۱- چند عدد ۴ رقمی با ارقام ۴، ۳، ۲ و ۱ وجود دارد که در آنها هر یک از رقمهای ۴ و ۲ حداقل یکبار ظاهر شوند؟

۱) ۱۱۰   ۲) ۱۰۴   ۳) ۱۱۶   ۴) ۱۲۰

۲- هشت گلدان با گلهای مختلف را به چند صورت می‌توان در دو کناره هر یک از ۴ پله قرار داد؟

۱) ۴۰۳۲۰   ۲) ۸۴۰۰   ۳) ۶۷۲۰   ۴) ۱۲۲۴

۳- با ارقام ۵ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد سه رقمی کوچکتر از ۴۰۰ می‌توان نوشت؟ (تکرار رقم‌ها مجاز نیست.)

۱) ۲۴   ۲) ۳۲   ۳) ۳۶   ۴) ۴۲

۴- برای مسافرت از شهری به شهر دیگر ۵ نوع وسیله نقلیه موجود است. تعداد صورت‌هایی که می‌توان از شهر A به شهر B با عبور از دو شهر متوالی D , C رفت به طوری که از هر نوع وسیله نقلیه حداکثر یک بار استفاده شده باشد، کدام است؟

۱) ۶۰   ۲) ۸۰   ۳) ۹۰   ۴) ۱۲۵

۵- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم تعداد صورتهایی که در آنها عدد زوج آمده است کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

۶- با حروف کلمه جمهوری به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت بطوریکه حرف اول آنها نقطه‌دار نباشد؟

۱) ۱۰۰   ۲) ۱۲۰   ۳) ۶۰   ۴) ۸۰

۷- یک قفل رمزی دارای یک رمز سه رقمی فرد با ارقام ۱ و ۲ و ... ۹ می‌باشد اگر رمز این قفل را ندانیم و امتحان کردن هر رمز ۲ دقیقه طول بکشد حداکثر چند ساعت طول می‌کشد تا قفل باز شود؟

۱) ۱۲   ۲) ۱۲/۵   ۳) ۱۳   ۴) ۱۳/۵

۸- شماره‌گذاری اتومبیل‌ها در یک شهر با حروف الفبای فارسی و اعداد دو رقمی بدون صفر می‌باشد. اگر شروع شماره‌گذاری از الف - ۱۱ و بطور صعودی باشد، شماره هزارمین اتومبیلی که شماره‌گذاری می‌شود، کدامست؟

۱) ر - ۴۱   ۲) ر - ۳۹   ۳) ز - ۴۱   ۴) ز - ۳۹

۹- با ارقام یک تا ۹ چند عدد سه رقمی زوج با تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۳۲۴   ۲) ۴۰۵   ۳) ۵۰۴   ۴) ۷۲۹

۱۰- شش سکهٔ یکسان را پرتاب می‌کنیم. تعداد حالات مختلفی که این سکه‌ها به زمین می‌افتد برابر است با:

۱) ۷   ۲) 2^6 ۳) ۶   ۴) ۱۲

۱۱- حروف کلمهٔ ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که S ها یک در میان باشند؟

۱) ۸   ۲) ۹   ۳) ۱۰   ۴) ۱۲

۱۲- در یک امتحان چهار گزینه‌ای با ده سوال متفاوت اگر همهٔ دانش‌آموزان به همهٔ سوال‌ها پاسخ دهند چند پاسخ‌نامهٔ متفاوت می‌توانیم داشته باشیم؟ (تعداد دانش‌آموزان از تعداد حالات بیشتر است)

۱) 10^4 ۲) 2^{10} ۳) 4^{10} ۴) 40^{40}

۱۳- با حروف a ، b و c و اعداد ۳ , ۲ , ۱ , ۰ چند کد هفت‌رقمی می‌توان نوشت به‌طوری اعداد کنار هم نباشند؟ (بدون تکرار حروف یا اعداد)

۱) ۳۶   ۲) ۷۲   ۳) ۱۴۴   ۴) ۲۸۸

۱۴- به چند طریق می‌توان با حروف a , b , b , b , c و a یک کد چهارحرفی ساخت؟

۱) ۳۸   ۲) ۴۸   ۳) ۵۴   ۴) ۶۰

۱۵- به چند طریق می‌توان یک رمز با ۷ نماد ساخت که اولاً دو بخشی باشد، ثانیاً یک بخش شامل هر چهار حرف A ، B ، C و D و بخش دیگر عددی سه رقمی با ارقام زوج (بدون تکرار ارقام) باشد؟

