فصل دوم : مثلثات

- درس ۱ تناوب و تانژانت
- درس ۲ معادله مثلثاتی

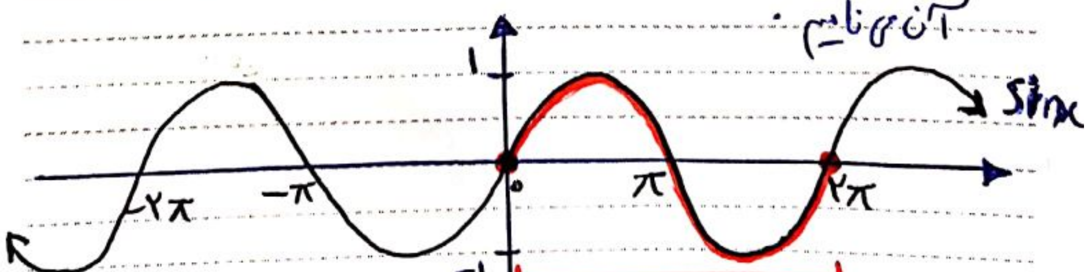
درس ۱ : تناوب و تانژانت

بسیاری از پدیده‌ها و تغییرات تکرار شونده را می‌توانیم با توابع متناوب مثلثاتی مدل سازی کنیم. برای این کار کافی است داده‌های یک دورهٔ تناوب آن پدیده را داشته باشیم و در این صورت آن پدیده را برای زمان‌های آینده پیش بینی کرد.

اما تابع متناوب چیست ؟!

هرگاه نمودار تابع به گونه‌ای باشد که قسمتی از نمودار بطور منظم تکرار شود، به آن تابع، متناوب می‌گویند و به کوچکترین فاصله‌ای که نمودار تابع در آن فاصله تکرار می‌شود، دورهٔ تناوب می‌گویند.

بعنوان مثال : می‌دانیم موج سینوسی در بازه‌هایی به طول 2π ، 4π ، 6π ، ... ، $2k\pi$ تکرار می‌شود که کوچکترین بازه‌ای که نمودار سینوسی در آن تکرار شده همان 2π است. تابع $y=\sin x$ را متناوب و 2π را دورهٔ تناوب آن می‌نامیم.



تعریف ریمی: تابع f را متناوب گویند هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in D_f$ و $x \pm T \in D_f$ داشته باشیم

$$f(x \pm T) = f(x)$$

کوچکترین عدد مثبت T با خاصیت فوق را دوره تناوب تابع f می‌نامیم

مثال: نشان دهید تابع $f(x) = \cos x$ متناوب است و دوره تناوب تابع را تعیین کنید.

با توجه به اینکه تساوی $\cos(x+T) = \cos x$ به ازای $x = 2K\pi$ همواره برقرار است پس طبق تعریف ریمی می‌توان گفت که این تابع متناوب است. از طرفی کوچکترین عدد مثبت T به ازای $K=1$ به دست می‌آید که برابر $T = 2\pi$ است لذا دوره تناوب تابع 2π می‌باشد.

توجه! اگر T دوره تناوب یک تابع باشد قطعاً مضارب صحیح غیرصفر آن نیز می‌تواند دوره تناوب محسوب شود اما اگر بتوانیم کوچکترین آن را پیدا کنیم به آن دوره تناوب اصلی می‌گوییم.

مثال: در تابع ثابت $f(x) = c$ دوره تناوب را بیابید.

در تابع ثابت همواره داریم $f(x+T) = c$ که T می‌تواند هر عدد حقیقی باشد، بنابراین کوچکترین دوره تناوب پیدا نمی‌شود.

تذکر. در توابع بفرم $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ داریم

مقدار ماکزیمم $Max = |a| + c$

مقدار مینیمم $min = -|a| + c$

دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|}$

مثال. دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر تابع را بدست آورید.

