نماد سیگما: هرگاه m و n دو عدد صحیح و همچنین f تابعی باشد که بر اعداد صحیح $\sum_{i=m}^{n} f(i)$، تعریف شده باشد ، آنگاه نماد $\sum$ نشانگر حاصل جمع مقادیر تابع f به ازای اعداد $m, m+۱, \dots, n$ می باشد و داریم :

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f\left(m+۱\right) + f\left(m+۲\right) + \cdots + f(n)$$

تذکر: به حرف i در سیگما ، اندیس جمع بندی گویند و در تعیین جواب آخر تأثیری ندارد (در جواب آخر فقط m وn مهم اند) و می توان به جای اندیس جمع بندی حروف دیگری مانند j وk و ... نیز قرار داد.

تذکر: در اکثر مواقع عبارتی که زیر سیگما قرار می گیرد (عبارتی که حاصل جمع عمومی آن در نظر است)را مانند دنباله به صورت اندیس دار نمایش می دهند . $\sum_{i=۱}^{n} a_i = a_۱ + a_۲ + a_۳ + \cdots + a_{n-۱} + a_n$

تذکر:اگر تعداد جملات در یک حاصل جمع عمومی نامتناهی باشد به آن سری نامتناهی گویند .

خواص سیگما:

$$۱)\ \sum_{i=۱}^{n} ۱ = n \qquad ۲)\ \sum_{i=۱}^{n} c = cn \longrightarrow \sum_{i=m}^{n} c = c(n-m+۱)$$

$$۳)\ \sum_{i=m}^{n} (Aa_i + Bb_i) = A\sum_{i=m}^{n} a_i + B\sum_{i=m}^{n} b_i$$

$$۴)\ \sum_{i=m+۱}^{n} a_i = \sum_{i=۱}^{n} a_i - \sum_{i=۱}^{m} a_i \longrightarrow \sum_{i=m}^{n} a_i = a_n + \sum_{i=m}^{n-۱} a_i$$

$$۵)\ \sum_{i=m}^{m+n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_{(i+m)} \quad \text{یا} \quad \sum_{i=m}^{m+n} a_{(i-m)} = \sum_{i=0}^{n} a_i$$ (قانون لغزاندن اندیسها)

$$۶)\ \sum_{i=۱}^{n} a_i - a_{i+۱} = a_۱ - a_{n+۱}$$ (قاعده ادغام یا تلسکوپی)

نکته: یادگیری فرمولهای زیر در حل مسائل مربوط به سیگما به ما کمک می کند.

$$۱)\ \sum_{i=۱}^{n} i = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n\left(n+۱\right)}{۲}$$

$$۲)\ \sum_{i=۱}^{n} i^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n\left(n+۱\right)\left(۲n+۱\right)}{۶}$$

$$۳)\ \sum_{i=۱}^{n} i^۳ = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \cdots + n^۳ = \left(\frac{n\left(n+۱\right)}{۲}\right)^۲$$

$$۴)\sum_{i=۱}^{n} r^{i-۱} = ۱ + r + r^{۲} + \cdots + r^{n-۱} = \frac{r^{n} - ۱}{r - ۱}$$ (دنباله هندسی)

تست) اگر $\sum_{k=۲}^{۱۰۰} \log\left(۱ - \frac{۱}{k^{۲}}\right) = \log A$ ، عدد A کدام است؟(سراسری ریاضی – خارج – ۸۵)

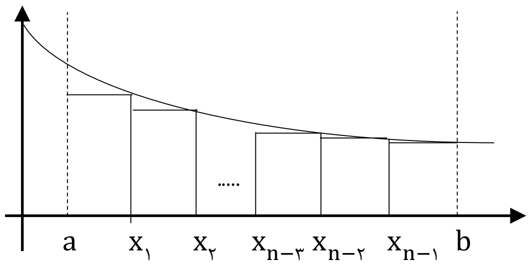
۱)۰/۵۰۲۵　　۲)۰/۵۰۵　　۳)۰/۵۱۲۵　　۴)۰/۵۲۵

حل) گزینه ۲

$$\sum_{k=۲}^{۱۰۰} \log\left(۱ - \frac{۱}{k^{۲}}\right) = \sum_{k=۲}^{۱۰۰} \log\left(\frac{k^{۲} - ۱}{k^{۲}}\right) = \sum_{k=۲}^{۱۰۰} \log\left(\frac{(k-۱)(k+۱)}{k \times k}\right) = \sum_{k=۲}^{۱۰۰} \log\left(\frac{k-۱}{k}\right)\left(\frac{k+۱}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=۲}^{۱۰۰} \log\frac{\left(\frac{k-۱}{k}\right)}{\left(\frac{k}{k+۱}\right)} = \sum_{k=۲}^{۱۰۰}\left(\log\left(\frac{k-۱}{k}\right) - \log\left(\frac{k}{k+۱}\right)\right) \xrightarrow{\text{قاعده تلسکوپی}} \log\frac{۱}{۲} - \log\frac{۱۰۰}{۱۰۱} = \log\left(\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱۰۰}{۱۰۱}}\right)$$

$$= \log\frac{۱۰۱}{۲۰۰} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{۱۰۱}{۲۰۰} = ۰/۵۰۵$$



$$a = x_۰ < x_۱ < x_۲ < \cdots < x_{n-۱} < x_n = b$$

مساحت به عنوان حد مجموع: اگر فرض کنیم که نمودار تابع f به صورت شکل روبه رو باشد و بخواهیم مساحت محدود به تابع f را در بازه $[a,b]$ بیابیم ؛ بایداین ناحیه را به تعدادی مستطیل با عرضهای برابر (افراز منظم) مطابق شکل تقسیم کنیم . اگر از n مستطیل برای پوشش این ناحیه استفاده کنیم ، خواهیم داشت:

چون عرض مستطیلها برابر است $\rightarrow$ طول هر بازه $= \Delta x = \frac{b-a}{n}$

با توجه به شکل مساحت مستطیل i اُم برابر $f(x_i).\Delta x$ ($f(x_i)$ ارتفاع مستطیل و Δx عرض آن)می باشد پس اگر مساحت تقریبی ناحیه مذکور را S_n در نظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت:

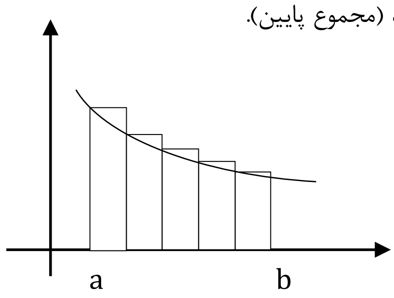
$$S_n = f\left(x_۱\right).\Delta x + f\left(x_۲\right).\Delta x + \cdots + f(x_n).\Delta x = \sum_{i=۱}^{n} f(x_i).\Delta x \qquad , \qquad x_i = a + i(\Delta x)$$

$$\longrightarrow S_n = \sum_{i=۱}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right).\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

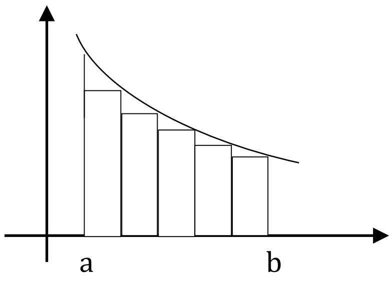
تذکر: S_n تقریبی از مساحت ناحیه a تاb است و با افزایش n (یعنی $n \to \infty$) مساحت تقریبی به مساحت واقعی نزدیک می شود .

$S_{\text{واقعی}} = \lim_{n\to\infty} S_n$

مجموع بالا و پایین(ریمان): برای تقریب مساحت محدود به تابع f و محور x ها در ناحیه a تا b با استفاده از مستطیل های با عرض برابر می توان مستطیل ها را به گونه ای انتخاب کرد که مساحت تقریبی بیشتر از مساحت تقریبی شود(مجموع بالا) و یا کمتر از مساحت واقعی شود (مجموع پایین).



مجموع بالا



مجموع پایین

محاسبه مجموع بالا و پایین: اگر مجموع بالای تابع f با $U_n(f)$ و مجموع پایین آن را با $L_n(f)$ نمایش دهیم با توجه به اینکه این مجموع ها وابسته به صعودی و نزولی بودن تابع می باشند خواهیم داشت :

در بازه ای که تابع صعودی است

$$\Rightarrow \begin{cases} U_n(f) = \sum_{i=۱}^{n} f(a + i\Delta x).\Delta x \\ L_n(f) = \sum_{i=۱}^{n} f\Big(a + (i - ۱)\Delta x\Big).\Delta x \end{cases}$$

در بازه ای که تابع نزولی است

$$\Rightarrow \begin{cases} U_n(f) = \sum_{i=۱}^{n} f\Big(a + (i - ۱)\Delta x\Big).\Delta x \\ L_n(f) = \sum_{i=۱}^{n} f(a + i\Delta x).\Delta x \end{cases}$$

تذکر: در توابع صعودی برای تعیین مجموع بالا باید ارتفاع بزرگتر مستطیل ها را در نظر بگیریم و ارتفاع بزرگتر در سمت راست هر بازه اتفاق می افتد و در توابع نزولی برعکس .

نکته: اگر f روی بازه $[a, b]$ پیوسته و یکنوا باشد آنگاه :

اختلاف مجموع بالا و پایین

$$\Rightarrow U_n(f) - L_n(f) = |f(b) - f(a)|\Delta x = |f(b) - f(a)|\frac{b - a}{n}$$

تست) برای تابع $f(x) = \frac{x}{x+۱}$ ، روی بازه $\left[۰,۲\right]$ با انتخاب $n = ۴$ ، در بررسی انتگرال معین ، مجموع بالا یعنی $U_۴$ کدام است؟
(سراسری ریاضی - خارج - ۹۲)

۱) ۰/۹۵   ۲) ۱/۰۲   ۳) ۱/۰۵   ۴) ۱/۰۸

حل) گزینه ۳

تابع f در بازه $\left[۰,۲\right]$ صعودی است پس :

$$U_۴(f) = \sum_{i=۱}^{۴} f(a + i\Delta x).\Delta x$$

$$a=\cdot\,,b=۲\Rightarrow \Delta x=\frac{۲-\cdot}{۴}=\frac{۱}{۲}\qquad \Rightarrow U_{۴}(f)=\sum_{i=۱}^{۴}f\left(\frac{i}{۲}\right).\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow U_{۴}(f)=\left(f\left(\frac{۱}{۲}\right)+f\left(\frac{۲}{۲}\right)+f\left(\frac{۳}{۲}\right)+f\left(\frac{۴}{۲}\right)\right)\frac{۱}{۲}=\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۵}+\frac{۲}{۳}\right)\frac{۱}{۲}=\frac{۲۱}{۲۰}=۱/۰۵$$

