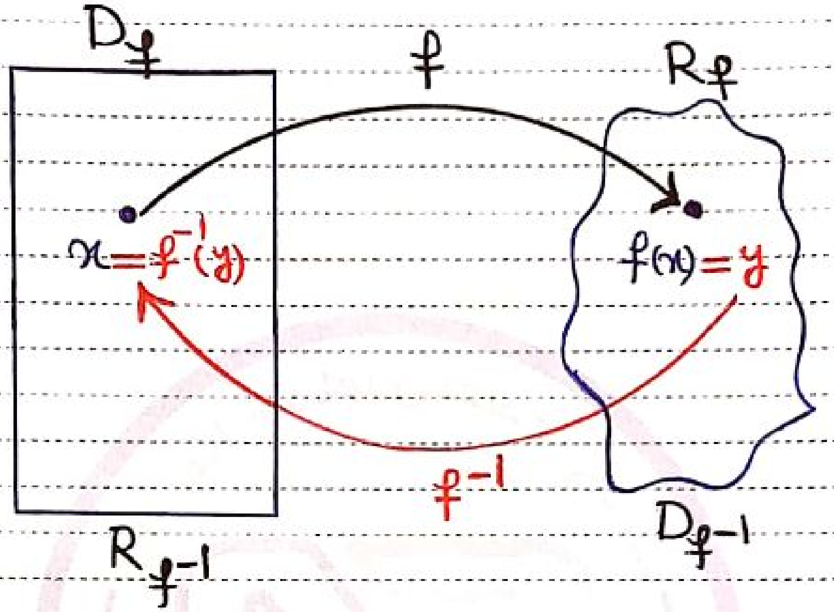
درس ۳: تابع وارون

inverse



اگر f تابعی یک به یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار فوق ارتباط آن ها را نشان می‌دهد.

← اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-1}(b)=a$ و برعکس. به عبارت دیگر اگر نمودار f از نقطه (a,b) بگذرد، آنگاه نمودار f^{-1} از نقطه (b,a) می‌گذرد.

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

← یادآوری: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون تابع f، ابتدا از نماد y به جای $f(x)$ استفاده می‌کنیم. سپس x را برحسب y می‌نویسیم و در نهایت به جای y از نماد x و به جای x از نماد $f^{-1}(x)$ استفاده می‌کنیم. هدف تبدیل کردن x به y است!

مثال: اگر $f(x)=\frac{1}{2}x-3$ ، توابع f^{-1} و $f\circ f^{-1}$ و $f^{-1}\circ f$ را بیابید.

$$y=f(x)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x-3$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2y=x-6 \Rightarrow x=2y+6$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=2x+6$$

$$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=f(2x+6)$$

$$=\frac{1}{2}(2x+6)-3=x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(\frac{1}{2}x-3)$$

$$=2(\frac{1}{2}x-3)+6=x$$

← نکته! اگر f^{-1} وارون تابع f باشد آنگاه:

$$(f\circ f^{-1})(x)=f(f^{-1}(x))=x \qquad x\in D_{f^{-1}}$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=x \qquad x\in D_f$$

← بنابراین:

اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که

$(f\circ g)(x)=x$ و $(g\circ f)(x)=x$

آنگاه دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

به عبارتی ترکیب دو تابع که وارون همدیگر باشند،
تابع همانی x خواهد بود.

مثال. اگر $g(x)=8+x^2 \quad x\leq 0$ و $f(x)=-\sqrt{x-8}$
نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

باید نشان دهیم رابطه زیر برقرار است:

$$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$$

$$f(g(x))=f(8+x^2)=-\sqrt{8+x^2-8}=-\sqrt{x^2}=-|x|$$

$$\xrightarrow{x\leq 0} -(-x)=x$$

$$g(f(x))=g(-\sqrt{x-8})=8+(-\sqrt{x-8})^2$$

$$=8+x-8=x$$

مثال (بعنوان تمرین). نشان دهید توابع

$f(x)=3x-4$ و $g(x)=\dfrac{x+4}{3}$

وارون یکدیگرند.

مثال. اگر $g(x)=x^3$ و $f(x)=\frac{1}{8}x-3$

مقدار $(f\circ g)^{-1}(5)$ و $(g^{-1}\circ f^{-1})(5)$

را بدست آورید.