۱) $۲^۸ \times ۳$ ۲) $۲^۶ \times ۳$ ۳) $۲^۸ \times ۳^۲$ ۴) ۲×۳^۲

۱۶- در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۴ مهره از کیسه خارج کرد به‌طوری که حداقل دو مهره قرمز باشد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۱۵

۱۷- با ارقام ۹ ,... ,۲ ,۱ ,۰ ، چند شماره تلفن ۸ رقمی می‌توان نوشت به‌طوری که دو رقم اول مشابه باشند ولی صفر و یک نباشند؟

۱) $۲^۳ \times ۱۰^۶$ ۲) $۲^۳ \times ۸!$ ۳) $۱۰^۸$ ۴) $۸!$

۱۸- اگر $\frac{(n+۱)^۲!}{(n^۲+۲n)!} = ۶n+۶$ باشد، n کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۹- اگر $\frac{(n+۲)!}{(n+۱)!+n!} = ۷$، آن‌گاه حاصل $\frac{۲n!}{(n-۱)!}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۰

۲۰- ۴ سرباز و ۳ افسر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بنشینند به طوری که سربازها کنار هم باشند ولی هر ۳ افسر کنار هم نباشند؟

۱) $۱۲ \times ۴!$ ۲) $۲۴ \times ۴!$ ۳) $۱۶! \times ۴!$ ۴) $۴! \times ۴!$

۲۱- حروف کلمه‌ی LAGRANGE را با جایگشت‌های متمایز کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۹۶۰

۲۲- با جایگشت ارقام ۵ ,۲ ,۲ ,۱ ,۰ چند عدد پنج رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان ساخت؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۵

۲۳- ۱۲ دوست که چهار نفر آن‌ها پارسا، پویا، طاها و رامتین هستند، به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار گیرند به طوری که پویا و پارسا کنار هم باشند ولی طاها و رامتین کنار هم نباشند؟

۱) $۱۹۶ \times ۹!$ ۲) $۴ \times ۱۱!$ ۳) $۱۸ \times ۱۰!$ ۴) $۱۸ \times ۱۱!$

۲۴- با حروف کلمه، «بادبان» چند کلمه سه حرفی رمز عبور می‌توان نوشت؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۲۵- چهار سرباز و سه فرمانده به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری‌که حداقل دو سرباز کنار هم باشند؟

۱) ۳۶۰۰ ۲) ۴۸۹۶ ۳) ۵۰۴۰ ۴) ۱۷۲۸

۲۶- به چند طریق می‌توان از بین ۵ کاندیدا، سه نفر را برای سه نقش اصلی یک تئاتر انتخاب کرد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

۲۷- اعداد طبیعی یک رقمی را در چند حالت می‌توان کنار هم قرار دارد، به طوری‌که همواره ارقام فرد کنار هم و ارقام زوج کنار هم باشند؟

۱) $۴ \times ۶!$ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۴۴۰ ۴) $۸ \times ۶!$

۲۸- در هر یک از ۸ واحد یک آپارتمان، یک زوج زندگی می‌کنند. به چند طریق می‌توان از بین آن‌ها یک تیم متشکل از دو زن و دو مرد تشکیل داد به طوری که هیچ‌کدام از یک واحد نباشند؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۴۲۰ ۴) ۸۴۰

۲۹- از بین ۵ جفت کفش، ۴ لنگه کفش انتخاب می‌کنیم. تعداد حالاتی که حداقل یک جفت کفش در بین ۴ لنگه باشد، چند برابر تعداد حالاتی است که دقیقاً یک جفت کفش در بین ۴ لنگه می‌باشد؟

۱) $\frac{۱۳}{۵}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱۳}{۱۲}$

۳۰- پنج نقطه بر روی محیط و ۴ نقطه بر روی قطر یک نیم‌دایره وجود دارند. چند مثلث می‌توان رسم کرد که رئوس آن، این نقاط باشند؟

۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۸۰ ۴) ۸۴

۳۱- به چند طریق می‌توان از میان ۲۰ سؤال اختصاصی و ۱۵ سؤال عمومی به ۱۷ سؤال اختصاصی و ۱۳ سؤال عمومی پاسخ داد؟

۱) $۱۰^۲ \times ۵۳۲$ ۲) $۱۵^۲ \times ۳۹۹$ ۳) $۲۰^۲ \times ۲۶۶$ ۴) $۳۰^۲ \times ۱۳۳$