الف) $y = -\pi \sin(\frac{x}{2}) - 2$

$a = -\pi \quad b = \frac{1}{2} \quad c = -2$

$Max = |a| + c = |-\pi| + (-2) = \pi - 2$

$min = -|a| + c = -|-\pi| + (-2) = -\pi - 2$

$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$

ب) $y = -3 \sin 2\pi x + 1$

$a = -3 \quad b = 2\pi \quad c = 1$

$Max = |-3| + 1 = 4$

$min = -|-3| + 1 = -2$

$T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1$

ج) $y = 1 - 2\sin(\frac{-\pi}{3}x)$ "بعنوان تمرین"

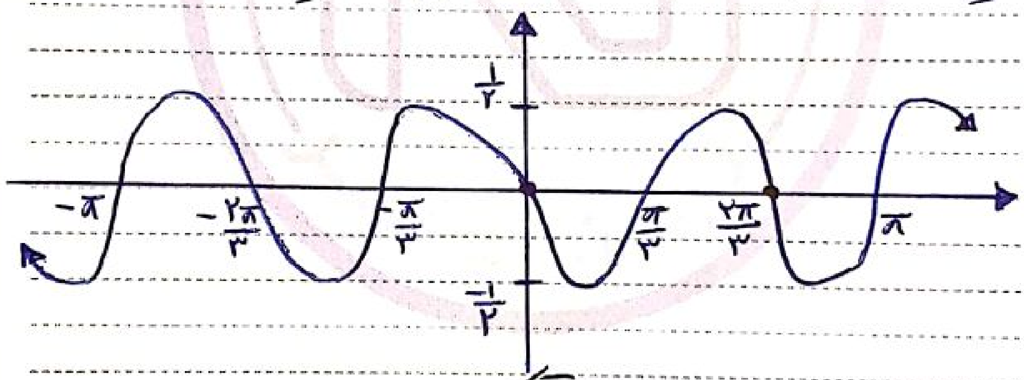
تذکر. با داشتن نمودار یک تابع متناوب بفرم $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ می‌توان ضابطه تابع را مشخص کرد:

برای اینکار کافیست با دقت به شکل نمودار نگاه کنیم و دوره تناوب و مقادیر Max و min آن را مشخص کنیم.

- به عبارتی می‌خواهیم از سخت افزار به نرم افزار برسیم.

$$\text{مجهولات} \begin{cases} \rightarrow a=\dfrac{Max-min}{2} \\[2ex] \rightarrow c=\dfrac{Max+min}{2} \\[2ex] \rightarrow |b|=\dfrac{2\pi}{T} \end{cases}$$

مثال. ضابطه مربوط به نمودار زیر را بنویسید.



با توجه به نمودار واضح است که:

$Max=\frac{1}{2}$ $\quad$ $min=-\frac{1}{2}$ $\quad$ $T=\frac{2\pi}{3}$

$$a=\frac{Max-min}{2}=\frac{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}{2}=\frac{1}{2}$$

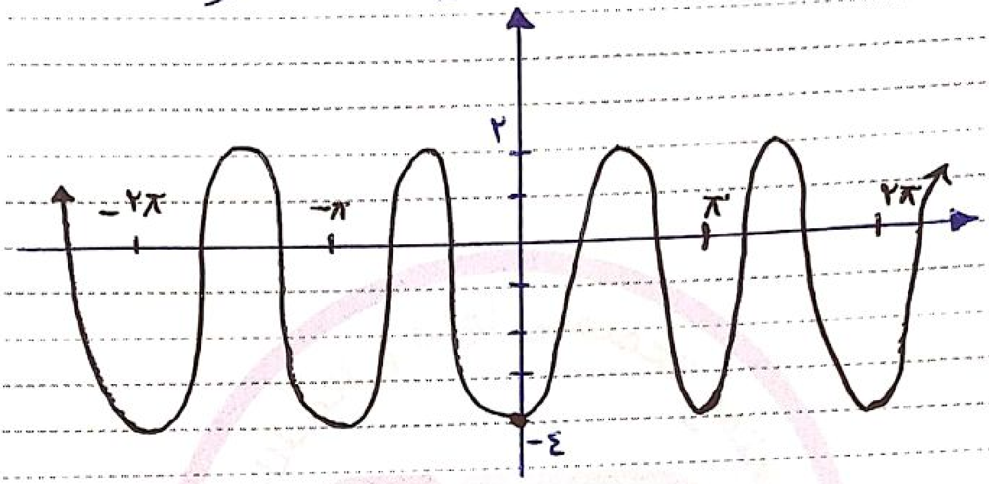
$$c=\frac{Max+min}{2}=\frac{\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})}{2}=0$$