تست) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}۲ & \text{گویا } x\\ -۳ & \text{گنگ } x\end{cases}$ مفروض است . حاصل $U_n(f)-L_n(f)$ در بازه $[۰,۱]$ برای $n=۱۰$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - خارج - ۹۱)

۱) -۱　　۲) ۲　　۳) -۳　　۴) ۵

حل) گزینه ۴

از آنجایی که ماکزیمم تابع f عدد ۲ و مینیمم آن ۳- است ؛ پس برای $U_n(f)$ به جای $f(x_i)$ عدد ۲ قرار می دهیم و برای $L_n(f)$ به جای $f(x_i)$ عدد (۳-) را قرار می دهیم . $\Delta x=\frac{۱-۰}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}$

$$\left.\begin{aligned}U_{۱۰}(f)&=\sum_{i=۱}^{۱۰}f(x_i).\Delta x=\frac{۱}{۱۰}\left(\overbrace{۲+۲+\cdots+۲}^{\text{۱۰تا}}\right)=۲\\ L_{۱۰}(f)&=\sum_{i=۱}^{۱۰}f(x_i).\Delta x=\frac{۱}{۱۰}\left(\overbrace{-۳-۳-\cdots-۳}^{\text{۱۰تا}}\right)=-۳\end{aligned}\right\}\Rightarrow ۲-(-۳)=۵$$

مجموع ریمان: به مجموع $R_n(f)=f(c_۱)\Delta x+\cdots+f(c_n)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}f(c_i).\Delta x$ مجموع گویند که در آن c_i یک نقطه درونی بازه $[x_{i-۱},x_i]$ می باشد به همین دلیل همواره $L_n(f)\le R_n(f)\le U_n(f)$ خواهد بود .

تست) مجموع تابع با ضابطه $f(x)=\log\frac{۴x+۱}{۴x}$ روی بازه $\left[\frac{۷}{۸},\frac{۱۵}{۸}\right]$ برای $n=۴$ وقتی c_i در وسط هر زیر بازه ی افراز شده است و Δx ها برابرند کدام است ؟(سراسری ریاضی - ۸۳)

۱) $\frac{۱}{۴}\log ۲$　　۲) $\frac{۱}{۲}\log ۲$　　۳) $\frac{۱}{۴}\log ۳$　　۴) $\frac{۱}{۲}\log ۳$

حل) گزینه ۱

$$\Delta x=\frac{\frac{۱۵}{۸}-\frac{۷}{۸}}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

بازها : $\left[\frac{۷}{۸},\frac{۹}{۸}\right],\left[\frac{۹}{۸},\frac{۱۱}{۸}\right],\left[\frac{۱۱}{۸},\frac{۱۳}{۸}\right],\left[\frac{۱۳}{۸},\frac{۱۵}{۸}\right]$

$$c_۱=\frac{۸}{۸}\quad c_۲=\frac{۱۰}{۸}\quad c_۳=\frac{۱۲}{۸}\quad c_۴=\frac{۱۴}{۸}$$

$$\Rightarrow R_4(f)=\frac{1}{4}\left(f(1)+f\left(\frac{10}{8}\right)+f\left(\frac{12}{8}\right)+f\left(\frac{14}{8}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\log\frac{5}{4}+\log\frac{6}{5}+\log\frac{7}{6}+\log\frac{8}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(\log\left(\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\frac{7}{6}\times\frac{8}{7}\right))=\frac{1}{4}\log 2$$

لازم به ذکر است که وقتی c_i وسط هر بازه باشد آنگاه $R_n(f)=\frac{U_n(f)-L_n(f)}{2}$ بوده و می توانستیم در تست فوق از این نکته نیز استفاده کنیم (که البته طولانی تر می شد).

انتگرال معین: اگر عمل انتگرال گیری را عکس عمل مشتق گیری تعریف کنیم آنگاه همانطور که برای هر نوع تابع رابطه ای برای مشتق آن داشتیم می توان برای انتگرال هر نوع تابع نیز رابطه ای ارائه داد .

تذکر: در فصل مشتق دریافتیم که مشتق تابع $F(x)$ خود تابعی است مانند $f(x)$ که $F'(x)=f(x)$ می باشد . حال با توجه به اینکه انتگرال عکس مشتق عمل می کند خواهیم داشت:

$$\int f(x)dx=F(x)+c \qquad \text{یا} \qquad \int F'(x)dx=F(x)+c$$

تذکر: در روابط فوق c یک مقدار ثابت (عدد ثابت) می باشد و در این فصل به تابع $F(x)$ تابع اولیه گویند .از آنجاییکه اگر به یک تابع اولیه مقداری ثابت اضافه یا کم شود تغییری در تابع مشتق آن ($f(x)$) ایجاد نخواهد کرد (چون مشتق عدد ثابت صفر است) این مقدار ثابت را با حرفc به عنوان یک مجهول در انتگرال نامعین در نظر می گیریم و اگر بخواهیم مقدار آن را به دست آوریم باید از شرایطی که در مسئله داده شده است استفاده کنیم .