۳۲- از بین ۶ بزرگسال و ۴ کودک، به چند طریق می‌توان چهار نفر را انتخاب کرد به‌طوری که حداکثر ۱ نفر کودک باشد؟

۱) ۹۵ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۵

۳۳- سه کودک و سه زن را به چند طریق می‌توان در یک ردیف نشاند به طوری‌که هیچ دو کودکی کنار هم قرار نگیرند؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۷۲ ۳) ۳۶ ۴) ۲۸۸

۳۴- اگر مجموعه‌ی A دارای $n-1$ عضو باشد و تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی این مجموعه برابر ۲۰ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی این مجموعه کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۷

۳۵- تیم ملی والیبال ۱۴ بازیکن دارد، که قد هیچ دو نفرشان با هم یکسان نیست. به چند طریق می‌توان ۳ نفر از آن‌ها انتخاب کرد به‌طوری که از بین بلندترین فرد و کوتاه‌ترین فرد تیم، فقط یک نفر انتخاب شده باشد؟

۱) ۱۵۶ ۲) ۱۳۲ ۳) ۲۶۴ ۴) ۶۶

۳۶- از بین ۳ دبیر رشتهٔ ریاضی، ۳ دبیر رشتهٔ تجربی، ۳ دبیر رشتهٔ انسانی و ۳ دبیر رشتهٔ هنر، به چند طریق می‌توان یک کمیتهٔ ۳ نفره انتخاب کرد به‌طوری که هیچ دو نفری از اعضای کمیته هم‌رشته نباشند؟

۱) ۲۲۰ ۲) ۱۰۸ ۳) ۶۴۸ ۴) ۲۷

۳۷- گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل، از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته‌گل متفاوت می‌تواند درست کند؟

۱) ۵۸۲ ۲) ۷۳۰ ۳) ۴۸۲ ۴) ۳۷۸

۳۸- از میان ۴ دارو ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی، به چند طریق می‌توان یک کمیتهٔ داوران ۵ نفره تشکیل داد به‌طوری که در این کمیته حداقل ۲ داور ایرانی حضور داشته باشد؟

۱) ۶۵ ۲) ۱۰۵ ۳) ۲۱۰ ۴) ۶۰

۳۹- درون ظرفی ۳ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی مشکی و ۵ مهره‌ی قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد به طوری‌که هیچ دوتایی هم‌رنگ نباشند؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۴۰- گل فروشی در مغازه‌اش ۱۰ مدل گل مختلف دارد. او با توجه به تقاضای مشتریان دسته گل‌هایی درست می‌کند که در آن‌ها حداقل ۸ شاخه گل متمایز به‌کار رفته است. وی چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۵ ۳) ۵۴ ۴) ۶۰

۱-

$\boxed{۴}\boxed{۴}\boxed{۴}\boxed{۴} = ۴^۴ = ۲۵۶$ کل اعداد چهار رقمی

$\boxed{۳}\boxed{۳}\boxed{۳}\boxed{۳} = ۳^۴ = ۸۱$ اعداد چهار رقمی که ۲ ندارند

$\boxed{۳}\boxed{۳}\boxed{۳}\boxed{۳} = ۳^۴ = ۸۱$ اعداد چهار رقمی که ۴ ندارند

$\boxed{۲}\boxed{۲}\boxed{۲}\boxed{۲} = ۲^۴ = ۱۶$ اعداد چهار رقمی که ۲ و ۴ ندارند

$\Rightarrow ۲۵۶ - (۸۱ + ۸۱) + ۱۶ = ۱۱۰$

کل اعداد چهار رقمی را منهای اعداد چهار رقمی می‌کنیم که ۲ یا چهار ندارند اما در این دو دسته چون دو بار اعدادی را که شامل ۲ و ۴ نیستند کم می‌کنیم، پس یکبار نیز عدد (تعداد اعدادی که ۲ و ۴ ندارند) را اضافه می‌کنیم تا آن کار را یکبار انجام داده باشیم. با این عمل تعداد اعدادی را که شامل حداقل یکبار ۲ و ۴ هستند می‌یابیم. بنابراین گزینه ۱، پاسخ صحیح است.

۲- چون ۸ گلدان داریم پس !۸ حالت گلدان داریم. پس جواب بصورت $۸! = ۸ \times ۷ \times ۶ \times \dots \times ۱ = ۴۰۳۲۰$ می‌باشد و گزینه ۱ صحیح است.

