔ درجه دوم با داشتن S و P

فرض کنید می‌خواهیم یک معادلهٔ درجه دو بنویسیم که ریشه‌هایش α و β باشند. این معادله به صورت $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ است که اگر آن را باز کنیم، خواهیم داشت:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \Rightarrow x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0 \Rightarrow x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

با جای‌گذاری $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$، معادلهٔ بالا به شکل روبه‌رو درمی‌آید:

$$x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}x+\underbrace{\alpha\beta}_{P}=0 \Rightarrow x^2-Sx+P=0$$

پس یک معادلهٔ درجه دو که مجموع ریشه‌هایش S و حاصل‌ضرب آن‌ها P باشد به این صورت است:

$$\boxed{x^2-Sx+P=0}$$

مثال **معادلهٔ درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $۳\pm\sqrt{۵}$ باشند.**

پاسخ با فرض $\alpha=۳+\sqrt{۵}$ و $\beta=۳-\sqrt{۵}$، مقدار S و P را به دست می‌آوریم:

$$S=\alpha+\beta=(۳+\sqrt{۵})+(۳-\sqrt{۵})=۶$$

$$P=\alpha\beta=(۳+\sqrt{۵})(۳-\sqrt{۵})=۹-۵=۴$$

الان که مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را داریم، آن‌ها را در معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ جای‌گذاری می‌کنیم تا معادلهٔ موردنظر به دست آید:

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۶x+۴=۰$$

تست **در مستطیلی به محیط ۱۳ cm و مساحت $۱۰\ cm^۲$، تفاضل طول و عرض چند سانتی‌متر است؟**

۱) ۱　　۲) ۱/۵　　۳) ۲　　۴) ۲/۵

پاسخ گزینهٔ «۲» طول و عرض مستطیل را به ترتیب α و β در نظر می‌گیریم، پس:

$$\text{محیط}=۱۳ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۱۳ \Rightarrow \alpha+\beta=۶/۵$$

$$\text{مساحت}=۱۰ \Rightarrow \alpha\beta=۱۰$$

پس اگر α و β را ریشه‌های یک معادلهٔ درجه دو در نظر بگیریم، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادله را داریم:

$$\alpha+\beta=۶/۵ \Rightarrow S=۶/۵$$

$$\alpha\beta=۱۰ \Rightarrow P=۱۰$$

معادلهٔ درجه دو موردنظر را با داشتن S و P می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم:

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۶/۵x+۱۰=۰$$

$$\Delta=(-۶/۵)^۲-۴(۱)(۱۰)=۴۲/۲۵-۴۰=۲/۲۵$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۶/۵\pm\sqrt{۲/۲۵}}{۲}=\frac{۶/۵\pm۱/۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\frac{۶/۵+۱/۵}{۲}=۴\\ \beta=\frac{۶/۵-۱/۵}{۲}=۲/۵\end{cases}$$

پس تفاضل طول و عرض این مستطیل برابر است با:

$$\alpha-\beta=۴-۲/۵=۱/۵$$

البته می‌توانستیم معادله را حل نکنیم. چون سؤال تفاضل α و β را می‌خواهد، از رابطهٔ $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ استفاده می‌کنیم:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{۲/۲۵}}{۱}=۱/۵$$

ساختن معادلهٔ درجه دوم جدید از روی معادلهٔ موجود

فرض کنید یک معادلهٔ درجه دو به ما می‌دهند و از ما معادله‌ای می‌خواهند که ریشه‌هایش، با ریشه‌های معادلهٔ اولیه رابطه‌ای خاص را داشته باشد. برای به دست آوردن معادلهٔ درجه دو جدید باید با استفاده از روابط بین ریشه‌ها S و P معادلهٔ جدید را به دست آوریم و در نهایت با جای‌گذاری در معادلهٔ $x^۲-S'x+P'=۰$ به معادلهٔ موردنظر برسیم. به تست زیر دقت کنید:

تست **معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌هایش از دو برابر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۴x-۶=۰$ یک واحد کم‌تر باشند، کدام است؟**

۱) $x^۲-۶x-۳۱=۰$　　۲) $x^۲+۶x-۳۱=۰$　　۳) $x^۲-۸x-۳۳=۰$　　۴) $x^۲+۸x-۳۳=۰$

پاسخ گزینهٔ «۱» راه‌حل اول ریشه‌های معادلهٔ اول را α و β می‌گیریم، پس داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۴$$

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۶$$

ریشه‌های معادلهٔ جدید از دو برابر ریشه‌های معادلهٔ اول یک واحد کم‌ترند، پس آن‌ها را $۲\alpha-۱$ و $۲\beta-۱$ می‌گیریم. S و P جدید را حساب می‌کنیم:

$$S'=(۲\alpha-۱)+(۲\beta-۱)=۲(\alpha+\beta)-۲=۲(۴)-۲=۶$$

$$P'=(۲\alpha-۱)(۲\beta-۱)=۴\alpha\beta-۲\alpha-۲\beta+۱=۴\alpha\beta-۲(\alpha+\beta)+۱=۴(-۶)-۲(۴)+۱=-۳۱$$

حالا S' و P' را در معادلهٔ $x^۲-S'x+P'=۰$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x^۲-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^۲-۶x-۳۱=۰$$

راه‌حل دوم اگر x را ریشهٔ معادلهٔ اول و در نظر بگیریم که ریشهٔ معادلهٔ جدید باید از دو برابر آن یک واحد کم‌تر باشد، یعنی باید به صورت $x'=۲x-۱$ باشد. کافی است x را برحسب x' بنویسیم و در معادلهٔ اول جای‌گذاری کنیم: $x=\frac{x'+۱}{۲}$

$$x^۲-۴x-۶=۰ \xrightarrow{x=\frac{x'+۱}{۲}} (\frac{x'+۱}{۲})^۲-۴(\frac{x'+۱}{۲})-۶=۰ \xrightarrow{\times۴} x'^۲+۲x'+۱-۸x'-۸-۲۴=۰ \Rightarrow x'^۲-۶x'-۳۱=۰$$

پس معادلهٔ جدید به صورت $x'^۲-۶x'-۳۱=۰$ یا $x^۲-۶x-۳۱=۰$ است.

تست **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۴=۰$ باشند و $\alpha^۲+\frac{۱}{\beta}$ و $\beta^۲+\frac{۱}{\alpha}$ ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+mx+n=۰$ باشند، مقدار $m-n$ کدام است؟**

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲۱ ۴) -۲۱

پاسخ گزینهٔ «۴» در معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۴=۰$، مقدار S و P را حساب می‌کنیم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۳}{۲}$$

$$P=\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow \alpha\beta=-\frac{۴}{۲}=-۲$$

S و P معادلهٔ جدید را به دست می‌آوریم:

$$S'=(\alpha^۲+\frac{۱}{\beta})+(\beta^۲+\frac{۱}{\alpha})=(\alpha^۲+\beta^۲)+(\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta})=((\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta)+(\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta})=S^۲-۲P+\frac{S}{P}=(\frac{۳}{۲})^۲-۲(-۲)+\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}$$

$$=\frac{۹}{۴}+۴-\frac{۳}{۴}=\frac{۲۲}{۴}=\frac{۱۱}{۲}$$

$$P'=(\alpha^۲+\frac{۱}{\beta})(\beta^۲+\frac{۱}{\alpha})=\alpha^۲\beta^۲+\alpha+\beta+\frac{۱}{\alpha\beta}=P^۲+S+\frac{۱}{P}=(-۲)^۲+\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{-۲}=۴+\frac{۳}{۲}-\frac{۱}{۲}=۵$$

با داشتن $S'=\frac{۱۱}{۲}$ و $P'=۵$، معادلهٔ جدید را می‌نویسیم: $x^۲-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۱۱}{۲}x+۵=۰ \xrightarrow{\times۲} ۲x^۲-۱۱x+۱۰=۰$

پس $m=-۱۱$ و $n=۱۰$ است و در نتیجه: $m-n=-۲۱$.

تست **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(۳x+۲)^۲-x=۳$ باشند، ریشهٔ کدام‌یک از معادله‌های زیر $(۳\alpha+۲)^۲$ و $(۳\beta+۲)^۲$ است؟**

۱) $۹x^۲-۴۳x+۴۸=۰$ ۲) $۹x^۲-۴۸x+۴۳=۰$ ۳) $۹x^۲-۴۳x+۴۹=۰$ ۴) $۹x^۲-۴۹x+۴۳=۰$

پاسخ گزینهٔ «۳» چون α و β ریشه‌های معادلهٔ $(۳x+۲)^۲-x=۳$ هستند؛ پس در معادله صدق می‌کنند:

$$(۳\alpha+۲)^۲-\alpha=۳ \Rightarrow (۳\alpha+۲)^۲=\alpha+۳ \qquad (۳\beta+۲)^۲-\beta=۳ \Rightarrow (۳\beta+۲)^۲=\beta+۳$$

پس معادله‌ای که ریشه‌هایش $(۳\alpha+۲)^۲$ و $(۳\beta+۲)^۲$ باشند، با معادله‌ای که ریشه‌هایش $\alpha+۳$ و $\beta+۳$ باشند، یکسان است.

ابتدا S و P معادلهٔ اولیه را حساب می‌کنیم:

$$(۳x+۲)^۲-x=۳ \Rightarrow ۹x^۲+۱۱x+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=-\frac{۱۱}{۹} \\ P=\alpha\beta=\frac{۱}{۹} \end{cases}$$

حالا S و P جدید را حساب می‌کنیم:

$$S'=(\alpha+۳)+(\beta+۳)=(\alpha+\beta)+۶=-\frac{۱۱}{۹}+۶=\frac{۴۳}{۹}$$

$$P'=(\alpha+۳)(\beta+۳)=\alpha\beta+۳(\alpha+\beta)+۹=\frac{۱}{۹}+۳(-\frac{۱۱}{۹})+۹=\frac{۱-۳۳+۸۱}{۹}=\frac{۴۹}{۹}$$

با داشتن S' و P' معادلهٔ جدید را می‌نویسیم: $x^۲-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۴۳}{۹}x+\frac{۴۹}{۹}=۰ \xrightarrow{\times۹} ۹x^۲-۴۳x+۴۹=۰$

ماکسیمم یا مینیمم تابع درجه دو (سهمی)

ضابطهٔ کلی تابع درجه دو به صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ با شرط $a\neq ۰$ است.

مختصات رأس سهمی به صورت $S=(-\frac{b}{۲a},f(-\frac{b}{۲a}))$ است.

مقدار $f(-\frac{b}{۲a})$ برابر با $-\frac{\Delta}{۴a}$ می‌شود، پس مختصات رأس سهمی را به صورت $S=(-\frac{b}{۲a},-\frac{\Delta}{۴a})$ نیز می‌توانیم نشان دهیم.

اگر $a>۰$ باشد، دهانهٔ سهمی روبه‌بالا است و سهمی در $x=-\frac{b}{۲a}$ دارای کم‌ترین (مینیمم) مقدار خود است که برابر با $-\frac{\Delta}{۴a}$ است:

اگر $a<۰$ باشد، دهانهٔ سهمی روبه‌پایین است و سهمی در $x=-\frac{b}{۲a}$ دارای بیشترین (ماکسیمم) مقدار خود است که برابر با $-\frac{\Delta}{۴a}$ است:

پس اگر $a>۰$، سهمی دارای Min و اگر $a<۰$، سهمی دارای Max است و هر دو مقدار برابر با $f(-\frac{b}{۲a})$ یا $-\frac{\Delta}{۴a}$ هستند.

تست اگر بیشترین مقدار تابع $f(x)=x(۴-x)+k$ برابر با ۳ باشد، k کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ گزینهٔ «۲» **راه‌حل اول** اول معادلهٔ سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم:

$$f(x)=x(۴-x)+k=۴x-x^{۲}+k \Rightarrow f(x)=-x^{۲}+۴x+k$$

چون ضریب $x^{۲}$ منفی است، پس سهمی دارای ماکسیمم است *(البته اینو خود سؤال هم گفته).*

ماکسیمم و مینیمم تابع درجه دو در رأس آن رخ می‌دهد. اول طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم:
$$x_S=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۴}{۲(-۱)}=۲$$

حالا با جای‌گذاری $x=۲$ در $f(x)$، مقدار ماکسیمم را به دست می‌آوریم و آن را با ۳ برابر قرار می‌دهیم:

$$\text{Max}(f)=f(۲)=-(۲)^{۲}+۴(۲)+k=k+۴ \Rightarrow k+۴=۳ \Rightarrow k=-۱$$

راه‌حل دوم ماکسیمم تابع درجه دو برابر با $-\frac{\Delta}{۴a}$ است، پس آن را با ۳ برابر قرار می‌دهیم:

$$-\frac{\Delta}{۴a}=۳ \Rightarrow \Delta=-۱۲a \Rightarrow b^{۲}-۴ac=-۱۲a \Rightarrow ۴^{۲}-۴(-۱)(k)=-۱۲(-۱) \Rightarrow ۱۶+۴k=۱۲ \Rightarrow ۴k=-۴ \Rightarrow k=-۱$$

در برخی از سؤالات، تابع درجه دو را مستقیماً سؤال به ما نمی‌دهد و باید با اطلاعاتی که در اختیارمان قرار می‌دهد تابع درجه دو موردنظر را بنویسیم و ماکسیمم یا مینیمم آن را به دست آوریم. به تست‌های بعدی دقت کنید.

تست مینیمم مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}+(k-۳)x-(۲k-۱)=۰$ چه‌قدر است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

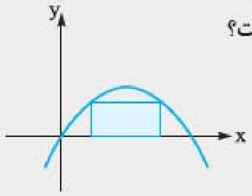
پاسخ گزینهٔ «۴» می‌دانیم مجموع مربعات ریشه‌های معادلهٔ درجه دو از رابطهٔ $\alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P$ به دست می‌آید، پس در این‌جا داریم:

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها}: \alpha^{۲}+\beta^{۲}=S^{۲}-۲P=(\frac{-(k-۳)}{۱})^{۲}-۲(\frac{-(۲k-۱)}{۱})=(k-۳)^{۲}+۲(۲k-۱)=k^{۲}-۶k+۹+۴k-۲$$
$$=k^{۲}-۲k+۷$$

پس باید مینیمم تابع $f(k)=k^{۲}-۲k+۷$ را به دست آوریم:
$$\text{Min}(f)=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{(۴-۴(۱)(۷))}{۴}=\frac{۲۴}{۴}=۶$$

توجه کنید که در معادلهٔ اولیه به ازای هر مقدار k، حاصل Δ مثبت است یعنی معادله همواره دارای ۲ ریشهٔ متمایز است.