نکته: اگر از یک تابع انتگرال بگیریم به تابع اولیه آن می رسیم و اگر از تابع اولیه مشتق بگیریم به تابع زیر انتگرال می رسیم . یعنی :

$$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+c)'=f(x)$$

تست) اگر $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=A(2x+1)^k+c$ باشد ، A کدام است ؟(سراسری تجربی – ۷۲)

۱) $\frac{2}{3}$　　۲) $\frac{3}{4}$　　۳) $\frac{4}{3}$　　۴) $\frac{3}{2}$

حل) گزینه ۴

$$\xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می گیریم}}\left(\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\left(2x+1\right)^2}}\right)'=\left(A\left(2x+1\right)^k+c\right)'\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{\left(2x+1\right)^2}}=2Ak\left(2x+1\right)^{k-1}$$

$$\Rightarrow(2x+1)^{-\frac{2}{3}}=2Ak\left(2x+1\right)^{k-1}\Rightarrow\begin{cases}k-1=-\frac{2}{3}\Rightarrow k=\frac{1}{3}\\ 2Ak=1\longrightarrow\frac{2}{3}A=1\Rightarrow A=\frac{3}{2}\end{cases}$$

نکته: از آنجایی که $(F(u))' = u'.F'(u)$ می باشد و در این فصل $F' = f$ فرض شده است ، پس:

$$\int f(u)dx = \frac{۱}{u'}F(u) + c$$

تست) اگر $\int f(x)dx = Ax$ باشد ، آنگاه $\int f\left(\frac{۳}{۴}x\right)dx$ برابر کدام است ؟(سراسری ریاضی – ۷۸)

۱) $\frac{۳}{۴}A(\frac{۳}{۴}x)$　　۲) $\frac{۳}{۴}A(\frac{۴}{۳}x)$　　۳) $\frac{۴}{۳}A(\frac{۳}{۴}x)$　　۴) $\frac{۴}{۳}A(\frac{۴}{۳}x)$

حل) گزینه ۳

$$\int f(x)dx = Ax \Rightarrow \int f(u)du = \frac{۱}{u'}A(u) \Rightarrow \int f\left(\frac{۳}{۴}x\right)dx = \frac{۱}{\frac{۳}{۴}}A\left(\frac{۳}{۴}x\right) = \frac{۴}{۳}A(\frac{۳}{۴}x)$$

ویژگی های انتگرال نامعین: با توجه به خواصی که برای مشتق توابع داشتیم هریک از موارد زیر برای انتگرال نامعین قابل اثبات است :

۱) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

۲) $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

۳) $\int u'.f(u)dx = F(u) + c$

۴) $\int \big(f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\big)dx = f(x).g(x) + c$

۵) $\int \left(\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^{۲}(x)}\right)dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c \quad , \quad g(x) \neq ۰$

فرمولهای انتگرال نامعین:

۱) $\int dx = x + c$　　۲) $\int u^n dx = \frac{۱}{(n+۱).u'}u^{n+۱} + c \quad \Rightarrow \int (۲x+۱)^{۳}dx = \frac{۱}{۴(۲)}(۲x+۱)^{۴} + c$

۳) $\int \sin u\, dx = -\frac{۱}{u'}\cos u + c \qquad \Rightarrow \int \sin\left(۲x+۱\right)dx = -\frac{۱}{۲}\cos\left(۲x+۱\right) + c$

۴) $\int \cos u\, dx = \frac{۱}{u'}\sin u + c \qquad \Rightarrow \int \cos\left(۲x+۱\right)dx = \frac{۱}{۲}\sin\left(۲x+۱\right) + c$

۵) $\int \left(۱ + \tan^{۲} u\right)dx = \frac{۱}{u'}\tan^{۲} u + c \qquad \Rightarrow \int \left(۱ + \tan^{۲}\left(۲x+۱\right)\right)dx = \frac{۱}{۲}\tan\left(۲x+۱\right) + c$

۶) $\int \left(۱ + \cot^{۲} u\right)dx = -\frac{۱}{u'}\cot u + c \qquad \Rightarrow \int \left(۱ + \cot^{۲}\left(۲x+۱\right)\right)dx = -\frac{۱}{۲}\cot\left(۲x+۱\right) + c$

$$۷)\int \frac{dx}{\sqrt{۱-u^{۲}}}=\frac{۱}{u'}\sin^{-۱}u+c=-\frac{۱}{u'}\cos^{-۱}u+c \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{۱-\left(۲x+۱\right)^{۲}}}=\frac{۱}{۲}\sin^{-۱}\left(۲x+۱\right)+c$$

$$۷-۱)\int \frac{u'}{\sqrt{a^{۲}-u^{۲}}}dx=\sin^{-۱}\frac{u}{a}+c$$

$$۸)\int \frac{dx}{۱+u^{۲}}=\frac{۱}{u'}\tan^{-۱}u+c=-\frac{۱}{u'}\cot^{-۱}u+c \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{۱+(۲x+۱)^{۲}}=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(۲x+۱)+c$$

$$۸-۱)\int \frac{u'}{a^{۲}+u^{۲}}dx=\frac{۱}{a}\tan^{-۱}\frac{u}{a}+c$$

$$۹)\int e^{u}dx=\frac{۱}{u'}e^{u}+c \quad \Rightarrow \int e^{\left(۲x+۱\right)}dx=\frac{۱}{۲}e^{\left(۲x+۱\right)}+c$$

$$۱۰)\int \frac{u'}{u}dx=L_n|u|+c \quad \Rightarrow \int \frac{۲}{۲x+۱}dx=L_n\left|۲x+۱\right|+c$$

$$۱۰-۱)\int u'.\tan u\,dx=\int u'.\frac{\sin u}{\cos u}dx=-L_n|\cos u|+c$$

$$۱۰-۲)\int u'.\cot u\,dx=\int u'.\frac{\cos u}{\sin u}dx=-L_n|\sin u|+c$$

تذکر:همواره در محاسبه انتگرال های نامعین باید از روابط فوق استفاده کرد پس هر سوال را باید با استفاده از روشهای مختلف (تجزیه ، اتحاد ، گویا کردن و ...) به یک یا چند تا از حالتهای فوق تبدیل کرده و سپس حاصل انتگرال نامعین را بدست آوریم .

