مبانی احتمال

تهیه کننده: مهدیه امین

مبانی احتمال

فضای نمونه ای(S): مجموعه‌ی همه ی حالت های ممکن در به وقوع پیوستن یک پدیده یا آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای می گوییم.

نکته: در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونه ای S_1 و S_2 باشد، فضای نمونه ای آن $S_1 * S_2$ است.

پیشامدهای تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای S را یک پیشامد تصادفی می گوییم.

نکته: اگر فضای نمونه ای S، n عضو داشته باشد، آنگاه S، 2^n زیرمجموعه یعنی 2^n پیشامد دارد.

پیشامد غیرممکن: می‌دانیم $\emptyset \subseteq S$، پس $\emptyset$ یک پیشامد از فضای نمونه ای S است. $\emptyset$ را پیشامد نشدنی یا غیرممکن می نامیم.

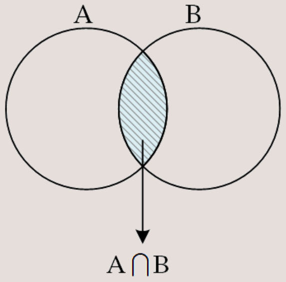
پیشامد قطعی: می‌دانیم $S \subseteq S$ ، بنابراین S یک پیشامد از فضای نمونه ای S است. S را پیشامد قطعی می گوییم.

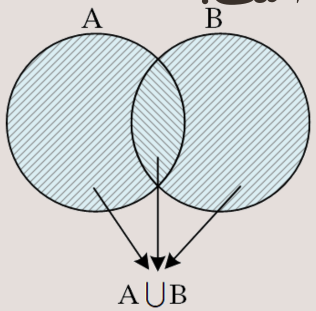
اعمال روی پیشامدها

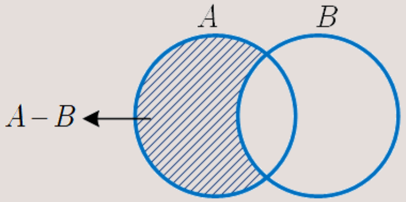
اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند، به عبارت دیگر اگر حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد، پیشامد $A \cup B$ رخ می دهد.

اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، پیشامد $A - B$ زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. به عبارت دیگراگر در فضای نمونه ای S، از بین دو پیشامد A و B، فقط پیشامد A رخ دهد، آن گاه پیشامد $A - B$ رخ داده است.







متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونه ای یک پدیده تصادفی و A پیشامدی از آن باشد، در این صورت متمم A را با A' نمایش می دهیم و زمانی رخ میدهد که پیشامد A رخ ندهد. در واقع دو پیشامد A و A' کل فضای نمونه ای S را تشکیل می‌دهند.

نکته: با توجه به تعریف متمم یک پیشامد، نتایج زیر حاصل می شوند:

1) $A' = S - A$

2) $A \cup A' = S$

3) $A \cap A' = \emptyset$

4) $n(A') = n(S) - n(A)$

پیشامدهای ناسازگار و سازگار: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت به پیشامدهای A و B دو پیشامد ناسازگار می گوییم. در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچ‌گاه هم زمان رخ نمی دهند.

احتمال رخداد پیشامد A : اگر فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی هم شانس متناهی و $A \subseteq S$ یک پیشامد باشد، آنگاه برای محاسبه احتمال رخداد پیشامد A کافی است تعداد اعضای A یعنی $n(A)$ را بر تعداد اعضای فضای نمونه ای یعنی $n(S)$ تقسیم کنیم. عدد حاصل یعنی $P(A)$ عددی حقیقی است که شانس رخداد پیشامد A را اندازه گیری می کند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

نکته ۱: برای هر پیشامد مثل A که احتمال رخ دادن آن را با $P(A)$ نمایش می دهیم داریم:

$$0\leq P(A) \leq 1$$

نکته ۲: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار$(A\cap B=\emptyset)$ باشند،آن گاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

قضیه ۱: اگر A پیشامد دلخواهی از فضای نمونه ای S باشد آن گاه:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

کاربرد: در بعضی مسائل محاسبه‌ی مستقیم $P(A)$ دشوار است، پس در این مواقع $P(A)$ را غیرمستقیم محاسبه می کنیم.