$$|b|=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow b=3$$

$$y=a\sin bx+c=-\frac{1}{2}\sin 3x+0$$

علامت a منفی است زیرا نمودار sin وارونه شده است.

مثال ۵. ضابطه نمودار زیر به صورت $y = a\cos bx + c$ است. مقادیر a و b و c را بیابید. "بعنوان تمرین"

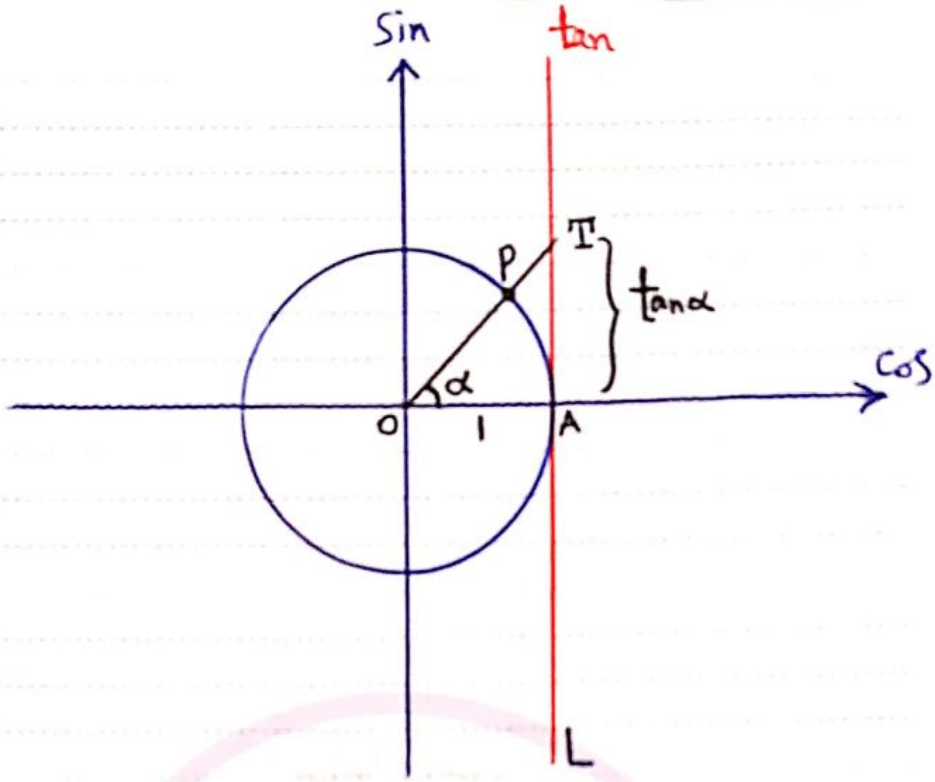


تابع تانژانت : $y = \tan x$

خطی که از نقطه A (مبدأ دایره مثلثاتی) و عمود بر محور x ها (مماس بر دایرهٔ مثلثاتی) رسم می‌شود را محور تانژانت می‌نامیم.

فرض کنید α یک زاویه دلخواه در موقعیت استاندارد و انتهای کمان زاویه α باشد. پاره خط op را امتداد می‌دهیم تا خط L (محور تانژانت) را در نقطهٔ T قطع کند. در مثلث oAT داریم:

$$\tan\alpha = \frac{AT}{oA} \xrightarrow{oA=1} \boxed{\tan\hat{\alpha} = AT}$$



اگر T بالای محور x ها باشد مقدار $\tan\alpha$ عددی مثبت و اگر T پایین محور x ها قرار بگیرد، مقدار $\tan\alpha$ عددی منفی است.