تست بیشترین محیط مستطیلی که بین سهمی $f(x)=-x^۲+۶x$ و محور xها مطابق شکل قرار دارد، کدام است؟

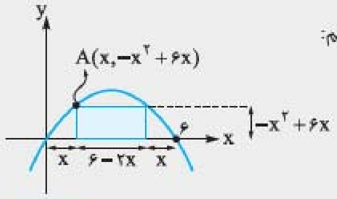


۱) ۱۶ ۲) ۱۸
۳) ۲۰ ۴) ۲۴

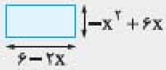
پاسخ گزینهٔ «۳» سهمی $f(x)=-x^۲+۶x$ محور xها را در نقاطی به طول $۰-x$ و $۶-x$ قطع می‌کند:

$$-x^۲+۶x=۰ \Rightarrow x(-x+۶)=۰ \Rightarrow x=۰,۶$$

چون نقطهٔ A روی سهمی است، پس مختصات آن را می‌توانیم به صورت $A(x,-x^۲+۶x)$ بنویسیم:



طول و عرض مستطیل رنگی را برحسب x می‌نویسیم:



محیط این مستطیل را می‌نویسیم:

$$\text{محیط}=۲((-x^۲+۶x)+(۶-۲x))=-۲x^۲+۸x+۱۲$$

می‌خواهیم ماکسیمم تابع $g(x)=-۲x^۲+۸x+۱۲$ را حساب کنیم:

$$\text{Max}(g)=-\frac{\Delta}{۴a}=\frac{-(۶۴-۴(-۲)(۱۲))}{-۸}=\frac{۶۴+۹۶}{۸}=\frac{۱۶۰}{۸}=۲۰$$

تست کم‌ترین فاصلهٔ نقاط منحنی $y=x^۲$ از خط $y=۲x-۶$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۲» مختصات پارامتری هر نقطه روی منحنی $y=x^۲$ را می‌توانیم به صورت $A(\alpha,\alpha^۲)$ در نظر بگیریم.

می‌دانیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط $ax+by+c=۰$ از رابطهٔ $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ به دست می‌آید، پس فاصلهٔ نقطهٔ $A(\alpha,\alpha^۲)$ از خط $۲x-y-۶=۰$ برابر است با:

$$\frac{|۲\alpha-\alpha^۲-۶|}{\sqrt{۲^۲+(-۱)^۲}}=\frac{|\alpha^۲-۲\alpha+۶|}{\sqrt{۵}}$$

برای به دست آوردن Min عبارت بالا، کافی است Min عبارت داخل قدرمطلق را حساب کنیم (زیرا مخرج عددی ثابت است).

$$\text{مینیمم عبارت داخل قدرمطلق}=-\frac{\Delta}{۴a}=-\frac{(-۲)^۲-۴(۱)(۶)}{۴(۱)}=\frac{۲۰}{۴}=۵$$

پس Min کل عبارت برابر با $\frac{۵}{\sqrt{۵}}$ یعنی $\sqrt{۵}$ است.

صفرهای تابع درجه دو

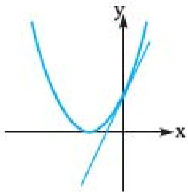
- نقاط برخورد یک تابع با محور xها، نقاط با اهمیتی برای ما هستند. طول این نقاط را «صفرهای تابع» می‌نامیم.
- همچنین محل برخورد یک تابع با محور yها هم برای ما مهم است. عرض این نقطه برابر با $f(۰)$ است. در تابع درجه دو $f(۰)=c$ است و نقطهٔ برخورد آن با محور yها، نقطهٔ $(۰,c)$ است.
- تعداد صفرهای یک تابع درجه دو را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد:

۱ $\Delta>۰ \Rightarrow$ تابع دارای ۲ صفر متمایز است   ۲ $\Delta=۰ \Rightarrow$ تابع دارای یک صفر است   ۳ $\Delta<۰ \Rightarrow$ تابع، صفر ندارد!

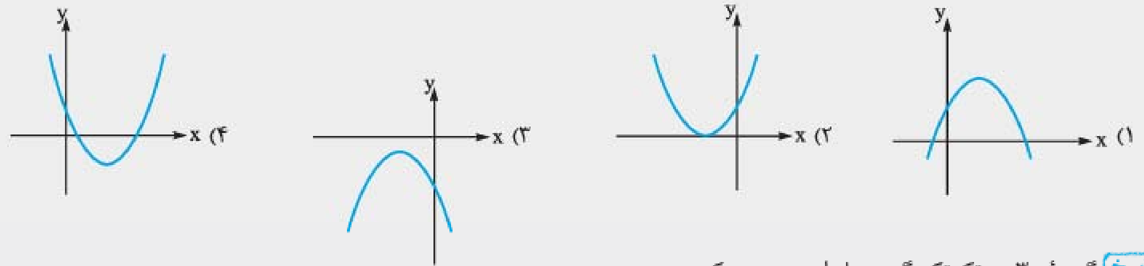
- اگر نمودار تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ را داشته باشیم، می‌توانیم علامت ضرایب a، b و c را تعیین کنیم:
- علامت a: اگر دهانهٔ سهمی روبه‌بالا باشد، $a>۰$ و اگر دهانهٔ سهمی روبه‌پایین باشد، $a<۰$ است.
- علامت c: عرض نقطهٔ برخورد تابع با محور yها است! خیلی راحت مثبت یا منفی‌بودن آن را تشخیص می‌دهیم.

◀ علامت b: طول رأس سهمی از رابطهٔ $x_S=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. چون علامت a و x_S را می‌دانیم، می‌توانیم علامت b را هم تعیین کنیم.

نکته برای تشخیص علامت b می‌توانیم از علامت شیب خط مماس بر سهمی در محل نقطهٔ تقاطع سهمی با محور yها هم استفاده کنیم. مثلاً در نمودار زیر، چون شیب خط مماس بر سهمی در نقطهٔ برخورد آن با محور yها عددی مثبت است، پس $b>0$ است.



تست در هر گزینه نمودار یک سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ رسم شده است. در کدام نمودار حاصل $abc\Delta$ عددی مثبت است؟



پاسخ گزینهٔ «۳» تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

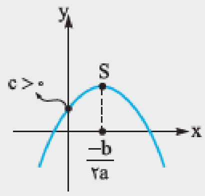
۱) دهانهٔ سهمی روبه‌پایین است، پس $a<0$.

سهمی محور yها را در **بالای** محور xها قطع کرده، پس $c>0$.

طول رأس سهمی عددی مثبت است، پس:

$$-\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow \frac{b}{a}<0 \xrightarrow{a<0} b>0$$

سهمی در دو نقطه محور xها را قطع می‌کند، پس دارای دو ریشهٔ متمایز است و $\Delta>0$.



پس داریم:

$$\overset{-}{a}\,\underset{+}{b}\,\overset{+}{c}\,\underset{+}{\Delta}<0$$

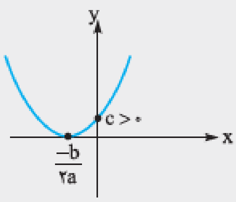
۲) دهانهٔ سهمی روبه‌بالا است، پس $a>0$.

سهمی محور yها را در **بالای** محور xها قطع کرده، پس $c>0$.

طول رأس سهمی عددی منفی است، پس:

$$-\frac{b}{2a}<0 \Rightarrow \frac{b}{a}>0 \xrightarrow{a>0} b>0$$

سهمی در یک نقطه با طول منفی بر محور xها **مماس** شده است، پس $\Delta=0$.



پس داریم:

$$\overset{+}{a}\,\underset{+}{b}\,\overset{+}{c}\,\underset{0}{\Delta}=0$$

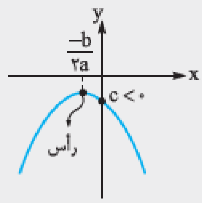
۳) دهانهٔ سهمی روبه‌پایین است، پس $a<0$.

سهمی محور yها را در پایین محور xها قطع کرده، پس $c<0$.

طول رأس سهمی عددی منفی است، پس:

$$-\frac{b}{2a}<0 \Rightarrow \frac{b}{a}>0 \xrightarrow{a<0} b<0$$

سهمی محور xها را قطع نکرده، پس $\Delta<0$ و سهمی ریشه ندارد.



پس داریم:

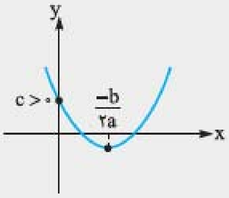
$$\overset{-}{a}\,\underset{-}{b}\,\overset{-}{c}\,\underset{-}{\Delta}>0$$

۴) دهانهٔ سهمی روبه‌بالا است، پس $a>0$.

سهمی محور yها را در بالای محور xها قطع کرده، پس $c>0$.

طول رأس سهمی عددی مثبت است، پس:

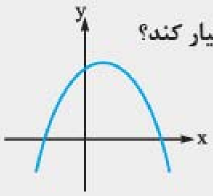
$$-\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow \frac{b}{a}<0 \xrightarrow{a>0} b<0$$



سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کرده است، پس $\Delta > 0$.

پس داریم:

$$\overset{\overset{+}{\uparrow}}{a}\,\underset{\underset{+}{\downarrow}}{b}\,\overset{\overset{+}{\uparrow}}{c}\,\underset{\underset{+}{\downarrow}}{\Delta}<0$$



تست **شکل مقابل نمودار سهمی $f(x)=(m-2)x^2+(m+1)x+m+3$ است. m چند مقدار صحیح می‌تواند اختیار کند؟**

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

پاسخ گزینهٔ «۱» ۱) دهانهٔ سهمی روبه‌پایین است، پس $a<0$: $m-2<0 \Rightarrow m<2$

۲) عرض از مبدأ سهمی مثبت است، پس $c>0$: $m+3>0 \Rightarrow m>-3$

۳) سهمی دارای دو ریشهٔ ناهم‌علامت است، پس حاصل‌ضرب آن‌ها منفی است: $P<0 \Rightarrow \frac{m+3}{m-2}<0 \Rightarrow -3<m<2$

۴) مجموع ریشه‌های ناهم‌علامت این سهمی، عددی مثبت است، پس: $S>0 \Rightarrow \frac{-(m+1)}{m-2}>0 \Rightarrow -1<m<2$

حالا بین چهار شرط بالا اشتراک می‌گیریم: $(1)\cap(2)\cap(3)\cap(4)=-1<m<2$

پس m می‌تواند دو مقدار صحیح $m=0$ و $m=1$ را اختیار کند.

نوشتن معادلهٔ سهمی

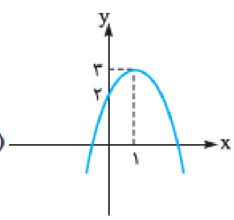
برای نوشتن معادلهٔ سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ از روی نمودار آن نیاز به داشتن ۳ معادله داریم تا به کمک آن‌ها سه مجهول a، b و c را به دست آوریم.

بد نیست حواسمان به موارد زیر باشد:

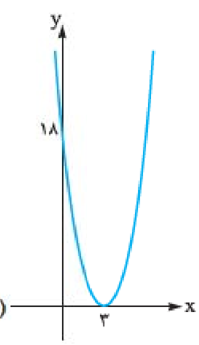
- عرض نقطهٔ برخورد سهمی با محور yها، همان c است.
- اگر مختصات رأس سهمی را داشتیم، یعنی دو معادله داریم؛ مثلاً اگر نقطهٔ $(2,5)$ رأس سهمی باشد، آن‌گاه دو معادلهٔ $-\frac{b}{2a}=2$ و $f(2)=5$ را داریم.
- مقدار تابع در ریشه‌ها برابر صفر است، یعنی اگر f محور طول‌ها را در α قطع کند، آن‌گاه $f(\alpha)=0$.

مثال **معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید.**

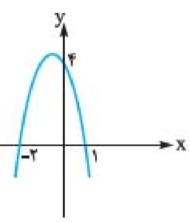
پ)



ب)



الف)



پاسخ الف) راه‌حل اول سهمی از سه نقطهٔ $(-۲,۰)$، $(۱,۰)$ و $(۰,۴)$ می‌گذرد، پس برای $f(x)=ax^۲+bx+c$ سه معادلهٔ زیر را داریم:

$$(-۲,۰)\in f \Rightarrow f(-۲)=۰ \Rightarrow ۴a-۲b+c=۰$$
$$(۱,۰)\in f \Rightarrow f(۱)=۰ \Rightarrow a+b+c=۰$$
$$(۰,۴)\in f \Rightarrow f(۰)=۴ \Rightarrow ۰+۰+c=۴ \Rightarrow \boxed{c=۴}$$

با جای‌گذاری $c=۴$ در دو معادلهٔ اول، مقدار a و b را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}۴a-۲b+۴=۰ \xrightarrow{\div ۲} \\ a+b+۴=۰ \Rightarrow\end{cases} \begin{cases}۲a-\cancel{b}=-۲ \\ a+\cancel{b}=-۴ \quad + \\ \hline ۳a=-۶ \Rightarrow \boxed{a=-۲}\end{cases}$$

حالا با جای‌گذاری $a=-۲$، مقدار b را به دست می‌آوریم:

$$a+b=-۴ \xrightarrow{a=-۲} -۲+b=-۴ \Rightarrow \boxed{b=-۲}$$

پس معادلهٔ سهمی به شکل $f(x)=-۲x^۲-۲x+۴$ در می‌آید.

نکته معادلهٔ سهمی که دارای ریشه‌های α و β باشد، به صورت $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ است.