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در رقم صدگان یکی از ارقام ۳ و ۲ و ۱ می‌باشد پس ۳ حالت دارد. و در رقم دهگان ۴ حالت و در رقم یکان نیز ۳ حالت دارد پس جوابها بصورت $\underset{\text{یکان}}{\boxed{۳}} \times \underset{\text{دهگان}}{\boxed{۴}} \times \underset{\text{صدگان}}{\boxed{۳}} = ۳۶$ می‌باشد.

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون از هر وسیله فقط یکبار می‌توان استفاده کرد پس از شهر A به شهر C ، ۵ وسیله وجود دارد و برای مسافرت از شهر C به شهر D ، ۴ وسیله وجود دارد و از شهر D به شهر B ، ۳ وسیله وجود دارد. چون مسیرها متفاوت و متوالی هستند پس تعداد طریقی که می‌توان از شهر A به شهر D رفت برابر ۴×۵ می‌باشد و همینطور از A به B $۶۰ = ۳ \times ۴ \times ۵$ حالت است.(که از اصل ضرب استفاده شده است)

۵- تاس در ۳ حالت عدد زوج می‌دهد (اعداد ۲ و ۴ و ۶) و به ازای هر حالت، سکه هم دو حالت دارد پس کل حالاتی که تاس عدد زوج می‌دهد برابر با $۶ = ۲ \times ۳$ می‌باشد. لذا گزینه ۱ صحیح است.

۶- باید توجه داشت که اگر حرف «ی» در اول کلمه قرار گیرد، حرف نقطه‌دار خواهد بود. سه خانه خالی $\square \quad \square \quad \square$ را درنظر بگیرید. در خانه اول یکی از حروف «م ، ه ، و ، ر » می‌تواند قرار گیرد یعنی ۴ امکان. خانه دوم با یکی از ۵ حرف باقی مانده یعنی به ۵ طریق پر می‌شود و خانه سوم با یکی از ۴ حرف باقی‌مانده می‌تواند پر شود. بنابر قانون ضرب $۸۰ = ۴ \times ۵ \times ۴$حالت جمعاً وجود دارد. بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۷- تعداد رمزها برابر است با تعداد اعداد سه رقمی فرد با تکرار ارقام: $\boxed{۵} \quad \boxed{۹} \quad \boxed{۹} \longrightarrow ۹ \times ۹ \times ۵$ زمان لازم برحسب دقیقه: $۲ \times ۵ \times ۹ \times ۹$ و همین مدت برحسب ساعت $۱۳/۵ = \frac{۹ \times ۹ \times ۵ \times ۲}{۶۰}$ و گزینه ۴ جواب صحیح است.

۸- در هر سری الفبایی شماره‌گذاری $۸۱ = ۹ \times ۹$ اتومبیل (بدون رقم صفر) شماره‌گذاری می‌شوند. از طرفی $۲۸ + ۸۱ \times ۱۲ = ۱۰۰۰$ بنابراین اتومبیل هزارم در رده سیزدهم حروف یعنی حرف «ز» می‌باشد. چون به ازاء هر دهه ۹ اتومبیل شماره‌گذاری می‌شود پس با تقسیم ۲۸ بر ۹ داریم $۱ + ۹ \times ۳ = ۲۸$. پس اتومبیل مذکور، اولین اتومبیل دهه چهارم است یعنی عدد ۴۱ . بنابراین شماره اتومبیل ۴۱ - ز می‌باشد و گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۹- اعداد مطلوب زوج است، پس یکان آن باید زوج باشد و بین ۱ تا ۹، ۴ عدد زوج وجود دارد. بنابراین رقم یکان آن ۴ حالت می‌تواند داشته باشد. چون تکرار ارقام مجاز است، پس هریک از رقمهای دهگان و صدگان می‌تواند ۹ حالت داشته باشد، پس: $۹ \times ۹ \times ۴ = ۳۲۴ =$ تعداد اعداد زوج

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

۱۰- هر سکه دو حالت می‌تواند داشته باشد. وقتی n سکه را به هوا پرتاب می‌کنیم، طبق اصل شمارش، تعداد حالات برابر با $۲^n = ۲ \times \dots \times ۲ \times ۲ \times ۲$ حالت می‌شود. پس برای شش سکه تعداد حالات برابر $۲^۶$ می‌باشد. لذا گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح است.