تست) با شرط $x>۱$ داریم : $\int \frac{۳-۳x}{۱-\sqrt{x}}dx=x.f(x)+c$ ، $f(x)$ برابر کدام است ؟(سراسری تجربی – ۹۰)

۱) $۳+۲\sqrt{x}$ ۲) $۳+\sqrt{x}$ ۳) $۳x-\sqrt{x}$ ۴) $۲x-۳\sqrt{x}$

حل) گزینه ۱

$$\int \frac{۳-۳x}{۱-\sqrt{x}}dx=\int \frac{۳\left(۱-x\right)}{۱-\sqrt{x}}dx=\int \frac{۳\left(۱-\sqrt{x}\right)\left(۱+\sqrt{x}\right)}{۱-\sqrt{x}}dx=\int \left(۳+۳\sqrt{x}\right)dx=\int ۳dx+\int ۳\sqrt{x}dx$$

$$=۳x+۲x\sqrt{x}+c=x.f(x)+c\Rightarrow f(x)=۳+۲\sqrt{x}$$

تست) اگر $\int \sqrt{\left(x^{۲}-\frac{۱}{x^{۲}}\right)^{۲}+۴}\;dx=\frac{f(x)}{۳x}+c$ ، آنگاه $f(x)$ کدام است ؟(سراسری ریاضی – ۸۴)

۱) $x^{۴}-۳$ ۲) $x^{۳}-۴$ ۳) $x^{۳}+۴$ ۴) $x^{۴}+۳$

حل) گزینه ۱

$$? = \int \sqrt{x^۴ + \frac{۱}{x^۴} + ۲}\ dx = \int \sqrt{\left(x^۲ + \frac{۱}{x^۲}\right)^۲}\ dx = \int \left(x^۲ + \frac{۱}{x^۲}\right) dx = \int x^۲ dx + \int \frac{۱}{x^۲} dx$$

$$= \frac{x^۳}{۳} + c_۱ - \frac{۱}{x} + c_۲ = \frac{x^۳}{۳} - \frac{۱}{x} + c = \frac{x^۴ - ۳}{۳x} + c = \frac{f(x)}{۳x} + c \Rightarrow f(x) = x^۴ - ۳$$

تست) با شرط $\frac{\pi}{۲} < x < \frac{۳\pi}{۲}$ ، حاصل $\int \sqrt{۱ + \tan^۲ x}\ .\sin ۲x\, dx$ کدام است ؟ (سراسری تجربی – خارج – ۹۲)

۱) $-۲\cos x + c$ ۲) $-۲\sin x + c$ ۳) $۲\cos x + c$ ۴) $۲\sin x + c$

حل) گزینه ۳

$$\xrightarrow{۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}} ? = \int \sqrt{\frac{۱}{\cos^۲ x}}\ .\ \sin ۲x\, dx = \int \left|\frac{۱}{\cos x}\right|\ .\ ۲\sin x \cos x\, dx \xrightarrow{\frac{\pi}{۲} < x < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \cos x < ۰}$$

$$= \int -\frac{۱}{\cos x}.۲\sin x\cos x\, dx = -\int ۲\sin x\, dx = -۲(-\cos x) + c = ۲\cos x + c$$

تست) اگر $\int \frac{۳x}{\sqrt{x-۱}} dx = f(x)\sqrt{x-۱} + c$ باشد ، $f(x)$ کدام است ؟ (سراسری ریاضی – خارج – ۸۷)

۱) $۲x + ۱$ ۲) $۲x + ۲$ ۳) $۲x + ۳$ ۴) $۲x + ۴$

حل) گزینه ۴

$$? = ۳\int \frac{x - ۱ + ۱}{\sqrt{x-۱}} dx = ۳\int \sqrt{x-۱}\, dx + ۳\int \frac{۱}{\sqrt{x-۱}} dx = ۳\left(\frac{۲}{۳}\left(x-۱\right)\sqrt{x-۱} + ۲\sqrt{x-۱}\right) + c$$

$$= \sqrt{x-۱}\left(۲x - ۲ + ۶\right) + c = f(x).\sqrt{x-۱} + c \quad \Rightarrow f(x) = ۲x + ۴$$

تست) شیب خط بر منحنی $y = f(x)$ ، در هر نقطه ی $M(x,y)$ واقع بر آن برابر $\frac{۳}{(x-۱)^۲}$ است . اگر منحنی این تابع از نقطه ی $(۲,۱)$ بگذرد ، معادله ی خط مجانب افقی آن کدام است؟(سراسری ریاضی – خارج – ۹۰)