← با توجه به دایره مثلثاتی واضح است که $\tan\frac{\pi}{2} =$ تعریف نشده

$$\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \quad \#$$

← $\tan 0 = 0$ و با افزایش زاویه α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

← تانژانت در $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ تعریف نمی‌شود.

← دامنه تابع $y = \tan x$ عبارت است از

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$$

← برد تابع مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.

← نمودار تابع در نقاط $x = k\pi$ با محور x ها برخورد می‌کند.

مضرب π

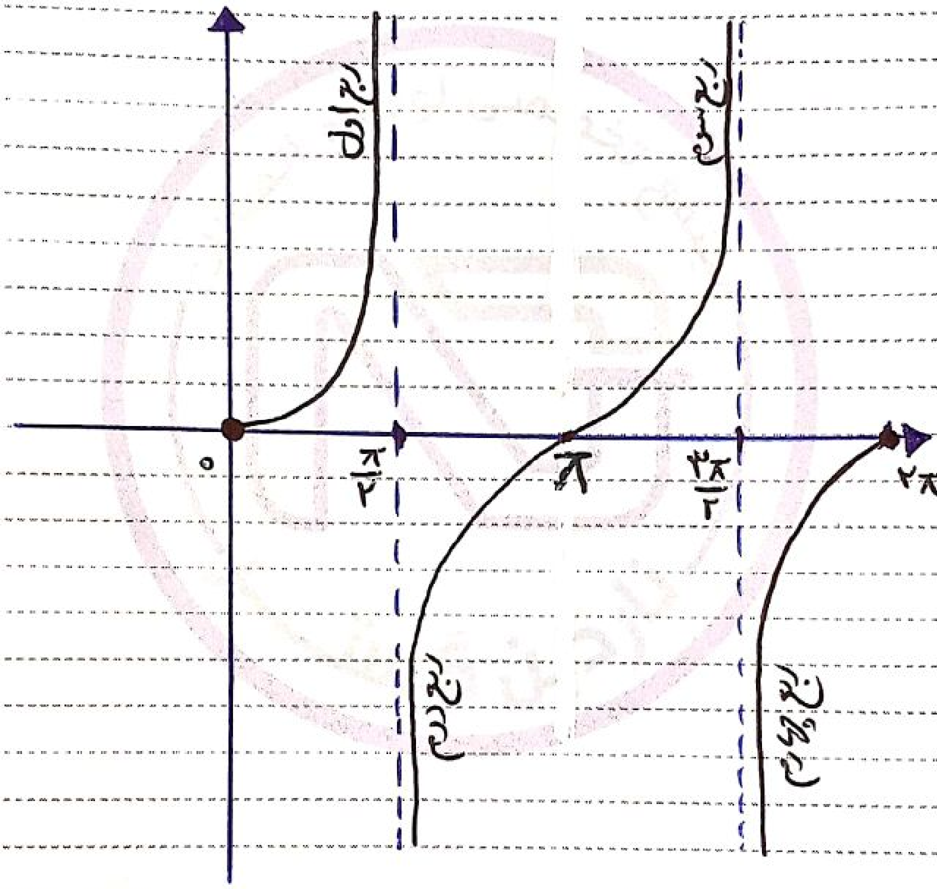
$\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$

← نمودار تابع در فاصله‌های $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ، $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ و ... عیناً تکرار می‌شود. به عبارت دیگر می‌توان گفت تابع تانژانت متناوب است و دوره تناوب اش π می‌باشد.

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

← تابع تانژانت در بازه‌ای که تعریف شده، اکیداً صعودی می‌باشد.

← در یک دور دایره مثلثاتی، نمودار $y = \tan x$ به شکل زیر است



← دوره تناوب تابع $y = a\tan bx + c$ برابر است:

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|\text{ضریب } x|}$$

مثال. دوره تناوب تابع $y = -\tan(2x) + 1$ را مشخص کنید.

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$$

[redacted]