۱۱- دو حالت مختلف می‌توان در نظر گرفت. حالت اول، اولین حرف از سمت چپ با S شروع شود که در این صورت، تعداد انتخاب‌های ممکن بصورت زیر می‌باشد:

S	۳	S	۲	S	۱

$\Rightarrow$ تعداد انتخاب ها : $n_۱ = ۳\times ۲\times ۱ = ۶$

حالت دوم، مکان اول از سمت چپ دارای یک حرف غیر S باشد، که در این صورت:

۳	S	۲	S	۱	S

$\Rightarrow$ تعداد انتخاب ها : $n_۲ = ۳\times ۲\times ۱ = ۶$

پس در مجموع، تعداد کلمات ممکن برابر است با: $n = n_۱ + n_۲ = ۶ + ۶ = ۱۲$

بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ درست است.

۱۲- هر دانش‌آموز برای پاسخ‌دهی به هر سوال، ۴ انتخاب ممکن دارد. بنابراین مجموع تمام حالتهایی که دانش‌آموز می‌تواند به هر ۱۰ سوال پاسخ دهد به صورت زیر می‌باشد:

۴	۴	.....	۴

ده تا

$\Rightarrow$ تعداد حالتها $= ۴\times ۴\times \ldots \times ۴ = ۴^{۱۰}$

که این تعداد برابر با کل حالتهایی است که یک پاسخ‌نامه می‌تواند داشته باشد. پس گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

□	○	□	○	□	○	□
۴	۳	۳	۲	۲	۱	۱

$۶ \times ۳\times ۲\times ۱\times ۳\times ۲\times ۱ = ۲۴\times ۶ = ۱۴۴$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حالت‌های ممکن:

b , b , b , a ۴ حالت
b , b , b , c ۴ حالت
a , a , b , c ۱۲ حالت
a , a , b , b ۶ حالت
b , b , a , c ۱۲ حالت

۳۸ حالت

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

بخش عددی				بخش حرفی			
□	□	□		□	□	□	□
۴	۴	۳		۴	۳	۲	۱

ارقام زوج: ۸ , ۶ , ۴ , ۲ , ۰

$۴\times ۴\times ۳ \times ۴\times ۳\times ۲\times ۱ \times ۲! = ۴۸\times ۲۴\times ۲ = ۲^{۸}\times ۳^{۲}$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$c(۵,۲)\times c(۴,۲) = \frac{۵!}{۳!۲!}\times \frac{۴!}{۲!۲!} = ۱۰\times ۶ = ۶۰$$

$$c(۵,۳)\times c(۴,۱) = \frac{۵!}{۲!۳!}\times \frac{۴!}{۳!۱!} = ۱۰\times ۴ = ۴۰$$

$$c(۵,۴)\times c(۴,۰) = \frac{۵!}{۱!۴!}\times ۱ = ۵\times ۱ = ۵$$

$$۶۰ + ۴۰ + ۵ = ۱۰۵$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

به غیر از صفر و یک

$$\underbrace{\square\square}_{8}\quad \underset{10}{\square}\underset{10}{\square}\underset{10}{\square}\underset{10}{\square}\underset{10}{\square}\underset{10}{\square} = 8\times 10^6 = 2^3\times 10^6$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\left((n+1)^2\right)!}{\left(n^2+2n\right)!} = \frac{\left(n^2+2n+1\right)!}{\left(n^2+2n\right)!} = n^2+2n+1 \Rightarrow (n+1)^2 = 6(n+1)$$

$$\xrightarrow{n\neq -1} n+1 = 6 \Rightarrow n = 5$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{(n+2)!}{(n+1)!+n!} = 7 \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)n!}{(n+1)n!+n!} = 7 \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)n!}{(n+1+1)n!} = 7$$

$$\Rightarrow n+1 = 7 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow \frac{2n!}{(n-1)!} = \frac{2\times n\times (n-1)!}{(n-1)!} = 2n = 2\times 6 = 12$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{سربازها کنار هم باشند} \Rightarrow \underbrace{\boxed{1111}}_{\text{سربازها}}\ 111 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow \text{تعداد حالات} = 4!\times 4!$$

$$\text{سربازها کنار هم و افسرها کنار هم} \Rightarrow \underbrace{\boxed{1111}}_{\text{سربازها}}\ \underbrace{\boxed{111}}_{\text{افسرها}} \Rightarrow n = 2$$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالات} = 2!\times 4!\times 3!$$

$$\text{سربازها کنار هم باشند ولی افسرها کنار هم نباشند} = 4!\times 4! - 2\times 4!\times 3!$$

$$= 4!(4! - 2\times 3!) = 4!(24-12) = 4!\times 12$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حروف یکسان را کنار هم قرار می‌دهیم و آن‌ها را با بقیه جایگشت می‌دهیم.