۱) $y = -۳$ ۲) $y = ۲$ ۳) $y = ۳$ ۴) $y = ۴$

حل) گزینه ۴

$$f'(x) = \frac{۳}{\left(x-۱\right)^۲} \quad \Rightarrow \int f'(x)\, dx = \int \frac{۳}{\left(x-۱\right)^۲} dx \Rightarrow f(x) = \frac{-۳}{\left(x-۱\right)} + c \quad , \quad \left(۲,۱\right) \in f$$

$$\Rightarrow f(۲)=۱\Rightarrow\frac{-۳}{۲-۱}+c=۱\Rightarrow c=۴\Rightarrow f(x)=\frac{-۳}{x-۱}+۴$$

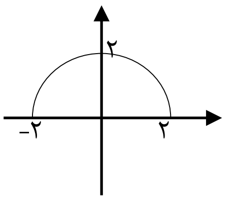
برای تعیین مجانب افقی باید حد تابع را در $\pm\infty$ بدست آوریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-۳}{x+۱}+۴\right)=۰+۴\Rightarrow y=۴\ \longleftarrow \text{مجانب افقی}$$

انتگرال معین: هر گاه دنباله های عددی مجموع های بالا و پایین تابع f $\left(L_n(f)\ ,\ U_n(f)\right)$ به یک عدد منحصر به فرد مانند A همگرا باشد آنگاه عدد A را انتگرال معین این تابع در بازه $[a,b]$ می نامیم و می نویسیم :

$$A=\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

با توجه به تعریف فوق انتگرال معین همان مساحت محدود به نمودار تابع f و محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ است .



تست) با توجه به شکل رو به رو ، حاصل $\int_{-۲}^{۲}\sqrt{۴-x^۲}dx$ کدام است ؟(سراسری تجربی – خارج – ۹۲)

۱) $۲\pi-۲$ ۲) $\pi+۲$ ۳) ۲π ۴) ۴π

حل) گزینه ۳

$$\int_{-۲}^{۲}\sqrt{۴-x^۲}dx=\text{مساحت نیم دایره}=\frac{\pi(۲)^۲}{۲}=۲\pi$$

نکته: برای اینکه یک تابع در یک بازه انتگرال پذیر باشد باید
{ اولاً در آن بازه پیوسته باشد
{ دوماً در آن بازه کراندار باشد

نکته: اگر تابع در بازه ی بسته ای کراندار باشدو فقط در تعداد محدودی نقطه ناپیوسته باشد آنگاه انتگرال پذیر است مانند $f(x)=[x]$ یا $g(x)=\mathrm{sgn}(x)$

قضایای انتگرال معین:

۱) $\int_a^a f(x)dx=۰$ ۲) $\int_a^b c\,dx=c(b-a)$ ۳) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

۴) $\int_a^b\left(Af(x)+Bg(x)\right)dx=A\int_a^b f(x)dx+B\int_a^b g(x)dx$

۵) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

۶) $f(x)\le g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$

تذکر: در محاسبه انتگرال معین با استفاده از مساحت،سطوحی را که زیرمحور x ها قرار می گیرند باید با علامت منفی در نظر بگیریم .

نکته: اگر f در بازه $[-a,a]$ انتگرال پذیر باشد آنگاه :
۱) اگر f فرد باشد $\longleftarrow$ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
۲) اگر f زوج باشد $\leftarrow$ $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

تست) نمودار تابع f در بازه $[-1,1]$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن است . اگر f بر $[-3,1]$ پیوسته و $\int_{0}^{1} f(x)dx = A$ و $\int_{-3}^{-1} f(x)dx = B$ ، حاصل $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ کدام است؟(سراسری ریاضی – ۷۸)

۱) B　　۲) ۲A　　۳) A + ۲B　　۴) ۲A + B

حل) گزینه ۱

$$\int_{-3}^{1} f(x)dx = \int_{-3}^{-1} f(x)dx + \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)dx}_{\text{چون f فرد است برابر صفر می باشد}} = \int_{-3}^{1} f(x)dx = B$$

نکته: در محاسبه انتگرال معین توابع شامل قدر مطلق باید عبارت داخل قدر مطلق را در بازه ی بین حدود انتگرال تعیین علامت کرده و با توجه به علامت آن قدر مطلق را حذف کنیم و سپس حاصل آن را بدست آوریم .

تست) اگر $f(x) = |x| + |x+1|$ ، حاصل $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ کدام است؟(سراسری تجربی – خارج – ۹۱)

۱) ۵　　۲) ۶　　۳) ۶/۵　　۴) ۷

حل) گزینه ۴

$$? = \int_{-1}^{0} \left(|x| + |x+1|\right) dx + \int_{0}^{2} \left(|x| + |x+1|\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(-x + x + 1\right) dx + \int_{0}^{2} \left(x + x + 1\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 1dx + \int_{0}^{2} \left(2x+1\right) dx = x\Big|_{-1}^{0} + \left(x^2 + x\right)\Big|_{0}^{2} = \left(0 - (-1)\right) + \left((4+2) - (0)\right) = 1 + 6 = 7$$

نکته : در محاسبه ی انتگرال معین شامل توابع با جز صحیح باید به جای جز صحیح با توجه به حدود انتگرال گیری عدد مناسب قرار دهیم .

