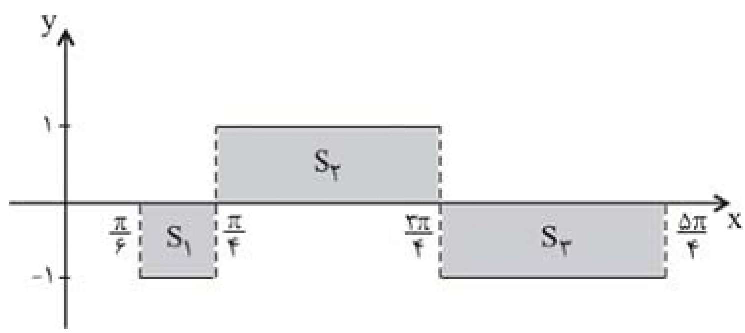
# قضایای انتگرال معین

## رابطه‌ی انتگرال معین و مساحت

انتگرال معین تابع f در بازه‌ی [a , b] برابر مساحت علامت‌دار محصور بین تابع f با محور x ها و دو خط x = a و x = b است، یعنی در هر بازه‌ای که تابع f بالای محور x هاست، حاصل انتگرال معین با مساحت در آن بازه برابر و در هر بازه‌ای که تابع f پایین محور x هاست، حاصل انتگرال معین با قرینه‌ی مساحت در آن بازه برابر است.

به عنوان مثال اگر نمودار تابع f در بازه‌ی $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{4}\right]$ شکل مقابل باشد، آنگاه




$$\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۴}} f(x)\,dx = -S_۱ + S_۲ - S_۳ = -\left(\frac{\pi}{۱۲}\times ۱\right)+\left(\frac{\pi}{۲}\times ۱\right)-\left(\frac{\pi}{۲}\times ۱\right)=\frac{-\pi}{۱۲}$$

## ویژگی‌های اولیه (قضایای اولیه)

**قضیه:** اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیر در بازه‌ی [a , b] باشند آنگاه:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

اگر $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

## قضایای بنیادی انتگرال

**قضیه‌ی بنیادی اول:** اگر تابع f روی بازه‌ی بسته I پیوسته $a \in I$ و برای هر $x \in I$ داشته باشیم:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ آنگاه $F'(x) = f(x)$.

- **مثال:** اگر $F(X) = \int_{-1}^{X} \sqrt{1+t^2}dt$ آنگاه، $F'(X)$ را بیابید.

**حل:**

$$F'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

## قضیه بنیادی دوم

اگر f در بازه‌ی بسته [a , b] پیوسته باشد و تابع g به گونه‌ای باشد که برای هر x در بازه‌ی [a , b] داشته باشیم $g'(x)=f(x)$ آنگاه:

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b)-g(a)$$

به عبارت دیگر از تابع انتگرال گرفته و سپس اختلاف حد پایین و بالا را می‌یابیم یعنی:

(F(x) تابع اولیه f(x) است)

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

- **مثال:** حاصل $\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}\,dx$ را بیابید.

$$\int_{-۱}^{۲}\sqrt{x+۲}\;dx=\int_{-۱}^{۲}(x+۲)^{\frac{۱}{۲}}dx=\left.\frac{(x+۲)^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}\right]_{-۱}^{۲}=\frac{۲}{۳}(x+۲)\sqrt{x+۲}\Big]_{-۱}^{۲}=\frac{۲}{۳}(۸-۱)=\frac{۱۴}{۳}$$

## فرمول‌های اولیه

با استفاده از فرمول‌های مشتق می‌توانیم فرمول‌های اولیه‌ی انتگرال را بیابیم، به جدول زیر توجه کنید:

| | فرمول | مثال |
|---|---|---|
| ۱ | $\int dx = x + c$ | |
| ۲ | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ ، \ n \neq -1$ | $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$<br>$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$<br>$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$ |
| ۳ | $\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ | $\int 3x^2 dx = 3\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$ |
| ۴ | $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$ | $\int (\sqrt{x} + 2x)\, dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + x^2 + c$ |