$$L, \underline{AA}, \underline{GG}, R, N, E \Rightarrow 6! = 720$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد ۵ رقمی‌ها مختوم به صفر برابر تعداد جایگشت ۵، ۲، ۲، ۱ که برابر $\frac{4!}{2!} = 12$ می‌باشد. تعداد ۵ رقمی‌ها مختوم به ۵ برابر تعداد جایگشت‌های ۲ و ۲ و ۱ و ۰ که برابر $\frac{3}{4}\times 12 = 9$ پس جمعاً $12 = 9 = 21$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا تعداد حالاتی که پویا و پارسا کنار هم هستند را می‌یابیم.

$$\text{۱۰ نفر دیگر + پارسا، پویا} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = 11!\times 2! = 2\times 11!$$

حالا تعداد حالاتی که پویا و پارسا کنار هم و طاها و رامتین کنار هم هستند را یافته و از $11!\times 2$ کم می‌کنیم.

$$\text{۸ نفر دیگر + طاها و رامتین + پارسا و پویا} \Rightarrow \text{تعداد حالات} = 10!\times 2!\times 2! = 4\times 10!$$

$$\text{جواب نهایی} = 2\times 11! - 4\times 10! = 2\times 11\times 10! - 4\times 10! = (22-4)\times 10! = 18\times 10!$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

الف: هر سه حرف متمایز باشد یعنی: ب، ا، د، ن

$$P(۴ , ۳) = \frac{۴!}{(۴ - ۳)!} = ۲۴$$

ب: دو حرف یکسان باشد.

مثلاً «آ» و «آ»، به همراه یکی از دو حرف متمایز از ۳ حرف

$$\boxed{۱}\ \boxed{۱}\ \boxed{\ }\quad ۱ \times ۱ \times ۳ = ۳$$
۱ ۱ ۳

$$\boxed{۱}\ \boxed{\ }\ \boxed{۱}\quad ۱ \times ۳ \times ۱ = ۳$$
۱ ۳ ۱

$$\boxed{\ }\ \boxed{۱}\ \boxed{۱}\quad ۳ \times ۱ \times ۱ = ۳$$
۳ ۱ ۱

در نتیجه: $۳ \times ۳ = ۹$

و به طریق مشابه برای دو حرف «ب»: $۳ \times ۳ = ۹$

در نتیجه: $۲۴ + ۹ + ۹ = ۴۲$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای حل مسأله می‌توانیم ابتدا حالاتی که هیچ دو سربازی کنار هم نیستند را محاسبه و جواب را از تعداد کل حالات ممکن برای قرار گرفتن ۷ نفر کنار هم (۴ سرباز و ۳ فرمانده که مجموعاً ۷ نفر می‌شوند) کم کنیم.

وقتی هیچ دو سربازی کنار هم نیستند که فرمانده‌ها بین سربازها قرار گرفته باشند. یعنی اگر فرمانده‌ها را با «ف» و سربازان را با «س» نشان دهیم، ترتیب قرار گرفتن یک در میان آن‌ها به صورت (س، ف، س، ف، س، ف، س) می‌باشد. حال چون سربازها و فرمانده‌ها با هم متفاوت‌اند، پس بین خود نیز جابه‌جایی دارند. تعداد جایگشت‌های فرمانده‌ها، !۳ و تعداد جایگشت‌های سربازان نیز !۴ می‌باشد. پس تعداد کل جایگشت‌های آن‌ها به صورت یک در میان $۱۴۴ = !۴ \times !۳$ است. تعداد کل جایگشت‌های ۷ نفر نیز $۵۰۴۰ = !۷$ می‌باشد. جواب نهایی از کم کردن حالت قبلی از کل جایگشت‌ها حاصل می‌شود:

$$جواب : ۷! - (۳! - ۴!) = ۵۰۴۰ - ۱۴۴ = ۴۸۹۶$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید سه نفر را از ۵ نفر انتخاب کنیم، توجه کنید که ترتیب انتخاب مهم است:

$$P(۵ , ۳) = \frac{۵!}{(۵ - ۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = ۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹ \qquad ۲ , ۴ , ۶ , ۸$$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالات} = ۵! \times ۴! \times ۲! = ۵! \times ۴ \times ۶ \times ۲ = ۸ \times ۶!$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{\binom{۸}{۲}}_{\text{انتخاب دو زن}} \times \underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{انتخاب دو مرد}} = \frac{۸!}{۲! \times ۶!} \times \frac{۶!}{۲! \times ۴!} = ۴۲۰$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دقیقاً یک جفت کفش باشد: ابتدا از بین ۵ جفت، یک جفت انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{۵}{۱}$ حالت قابل انجام است. سپس از بین ۴ جفت باقی‌مانده، ۲ جفت انتخاب کرده و از هر جفت آن یک لنگه را انتخاب می‌کنیم، پس داریم:

$$\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱} = ۵ \times \frac{۴ \times ۳}{۲} \times ۲ \times ۲ = ۱۲۰$$

حداقل یک جفت کفش باشد: برای محاسبهٔ تعداد حالات این مورد، ابتدا کل حالات را یافته و تعداد حالاتی را که هر ۴ لنگه متفاوت باشند را از آن کم می‌کنیم.

$$\text{کل حالات} = \binom{۱۰}{۴} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۱۰$$

$$\text{هر ۴ لنگه متفاوت} = \binom{۵}{۴}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱} = ۵ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۸۰$$

$$\text{حداقل یک لنگه باشد} = ۲۱۰ - ۸۰ = ۱۳۰ \Rightarrow \frac{۱۳۰}{۱۲۰} = \frac{۱۳}{۱۲}$$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

- تعداد کل حالت‌های انتخاب ۳ نقطه از ۹ نقطه

تعداد حالاتی که سه نقطه روی یک خط قرار دارند و تشکیل مثلث نمی‌دهند $= c(۹ , ۳) - c(۴ , ۳)$

$$= \frac{۹!}{۶!۳!} - \frac{۴!}{۱!۳!} = \frac{۷ \times ۸ \times ۹}{۶} - ۴ = ۸۴ - ۴ = ۸۰$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} c(۱۲۰ , ۱۷) \times c(۱۵ , ۱۳) &= \frac{۲۰!}{۳!۱۷!} \times \frac{۱۵!}{۲!۱۳!} \\ &= \frac{۱۸ \times ۱۹ \times ۲۰}{۶} \times \frac{۱۴ \times ۱۵}{۲} \\ &= ۳ \times ۱۹ \times ۲۰ \times ۷ \times ۱۵ = ۳ \times ۱۹ \times ۲^{۲} \times ۵ \times ۷ \times ۳ \times ۵ \\ &= ۲^{۲} \times ۳^{۲} \times ۵^{۲} \times ۷ \times ۱۹ \\ &= ۳۰^{۲} \times ۱۳۳ \end{aligned}$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\binom{۴}{۰}\binom{۶}{۴} + \binom{۴}{۱}\binom{۶}{۳} = ۱ \times \frac{۶ \times ۵}{۲} + ۴ \times \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۵ + ۸۰ = ۹۵$$

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا سه زن را می‌نشانیم، سپس سه کودک را در ۴ جای ایجاد شده بین آن‌ها (مطابق شکل) می‌نشانیم:

- زن - زن - زن -

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{۴}{۳} \times ۳! \times ۳! = ۴ \times ۶ \times ۶ = ۱۴۴$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\binom{n-۱}{۳} = ۲۰ \Rightarrow \frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)!}{۳!((n-۱)-۳)!} = ۲۰ \Rightarrow \frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)\cancel{(n-۴)!}}{۳!\cancel{(n-۴)!}} = ۲۰$$

$$\Rightarrow (n-۱)(n-۲)(n-۳) = ۲۰ \times ۳! = ۲۰ \times ۶ = ۶ \times ۵ \times ۴ \Rightarrow n-۱ = ۶$$

پس مجموعه‌ی A ، $n-۱ = ۶$ عضو دارد و تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی آن برابر $۶ = \binom{۶}{۱}$ می‌باشد.

توجه: دانش‌آموز مجموعه‌ی A را به جای $n-۱$ عضوی، n عضوی درنظر گرفته است.