تست) حاصل $\int_{1}^{16} [\sqrt{x}]dx$ کدام است ؟ (سراسری ریاضی _ ۹۳)

۱) ۳۰　　۲) ۳۱　　۳) ۳۲　　۴) ۳۴

حل) گزینه ۴

$$? = \int_{1}^{4} [\sqrt{x}]dx + \int_{4}^{9} [\sqrt{x}]dx + \int_{9}^{16} [\sqrt{x}]dx = \int_{1}^{4} 1dx + \int_{4}^{9} 2dx + \int_{9}^{16} 3dx = x\Big|_{1}^{4} + 2x\Big|_{4}^{9} + 3x\Big|_{9}^{16}$$

$$= \left(4-1\right) + 2\left(9-4\right) + 3\left(16-9\right) = 34$$

قضیه مقدار میانگین در انتگرالها: اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد ، در اینصورت حداقل یک c در این بازه وجود دارد که :

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

در اینصورت $f(c)$ را مقدار متوسط یا میانگین تابع می نامیم .

نکته: در توابع خطی مقدار متوسط تابع در مرکز بازه $[a,b]$ رخ می دهد یعنی $f(\frac{a+b}{۲})$ مقدار متوسط تابع خواهد بود .

تست) میانگین تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x}$ ، بر بازه ی $\left[۱,۳\right]$ کدام است ؟(سراسری ریاضی - خاج - ۹۳)

۱) $۲-L_n\sqrt{۳}$　　۲) $۳-L_n۳$　　۳) $\frac{۴}{۳}$　　۴) $\frac{۵}{۳}$

حل) گزینه ۱

$$f(c)=\frac{\int_۱^۳\frac{x^۲-۱}{x}dx}{۳-۱}=\frac{\int_۱^۳ xdx-\int_۱^۳\frac{۱}{x}dx}{۲}=\frac{\frac{x^۲}{۲}\Big|_۱^۳-L_nx\Big|_۱^۳}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}\left(۹-۱\right)-(L_n۳-۰)}{۲}=۲-\frac{L_n۳}{۲}=۲-L_n\sqrt{۳}$$

قضایای بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال :

قضیه بنیادی اول: فرض کنید تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد ، آنگاه تابع $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ روی $[a,b]$ پیوسته بوده و در بازه باز (a,b) مشتق پذیر است و داریم :

$$F'(x)=f(x)\qquad \text{یا} \qquad \left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$$

تذکر : قضیه بنیادی اول می گوید مشتق یک انتگرال معین نسبت به متغیری که در حد بالایش قرار دارد ، برابر است با تابع زیر انتگرال به ازای آن متغیر .

نکته: اگر u وv هر دو تابعی از x باشند آنگاه :

$$\left(\int_v^u f(t)dt\right)'=u'.f(u)-v'.f(v)$$

تست) اگر $G(x)=x^۲\int_۲^{\sqrt{x}}\frac{L_n(t+۲)}{t^۲}dt$ باشد ، $G'\left(۴\right)$ چند برابر $L_n۲$ است؟(سراسری ریاضی - ۹۴)

۱) ۱　　۲) ۱/۵　　۳) ۲　　۴) ۳

حل) گزینه ۳

$$G\left(۴\right)=۴^۲\int_۲^{\sqrt{۴}}\frac{L_n\left(t+۲\right)}{t^۲}dt\Rightarrow G'(x)=x^۲.\left(\int_۲^{\sqrt{x}}\frac{L_n\left(t+۲\right)}{t^۲}dt\right)'=x^۲.\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\frac{L_n\left(\sqrt{x}+۲\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^۲}$$

$$=\frac{xL_n\left(\sqrt{x}+۲\right)}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow G'\left(۴\right)=\frac{۴L_n\left(۴\right)}{۴}=L_n۴=۲L_n۲$$

قضیه بنیادی دوم: اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $F(x)$ یک تابع اولیه برای $f(x)$ باشد آنگاه :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \text{یا} \qquad F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

تذکر: در انتگرالهای معین نام متغیر را می توان عوض کرد به شرطی که حدود انتگرال نیز متناسب با آن تغییر کند .

مثلاً $\longrightarrow \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{4} f(\sqrt{x})d(\sqrt{x}) = \int_{0}^{4} \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx$

نکته: همواره برای هر انتگرال معین داریم :

$$\int_b^a f(x)dx = \int_{b+k}^{a+k} f(x-k)dx \qquad , \qquad \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

تست) حاصل $\int_0^9 f\left|\sqrt{x}-2\right|dx$ ، کدام است؟(سراسری ریاضی – خارج – ۹۳)

۱)صفر　　　۲) $\frac{8}{3}$　　　۳) ۴　　　۴) $\frac{16}{3}$

حل) گزینه ۴

$$\int_0^9 f\left|\sqrt{x}-2\right|dx = \int_0^3 f\left|x-2\right|dx^2 = \int_0^3 2x\left|x-2\right|dx = \int_0^2 2x\left(2-x\right)dx + \int_2^3 2x\left(x-2\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(4x-2x^2\right)dx + \int_2^3 \left(2x^2-4x\right)dx = \left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2x^3}{3} - 2x^2\right)\Bigg|_2^3 = \frac{16}{3}$$

کاربرد های انتگرال:

۱)محاسبه برخی حاصل جمع های عمومی نامتناهی (حاصل سری نامتناهی)

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i).\Delta x$$

تست) با استفاده از مفهوم انتگرال معین ، حاصل $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i}{n^3}}$ کدام است ؟(سراسری ریاضی – ۸۹)