راه‌حل دوم با استفاده از نکتهٔ بالا، معادلهٔ این سهمی که محور xها را در نقاطی به طول ۲− و ۱ قطع کرده به صورت $f(x)=a(x-۱)(x-(-۲))$ است. حالا فقط کافی است نقطهٔ $(۰,۴)$ را روی آن قرار دهیم تا a به دست آید:

$$f(x)=a(x-۱)(x+۲) \xrightarrow{(۰,۴)\in f} ۴=a(۰-۱)(۰+۲) \Rightarrow -۲a=۴ \Rightarrow a=-۲$$

پس معادلهٔ f به صورت $f(x)=-۲(x-۱)(x+۲)$ است.

ب) سهمی بر محور xها در نقطهٔ $x=۳$ مماس شده است، پس دارای ریشهٔ مضاعف $x=۳$ است و معادلهٔ آن به صورت $f(x)=a(x-۳)^۲$ است. از نقطهٔ $(۰,۱۸)$ کمک می‌گیریم و مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=a(x-۳)^۲ \xrightarrow{(۰,۱۸)\in f} ۱۸=a(۰-۳)^۲ \Rightarrow ۹a=۱۸ \Rightarrow a=۲$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $f(x)=۲(x-۳)^۲$ است.

نکته اگر سهمی در نقطه‌ای به طول $x=\alpha$ بر محور xها مماس شود، معادلهٔ آن به صورت $f(x)=a(x-\alpha)^۲$ خواهد بود.

پ) راه‌حل اول اولاً سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کرده، پس $\boxed{c=۲}$.

حالا از رأس سهمی دو معادله خواهیم داشت:

اولاً طول رأس آن ۱ است:

$$-\frac{b}{۲a}=۱ \Rightarrow -b=۲a \Rightarrow ۲a+b=۰$$

ثانیاً سهمی از نقطهٔ $(۱,۳)$ می‌گذرد:

$$f(x)=ax^۲+bx+۲ \xrightarrow{f(۱)=۳} ۳=a+b+۲ \Rightarrow a+b=۱$$

حالا دو معادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}۲a+b=۰\\ a+b=۱\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=-۱}, \boxed{b=۲}$$

پس معادلهٔ سهمی به شکل $f(x)=-x^۲+۲x+۲$ است.

نکته معادلهٔ سهمی با رأس $S(\alpha,\beta)$ به صورت $f(x)=a(x-\alpha)^۲+\beta$ است.

راه‌حل دوم با استفاده از نکتهٔ بالا چون رأس سهمی $S(۱,۳)$ است، پس معادلهٔ آن به صورت $f(x)=a(x-۱)^۲+۳$ است. حالا با جای‌گذاری نقطهٔ $(۰,۲)$ در f، مقدار a را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=a(x-۱)^۲+۳ \xrightarrow{(۰,۲)\in f} ۲=a(۰-۱)^۲+۳ \Rightarrow a+۳=۲ \Rightarrow a=-۱$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $f(x)=-(x-۱)^۲+۳$ است.

تست سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۵ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱− قطع می‌کند. اگر خط $y=۹$ بر این سهمی مماس باشد، معادلهٔ محور تقارن آن کدام است؟ $(a<-۵)$

۱) $x=\frac{۲}{۵}$ ۲) $x=-\frac{۲}{۵}$ ۳) $x=۲$ ۴) $x=-۲$

پاسخ گزینهٔ «۲» سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع کرده است، پس $c=5$.

این سهمی محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱− قطع کرده است، پس $f(-1)=0$:

$$f(x)=ax^2+bx+5 \Rightarrow a-b+5=0 \Rightarrow b=a+5$$

همچنین خط $y=9$ بر این سهمی مماس است، پس عرض رأس سهمی برابر با ۹ است:

$$y_S=9 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}=9 \Rightarrow -\frac{b^2-4ac}{4a}=9 \Rightarrow -\frac{b^2-20a}{4a}=9 \Rightarrow b^2+16a=0$$

حالا کافی است $b=a+5$ را در معادلهٔ بالا جای‌گذاری کنیم تا a به دست آید:

$$b^2+16a=0 \Rightarrow (a+5)^2+16a=0 \Rightarrow a^2+26a+25=0 \Rightarrow (a+25)(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 & \times \\ a=-25 & \checkmark \end{cases}$$

با شرط $a<-5$، فقط $a=-25$ قابل‌قبول است. مقدار b هم برابر است با: $b=a+5=-25+5=-20$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $f(x)=-25x^2-20x+5$ است.

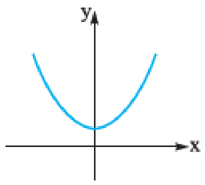
معادلهٔ محور تقارن هر سهمی به صورت $x=-\frac{b}{2a}$ است که در این‌جا به صورت $x=-\frac{-20}{2\times(-25)}=\frac{-2}{5}$ خواهد بود.

سهمی در نواحی مختصات

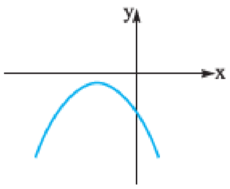
یک وقت‌هایی از ما می‌خواهند که یک پارامتر را طوری تعیین کنیم تا «سهمی از ناحیه‌ای خاص عبور نکند» یا «سهمی از نواحی خاصی عبور کند». در این گونه سؤال‌ها باید حواسمان به همه چیز باشد، علامت a، علامت Δ، علامت S، علامت P، مختصات رأس سهمی و ...

در کل، سهمی می‌تواند از ۲ یا ۳ یا ۴ ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور کند. آن‌ها را با هم بررسی می‌کنیم:

۱ سهمی **فقط** از دو ناحیه عبور کند: در این حالت سهمی یا فقط از نواحی ۱ و ۲ یا فقط از نواحی ۳ و ۴ عبور می‌کند و در هر دو حالت محور xها را قطع نمی‌کند و باید دلتای آن منفی یا صفر باشد.



فقط از ناحیهٔ ۱ و ۲ عبور می‌کند $\begin{cases}\Delta \le 0 \\ a>0\end{cases}$



فقط از ناحیهٔ ۳ و ۴ عبور می‌کند $\begin{cases}\Delta \le 0 \\ a<0\end{cases}$

۲ سهمی دقیقاً از سه ناحیه عبور کند (یعنی فقط از یکی از نواحی عبور نکند) این قسمت شامل ۴ حالت است:

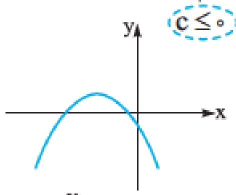
◀ سهمی فقط از ناحیهٔ ۱ عبور نکند: $\Delta>0$ ، $a<0$ ، $b<0$ ، $c\le 0$

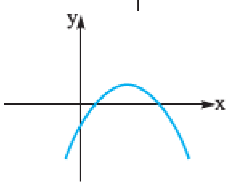
چون دو ریشه دارد ($\Delta>0$)

چون دهانه رو به پایین است ($a<0$)

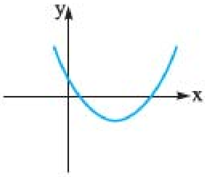
چون شیب خط مماس در محل برخورد با محورy ها منفی است ($b<0$)

چون محورy ها را در نقطه‌ای با عرض نامثبت قطع کرده‌است ($c\le 0$)

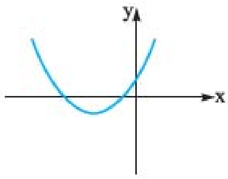




◀ سهمی فقط از ناحیهٔ ۲ عبور نکند: $c\le 0, b>0, a<0, \Delta>0$.



◂ سهمی فقط از ناحیهٔ ۳ عبور نکند: $\Delta > 0, a > 0, b < 0, c \geq 0$.



◂ سهمی فقط از ناحیهٔ ۴ عبور نکند: $\Delta > 0, a > 0, b > 0, c \geq 0$.

۳ سهمی از هر ۴ ناحیه عبور کند:

اگر سهمی دارای دو ریشهٔ ناهم‌علامت باشد، حتماً از هر ۴ ناحیه عبور می‌کند، پس شرط آن‌که سهمی از ۴ ناحیه عبور کند آن است که $P < 0$ یا این‌که بگوییم a و c ناهم‌علامت باشند $(ac < 0)$.

تست **به ازای چه مقادیری از k، سهمی $f(x) = (k-2)x^2 + 2kx + k + 1$ فقط از ناحیهٔ اول محور مختصات عبور نمی‌کند؟**

۱) $0 < k < 2$ ۲) $-1 \leq k < 2$ ۳) $-2 < k \leq -1$ ۴) $-2 < k \leq 0$

پاسخ گزینهٔ «۳» همان‌طور که گفتیم برای آن‌که سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ فقط از ناحیهٔ اول عبور نکند، باید هر ۴ شرط زیر را داشته باشد:

۱) $\Delta > 0 \Rightarrow (2k)^2 - 4(k-2)(k+1) > 0 \Rightarrow 4k + 8 > 0 \Rightarrow k > -2$

۲) $a < 0 \Rightarrow k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2$

۳) $b < 0 \Rightarrow 2k < 0 \Rightarrow k < 0$

۴) $c \leq 0 \Rightarrow k + 1 \leq 0 \Rightarrow k \leq -1$

با اشتراک‌گرفتن بین ۴ شرط بالا، محدودهٔ k به دست می‌آید: $-2 < k \leq -1$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، حاصل $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2$ کدام است؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۵۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) 2

۵۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشند $(\alpha > \beta)$، حاصل $\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ۲) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ۳) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ ۴) $-\sqrt{2+\sqrt{2}}$

۵۷- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x(x-3) = 1$ باشند، حاصل $\frac{x_2}{x_1^2 - 1} + \frac{x_1}{x_2^2 - 1}$ کدام است؟

۱) $-\frac{11}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{13}{6}$ ۴) $-\frac{17}{6}$

۵۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = x$ باشند $(\alpha > \beta)$، حاصل $\frac{4}{(\beta+1)^2} + \frac{1}{\alpha^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) 1 ۳) $1\frac{1}{3}$ ۴) $1\frac{2}{3}$

۵۹- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند $(x_1 > x_2)$، حاصل $x_1^3 - x_2^3$ کدام است؟

۱) 88 ۲) 44 ۳) $22\sqrt{13}$ ۴) $11\sqrt{13}$

۶۰- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، حاصل $3\alpha^2 - \beta^2$ کدام است؟ $(\alpha > \beta)$

۱) $12+16\sqrt{2}$ ۲) $12-16\sqrt{2}$ ۳) $20+16\sqrt{6}$ ۴) $20-16\sqrt{6}$

۶۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^7 + \beta^7$ کدام است؟

۱) 843 ۲) 846 ۳) 854 ۴) 858

۶۲- در معادلهٔ درجه‌دوم $x^2 + 2x - 1 = 0$، حاصل $x_1^4 + (2x_2 - 1)^2$ چه‌قدر است؟

۱) 32 ۲) 33 ۳) 31 ۴) 34

۶۳- به ازای کدام مقدار m، بین ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - mx - 2 = 0$ رابطهٔ $x_1 x_2^2 + 2x_1^2 x_2 = 4$ برقرار است؟

۱) $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ ۴) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

۶۴- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3 + 2\beta^2$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 3 ۳) 5 ۴) 7

۶۵- اگر β و α ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 5x + 3 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\alpha^8 + \alpha^4 + 81}{\alpha^4}$ کدام است؟

۱) 325 ۲) 334 ۳) 344 ۴) 353

۶۶- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\frac{\beta}{(\beta+2)^2} + \frac{\alpha}{(\alpha+2)^2}$ کدام است؟

۱) $-1/52$ ۲) $1/52$ ۳) $-0/88$ ۴) $0/88$

۶۷- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+4x+1=0$ باشند، حاصل $\frac{(\alpha-1)(\alpha+3)}{(\beta+1)^2}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۶۸- به ازای کدام مقدار m بین ریشه‌های معادلهٔ $x(x-m)=m^2+1$ رابطهٔ $||\alpha|-|\beta||=4$ برقرار است؟

۱) 3 ۲) -4 ۳) 8 ۴) -6

۶۹- اگر شیب خط‌های L_1 و L_2 جواب‌های معادلهٔ $m^2x^2-m(x-1)=6$ باشند، به ازای کدام مجموعه‌مقادیر m، دو خط بر هم عمودند؟

۱) $\{-2,3\}$ ۲) $\{2,-3\}$ ۳) فقط -3 ۴) هیچ مقدار m

۷۰- به ازای کدام مقدار m، معادلهٔ $mx^2+5x+m^2-6=0$ دو ریشهٔ حقیقی و معکوس هم دارد؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

۷۱- به ازای کدام مقدار m، عدد $\sqrt{2}$ واسطهٔ هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2-5x+m^2-3=0$ است؟ (ریاضی خارج ۸۴)

۱) 1 ۲) -1 ۳) 3 ۴) -3

۷۲- به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2-(m+3)x+5=0$، برابر ۶ می‌باشد؟ (تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) 1 ۳) 1 و $-\frac{9}{5}$ ۴) $\frac{9}{5}$ و -1

۷۳- مجموع معکوس مربع سه ریشهٔ معادلهٔ $(x+2)(x^2+ax+2)=0$ برابر $-\frac{a}{2}$ است. a کدام است؟

۱) 2 ۲) -3 ۳) 4 ۴) -6

۷۴- به ازای چه حدودی از m، عدد ۲ بین ریشه‌های معادلهٔ $mx^2-x-2=0$ قرار دارد؟

۱) $(0,1)$ ۲) $\mathbb{R}-[0,1]$ ۳) $(-1,0)$ ۴) $\varnothing$

۷۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $m(x^2-1)=x+1$ باشند و $\alpha<-2<\beta<1$، حدود m کدام است؟

۱) $(-\frac{1}{3},0)$ ۲) $(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ ۳) $(-\infty,\frac{1}{2})$ ۴) $(-\frac{1}{3},+\infty)$