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو حالت وجود دارد. در حالت اول بلندترین فرد انتخاب شود، کوتاه‌ترین فرد کنار گذاشته شود و ۲ نفر از ۱۲ نفر باقیمانده انتخاب شوند و در حالت دوم کوتاه‌تری فرد انتخاب شود، بلندترین فرد کنار گذاشته شود و ۲ نفر از ۱۲ نفر باقی مانده انتخاب شود.

$$\binom{۱}{۱}\times\binom{۱۲}{۲}+\binom{۱}{۱}\times\binom{۱۲}{۲}=۲\times\binom{۱۲}{۲}=۲\times\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰!}{۲!\times ۱۰!}=۱۳۲$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه‌حل اول:

نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n\,,\,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\quad (۰\le r\le n)$$

ابتدا ۳ رشته از ۴ رشته را انتخاب می‌کنیم و سپس از هر رشته یک دبیر انتخاب می‌کنیم. پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{۴}{۳}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}=۴\times ۳^{۳}=۴\times ۲۷=۱۰۸$$

راه‌حل دوم: ابتدا یک نفر از ۱۲ نفر را انتخاب می‌کنیم و ۲ نفر هم‌رشته‌ای او را کنار می‌گذاریم. سپس از ۹ نفر باقی‌مانده ۱ نفر انتخاب و ۲ نفر هم‌رشته‌ای او را کنار می‌گذاریم. سپس از ۶ نفر باقی‌مانده یک نفر انتخاب می‌کنیم. بنابراین تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\frac{\binom{۱۲}{۱}\binom{۹}{۱}\binom{۶}{۱}}{۳!}=\frac{۱۲\times ۹\times ۶}{۳\times ۲\times ۱}=۱۰۸$$

دقت کنید با توجه به اینکه ترتیب انتخاب این ۳ نفر اهمیتی ندارد، عبارت را بر $۳!$ تقسیم کرده‌ایم.

۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n\,,\,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\ (۰\le r\le n)$$

با توجه به اینکه در انتخاب گل ترتیب مهم نیست، تعداد دسته‌گل‌های متفاوت برابر است با:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{دسته گل ۳ تایی}}}{\binom{۱۰}{۳}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{دسته گل ۴ تایی}}}{\binom{۱۰}{۴}}+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{دسته گل ۵ تایی}}}{\binom{۱۰}{۵}}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸}{۳!}+\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷}{۴!}+\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷\times ۶}{۵!}$$

$$=۱۲۰+۲۱۰+۲۵۲=۵۸۲$$

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته (ترکیب): به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم.

تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز برابر است با:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

راه‌حل اول: برای اینکه حداقل ۲ داور ایرانی داشته باشیم، باید تعداد حالاتی که ۲ داور ایرانی، ۳ داور ایرانی و ۴ داور ایرانی داریم را با هم جمع کنیم:

$$\underset{\downarrow \atop \text{۲ ایرانی}}{\binom{۴}{۲}} \times \overset{\text{۳ غیرایرانی} \atop \uparrow}{\binom{۵}{۳}} + \underset{\downarrow \atop \text{۳ ایرانی}}{\binom{۴}{۳}} \overset{\text{۲ غیرایرانی} \atop \uparrow}{\binom{۵}{۲}} + \underset{\downarrow \atop \text{۴ ایرانی}}{\binom{۴}{۴}} \overset{\text{۱ غیرایرانی} \atop \uparrow}{\binom{۵}{۱}} = ۶۰ + ۴۰ + ۵ = ۱۰۵$$

راه‌حل دوم: تعدادکل حالت‌های تشکیل کمیتهٔ ۵ نفره برابر است با:

$$\binom{۹}{۵} = \frac{۹!}{۴!\,۵!} = ۱۲۶$$

تعداد حالت‌هایی که کمتر از ۲ داور ایرانی در کمیته حضور دارند برابر است با:

$$\binom{۴}{۰}\binom{۵}{۵} + \binom{۴}{۱}\binom{۵}{۴} = ۱ + ۲۰ = ۲۱$$

بنابراین تعداد حالت‌هایی که حداقل ۲ داور ایرانی در کمیته حضور دارند برابر است با: $۱۲۶ - ۲۱ = ۱۰۵$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید از هر رنگ، یک مهره انتخاب کنیم:

$$\binom{۳}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۱} = ۳ \times ۴ \times ۵ = ۶۰$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تعداد دسته گل‌های دارای ۸ یا ۹ یا ۱۰ شاخه = $\binom{۱۰}{۸} + \binom{۱۰}{۹} + \binom{۱۰}{۱۰} = ۴۵ + ۱۰ + ۱$

تعداد کل دسته گل‌ها: $۴۵ + ۱۰ + ۱ = ۵۶$