قضیه ۲: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B از فضای نمونه ای S، داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

در یک جامعه ۳۰ درصد روزنامه‌ی(الف)، ۲۵ درصد روزنامه‌ی (ب) و ۴۰ درصد حداقل یکی از دو روزنامه را مطالعه می‌کنند، اگر یک نفر از این جامعه را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال آن که هر دو روزنامه را مطالعه کند، چقدر است؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۲

طبق قضیه ۲ داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0/4 = 0/3 + 0/25 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0/15$$

احتمال غیرهم‌شانس

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{s_1\ ,\ s_2, \ldots,\ s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می گوییم.

در فضای نمونه ای متناهی با احتمال غیرهم شانس، اگر $S = \{s_1\ ,\ s_2, \ldots,\ s_n\}$ فضای نمونه‌ای و

$A = \{a_1\ ,\ a_2, \ldots,\ a_k\}$ یک زیر مجموعه ی K عضوی S باشد همواره داریم:

1) $\cdot \leq P(A) \leq 1$

2) $P(S) = 1$

3) $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_k)$

با استفاده از خاصیت های (۲)و(۳) می‌توانیم نتیجه بگیریم:

$$P(S) = P(s_1) + P(s_2) + \cdots + P(s_n) = 1$$

سه شناگر a ، b و c مسابقه می‌دهند. a و b دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس بردن هر کدام از آنها دو برابر بردن c است. مطلوب است احتمال این که b یا c ببرد.

فضای نمونه ای عبارت است از $S=\{a,b,c\}$ ، اگر $P(A)=x$ باشد، چون شانس برنده شدن a و b با هم برابر است، پس $P(b)=x$ و چون شانس برد a و b، دو برابر شانس برد c است پس $P(a)=2P(c)$ و در نتیجه $P(c)=\frac{1}{2}x$. چون مجموع احتمال ها برابر یک است، پس:

$$P(a)+P(b)+P(c)=1 \Rightarrow x+x+\frac{1}{2}x=1 \Rightarrow \frac{5}{2}x=1 \Rightarrow x=\frac{2}{5}$$

احتمال اینکه b یا c برنده شوند، یعنی احتمال رخداد پیشامد $A=\{b,c\}$ ، که این عدد برابر است با:

$$P(A)=P(b)+P(c)=x+\frac{x}{2}=\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}$$

احتمال شرطی

در حالتی که فضای احتمال، هم شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه، یعنی S را کنار گذاشته و B را فضای نمونه در نظر بگیریم. احتمال روی این فضای نمونه نیز هم‌شانس است. به این رویکرد "کاهش فضای نمونه" گفته می شود.

- ✓ در محاسبه احتمال شرطی، همه‌ی حالت های ممکن برابر همه‌ی حالت هایی است که در آن ها B رخ داده است. در واقع B فضای نمونه‌ای جدید ما خواهد بود و تمام حالت‌های مطلوب، همه‌ی حالت هایی از B است که در A باشند.
- ✓ احتمال شرطی در فضای نمونه‌ای هم‌شانس و غیرهم‌شانس به صورت زیر است:

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

به رابطه‌ی به دست آمده از رابطه‌ی احتمال شرطی، قانون ضرب احتمالات می گویند.