۷۶- به ازای کدام مجموعه‌مقادیر a، ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+ax+4=0$، $\sqrt{\sin\alpha}$ و $\sqrt{\cos\alpha}$ است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $-2\sqrt{5}$ ۳) $\pm2\sqrt{5}$ ۴) هیچ مقدار a

۷۷- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $ax^2-2ax+k=0$ از مجذور ریشهٔ دیگر ۴ واحد کم‌تر باشد، کوچک‌ترین ریشهٔ معادله کدام می‌تواند باشد؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) -1 ۴) -4

۷۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(\frac{x}{\cos a})^2-x-\tan^2 a=0$ باشند، حاصل $\alpha^4+\beta$ کدام است؟ $(\alpha>\beta)$

۱) $\sin^2\alpha$ ۲) $\cos^2\alpha$ ۳) $\tan^2\alpha$ ۴) $\cot^2\alpha$

۷۹- در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ رابطهٔ $\frac{a+4c}{b}=2$ بین ضرایب برقرار است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر یک ریشهٔ معادله است؟

۱) $\frac{2b}{c}$ ۲) $-\frac{2b}{c}$ ۳) $\frac{2c}{a}$ ۴) $-\frac{2c}{a}$

۸۰- معادلهٔ درجه‌دومی که ریشه‌های آن مربع ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2-21x+4=0$ ۲) $x^2-21x-4=0$ ۳) $x^2+21x+4=0$ ۴) $x^2+21x-4=0$

۸۱- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x=6$ باشند، به ازای کدام مقدار k معادله‌ای که ریشه‌های آن به صورت α^2 و $\beta+2$ است، به صورت $x^2-kx+b=0$ است؟ $(\alpha<\beta)$

۱) $42+\sqrt{297}$ ۲) $14+\sqrt{33}$ ۳) $42-\sqrt{297}$ ۴) $14-\sqrt{33}$

۸۲- اگر ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲ - ۱۲x + m = ۰$ از k برابر مکعب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$، ۲ واحد کم‌تر باشد، m کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) -۴۱ ۴) -۳۹

۸۳- اگر مجموع مجذور ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x^۳ + (x^۲ - x)(x + ۱ - m) = ۰$ برابر ۴ باشد، m کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۶

۸۴- اگر α، β و γ ریشه‌های معادلهٔ $x^۳ - ۵x + ۴ = ۰$ باشند، حاصل $\frac{۱}{\alpha^۲} + \frac{۱}{\beta^۲} + \frac{۱}{\gamma^۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۹}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۸۵- حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x(x + ۱)(x + ۲)(x + ۳) = ۳$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۳ ۴) ۳

۸۶- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^۶ - ۹x^۳ + ۸ = ۰$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۱

۸۷- مجموع مکعبات ریشه‌های معادلهٔ $(x^۲ - x)^۲ - ۲x^۲ + ۲x - ۸ = ۰$ کدام است؟

۱) -۱۱ ۲) ۱۳ ۳) -۱۳ ۴) ۱۱

۸۸- در معادلهٔ $x^۴ - ۳x^۲ + ۱ = ۰$ مجموع توان چهارم ریشه‌ها چه‌قدر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۸۹- معادلهٔ $x^۴ - ۶x^۲ - ۴ = ۰$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۰- معادلهٔ $x^۴ - ۳x^۲ + ۱ = ۰$ چند ریشه دارد و مجموع مجذورات ریشه‌ها چه‌قدر است؟

۱) دو ریشه و سه ۲) دو ریشه و شش ۳) چهار ریشه و سه ۴) چهار ریشه و شش

۹۱- یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^۴ - mx^۲ - m^۲ = ۱$، چهار واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر است. مجموع تمام مقادیر m کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) -۱۵ ۳) ۴ ۴) -۴

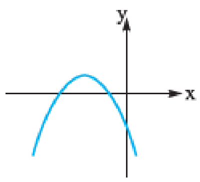
۹۲- اگر معادلهٔ $x^۴ - (m + ۲)x^۲ + m + ۵ = ۰$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعه‌مقادیر m به کدام صورت است؟ *(تجربی ۸۵)*

۱) $m < -۴$ ۲) $m > ۴$ ۳) $-۴ < m < ۴$ ۴) $۴ < m < ۹$

۹۳- کوچک‌ترین ریشهٔ معادلهٔ $(x - ۲)^۴ + ۱۲x = ۳x^۲ + ۱۰$ کدام است؟

۱) $-۱ - \sqrt{۲}$ ۲) $۲ - \sqrt{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱

۹۴- نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ به صورت مقابل است. کدام گزینه صحیح است؟



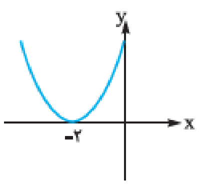
۱) $ab < ۰$

۲) $ac < ۰$

۳) $a - b > ۰$

۴) $b + c < ۰$

۹۵- اگر نمودار تابع $f(x) = ax^۲ + ۴x + b$ به صورت مقابل باشد، مقدار b کدام است؟



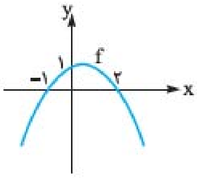
۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

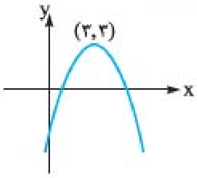
۴) ۵

۹۶- با توجه به نمودار تابع درجه‌دوم زیر، قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادلهٔ $2+f(x)=0$ کدام است؟



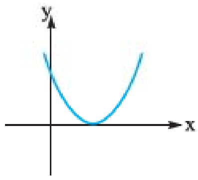
۱) ۵
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۳

۹۷- نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ که در آن $a^2=1$ است، به صورت زیر می‌باشد. عرض از مبدأ منحنی کدام است؟



۱) -3
۲) -4
۳) -5
۴) -6

۹۸- اگر نمودار تابع $f(x)=a(x^2+x)-3x+1$ به صورت مقابل باشد، مجموعه‌مقادیر a کدام است؟



۱) فقط ۱
۲) فقط ۹
۳) $\{1,9\}$
۴) $\varnothing$

۹۹- به ازای کدام مقدار a حداقل فاصلهٔ نقاط منحنی $y=ax^2-2\sqrt{2}x+a$ از خط $y=4$ برابر ۳ است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰۰- فقط سه نقطه روی منحنی $f(x)=-x^2+4x-7$ وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها از خط $y=L$ برابر ۲ باشد. اگر خط، منحنی را در نقاطی به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، حاصل $(x_1+\frac{1}{x_1})(x_2+\frac{1}{x_2})$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۸/۵

۱۰۱- مجموع طول نقاط برخورد خط $y=5$ با منحنی $f(x)=ax^2+bx+2$ برابر ۲ است. اگر فاصلهٔ رأس سهمی از این خط برابر ۲ باشد، مجموع معکوس ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=6$ برابر کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) $-$۲/۵ ۳) ۱/۵ ۴) $-$۱/۵

۱۰۲- در یک زمین گل‌خانه‌ای، اگر با فاصلهٔ یکسان ۴۰ بوته گوجه‌فرنگی کاشته شود، به طور متوسط از هر بوته ۸ کیلو محصول به دست می‌آید. به ازای هر بوتهٔ اضافی که کاشته می‌شود، به مقدار $\frac{1}{8}$ کیلو از میانگین کل محصول کاسته می‌شود. در این صورت بیشترین محصول برداشتی چند کیلوگرم است؟

۱) ۳۳۶ ۲) ۳۳۸ ۳) ۳۴۰ ۴) ۳۴۲

۱۰۳- در بین تمام مستطیل‌های محاط در نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱، بیشترین مساحت ممکن کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰۴- کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(4,0)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{2x+9}$ کدام است؟ *(ریاضی خارج ۸۷)*

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۵- بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور کرد، چند متر مربع است؟ *(ریاضی خارج ۹۱)*

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

۱۰۶- بیشترین مساحت زمینی مستطیل‌شکل را که می‌توان توسط یک طناب از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است. طول طناب چند متر است؟ (ریاضی خارج ۸۴)

۱) ۶۸ ۲) ۷۰ ۳) ۷۱ ۴) ۷۲

۱۰۷- کم‌ترین فاصلهٔ نقاط منحنی $y = x^2 + 2x$ از خط $y = 2x - 3$ کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۱۰۸- منحنی به معادلهٔ $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطهٔ مشترک ندارد. مجموعه‌مقادیر m کدام است؟ (ریاضی ۸۸)

۱) $9 < m < 25$ ۲) $15 < m < 23$ ۳) $7 < m < 15$ ۴) $5 < m < 13$

۱۰۹- خطی که از نقطهٔ $A(0,1)$ می‌گذرد، منحنی $f(x) = x^2 - 4x + 2$ را در دو نقطه با طول‌های α و β قطع می‌کند. اگر $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = 2$، آن‌گاه خط، محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) -2 ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۱۱۰- به ازای کدام مجموعه‌مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $m > 2$ ۲) $-1 < m < 2$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

۱۱۱- حدود m کدام باشد تا منحنی $y = mx^2 + (2m-8)x + 2$ فقط از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نگذرد؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R} - [0, 2]$ ۳) $(0, 2)$ ۴) $\varnothing$

۱۱۲- به ازای کدام مجموعه‌مقادیر a، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$، از ناحیهٔ اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $a \le 2$ ۲) $0 < a \le 2$ ۳) $2 < a < 3$ ۴) $0 < a < 3$

۱۱۳- برد تابع $f(x) = -2x^2 + ax + b$ با دامنهٔ $\mathbb{R} - \{a-3\}$ برابر $(-\infty, a-1)$ است. $f(a-b)$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -5 ۳) 1 ۴) 4

۱۱۴- نمودار دو تابع $f(x) = -x^2 + ax + 4$ و $g(x) = x^2 - 2x + b$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. اگر خط $y = 1$ محور تقارن شکل حاصل باشد، حاصل $f(2) + g(-2)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 3 ۳) 7 ۴) 10

۱۱۵- خط $y = k$ نمودار تابع $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. اگر مثلث OAB قائم‌الزاویه باشد، مساحت آن کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۱۶- برد تابع $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 + bx}{|x|}$ $(b \in \mathbb{Z})$، چهار عدد صحیح را شامل نمی‌شود. $f(b)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۵۴- گزینه۱ با استفاده از معادلهٔ $۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰$، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را داریم:

$$۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = -\dfrac{-۳}{۲} = \dfrac{۳}{۲} \\ P = \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-۴}{۲} = -۲ \end{cases}$$

حالا عبارت موردنظر:

$$\alpha\beta^۲ + \beta\alpha^۲ = \alpha\beta(\alpha+\beta) = PS = -۲ \times \frac{۳}{۲} = -۳$$

۵۵- گزینه۲ عبارت $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ را برحسب مجموع و حاصل‌ضرب دو ریشه می‌نویسیم:

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^۲ = (\sqrt{\alpha})^۲ + (\sqrt{\beta})^۲ + ۲\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$$

$$= \alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta} = S + ۲\sqrt{P} \Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + ۲\sqrt{P}}$$

با توجه به معادلهٔ $x^2-3x+1=0$، مقادیر S و P عبارت‌اند از:

$$S=\frac{-b}{a}=-\frac{-3}{1}=3 \quad \text{و} \quad P=\frac{c}{a}=\frac{1}{1}=1$$

و بنابراین: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}=\sqrt{3+2\sqrt{1}}=\sqrt{5}$

۵۶- گزینهٔ ۱ عبارت $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ را به صورت مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها بیان کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{P}}$$

برای عبارت $\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}$ دقت کنید که $\alpha>\beta$ است و این عبارت منفی خواهد بود. پس می‌نویسیم:

$$\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}=-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})=-\sqrt{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}$$

$$=-\sqrt{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}=-\sqrt{S-2\sqrt{P}}$$

پس داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{-\sqrt{S-2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}$$

حالا در معادلهٔ $x^2-4x+2=0$ داریم: $S=4\,,P=2$

و بنابراین:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}=-\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{\frac{4-2\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

۵۷- گزینهٔ ۱ معادله را به صورت استاندارد $x^2-3x-1=0$ درمی‌آوریم.

چون مخرج‌ها x_1^2-1 و x_2^2-1 هستند و در معادله x^2-1 می‌بینیم، از صدق‌کردن ریشه‌ها در معادله استفاده می‌کنیم:

x_1 در معادله صدق می‌کند $\Rightarrow x_1^2-3x_1-1=0$

$\Rightarrow x_1^2-1=3x_1$

x_2 در معادله صدق می‌کند $\Rightarrow x_2^2-3x_2-1=0$

$\Rightarrow x_2^2-1=3x_2$

حالا در عبارت موردنظر سؤال قرار می‌دهیم:

$$\frac{x_1}{x_2^2-1}+\frac{x_2}{x_1^2-1}=\frac{x_1}{3x_2}+\frac{x_2}{3x_1}=\frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{S^2-2P}{P}\right)$$

با توجه به معادله $P=-1$ و $S=3$ داریم:

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3^2-2\times(-1)}{-1}\right)=-\frac{11}{3}$$

۵۸- گزینهٔ ۳ معادله را به صورت $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$ استاندارد می‌نویسیم.