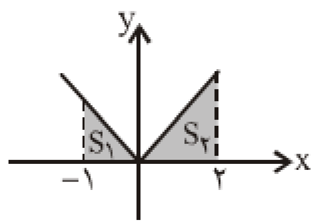
| | فرمول | مثال |
|---|---|---|
| ۵ | $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \ ، \ n \neq -1$ | $\int (3x-4)^4 dx = \frac{(3x-4)^5}{3 \times 5} + c$ |
| ۶ | $\int \sin ax\, dx = \frac{-1}{a} \cos ax + c$ | $\int \sin 3x\, dx = \frac{-1}{3} \cos 3x + c$ |
| ۷ | $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$ | $\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + c$ |
| ۸ | $\int (1 + \tan^2 ax)\, dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$ | $\int (1 + \tan^2 7x)\, dx = \frac{1}{7} \tan 7x + c$ |
| ۹ | $\int (1 + \cot^2 ax)\, dx = \frac{-1}{a} \cot ax + c$ | $\int (1 + \cot^2 4x)\, dx = \frac{-1}{4} \cot 4x + c$ |
| ۱۰ | $\int \frac{dx}{x} = \text{Ln}\lvert x \rvert + c$ | |
| ۱۱ | $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \text{Ln}\lvert ax+b \rvert + c$ | $\int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \text{Ln}\lvert 2x-1 \rvert + c$ |
| ۱۲ | $\int e^x dx = e^x + c$ | |
| ۱۳ | $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$ | $\int e^{3x+6} dx = \frac{1}{3} e^{3x+6} + c$ |

# انتگرال معین توابع شامل قدرمطلق

برای محاسبه انتگرال توابع شامل قدرمطلق، باید قدرمطلق را با توجه به ریشه های داخل قدرمطلق تعیین علامت نموده و سپس تک‌تک انتگرال‌ها را محاسبه می کنیم. به عنوان مثال:

$$(۱)\quad \int_{-۱}^{۲} |x|\,dx = \int_{-۱}^{۰} (-x)\,dx + \int_{۰}^{۲} (x)\,dx = -(۰-\frac{۱}{۲}) + (۲-۰) = \frac{۵}{۲}$$

**نکته :** در بعضی از موارد اگر نمودار قدرمطلقی از پاره‌خط‌های شکسته تشکیل شده باشد می‌توانیم با رسم نمودار حاصل انتگرال را بیابیم.




$$(۲)\quad \int_{-۱}^{۲} |x|\,dx = S_۱ + S_۲ = \frac{۱}{۲} + ۲ = \frac{۵}{۲}$$

# انتگرال معین توابع شامل جزء صحیح

در محاسبه‌ی این‌گونه انتگرال‌ها باید حدود انتگرال را به گونه‌ای در نظر بگیریم که برای تابع تحت انتگرال در هر یک از فاصله‌ها تنها یک مقدار صحیح بدست آید.

$$\int_{۰}^{۱} [۲x]\,dx =$$

$$۰ < x < ۱ \rightarrow ۰ < ۲x < ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۰ < ۲x < ۱ \rightarrow [۲x] = ۰ \rightarrow ۰ < x < \frac{۱}{۲} \\ ۱ < ۲x < ۲ \rightarrow [۲x] = ۱ \rightarrow \frac{۱}{۲} < x < ۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad \int_{۰}^{۱} [۲x]\,dx = \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} (۰)\,dx + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} (۱)\,dx = ۰ + (۱-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

**نکته :** در بعضی از موارد که رسم تابع $y = [f(x)]$ ساده باشد، با رسم نمودار حاصل انتگرال را می‌یابیم.

۱.حاصل انتگرال $\int_0^4 \left[\frac{x}{2}\right]\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx$ کدام است؟ **«سراسری ریاضی داخل- ۱۳۹۴»**

۱) $4-2\sqrt{2}-\ln 2$ ۲) $4-2\sqrt{2}+\ln 2$ ۳) $2+2\sqrt{2}-\ln 2$ ۴) $2\sqrt{2}+\ln 2$

باید محدوده ی انتگرال گیری را طوری تعیین کنیم که جزء صحیح، ۱ مقدار حاصل شود.