ابتدا ضابطه‌های f^{-1} و g^{-1} را پیدا می‌کنیم

$$y = f(x)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{8}x - 3 \xrightarrow{\times 8} 8y = x - 24$$

$$\Rightarrow x = 8y + 24 \Rightarrow f^{-1}(x) = 8x + 24$$

$$y = g(x)$$

$$\Rightarrow y = x^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} \sqrt[3]{y} = x$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(5) = g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(5)}_{8(5)+24}) = g^{-1}(64) = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$(f \circ g)^{-1}(5) = ?$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \frac{1}{8}x^3 - 3$$

$$y = \frac{1}{8}x^3 - 3 \xrightarrow{\times 8} 8y = x^3 - 24$$

$$\Rightarrow (f \circ g)^{-1} = \sqrt[3]{8x + 24}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)^{-1}(5) = \sqrt[3]{8(5) + 24} = \sqrt[3]{64} = 4$$

نتیجه!

اگر f و g دو تابع باشند آنگاه

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

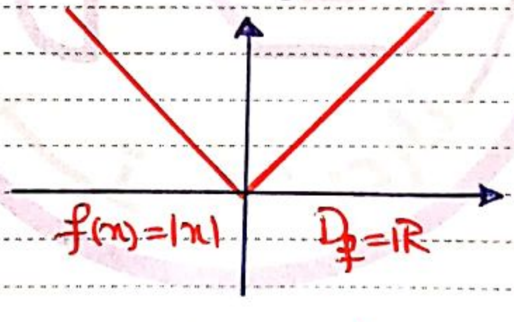
اول g^{-1} نوشته می‌شود

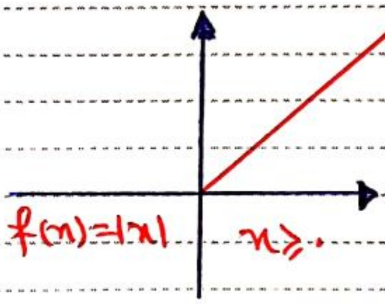
$$(f^{-1})^{-1} = f$$

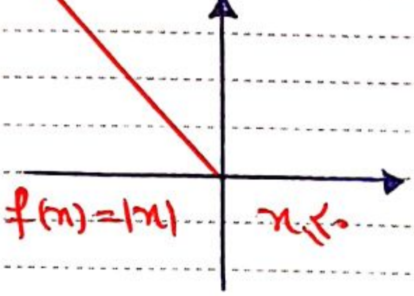
مثال. (به عنوان تمرین). اگر $f(x)=-5-\sqrt{3x+1}$ حاصل $(f^{-1}of^{-1})(0)$ را به دست آورید.

تذکر. می دانیم توابعی که یک به یک نباشند وارون پذیر هم نیستند. می توان با محدود کردن دامنه توابع آن ها به توابعی یک به یک ساخت.

به طور مثال تابع $f(x)=|x|$ یک به یک نیست ولی با محدود کردن دامنه تابع به بازه $[0,+\infty)$ و یا $(-\infty,0]$ یا زیر مجموعه هایی از این دو بازه به تابعی یک به یک به دست آورد.





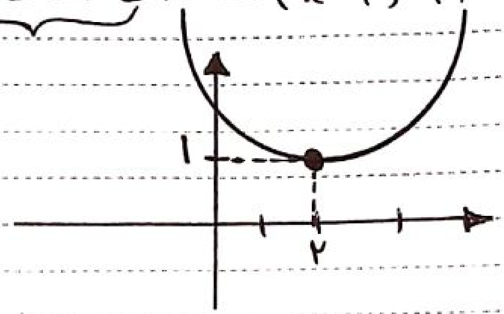


مثال. با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک به یک به دست آورید.

به جای ۵ می نویسیم $4+1$ و از اتحاد مربع دو جمله ای

استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 4x + 4} + 1 = (x-2)^2 + 1$$



برای $x \geq 2$ یا $x \leq 2$ تابع f یک به یک خواهد بود.

مثال: (بعنوان تمرین) اگر $f(x) = x^2 - 5$ با محدود کردن دامنهٔ تابع f، تابعی وارون پذیر بسازید.

[redacted]

دامنهٔ تابع f = بُرد تابع f^{-1}

$$(D_f = R_{f^{-1}})$$

بُرد تابع f = دامنهٔ تابع f^{-1}

$$(R_f = D_{f^{-1}})$$