۱) $\frac{1}{6}$　　　۲) $\frac{1}{3}$　　　۳) $\frac{2}{3}$　　　۴) $\frac{4}{3}$

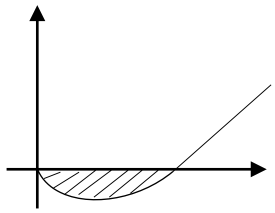
حل) گزینه ۳

$$? = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{i}{n}}.\frac{1}{n} \xrightarrow{f(x_i)=\sqrt{\frac{i}{n}} \;,\; \Delta x=\frac{1}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

۲)محاسبه مساحت:

الف) نمودار تابع در بازه مورد نظر بالا یا پایین محور x ها باشد : در اینصورت اگر نمودار بالای محور x ها باشد مساحت برابر $\int_a^b f(x)dx$ بوده و اگر نمودار پایین محور x ها باشد مساحت برابر $-\int_a^b f(x)dx$ خواهد بود .

تست) با توجه به نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x}$ ، مساحت ناحیه سایه زده کدام است؟(سراسری تجربی – ۸۸)



۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

حل) گزینه ۱

ابتدا باید نقاط ابتدا و انتهای بازه را بیابیم : ۰=ابتدا و برای نقطه انتها باید:

$$x - \sqrt{x} = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{به توان ۲ ، با فرض } x\geq ۰} x^۲ = x \Rightarrow x^۲ - x = ۰ \Rightarrow x(x-۱) = ۰ \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases}$$

پس نقطه انتهایی برابر ۱ می باشد . با توجه به اینکه ناحیه زیر محور x هاست مساحت برابر :

$$-\int_۰^۱ f(x)dx = -\int_۰^۱ (x-\sqrt{x})dx = -\int_۰^۱ xdx + \int_۰^۱ \sqrt{x}dx = -\frac{x^۲}{۲}\Big|_۰^۱ + \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^۱ = -\left(\frac{۱}{۲} - ۰\right) + \left(\frac{۲}{۳} - ۰\right)$$

$$= -\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۳} = \frac{-۳+۴}{۶} = \frac{۱}{۶}$$

ب) بخشی از نمودار تابع در بازه مورد نظر بالای x ها و بخشی دیگر پایین محور x ها باشد : دراین حالت باید مساحت قسمت هایی که بالای محور x ها قرار دارند را مستقیماً از انتگرال آنها بدست آوریم و مساحت قسمت هایی که زیرمحورx ها قرار دارند را از آنها کم کنیم.

تست) مساحت ناحیه محصور بین نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & -۲ \leq x \leq ۰ \\ x^۲ & ۰ \leq x \leq ۳ \end{cases}$ ، محور x ها و دو خط $x = ۳, x = -۲$ کدام است؟(سراسری تجربی – خارج – ۹۰)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

حل) گزینه ۴

با توجه به اینکه در بازه $[-۲,۰]$ نمودار زیر محور x ها بوده و در بازه $[۰,۳]$ بالای محور x ها پس:

$$\int_{-۲}^{۳} f(x)dx = -\int_{-۲}^{۰} xdx + \int_۰^۳ x^۲dx = -\frac{x^۲}{۲}\Big|_{-۲}^{۰} + \frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^۳ = -(۰-۲) + (۹-۰) = ۱۱$$

نکته : اگر f روی بازه $[۰, b]$ اکیداً صعودی و پیوسته باشد آنگاه :

$$\int_۰^b f(x)dx = bf(b) - \int_۰^{f(b)} f^{-۱}(x)dx \xrightarrow{\text{مثلاً}} \int_۰^۱ \sin^{-۱} x\, dx = ۱ \times \frac{\pi}{۲} - \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\, dx = \frac{\pi}{۲} - ۱$$

ج)مساحت محدود بین ۲ تابع f و g در بازه $[a,b]$: این مساحت برابر $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ می باشد که با توجه به علامت $f(x)-g(x)$ باید قدر مطلق حذف گردد و حاصل انتگرال به دست آید .

تست)مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = x^۲|x|$ و خط به معادله ی $y = ۸$ ، کدام است ؟(سراسری ریاضی – ۹۳)

۱) ۱۶		۲) ۱۸		۳) ۲۲		۴) ۲۴

حل) گزینه ۴

چون بازه ی انتگرال گیری را مشخص نکرد باید نقاط تلاقی ۲ تابع را بیابیم :

$$x^۲|x| = ۸ \Rightarrow \begin{cases} x^۳ = ۸ & \Rightarrow x = ۲ \\ -x^۳ = ۸ & \Rightarrow x = -۲ \end{cases} \quad \Rightarrow S = \int_{-۲}^{۲} \left| ۸ - x^۲|x| \right| dx$$

چون تابع زیر انتگرال زوج بوده و حدود انتگرال گیری نیز متقارن است پس :

$$\int_{-۲}^{۲} \left| ۸ - x^۲|x| \right| dx = ۲\int_{۰}^{۲} \left(۸ - x^۳\right) dx = ۲\left(۸x\Big|_{۰}^{۲} - \frac{x^۴}{۴}\Big|_{۰}^{۲}\right) = ۲\Big(\big(۱۶ - ۰\big) - \big(۴ - ۰\big)\Big) = ۲۴$$

نکته: هر طاق توابع $y_۱ = \sin ax$ و $y_۲ = \cos ax$ به مساحت $\frac{۲}{|a|}$ می باشد .

Email: km.niak@gmail.com

Telegrame: kiamoghaddasniak