$$\int_0^2 \left[\frac{x}{2}\right]\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx+\int_2^4 \left[\frac{x}{2}\right]\frac{\sqrt{x}-1}{2}dx=\int_0^2 (0)\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx+\int_2^4 (1)\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx$$

$$=0+\int_2^4 \frac{\sqrt{x}-1}{x}dx=\int_2^4 \frac{\sqrt{x}}{x}dx-\int_2^4 \frac{1}{x}dx=$$

$$\int\left(x^{\frac{1}{2}}\times x^{-1}\right)dx-\int\frac{dx}{x}=\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int\frac{dx}{x}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\ln x+C$$

$$2\sqrt{x}\,\Big]_2^4-\ln x\,\Big]_2^4\to 4-2\sqrt{2}-(\ln 4-\ln 2)=\left(4-2\sqrt{2}-\ln 2\right)$$

۲.حاصل $\int_{-1}^2 [x]|x|dx$ کدام است؟ **«سراسری تجربی خارج کشور- ۹۵»**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۱

برای انتگرال گیری از توابع قدر مطلق باید به ازای ریشه داخل قدر مطلق بازه انتگرال گیری را تعیین و هم چنین برای توابع جزصحیح باید محدوده ی انتگرال گیری را طوری تعیین کنیم که جزء صحیح، ۱ مقدار حاصل شود

$$\int_{-1}^0(-1)(-x)dx+\int_0^1(0)(x)dx+\int_1^2(1)(x)dx=\int_{-1}^0 xdx+0+\int_1^2 xdx$$

$$\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0+0+\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\to\left(\frac{0^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)+\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{2}+2-\frac{1}{2}=1$$

۳.حاصل $\int_{-1}^{1}(|3x|-[x])dx$ کدام است؟ «سراسری تجربی داخل- ۹۵»

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{۷}{۲}$ ۴) ۴

قدر مطلق را با توجه به ریشه داخل و جزء صحیح را با توجه به این مقدار که خروجی باید ۱ عدد صحیح باشد بازه بندی می نماییم.

$$\int_{-1}^{1}|3x|dx-\int_{-1}^{1}[x]dx \to$$

$$\left(\int_{-1}^{0}-3xdx+\int_{0}^{1}3xdx\right)-\left(\int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}(0)\right)=-\frac{3x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{3x^2}{2}\Big|_{0}^{1}-(-x)\Big|_{-1}^{0}$$

$$=-\frac{3}{2}\left(0-(-1)^2\right)+\frac{3}{2}\left((1)^2-(0)^2\right)+\left(0-(-1)\right)\to+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+1=4$$

# تابع اولیه و انتگرال نامعین

عمل انتگرال‌گیری (یافتن تابع اولیه) ضد عمل مشتق‌گیری است. به عبارت دیگر اگر F(x) را تابع اولیه (ضد مشتق f(x) در نظر بگیریم، آنگاه $\mathbf{F'(x)=f(x)}$ و می‌نویسیم:

$$\int f(x)dx=F(x)+c \quad \text{یا} \quad \int f'(x)dx=f(x)+c$$

- **نکته:** انتگرال‌گیری (داخل انتگرال) را می‌دهد. به عبارت دیگر:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$$

**نکته :** هر تابع دارای بی‌شمار تابع اولیه است که اختلاف آن‌ها در یک عدد ثابت است.

❖ **نکته:** از آنجایی که $(F(ax+b))' = aF'(ax+b)$ با فرض $F'(x)=f(x)$ خواهیم داشت:

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c}$$

۴.اگر $\int \frac{7x^2-4x}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\sqrt[3]{x}\,f(x)+c$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟ **«سراسری تجربی داخل - ۹۴»**

۱) $\frac{1}{3}x^2-2x$　　۲) $\frac{2}{3}x^2-1$　　۳) $x^2-x$　　۴) $x^2-2$

$$\int \frac{7x^2-4x}{x^{\frac{2}{3}}}dx = \int 7x^2\times x^{-\frac{2}{3}}dx - \int 4x\times x^{-\frac{2}{3}}dx = 7\int x^{\frac{4}{3}}dx - 4\int x^{\frac{4}{3}}dx - 4\int x^{\frac{1}{3}}dx$$

$$7\times\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - 4\times\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = 3x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{4}{3}} + c \rightarrow$$

$$3x^2\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{x} + c = 3\sqrt[3]{x}\left(x^2-x\right)+c \rightarrow f(x) = x^2-x$$