با کمی دقت، مجموع ضرایب صفر است؛ پس ریشه‌ها $\alpha=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$ و $\beta=1$ هستند (دقت کردیم که $\alpha>\beta$ است)؛ پس:

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{4}{(\beta+1)^2}=\frac{1}{(\sqrt{3})^2}+\frac{4}{(1+1)^2}=\frac{1}{3}+\frac{4}{4}=1\frac{1}{3}$$

۵۹- گزینهٔ ۳ با استفاده از اتحاد a^3-b^3 داریم:

$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

در معادلهٔ $x^2-5x+3=0$ داریم:

$P=x_1x_2=3$ و $S=x_1+x_2=5$

یادآوری اختلاف دو ریشه در معادلهٔ درجه‌دوم برابر است با:

$$x_1-x_2\overset{x_1>x_2}{=\!=\!=}\sqrt{S^2-4P}$$

مجموع مربعات ریشه‌ها هم برابر است با: $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$

پس داریم:

$$(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=\sqrt{S^2-4P}\,(S^2\underbrace{-2P+P}_{-P})$$

$$=\sqrt{5^2-4\times3}\,(5^2-3)=22\sqrt{13}$$

۶۰- گزینهٔ ۳ راه‌حل اول با توجه به این‌که عبارت $3\alpha^2-\beta^2$ نسبت به β و α متقارن نیست و نیز ظاهر گزینه‌ها، به نظر می‌رسد استفاده از خود جواب‌ها مفید باشد:

$$x^2-4x-2=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2+\sqrt{6}\\ \beta=2-\sqrt{6}\end{cases}$$

و بنابراین:

$$3\alpha^2-\beta^2=3(2+\sqrt{6})^2-(2-\sqrt{6})^2$$

$$=3(10+4\sqrt{6})-(10-4\sqrt{6})=20+16\sqrt{6}$$

راه‌حل دوم با کمی خلاقیت می‌نویسیم:

$$3\alpha^2-\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha^2-\beta^2)$$

حالا:

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P$$

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=S\sqrt{S^2-4P}$$

پس داریم:

$$x^2-4x-2=0\Rightarrow\begin{cases}S=\alpha+\beta=4\\ P=\alpha\beta=-2\end{cases}$$

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=4^2-2(-2)=20$$

$$\alpha^2-\beta^2=S\sqrt{S^2-4P}=4\sqrt{4^2-4(-2)}=4\sqrt{24}=8\sqrt{6}$$

و جواب می‌شود: $20+2(8\sqrt{6})=20+16\sqrt{6}$

۶۱- گزینه ۱

$$x^۲-۳x+۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=۳ \\ P=\alpha\beta=۱ \end{cases}$$

$\alpha^۴+\beta^۴$ و $\alpha^۳+\beta^۳$ را محاسبه می‌کنیم و آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\alpha^۴+\beta^۴=(\alpha^۲+\beta^۲)^۲-۲\alpha^۲\beta^۲=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲$$

$$=(۳^۲-۲(۱))^۲-۲(۱)^۲=۴۷$$

$$\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS=۳^۳-۳(۱)(۳)=۱۸$$

$$\Rightarrow (\alpha^۴+\beta^۴)(\alpha^۳+\beta^۳)=\alpha^۷+\beta^۷+\alpha^۴\beta^۳+\beta^۴\alpha^۳$$

$$\Rightarrow ۴۷\times۱۸=\alpha^۷+\beta^۷+\alpha^۳\beta^۳(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow ۸۴۶=\alpha^۷+\beta^۷+P^۳(S)$$

$$\Rightarrow ۸۴۶=\alpha^۷+\beta^۷+(۱)(۳) \Rightarrow \alpha^۷+\beta^۷=۸۴۳$$

۶۲- گزینه ۴

$۱-۲x_۲$ شبیه خود معادله است، پس سراغ صدق‌کردن ریشه در خود معادله می‌رویم:

$x_۲$ در معادله صدق می‌کند. $\Leftarrow$ $x_۲$ ریشهٔ معادله است.

$$\Rightarrow x_۲^۲+۲x_۲-۱=۰ \Rightarrow ۲x_۲-۱=-x_۲^۲$$

بنابراین: $x_۱^۴+(۲x_۲-۱)^۲=x_۱^۴+(-x_۲^۲)^۲=x_۱^۴+x_۲^۴$

یادآوری حاصل مجموع توان چهارم ریشه‌ها برابر است با:

$$x_۱^۴+x_۲^۴=(x_۱^۲+x_۲^۲)^۲-۲x_۱^۲x_۲^۲=(S^۲-۲P)^۲-۲P^۲$$

در این معادله $S=-۲$ و $P=-۱$ است و داریم:

$$x_۱^۴+x_۲^۴=((-۲)^۲-۲(-۱))^۲-۲(-۱)^۲=۶^۲-۲=۳۴$$

۶۳- گزینه ۳

اول ظاهر $x_۱x_۲^۲+۲x_۱^۲x_۲=۴$ را تغییر دهیم:

$$\underbrace{x_۱x_۲}_{P}(x_۲+۲x_۱)=۴ \xrightarrow{P=\frac{c}{a}=-۲} x_۲+۲x_۱=\frac{۴}{-۲}=-۲$$

پس داریم: $۲x_۱+x_۲=-۲$

همچنین: $x_۱+x_۲=S=\dfrac{-b}{a}=m$

پس داریم: $x_۱+\underbrace{x_۱+x_۲}_{m}=-۲$

یعنی: $x_۱=-m-۲$

پس باید $-m-۲$ در معادله صدق کند:

$$\xrightarrow{x_۱=-m-۲} (-m-۲)^۲-m(-m-۲)-۲=۰$$

$$\Rightarrow m^۲+۴m+۴+m^۲+۲m-۲=۰$$

$$\Rightarrow ۲m^۲+۶m+۲=۰ \Rightarrow m=\frac{-۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

۶۴- گزینه ۳

α و β ریشه‌های معادله‌اند، پس داریم:

$$\alpha^۲-\alpha-۱=۰ \Rightarrow \alpha^۲=\alpha+۱$$

$$\xrightarrow{\times\alpha} \alpha^۳=\underbrace{\alpha^۲}_{\alpha+۱}+\alpha=\alpha+۱+\alpha$$

پس: $\alpha^۳=۲\alpha+۱$

همچنین: $۲\beta^۲=۲(\beta+۱)=۲\beta+۲$

بنابراین:

$$\alpha^۳+۲\beta^۲=۲\alpha+۱+۲\beta+۲=۲(\alpha+\beta)+۳=۲S+۳$$

$$\xrightarrow{S=\frac{-b}{a}=۱} =۲\times۱+۳=۵$$

۶۵- گزینه ۳

ابتدا عبارت $\dfrac{\alpha^۸+\alpha^۴+۸۱}{\alpha^۴}$ را ساده‌تر کنیم:

$$\xrightarrow{\text{تفکیک}} \frac{\alpha^۸}{\alpha^۴}+\frac{\alpha^۴}{\alpha^۴}+\frac{۸۱}{\alpha^۴}=\alpha^۴+۱+\frac{۸۱}{\alpha^۴}$$

$$=\underbrace{(\alpha^۲+\frac{۹}{\alpha^۲})^۲-۱۸}_{\alpha^۴+\frac{۸۱}{\alpha^۴}}+۱=(\alpha^۲+\frac{۹}{\alpha^۲})^۲-۱۷$$

حالا $\alpha^۲+\dfrac{۹}{\alpha^۲}$ را هم به صورت اتحاد درمی‌آوریم:

$$\alpha^۲+\frac{۹}{\alpha^۲}=(\alpha+\frac{۳}{\alpha})^۲-۲\times\alpha\times\frac{۳}{\alpha}=(\alpha+\frac{۳}{\alpha})^۲-۶$$

از معادلهٔ صورت سؤال داریم: $\alpha \Rightarrow \alpha^۲-۵\alpha+۳=۰$

در معادله صدق می‌کند. $\xrightarrow{\div\alpha} \alpha-۵+\dfrac{۳}{\alpha}=۰ \Rightarrow \alpha+\dfrac{۳}{\alpha}=۵$

بنابراین: $\alpha^۲+\dfrac{۹}{\alpha^۲}=(\alpha+\dfrac{۳}{\alpha})^۲-۶=۵^۲-۶=۱۹$

و در نتیجه: $(\alpha^۲+\dfrac{۹}{\alpha^۲})^۲-۱۷=۱۹^۲-۱۷=۳۶۱-۱۷=۳۴۴$

۶۶- گزینه ۱

معادله را به صورت $x(x+۲)=۵$ می‌نویسیم.

پس داریم: $x+۲=\dfrac{۵}{x}$

بنابراین: $\alpha+۲=\dfrac{۵}{\alpha}$ و $\beta+۲=\dfrac{۵}{\beta}$

حالا در عبارت صورت سؤال قرار می‌دهیم:

$$\frac{\alpha}{(\alpha+۲)^۲}+\frac{\beta}{(\beta+۲)^۲}=\frac{\alpha}{(\frac{۵}{\alpha})^۲}+\frac{\beta}{(\frac{۵}{\beta})^۲}=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{۲۵}$$

یادآوری مجموع مکعبات ریشه‌ها در معادلهٔ درجه‌دوم برابر است با:

$$\alpha^۳+\beta^۳=S^۳-۳PS$$

در معادلهٔ $x^2+2x-5=0$ داریم: $S=\frac{-b}{a}=-2 , P=\frac{c}{a}=-5$

و جواب می‌شود: $\frac{\alpha^3+\beta^3}{25}=\frac{S^3-3PS}{25}=\frac{(-2)^3-3(-2)(-5)}{25}$

$=\frac{-8-30}{25}=\frac{-38}{25}\xrightarrow[\times 4]{\times 4}=-1/52$

۶۷- گزینهٔ ۲

عبارت $=\frac{(\alpha-1)(\alpha+3)}{(\beta+1)^2}=\frac{\alpha^2+2\alpha-3}{\beta^2+2\beta+1}\quad (*)$

α و β در معادله صدق می‌کنند:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha^2+4\alpha+1=0 \Rightarrow 2(\alpha^2+2\alpha)=-1 \\ \Rightarrow \alpha^2+2\alpha=-\frac{1}{2} \\ 2\beta^2+4\beta+1=0 \Rightarrow \beta^2+2\beta=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\xrightarrow{(*)}$ عبارت $=\frac{-\frac{1}{2}-3}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=-3$

۶۸- گزینهٔ ۲ معادله‌را به‌صورت $x^2-mx-(m^2+1)=0$ می‌نویسیم. ضرب دو ریشه $P=\frac{c}{a}=-m^2-1$ عددی منفی است، پس دو ریشه هم‌علامت نیستند و داریم:

$||\alpha|-|\beta||=|\alpha-(-\beta)|=|\alpha+\beta|=|S|$

بنابراین: $|S|=|m|=4 \Rightarrow m=\pm 4$

۶۹- گزینهٔ ۲ دو خط بر هم عمودند یعنی حاصل‌ضرب شیب‌ها ۱- است، پس باید ضرب ریشه‌ها ۱- باشد:

$m^2x^2-m(x-1)-6=0 \Rightarrow m^2x^2-mx+m-6=0$

$P=\frac{c}{a}=-1 \Rightarrow \frac{m-6}{m^2}=-1 \Rightarrow m^2+m-6=0$

$\Rightarrow (m+3)(m-2)=0 \Rightarrow m=-3$ یا 2

دقت کنید که در این شرایط حتماً $\Delta>0$ است و از وجود دو ریشهٔ متمایز مطمئن هستیم.

۷۰- گزینهٔ ۲ برای دو ریشهٔ معکوس هم باید ضرب ریشه‌ها ۱ باشد: $x_1=\frac{1}{x_2} \Rightarrow P=x_1x_2=1 \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{m^2-6}{m}=1$

بنابراین: $m^2-m-6=0 \Rightarrow (m-3)(m+2)=0$

$\Rightarrow m=3$ یا -2

اما به ازای $m=3$ معادله به صورت $3x^2+5x+3=0$ درمی‌آید که دلتای آن منفی است و ریشه ندارد؛ پس $m=3$ قابل‌قبول نیست. برای $m=-2$، معادلهٔ $-2x^2+5x-2=0$ دو ریشه دارد و آن را می‌پذیریم.

۷۱- گزینهٔ ۲ عدد $\sqrt{2}$ واسطهٔ هندسی x_1 و x_2 است یعنی:

$B^2=AC \Rightarrow \sqrt{2}^2=x_1x_2$

یادآوری واسطهٔ هندسی دو عدد هم‌علامت A و C از شرط $B^2=AC$ به دست می‌آید. پس داریم: $P=x_1x_2=2$ یعنی ضرب دو ریشهٔ حقیقی معادله، ۲ است:

$P=\frac{c}{a}=\frac{m^2-3}{m}=2 \Rightarrow m^2-2m-3=0$

$\Rightarrow m=-1$ یا 3

اما برای $m=3$ معادلهٔ $3x^2-5x+6=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد پس فقط $m=-1$ را می‌پذیریم (معادله به صورت $-x^2-5x-2=0$ ریشهٔ حقیقی دارد!)

۷۲- گزینهٔ ۱ مجموع مربعات ریشه‌های معادله برابر است با:

$x_1^2+x_2^2=S^2-2P$

پس در معادلهٔ $mx^2-(m+3)x+5=0$ داریم:

$S=\frac{-b}{a}=\frac{m+3}{m} , P=\frac{5}{m}$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2=(\frac{m+3}{m})^2-2(\frac{5}{m})=6$

$\xrightarrow{\times m^2}(m+3)^2-10m=6m^2 \Rightarrow 5m^2+4m-9=0$

$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} m=+1$ یا $-\frac{9}{5}$

اما واضح است که به ازای $m=1$ معادلهٔ $x^2-4x+5=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد، پس فقط مقدار $m=-\frac{9}{5}$ را می‌پذیریم.