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B)$$

قانون احتمال کل:

فرض کنید B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه A داریم:

$$\mathrm{P(A)} = P(B_1)P(A \mid B_1) + \cdots + P(B_n)P(A \mid B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$$

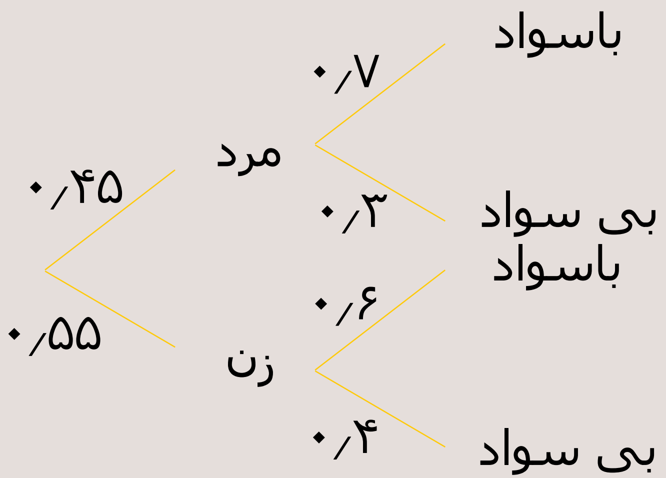
قانون بیز:

فرض کنید B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A و هر $1 \le i \le n$ داریم:

$$P(B_i \mid \mathrm{A}) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

۵۵ درصد جمعیت کشوری را زنان و ۴۵ درصد بقیه را مردان تشکیل می دهند،۶۰ درصد زنان و ۷۰ درصد مردادن با سواد می‌باشند. شخصی به تصادف از بین آنان انتخاب می کنیم. اگر شخص انتخاب شده باسواد باشد آن گاه احتمال آنکه مرد باشد چقدر است؟

۱) $\frac{27}{43}$ ۲) $\frac{21}{43}$ ۳) $\frac{41}{86}$ ۴) $\frac{47}{86}$



$$P(\text{باسواد بودن}) = 0.45\times0.7 + 0.55\times0.6 = 0/645$$

احتمال خواسته شده یک احتمال شرطی است. می دانیم که شخص انتخاب شده باسواد است (B)، می خواهیم احتمال مرد بودن وی (A)را به دست آوریم،داریم:

$$P(A \mid B) = 0.45\times0.7 = 0.315$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.315}{0.645} = \frac{21}{43}$$

پیشامدهای مستقل و وابسته

دو پیشامد مستقل: پیشامد A ازپیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع پیشامد B بر احتمال وقوع پیشامد A تاثیر نداشته باشد.
به عبارت دیگرپیشامد A از پیشامد مستقل است،هرگاه روابط زیر برقرار باشند:

$$P(A \mid B) = P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

اگر دو پیشامد B و A مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند.

تست

تست۱: اگر ۷۵٪ افراد جامعه ای، دارای چشم مشکی و ۴۰٪ گروه خونی آن‌ها از نوع A باشد و یک فرد به طور تصادفی از بین آن‌ها انتخاب شود، احتمال اینکه این فرد دارای چشم مشکی یا گروه خونی باشد، کدام است؟

۱) ۰/۷۸ ۲) ۰/۸۲ ۳) ۰/۸۵ ۴) ۰/۹۵

تست۲: از بین ۳ کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان، به تصادف یک کارت بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم، سپس کارت دوم را خارج می کنیم. با کدام احتمال، هر دو کارت هم رنگ هستند؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{5}{14}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

پاسخ تست ۱: A و B دو پیشامد مستقل هستند.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.4\times 0.75=0.3$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.75-0.3=0.85$$

پاسخ تست ۲: اگر A پیشامد هم رنگ بودن هر دو کارت باشد، آن‌گاه دو حالت زیر را خواهیم داشت:

حالت اول: کارت اول سبز و کارت دوم نیز سبز باشد.

حالت دوم: کارت اول سفید و کارت دوم نیز سفید باشد.

در حالت اول، احتمال مطلوب برابر است با:

$$P_1=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{12}{42}$$

در حالت دوم،احتمال مطلوب برابر است با :

$$P_2=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{6}{42}$$

احتمال مطلوب:

$$\frac{12}{42}+\frac{6}{42}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$$