۵.اگر $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}{x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)+c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟ **«سراسری تجربی - ۹۵»**

۱) $2x+2$　　۲) $2x-1$　　۳) $x-2$　　۴) $x+2$

$$x+\sqrt{x} = \sqrt{x}(1+\sqrt{x}) \rightarrow$$

$$\int \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{x^2} \longrightarrow \int \frac{\sqrt{x}\,(x-1)}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{x}\,(x)}{x^2}dx - \int \frac{\sqrt{x}}{x^2}dx$$

$$= \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2}dx - \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx - \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C \rightarrow \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + C \rightarrow f(x) = 2x+2$$

# ساده‌سازی و انتگرال‌گیری

**الف—** با استفاده از اتحادها، گویا کردن مخرج کسر و تفکیک کسر می‌توانیم بعضی از انتگرال‌ها را ساده کرده و سپس حاصل انتگرال را بیابیم.

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}dx \qquad \int \frac{(x+1)+1}{\sqrt{x+1}}dx=\int \sqrt{x+1}\,dx+\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+1}+c$$

**ب—** با استفاده از اتحادهای مثلثاتی می‌توانیم بعضی از انتگرال‌ها را ساده نمود و سپس حاصل را به دست آورد.

$$\int \frac{\cos 2x}{1+\cos 2x}dx \qquad \int \frac{2\cos^2 x-1}{2\cos^2 x}dx=\int dx-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x}=x-\frac{1}{2}\tan x+c$$

۶.حاصل $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2\sin^2 x}$ کدام است؟ **«سراسری ریاضی داخل- ۹۵»**

۱) $1-\sqrt{2}$ ۲) $1-\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{2}-1$ ۴) $\frac{3}{4}$

میدانیم:

$$1+\cos 2x=2\cos^2 x$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}=\int \cot^2 x dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}((1+\cot^2 x)-1)dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cot^2 x)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1)dx=-\cot x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\cot\frac{\pi}{2}-\cot\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-(0-1)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=1-\left(\frac{2x-\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{4}$$

۷. حاصل $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ برابر کدام است؟ «سراسری تجربی داخل - ۱۳۹۴»

۱) $1$ ۲) ۲ ۳) $\pi$ ۴) صفر

میدانیم:

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \int_0^{\pi}\frac{1}{\frac{1}{|\cos x|}} = \int_0^{\pi}|\cos x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos dx$$

$$\sin x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(-\sin x\,\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)\right]-\left[\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right]=1-(-1)=2$$

**نکته:** در مسائل حد و مشتق و انتگرال می توانیم توابع را ساده نماییم.

# تابع اولیه و انتگرال نامعین

## قضیه‌ی تغییر متغیر

می‌دانیم $(u^{n+1})' = (n+1)u'.u^n$ و یا $u'.u^n = \frac{(u^{n+1})'}{n+1}$ پس:

$$\boxed{\int u'.u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \ ، \ n \neq -1}$$

باید عامل u را به ترتیبی در نظر بگیریم که مشتق آن در کنارش ظاهر شود. به مثال‌های زیر توجه کنید.

۱) $\int x^2(x^3+1)^3 dx$

با فرض $u = x^3 + 1$ آنگاه $u' = 3x^2$، کافی است (۳) را در داخل انتگرال ضرب کرده و $\frac{1}{3}$ را بیرون نگه‌داریم.

$$= \frac{1}{3}\int (3x^2)(x^3+1)^3 dx = \frac{1}{3}\int u'.u^3 dx = \frac{1}{3}.\frac{u^4}{4} + c = \frac{1}{12}(x^3+1)^4 + c$$

$$\int \sin^3 x.\cos x dx$$

با فرض $u = \sin x$ ، $u' = \cos x$ پس:

$$\int u'.u^3 dx = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

**نکته:** به فرمول‌های زیر دقت کنید:

$$\int u' \cos u\, dx = \sin u + c$$

$$\int u' \sin u\, dx = -\cos u + c$$

$$\int u'(1+\tan^2 u)\, dx = \tan u + c$$

$$\int u'(1+\cot^2 u)\, dx = -\cot u + c$$

**نکته:** در حالت کلی اگر تابع f بر بازه I شامل نقطه a پیوسته و توابع h و g در این بازه مشتق پذیر باشند آنگاه داریم:

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = g'(x)f(g(x)) - h'(x)f(h(x))$$