۷۳- گزینهٔ ۲ ریشهٔ پرانتز اول $x=-2$ است؛ پس داریم:

مجموع معکوس مربع سه ریشه $=\frac{1}{(-2)^2}+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$

$=\frac{1}{4}+\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}$

x_1 و x_2 ریشه‌های پرانتز دوم یعنی ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+2=0$ هستند؛ پس داریم:

$\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}=\frac{(-a)^2-2(\frac{2}{1})}{(\frac{2}{1})^2}=\frac{a^2-4}{4}=\frac{a^2}{4}-1$

بنابراین:

$$\frac{۱}{۴}+\frac{a^{۲}}{۴}-۱=-\frac{a}{۲}$$

$$\xrightarrow{\times ۴} ۱+a^{۲}-۴=-۲a$$

$$\Rightarrow a^{۲}+۲a-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۱ \\ a=-۳ \end{cases} \xrightarrow{\Delta<۰} \text{غ ق ق}$$

۷۴- گزینه۱ از بحث تعیین علامت در ریاضیات دهم، جدول زیر را به یاد داریم:

x		$x_۱$		$x_۲$	
عبارت درجه دوم	موافق a		مخالف‌علامت a		موافق a

پس وقتی عددی بین دو ریشه قرار دارد، علامت عبارت درجه‌دوم، مخالف علامت a است. یعنی اگر عدد k بین دو ریشهٔ معادله $f(x)=ax^{۲}+bx+c=۰$ باشد، آن‌گاه $a\times f(k)<۰$ است.

$$f(x)=mx^{۲}-x-۲ \Rightarrow f(۲)=۴m-۲-۲=۴m-۴$$

۲ بین دو ریشه است. $\Rightarrow (\text{ضریب } x^{۲})\times f(۲)<۰$

$$\Rightarrow m(۴m-۴)<۰ \Rightarrow m\in(۰,۱)$$

جدول را ببینید:

		۰		۱	
$m(۴m-۴)$	+		− ج		+

۷۵- گزینه۱ ریشه‌های این معادله را می‌توانیم پیدا کنیم: ($x+۱$ را به طرف چپ می‌آوریم و برای $x^{۲}-۱$، مزدوج می‌نویسیم.)

$$m(x^{۲}-۱)=x+۱ \Rightarrow m(x-۱)(x+۱)-(x+۱)=۰$$

$$\Rightarrow (x+۱)(mx-m-۱)=۰ \Rightarrow x=-۱ \text{ یا } x=\frac{m+۱}{m}$$

پس خواستهٔ سؤال به صورت زیر قابل بیان است:

(دقت کنید که α از ۲− کم‌تر است پس حتماً $\alpha=\frac{m+۱}{m}$ است.)

$$\frac{m+۱}{m}<-۲<-۱<۱ \Rightarrow \frac{m+۱}{m}<-۲$$

$$\Rightarrow \frac{m+۱}{m}+۲<۰ \Rightarrow \frac{m+۱+۲m}{m}<۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳m+۱}{m}<۰ \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} m\in(-\frac{۱}{۳},۰)$$

۷۶- گزینه۴ $\sqrt{\sin\alpha}$ و $\sqrt{\cos\alpha}$ اعداد مثبت‌اند و مجموع توان چهارم آن‌ها ۱ است:

$$x_۱^{۴}+x_۲^{۴}=\sqrt{\sin\alpha}^{\,۴}+\sqrt{\cos\alpha}^{\,۴}=\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$$

پس باید معادلهٔ $۲x^{۲}+ax+۴=۰$ دو ریشهٔ حقیقی مثبت داشته باشد و شرط $x_۱^{۴}+x_۲^{۴}=۱$ برقرار شود:

$$x_۱^{۴}+x_۲^{۴}=(x_۱^{۲}+x_۲^{۲})^{۲}-۲x_۱^{۲}x_۲^{۲}=(S^{۲}-۲P)^{۲}-۲P^{۲}=۱$$

$$\xrightarrow[P=\frac{۴}{۲}=۲]{S=-\frac{a}{۲}} ((-\frac{a}{۲})^{۲}-۲\times۲)^{۲}-۲(۲)^{۲}=۱$$

$$(\frac{a^{۲}}{۴}-۴)^{۲}-۸=۱ \Rightarrow (\frac{a^{۲}}{۴}-۴)^{۲}=۹ \Rightarrow \frac{a^{۲}}{۴}-۴=\pm۳$$

$$\Rightarrow \frac{a^{۲}}{۴}=۷ \text{ یا } ۱ \Rightarrow a^{۲}=۴ \text{ یا } ۲۸ \Rightarrow a=\pm۲ \text{ یا } \pm۲\sqrt{۷}$$

برای وجود دو ریشهٔ حقیقی مثبت باید $\Delta>۰$، $S>۰$ و $P>۰$ باشند پس $\Delta=a^{۲}-۳۲>۰$ و در نتیجه $a^{۲}>۳۲$ که در هیچ‌یک از جواب‌ها صدق نمی‌کند.

۷۷- گزینه۱ شرط صورت سؤال به شکل $x_۱=x_۲^{۲}-۴$ قابل بیان است. چون جمع ریشه‌های معادله $S=-\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } x^{۲}}=-\frac{-۲a}{a}=۲$ است، سعی می‌کنیم $x_۱+x_۲$ بسازیم:

$$x_۱=x_۲^{۲}-۴ \xrightarrow{+x_۲} \underbrace{x_۱+x_۲}_{\text{این می‌شود ۲}}=x_۲^{۲}+x_۲-۴$$

$$\Rightarrow x_۲^{۲}+x_۲-۶=۰$$

$$\Rightarrow x_۲=\begin{cases}-۳\\ ۲\end{cases} \Rightarrow x_۱=x_۲^{۲}-۴=\begin{cases}۹-۴=۵\\ ۴-۴=۰\end{cases}$$

ریشهٔ کوچک‌تر معادله در حالت اول ۳− و در حالت دوم صفر است.

۷۸- گزینه۲ ضرایب این معادله $\frac{۱}{\cos^{۲}a}$، ۱− و $-\tan^{۲}a$ هستند. با توجه به رابطهٔ $\frac{۱}{\cos^{۲}a}=۱+\tan^{۲}a$، جمع ضرایب صفر است؛ پس یک ریشه $x_۱=۱=\alpha$ و دیگری $x_۲=\frac{c}{a}$ یعنی $x_۲=\frac{-\tan^{۲}a}{۱+\tan^{۲}a}=\beta$ است. بنابراین $\alpha^{۴}+\beta$ برابر است با:

$$۱+\frac{-\tan^{۲}a}{۱+\tan^{۲}a}=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}a}=\cos^{۲}a$$

۷۹- گزینه۴ از شرط صورت سؤال داریم:

$$\frac{a+۴c}{b}=۲ \Rightarrow a+۴c-۲b=۰$$

$$\xrightarrow{\div۴} a(\frac{۱}{۴})+b(-\frac{۱}{۲})+c=۰$$

این همان معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ است که در آن $x=\frac{-1}{2}$ قرار داده شده؛ پس $x_1=\frac{-1}{2}$ یک ریشهٔ معادله است و داریم:

$$P=\frac{c}{a}=x_1x_2=-\frac{1}{2}x_2 \Rightarrow x_2=\frac{-2c}{a}$$

۸۰- گزینه ۱ راه حل اول اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2-5x+2=0$ را α و β بنامیم، معادله‌ای با ریشه‌های α^2 و β^2 می‌خواهیم. از معادلهٔ اولیه می‌دانیم $\alpha+\beta=5$ و $\alpha\beta=2$. حالا جمع و ضرب ریشه‌های جدید:

$$S=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5^2-2\times 2=21$$

$$P=\alpha^2\times\beta^2=(\alpha\beta)^2=2^2=4$$

پس معادلهٔ جدید با مجموع و حاصل‌ضرب ۲۱ و ۴، به صورت $x^2-21x+4=0$ است.

راه حل دوم ریشه‌های جدید $X=x^2$ هستند، پس $x=\sqrt{X}$ را در معادلهٔ اولیه قرار می‌دهیم:

$$x^2-5x+2=0 \xrightarrow{x=\sqrt{X}} (\sqrt{X})^2-5\sqrt{X}+2=0$$

$$\Rightarrow X+2=5\sqrt{X} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} X^2+4X+4=25X$$

$$\Rightarrow X^2-21X+4=0$$

۸۱- گزینه ۴ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-6=0$ اعداد α و β هستند پس داریم:

α در معادله صدق می‌کند $\Rightarrow \alpha^2-3\alpha-6=0$

$$\Rightarrow \alpha^2=3\alpha+6=3(\alpha+2)$$

پس معادلهٔ جدید با ریشه‌های α^2 و $\beta+2$، در واقع با ریشه‌های $3(\alpha+2)$ و $\beta+2$ نوشته می‌شود. مجموع ریشه‌های جدید برابر است با:

$$x_1+x_2=3(\alpha+2)+\beta+2=3\alpha+\beta+8$$

$$=2\underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{جمع ریشه‌های اولیه } S=3}+\underbrace{(\alpha-\beta)}_{\text{اختلاف ریشه‌های اولیه}}+8=2\times 3+(\alpha-\beta)+8$$

بنابراین: $k=14+(\alpha-\beta)$

فقط دقت کنید که چون $\alpha<\beta$ است، حاصل $\alpha-\beta$، قرینهٔ اختلاف دو ریشه است:

$$\alpha-\beta=-\sqrt{S^2-4P}=-\sqrt{3^2-4(-6)}=-\sqrt{9+24}=-\sqrt{33}$$

و جواب می‌شود: $k=14-\sqrt{33}$

یادآوری اختلاف دو ریشهٔ معادلهٔ درجه‌دوم $\sqrt{S^2-4P}$ است.

۸۲- گزینه ۳ ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-1=0$ را α و β می‌نامیم، پس ریشه‌های معادلهٔ $4x^2-12x+m=0$ اعداد $k\alpha^3-2$ و $k\beta^3-2$ هستند. به جمع و ضرب ریشه‌های هر دو معادله نگاه کنید:

$$x^2-2x-1=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=S=2\\ \alpha\beta=P=-1\end{cases}$$

$$4x^2-12x+m=0 \Rightarrow \begin{cases}k\alpha^3-2+k\beta^3-2=-\frac{-12}{4}=3\\ (k\alpha^3-2)(k\beta^3-2)=\frac{m}{4}\end{cases}$$

خب! عبارت مجموع ریشه‌ها را مرتب‌تر کنیم: $k(\alpha^3+\beta^3)-4=3$

$$k(\alpha^3+\beta^3)=7 \Rightarrow k(S^3-3PS)=k(2^3-3(-1)(2))=7$$

$$\Rightarrow k=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$

حالا مقدار m:

$$\xrightarrow{k=\frac{1}{2}} \frac{m}{4}=(\tfrac{1}{2}\alpha^3-2)(\tfrac{1}{2}\beta^3-2)$$

$$\xrightarrow{\times 4} m=4(\frac{\alpha^3}{2}-2)(\frac{\beta^3}{2}-2)=(\alpha^3-4)(\beta^3-4)$$

$$=\alpha^3\beta^3-4(\alpha^3+\beta^3)+16=P^3-4(S^3-3PS)+16$$

$$=(-1)^3-4(2^3-3(-1)(2))+16$$

$$=-1-4(14)+16=-41$$

۸۳- گزینه ۱ معادله را کمی مرتب‌تر کنیم:

$$x^3+(x^2-x)(x+1-m)=0$$

$$\Rightarrow x(x^2+(x-1)(x+1-m))=0$$

$$\Rightarrow x(x^2+x^2-1-mx+m)=0$$

$$\Rightarrow x(2x^2-mx+(m-1))=0$$

پس یک ریشه $x_3=0$ و مجموع مجذورات دو ریشهٔ دیگر برابر است با:

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=(-\frac{-m}{2})^2-2(\frac{m-1}{2})=4$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{4}-(m-1)=4$$

$$\xrightarrow{\times 4} m^2-4m+4=16 \Rightarrow m^2-4m-12=0$$

$$\Rightarrow m=6 \text{ یا } -2$$

اما به ازای $m=6$ معادله به صورت $2x^2-6x+5=0$ ریشه ندارد و مجموع مجذورات ریشه‌های عبارت می‌شود $0^2=0$ که قابل‌قبول نیست پس فقط $m=-2$ را می‌پذیریم.

۸۴- گزینه۳ $x=1$ در این معادله صدق می‌کند، پس می‌توانیم آن را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$x^3-5x+4=\underbrace{(x-1)}_{\text{ریشهٔ این } \gamma=1 \text{ است}}\underbrace{(x^2+x-4)}_{\text{ریشه‌های این } \alpha \text{ و } \beta \text{ هستند}}=0$$

حالا $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$ را حساب کنیم:

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}+\frac{1}{1^2}=\frac{S^2-2P}{P^2}+1$$

$$\xrightarrow[P=\frac{c}{a}=-4]{S=\frac{-b}{a}=-1}\frac{(-1)^2-2(-4)}{(-4)^2}+1=\frac{1+8}{16}+1=\frac{25}{16}$$

۸۵- گزینه۲ معادله را با کمی تغییر حل می‌کنیم:

$$\underbrace{x\overbrace{(x+1)(x+2)}^{\text{در هم ضرب می‌کنیم.}}(x+3)}_{\text{در هم ضرب می‌کنیم.}}-3=0$$

$$\Rightarrow (x^2+3x)(x^2+3x+2)-3=0$$

$$\xrightarrow{x^2+3x=t} t(t+2)-3=0$$

$$\Rightarrow t^2+2t-3=0 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+3x=1 \\ x^2+3x=-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+3x-1=0 \\ x^2+3x+3=0 \end{cases}$$

در معادلهٔ اول $P=-1$ است و در معادلهٔ دوم ریشهٔ حقیقی نداریم ($\Delta<0$ است) پس ضرب ریشه‌ها می‌شود ۱-.