۸.اگر $G(x)=x^2\int_2^{\sqrt{x}}\frac{\ln(t+2)}{t^2}dt$ باشد. G'(۴) چند برابر ln ۲ است؟ **«سراسری ریاضی داخل- ۱۳۹۴»**

۱(۱　　　۱,۵ (۲　　　۲ (۳　　　۳ (۴

$$G'(x)=2x\int_2^{\sqrt{x}}2x\ \frac{\ln(t+2)}{t^2}dt+x^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{\ln(\sqrt{x}+2)}{x}-0\right)$$

$$G'(x)=2x\int_2^{\sqrt{x}}2x\ \frac{\ln(t+2)}{t^2}dt+x^2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\times\frac{\ln(4)}{4}\right)\to$$

$$2x\times(0)+(4)^2\left(\frac{1}{2\sqrt{4}}\times\frac{\ln(4)}{4}\right)=0+\ln(4)=0+\ln(2)^2$$

$=0+2\ln 2\to$ ۲ برابر ln ۲ می باشد

**نکته:** مقدار متوسط یا میانگین تابع $f$ بر بازه $[a,b]$ به صورت رابطه زیر می باشد:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

۹.مقدار میانگین تابع $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2}$ بر بازه ی [۴ و ۲] کدام است؟ **«سراسری ریاضی داخل- ۹۵»**

$\frac{۵}{۸}$ (۱　　　$\frac{۱۱}{۱۶}$ (۲　　　$\frac{۳}{۴}$ (۳　　　$\frac{۷}{۸}$ (۴

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

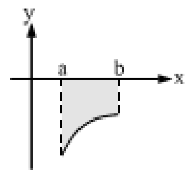
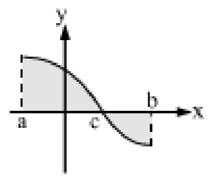
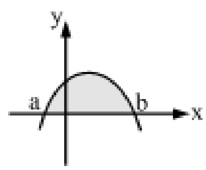
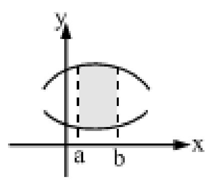
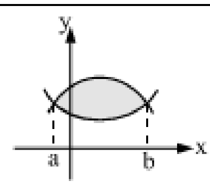
$$f(c)=\frac{\int_2^4\frac{x^2-2}{x^2}dx}{4-2}\to\frac{1}{2}\int_2^4\frac{x^2-2}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_2^4\left(1-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\int_2^4(1)dx-\int_2^4 2x^{-2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(x\ |_2^4-\frac{2x^{-1}}{-1}\ |_2^4\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(x\ |_2^4+\frac{2}{x}\ |_2^4\right)=\frac{1}{2}((4+(-2))+\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

# کاربردهای انتگرال معین

در محاسبه سطح محصور حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

| فرمول مورد استفاده | شکل | نوع حالت |
|---|---|---|
| $S=\left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert$ |  | حالت (۱): سطح محصور بین یک منحنی و محور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ ، اگر f در یک طرف محور x ها باشد. |
| $S=\left\lvert\int_a^c f(x)dx\right\rvert+\left\lvert\int_c^b f(x)dx\right\rvert$ |  | حالت (۲): سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور x ها و دو خط $x=a$ و $x=b$ ، اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول c قطع کند. |
| $S=\left\lvert\int_a^b f(x)dx\right\rvert$ |  | حالت (۳): سطح محصور بین یک منحنی با محور x ها. منحنی را با محور x ها قطع می‌دهیم تا a و b را بیابیم. |
| $S=\left\lvert\int_a^b (y_2-y_1)dx\right\rvert$ |  | حالت (۴): سطح محصور بین دو تابع در فاصله‌ی $x=a$ و $x=b$. |
| $S=\left\lvert\int_a^b (y_2-y_1)dx\right\rvert$ |  | حالت (۵): سطح محصور بین دو منحنی: ابتدا دو منحنی را با هم تلاقی داده، طول‌های نقاط تلاقی حدود انتگرال را می‌دهد. |

E.MAIL:milad.sajjadi619@gmail.com