۸۶- گزینه۳ اگر $x^3=t$ در نظر بگیریم داریم:

$$t^2-9t+8=0 \Rightarrow t=1 \text{ یا } 8 \Rightarrow x^3=1 \text{ یا } 8 \Rightarrow x=1 \text{ یا } 2$$

$$\Rightarrow S=1+2=3$$

۸۷- گزینه۲ می‌خواهیم x^2-x را t بگیریم. پس در $-2x^2+2x$ از ۲- فاکتور می‌گیریم تا x^2-x دیده شود:

$$(x^2-x)^2-2x^2+2x-8=0$$

$$\Rightarrow (x^2-x)^2-2(x^2-x)-8=0$$

$$\xrightarrow{x^2-x=t} t^2-2t-8=0 \Rightarrow t=4 \text{ یا } -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-x=4 \Rightarrow x^2-x-4=0 \\ x^2-x=-2 \Rightarrow x^2-x+2=0 \Rightarrow \Delta<0 \end{cases}$$

پس مجموع مکعبات ریشه‌های معادله، همان مجموع مکعبات ریشه‌های معادلهٔ $x^2-x-4=0$ است:

$$x_1^3+x_2^3=S^3-3PS \xrightarrow[P=\frac{c}{a}=-4]{S=\frac{-b}{a}=1} 1^3-3(1)(-4)=13$$

۸۸- گزینه۴ با انتخاب $x^2=t$ داریم: $t^2-3t+1=0$

این معادله دو ریشهٔ t_1 و t_2 دارد که هر دو مثبت‌اند (چون $S>0$ و $P>0$ و $\Delta>0$) پس داریم: $x^2=t_1\,,\,x^2=t_2$

یعنی جواب‌ها $\pm\sqrt{t_1}$ و $\pm\sqrt{t_2}$ هستند. سؤال از ما مجموع توان چهارم ریشه‌ها را خواسته:

$$(+\sqrt{t_1})^4+(-\sqrt{t_1})^4+(+\sqrt{t_2})^4+(-\sqrt{t_2})^4$$

$$=t_1^2+t_1^2+t_2^2+t_2^2=2(\underbrace{t_1^2+t_2^2}_{\text{مجموع مربعات ریشه‌های معادله برحسب } t})$$

$$=2(S^2-2P) \xrightarrow[P=\frac{c}{a}=1]{S=\frac{-b}{a}=3} =2(3^2-2\times 1)=2\times 7=14$$

۸۹- گزینه۲ اگر $x^2=t$ باشد معادله به صورت $t^2-6t-4=0$ درمی‌آید که دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامه (یکی مثبت و یکی منفی) دارد (چون $P<0$ است) پس $x^2=t_1>0$ و $x^2=t_2<0$؛ بنابراین فقط دو ریشهٔ $\pm\sqrt{t_1}$ داریم.

۹۰- گزینه۴ با انتخاب $x^2=t$ داریم: $t^2-3t+1=0$

از این معادله دو مقدار مثبت t_1 و t_2 به دست می‌آیند، پس:

$$x^2=t_1\,,\,x^2=t_2$$

و جواب‌های معادلهٔ صورت سؤال $\pm\sqrt{t_1}$ و $\pm\sqrt{t_2}$ هستند (یعنی ۴ جواب دارد). مجموع مجذور جواب‌ها برابر است با:

$$(\sqrt{t_1})^2+(-\sqrt{t_1})^2+(\sqrt{t_2})^2+(-\sqrt{t_2})^2$$

$$=t_1+t_1+t_2+t_2=2(\underbrace{t_1+t_2}_{\text{جمع ریشه‌های معادله } t^2-3t+1=0})=2S=2\times 3=6$$

۹۱- گزینه۴ با تغییر متغیر $x^2=t$ این معادله به صورت $t^2-mt-(m^2+1)=0$ درمی‌آید که برای t دو جواب مختلف‌العلامه دارد ($\frac{c}{a}<0$ است).

پس فقط جواب مثبت قابل‌قبول است و داریم: $x=\pm\sqrt{t_1}$

اختلاف دو ریشه می‌شود $2\sqrt{t_1}$ که باید ۴ باشد؛ پس داریم:

$$2\sqrt{t_1}=4 \Rightarrow \sqrt{t_1}=2 \Rightarrow t_1=4$$

یعنی ریشهٔ مثبت معادله برحسب t، باید ۴ باشد:

$$t^۲-mt-(m^۲+۱)=۰ \xrightarrow{t=۴} ۱۶-۴m-(m^۲+۱)=۰$$

$$\Rightarrow m^۲+۴m-۱۵=۰ \Rightarrow m \text{ جمع مقادیر }=S=\frac{-b}{a}=-۴$$

۹۲- گزینه۲ با قراردادن $x^۲=t$ به معادلهٔ $t^۲-(m+۲)t+m+۵=۰$ می‌رسیم. این معادله باید برای t دو جواب مثبت بدهد تا برای x چهار جواب داشته باشیم.

شرایط دو جواب مثبت عبارت‌اند از: $S>۰, P>۰, \Delta>۰$

پس: $S=\frac{-b}{a}=\frac{m+۲}{۱}>۰ \Rightarrow m>-۲$

$$P=\frac{c}{a}=m+۵>۰ \Rightarrow m>-۵$$

$$\Delta=(m+۲)^۲-۴(m+۵)=m^۲-۱۶>۰ \Rightarrow |m|>۴$$

و از اشتراک این شرایط $m>۴$ قبول است.

۹۳- گزینه۲ برای تغییر متغیر باید عبارات یکسانی ببینیم تا بتوانیم آن‌ها را t بگیریم و به معادلهٔ درجه‌دوم برسیم. پس سعی می‌کنیم عبارت‌های شبیه هم بسازیم!

$$(x-۲)^۴+۱۲x=۳x^۲+۱۰ \Rightarrow (x-۲)^۴=۳x^۲-۱۲x+۱۰$$

$$=۳(x^۲-۴x)+۱۰=۳((x-۲)^۲-۴)+۱۰=۳(x-۲)^۲-۲$$

حالا خوب شد. اگر $(x-۲)^۲$ را t بنامیم داریم: $t^۲=۳t-۲$

پس: $t^۲-۳t+۲=۰$ و در نتیجه: $t=۱$ یا ۲

$$\begin{cases}(x-۲)^۲=۱ \Rightarrow x-۲=\pm۱ \Rightarrow x=۱ \text{ یا } ۳\\ (x-۲)^۲=۲ \Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۲} \Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۲}\end{cases}$$

پس کوچک‌ترین ریشهٔ معادله $۲-\sqrt{۲}$ است.

۹۴- گزینه۴ سهمی رو به پایین است پس $a<۰$.

جمع ریشه‌ها منفی است پس $\frac{-b}{a}<۰$ و با توجه به منفی‌بودن a باید $b<۰$ باشد.

ضرب ریشه‌ها مثبت است پس $\frac{c}{a}>۰$ و در نتیجه $c<۰$. بنابراین $b+c$ مجموع ۲ عدد منفی است: $b+c<۰$

۹۵- گزینه۳ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $f(x)=۰$، در شکل، $x=-۲$ داده شده؛ پس داریم:

$$ax^۲+۴x+b=۰ \Rightarrow a(x+۲)^۲=۰$$

$$\Rightarrow a(x^۲+۴x+۴)=۰$$

حالا چون ضریب x باید ۴ بشود حتماً $a=۱$ بوده و داریم:

$$b=۴a=۴$$

۹۶- گزینه۱ نمودار f محور xها را در طول‌های ۲ و ۱− قطع کرده؛ پس: $f(x)=a(x-۲)(x+۱)$

چون عرض از مبدأ نمودار ۱ است، باید $f(۰)=۱$ باشد:

$$f(۰)=a(-۲)(۱)=-۲a=۱ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

پس $f(x)=\frac{-۱}{۲}(x-۲)(x+۱)$ و معادلهٔ $۲+f(x)=۰$ را می‌توانیم تشکیل دهیم:

$$۲+(\frac{-۱}{۲})\underbrace{(x-۲)(x+۱)}_{x^۲-x-۲}=۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x+۳=۰$$

$$\text{اختلاف ریشه‌ها}=|x_۱-x_۲|=\sqrt{S^۲-۴P}=\sqrt{۱^۲-۴(-۶)}=۵$$

۹۷- گزینه۴ با داشتن رأس سهمی، معادله‌اش به صورت $y=a(x-x_S)^۲+y_S$ نوشته می‌شود. پس با نقطهٔ رأس $S(۳,۳)$ داریم: $y=a(x-۳)^۲+۳$

حالا سؤال می‌گوید $a^۲=۱$ و چون سهمی ماکسیمم دارد $a<۰$ است. پس $a=-۱$ و معادلهٔ سهمی به صورت $y=-(x-۳)^۲+۳$ است و عرض از مبدأ آن برابر است با:

$$\xrightarrow{x=۰} y=-(۰-۳)^۲+۳=-۹+۳=-۶$$

۹۸- گزینه۱ منحنی بر سمت راست محور xها مماس است و مینیمم دارد پس باید $\Delta=۰$ بوده، ضریب $x^۲$ مثبت باشد و مقدار ریشهٔ مضاعف نیز مثبت باشد.

$$y=a(x^۲+x)-۳x+۱=ax^۲+(a-۳)x+۱=۰$$

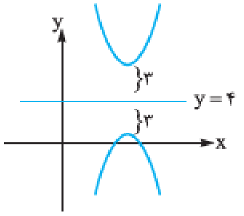
$$\Delta=۰ \Rightarrow (a-۳)^۲-۴a=a^۲-۱۰a+۹=۰ \Rightarrow a=۱ \text{ یا } ۹$$

ریشهٔ مضاعف: $x_۱=x_۲=-\frac{x \text{ ضریب}}{۲(x^۲ \text{ ضریب})}=-\frac{a-۳}{۲a}>۰$

$$\Rightarrow \frac{a-۳}{۲a}<۰$$

پس فقط $a=۱$ قابل‌قبول است (به ازای $a=۹$، شرط $\frac{a-۳}{۲a}<۰$ برقرار نیست).

۹۹- گزینه۱ شکل را ببینید:



دو حالت داریم:

یا سهمی رو به بالا است ($a>۰$) و عرض نقطهٔ رأس برابر $۳+۴=۷$ است

یا سهمی رو به پایین است ($a<۰$) و عرض نقطهٔ رأس برابر $۴-۳=۱$ است.

الف) $a>۰$: $y_S=\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{۸-۴a^۲}{۴a}=۷ \Rightarrow \frac{a^۲-۲}{a}=۷$

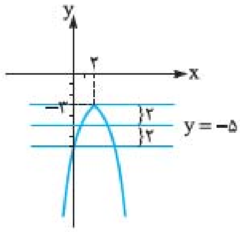
$$\Rightarrow a^2-7a-2=0 \xrightarrow{a>0} a=\frac{7+\sqrt{57}}{2}$$

ب) $a<0$

$$y_S=\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{8-4a^2}{4a}=1 \Rightarrow \frac{a^2-2}{a}=1$$

$$\Rightarrow a^2-a-2=0 \xrightarrow{a<0} a=-1$$

۱۰۰- گزینهٔ ۴ منحنی سهمی $y=-x^2+4x-7$ رو به پایین است و در $S(2,-3)$ ماکسیمم دارد.



یادآوری: نقاطی که از خط $y=L$ به فاصلهٔ ۲ باشند روی خط‌های $y=L+2$ و $y=L-2$ (یعنی روی دو خط افقی موازی آن) قرار دارند. سؤال می‌گوید این دو خط افقی، یک سهمی را در ۳ نقطه قطع کرده‌اند پس حتماً یکی از رأس سهمی گذشته است؛ پس خط $y=L$ در واقع $y=-5$ بوده و دو خط بالا و پایین $y=-7$ و $y=-3$ هستند. حالا دنبال نقاط تلاقی خط $y=-5$ با منحنی هستیم:

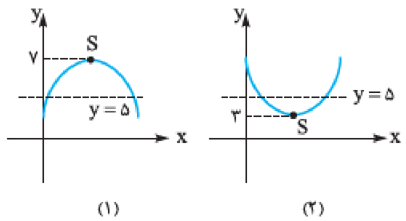
$$-x^2+4x-7=-5 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow S=4, P=2$$

پس داریم: $(x_1+\frac{1}{x_1})(x_2+\frac{1}{x_2})=x_1x_2+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{x_1x_2}$

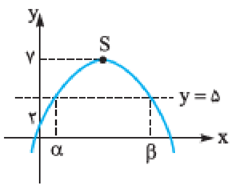
$$=P+\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}+\frac{1}{P}=P+\frac{1}{P}+\frac{S^2-2P}{P}$$

$$=2+\frac{1}{2}+\frac{4^2-2\times 2}{2}=8/5$$

۱۰۱- گزینهٔ ۱ فاصلهٔ رأس سهمی از خط $y=5$ برابر ۲ است، پس با توجه به این‌که خط $y=5$ نمودار تابع درجه‌دوم را قطع می‌کند دو حالت فوق را خواهیم داشت:



با توجه به این‌که عرض از مبدأ سهمی ۲ است، حالت (۲) صحیح نیست و فقط حالت (۱) می‌تواند درست باشد. مجموع طول نقاط تلاقی خط $y=5$ با منحنی، برابر ۲ است.



$$\alpha+\beta=2 \Rightarrow \text{طول رأس سهمی}=\frac{\alpha+\beta}{2}=1$$

$$\Rightarrow S(1,7) \Rightarrow \text{معادلهٔ سهمی}: f(x)=a(x-1)^2+7$$

$$\xrightarrow{f(0)=2} a+7=2 \Rightarrow a=-5$$

$$\Rightarrow f(x)=-5(x-1)^2+7 \Rightarrow f(x)=-5x^2+10x+2$$

حالا معادلهٔ $f(x)=6$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=6 \Rightarrow -5x^2+10x+2=6$$

$$\Rightarrow -5x^2+10x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع معکوس ریشه‌ها}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{2}{\frac{4}{5}}=2/5$$

۱۰۲- گزینهٔ ۲ اگر $40+x$ بوته بکاریم از میانگین کل محصول (یعنی از ۸ کیلوگرم) $\frac{x}{8}$ کم می‌شود یعنی میانگین تولید $8-\frac{x}{8}$ است؛ پس مقدار محصول برابر است با:

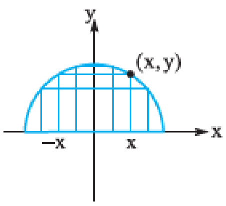
$$\text{مقدار محصول} = \text{تعداد بوته} \times \text{میانگین} = (40+x)(8-\frac{x}{8})$$

$$=320+8x-5x-\frac{x^2}{8}=-\frac{x^2}{8}+3x+320$$

ماکسیمم این عبارت به ازای $x=\frac{-b}{2a}=-\frac{3}{2(\frac{-1}{8})}=12$ به دست می‌آید و برابر است با:

$$-\frac{12^2}{8}+3\times 12+320=\frac{-144}{8}+36+320=338$$

۱۰۳- گزینهٔ ۳ مستطیل‌های مختلفی را در شکل آوردیم اگر مرکز دایره مبدأ مختصات باشد، مختصات نقطهٔ رأس مستطیل روی دایره (در ربع اول) (x,y) است. فاصلهٔ این نقطه تا مبدأ برابر شعاع دایره است، پس داریم: $\sqrt{x^2+y^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$



مساحت مستطیل $2x\times y$ است و باید به بیشترین مقدار برسد. چون جمع x^2 و y^2 ثابت و برابر ۱ است، x^2y^2 زمانی حداکثر می‌شود که $x^2=y^2=\frac{1}{2}$ باشد و حداکثر مساحت $2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$ یعنی ۱ است.

دقت کنید که y و x اعداد مثبت‌اند و اگر x^2y^2 ماکسیمم شود، xy نیز ماکسیمم می‌شود.

۱۰۴- گزینهٔ ۴ فاصلهٔ نقاط $M(x,\sqrt{2x+9})$ از نقطهٔ $A(4,0)$ برابر است با:

$$AM=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{2x+9}-0)^2}$$

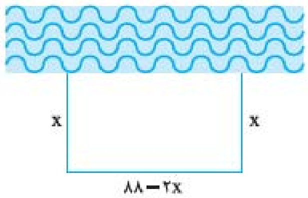
$$=\sqrt{x^2-8x+16+2x+9}=\sqrt{x^2-6x+25}$$

عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است، پس وقتی زیر رادیکال مینیمم باشد جواب هم مینیمم است: $y=x^2-6x+25$

$$x_S=\frac{-b}{2a}=-\frac{-6}{2(1)}=3 \Rightarrow y_{min}=3^2-6(3)+25=16$$

$$\Rightarrow \min(AM)=\sqrt{16}=4$$

۱۰۵- گزینهٔ۲ به شکل توجه کنید:



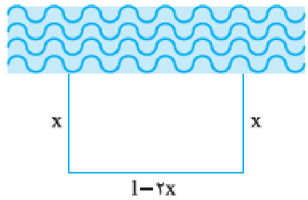
مساحت مستطیل مقابل $x(88-2x)$ است و باید ماکسیمم شود:

$$y=-2x^2+88x$$

$$x_S=\frac{-b}{2a}=-\frac{88}{2(-2)}=22 \Rightarrow y_{max}=-2(22)^2+88(22)$$

$$=-2(22)^2+4(22)^2=2(22)^2=2(484)=968$$

۱۰۶- گزینهٔ۴ اگر طول طناب l باشد داریم:



مساحت $=x(l-2x)$

$$y=-2x^2+lx$$

$$y_{max}=\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{l^2-4(-2)(0)}{4(-2)} \Rightarrow 648=\frac{l^2}{8}$$

$$\Rightarrow l^2=8\times\underbrace{648}_{8\times 81} \Rightarrow l^2=8^2\times 9^2 \Rightarrow l=8\times 9=72$$

۱۰۷- گزینهٔ۳ فاصلهٔ نقاط $A(x,x^2+2x)$ از خط $y=2x-3$ برابر است با:

$$\left.\begin{matrix} A(x,x^2+2x) \\ 2x-y-3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d=\frac{|2x-(x^2+2x)-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|-x^2-3|}{\sqrt5}=\frac{|x^2+3|}{\sqrt5}=\frac{x^2+3}{\sqrt5}$$

کم‌ترین مقدار آن به ازای $x=0$ برابر است با $\frac{3}{\sqrt5}$.

۱۰۸- گزینهٔ۱ سؤال می‌گوید معادلهٔ $y_1=y_2$ یعنی $(2x+1)(x+8)=mx$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$2x^2+17x+8=mx \Rightarrow 2x^2+(17-m)x+8=0$$

$$\xrightarrow{\Delta<0} (17-m)^2-4(2)(8)<0 \Rightarrow (17-m)^2<64$$

$$\Rightarrow -8<17-m<8 \Rightarrow -25<-m<-9$$

$$\Rightarrow 9<m<25$$

۱۰۹- گزینهٔ۳ معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $A(0,1)$ می‌گذرد $y-1=m(x-0)$ یا $y=mx+1$ است. پس تلاقی آن با سهمی x^2-4x+2 به معادلهٔ $x^2-(4+m)x+1=0$ می‌رسد که ریشه‌هایش α و β هستند. صورت سؤال می‌گوید $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2=2$، پس داریم: $\alpha\beta^2+\beta\alpha^2=\alpha\beta(\beta+\alpha)=PS$

$$\xrightarrow[S=\frac{-b}{a}=4+m]{P=\frac{c}{a}=1} 1(4+m)=2 \Rightarrow m=-2$$

پس داریم: $y=-2x+1$ که محور xها را در $x=\frac{1}{2}$ قطع می‌کند.

۱۱۰- گزینهٔ۴ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند یعنی معادلهٔ $y=0$ دو ریشهٔ منفی دارد:

$$(m-2)x^2-2(m+1)x+12=0$$

$$\xrightarrow{\text{دو ریشهٔ منفی}} \begin{cases} S<0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2}<0 \Rightarrow -1<m<2 \\ \Delta>0 \Rightarrow 4(m+1)^2-4(12)(m-2)>0 \\ P>0 \Rightarrow \frac{12}{m-2}>0 \Rightarrow m>2 \end{cases}$$

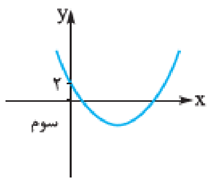
شرط دلتا را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div 4} (m+1)^2-12(m-2)=m^2+2m+1-12m+24$$

$$=m^2-10m+25=(m-5)^2>0 \Rightarrow m\neq 5$$

پس هیچ مقداری برای m نداریم. (اشتراکی بین $-1<m$ و $m>2$ نیست.)

۱۱۱- گزینهٔ۳ برای این‌که سهمی فقط از ناحیهٔ سوم نگذرد باید شبیه شکل روبه‌رو باشد: پس این سهمی رو به بالا است و دو ریشه در سمت راست محور xها دارد. بنابراین ضریب x^2 یعنی $m>0$ است و داریم: دو ریشهٔ نامنفی $\Rightarrow S>0, P\geq 0, \Delta>0$



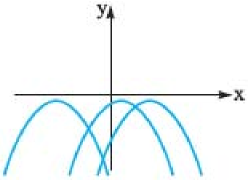
$$mx^2+(2m-8)x+2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S=-\frac{2m-8}{m}>0 \Rightarrow \frac{2m-8}{m}<0 \Rightarrow 0<m<4 \\ P=\frac{2}{m}\geq 0 \Rightarrow m\geq 0 \\ \Delta=(2m-8)^2-4(m)(2)=4m^2-32m+64-8m \\ =4m^2-40m+64=4(m^2-10m+16) \\ =4(m-2)(m-8)>0 \Rightarrow \begin{cases} m>8 \\ m<2 \end{cases} \end{cases}$$

از اشتراک این شرط‌ها $0<m<2$ است.

۱۱۲- گزینهٔ۱

دو حالت وجود دارد:



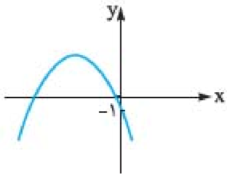
الف) سهمی فقط در نواحی سوم و چهارم است و مقادیر نامثبت دارد:

$$(a-3)x^2+ax-1\le 0 \Rightarrow \begin{cases}\Delta\le 0\\ a-3<0\end{cases}$$

$$1)\ a^2-4(a-3)(-1)\le 0 \Rightarrow a^2+4a-12\le 0$$

$$\Rightarrow (a+6)(a-2)\le 0 \xrightarrow{\text{بین دو ریشه}} -6\le a\le 2$$

$$2)\ a-3<0 \Rightarrow a<3$$



ب) سهمی فقط از ناحیهٔ اول نگذشته و در ناحیهٔ دوم می‌آید: پس باید دو ریشهٔ منفی یا صفر داشته باشد؛ بنابراین:

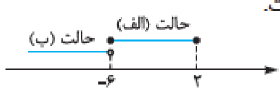
$$\Delta>0 \Rightarrow a^2-4(a-3)(-1)>0 \Rightarrow a^2+4a-12>0$$

$$\xrightarrow{\text{بیرون دو ریشه}} a<-6 \text{ یا } a>2$$

$$S<0 \Rightarrow S=-\frac{a}{a-3}<0 \Rightarrow \frac{a}{a-3}>0 \Rightarrow a>3 \text{ یا } a<0$$

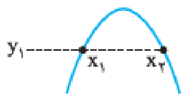
$$P\ge 0 \Rightarrow \frac{-1}{a-3}\ge 0 \Rightarrow a-3<0 \Rightarrow a<3$$

از اشتراک این شرط‌ها $a<-6$ است.

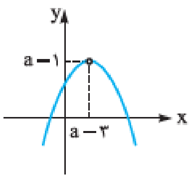


پس در کل $a\le 2$ جواب است.

۱۱۳- گزینهٔ۲ در سهمی به خاطر تقارن، هر مقدار از y، دو بار به دست می‌آید.



مثلاً در شکل بالا اگر x_1 از دامنه برداشته شود برد تغییری نمی‌کند چون بالأخره در طول x_2 همان عرض به دست می‌آید.



پس حتماً نقطه‌ای با طول $a-3$ رأس سهمی بوده که برداشتن آن، برد را به صورت بازهٔ باز درآورده؛ یعنی $S(a-3,a-1)$ رأس سهمی است.

$$y=-2x^2+ax+b \Rightarrow x_S=-\frac{a}{2(-2)}=\frac{a}{4}=a-3$$

$$\Rightarrow a=4 \Rightarrow x_S=1,\ y_S=3$$

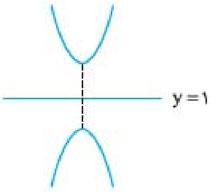
$$y_S=f(1)=3 \Rightarrow -2+\underbrace{a}_{4}+b=3 \Rightarrow b=1$$

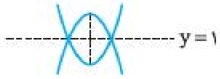
و در پایان:

$$f(a-b)=f(4-1)=f(3)=-2(3)^2+\underbrace{a}_{4}(3)+\underbrace{b}_{1}$$

$$=-18+12+1=-5$$

۱۱۴- گزینهٔ۴ نمودار دو سهمی رو به بالا و پایین، وقتی نسبت به خط **افقی** $y=1$ تقارن دارد که طول رأس‌های آن‌ها برابر باشد و $y=1$ معدل عرض رأس‌ها باشد:





$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+ax+4 \Rightarrow x_{S_1}=\frac{a}{2}\\ g(x)=x^2-2x+b \Rightarrow x_{S_2}=1\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{برابر است.}]{\text{طول رأس‌ها}} \frac{a}{2}=1$$

$$\Rightarrow a=2$$

حالا عرض رأس‌ها را حساب کنیم: $y_{S_1}=f(1)=-1+\underbrace{a}_{2}+4=5$

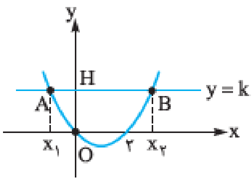
$$y_{S_2}=g(1)=1-2+b=b-1$$

گفتیم $y=1$ باید معدل y_{S_1} و y_{S_2} باشد:

$$\frac{5+b-1}{2}=1 \Rightarrow 4+b=2 \Rightarrow b=-2$$

و در پایان: $f(2)+g(-2)=-4+2\underbrace{a}_{2}+4+4+4+\underbrace{b}_{-2}=10$

۱۱۵- گزینهٔ۲ نمودار سهمی $y=\frac{1}{2}x^2-x$ و خط $y=k$ را ببینید:



x_1 و x_2 طول نقاط تلاقی دو نمودار یعنی ریشه‌های معادلهٔ $\frac{1}{2}x^2-x-k=0$ است. مختصات نقاط برخورد $A(x_1,k)$ و $B(x_2,k)$ است. با توجه به شکل، مثلث OAB می‌تواند در رأس O قائمه باشد:

$$\text{شیب } OA=\frac{y_O-y_A}{x_O-x_A}=\frac{k}{x_1}$$

$$\text{شیب } OB=\frac{y_B-y_O}{x_B-x_O}=\frac{k}{x_2}$$

$OA\perp OB \Rightarrow$ ضرب شیب‌ها ۱− است. $\Rightarrow \frac{k}{x_1}\times\frac{k}{x_2}=-1$

$$\Rightarrow \frac{k^2}{x_1x_2}=-1 \xrightarrow{x_1x_2=P=-2k} \frac{k^2}{-2k}=-1 \Rightarrow k=2$$

پس داریم: $\frac{1}{2}x^2-x-2=0 \Rightarrow x^2-2x-4=0$

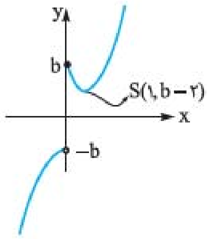
$$AB=|x_1-x_2|=\sqrt{S^2-4P}=\sqrt{2^2-4(-4)}=\sqrt{20}$$

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{AB\times\overbrace{OH}^{k}}{2}=\frac{\sqrt{20}\times 2}{2}=2\sqrt{5}$$

۱۱۶- **گزینه۳** این تابع برای $x>0$ و $x<0$ به صورت‌های زیر است:

$$\xrightarrow{x>0} f(x)=\frac{2x^3-4x^2+bx}{x}=2x^2-4x+b$$

$$\xrightarrow{x<0} f(x)=\frac{2x^3-4x^2+bx}{-x}=-2x^2+4x-b$$

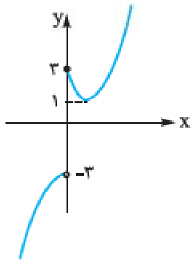


رأس این سهمی‌ها در $x=1$ و عرض رأس‌ها به ترتیب $b-2$ و $2-b$ است. شکل را ببینید:

برد تابع شامل اعداد $-b$، $-b+1$، ... و $b-3$ نیست.

تعداد این اعداد $(b-3)-(-b)+1$ یعنی $2b-2$ است؛ پس داریم: $b=3$

شکل را ببینید:



$\mathbb{R}-[-3,1)=$ برد

برد شامل اعداد -3، -2، -1 و 0 نیست؛ پس داریم:

$$f(b)=f(3)=2(3)^2-4(3)+\underbrace{3}_{b}$$

$$=18-12+3=9$$