بخش اول: یک فرمول و یک تست همیشگی کنکور

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int dx = \int 1\, dx = x + c$$

چند خاصیت مهم

$\int k\, f(x) = k\int f(x)dx \quad \rightarrow$ عدد ثابت از انتگرال عبور می‌کند

$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \quad \rightarrow$ انتگرال روی جمع و تفریق پخش میشه

$\int \left(f(x)g(x)\right)dx \neq \int f(x)\,dx \times \int g(x)\,dx \quad \rightarrow$ انتگرال روی ضرب و تقسیم پخش نمیشه

➔ با همین یه فرمول ساده می‌خوایم تست احتمالی ۹۷ رو حل کنیم.

قبل رفتن یه سر به دوران راهنمایی بزنیم.

$$\begin{cases} \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}} \;,\; x^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{x^7} \\ \frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x^7} = x^{-7} \\ x^m . x^n = x^{m+n} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{x^5} \,.\, x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}} . x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}+\frac{2}{3}} = x^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{x^7} \\ \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad \rightarrow \quad \frac{x^7}{x^{-2}} = x^{7-(-2)} = x^9 \end{cases}$$

فاکتور چیه: فاکتور همون تقسیم کردنه

$$x^2 + x = \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{فاکتور}}\left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = \sqrt{x}\ (x^{2-\frac{1}{2}} + x^{1-\frac{1}{2}})$$

$$= \sqrt{x}\,(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{x}\,(\sqrt[2]{x^3} + \sqrt{x}) = \sqrt{x}\,(x\sqrt{x} + \sqrt{x})$$

ذکر این نکته خالی از لطف نیست: x^2 رو به صورت $x.x$ و x رو به صورت $\sqrt{x}.\sqrt{x}$ نوشتن در فاکتورگیری کمک میکنه.

$$x^2 + x = \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{فاکتور}}\left(\frac{x.x}{\cancel{\sqrt{x}}} + \frac{\overset{\sqrt{x}.\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}.\cancel{\sqrt{x}}}}{\cancel{\sqrt{x}}}\right) : \sqrt{x}\,(x\sqrt{x} + \sqrt{x})$$

لازمه که توانی رو به بهترین شکل رادیکالی بنویسیم.

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3} = \sqrt[2]{x^2 . x} = \sqrt[2]{x^2} . \sqrt[2]{x} = x\sqrt{x} \\ x^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{x^5} = \sqrt[2]{x^4 . x} = \sqrt[2]{x^4} . \sqrt[2]{x} = x^2\sqrt{x} \\ x^{\frac{7}{2}} = \sqrt[2]{x^7} = \sqrt[2]{x^6 . x} = \sqrt[2]{x^6} . \sqrt[2]{x} = x^3\sqrt{x} \end{cases}$$

این ۳ تا رو حفظ باشیم حتماً

برای خودمون چند تا دیگه درست کنیم.

$$x^{\frac{9}{4}}=\sqrt[4]{x^9}=\sqrt[4]{x^8.x}=x^2\sqrt[4]{x}$$

$$x^{\frac{۱۶}{۵}}=\sqrt[۵]{x^{۱۶}}=\sqrt[۵]{x^{۱۵}.x}=x^{۳}\sqrt[۵]{x}$$

تا حالا باید فهمیده باشی که رادیکال تو انتگرال معنی نداره و باید اون رو توانی کنیم و حتما هم فهمیدی که تقسیم معنی نداره اینجا و باید یه جوری از شر تقسیم خلاص بشیم.

تیپ اول: انتگرال خطی:

ضرب کن، به توان برسون، توانی کن ← همه چیو شکل x^n کن ← مخرج رو با توان منفی بیار صورت

۱- اگر $\int(\sqrt{x}-\frac{۱}{x})^{۲}\,dx=\frac{f(x)}{۲x}+c$ باشد، $f(x)$ کدام است؟

۱) $x^{۳}-۸x\sqrt{x}+۲$　　۲) $x^{۳}-۴x\sqrt{x}+۲$　　۳) $x^{۳}-۸x\sqrt{x}-۲$　　۴) $x^{۳}-۴x\sqrt{x}-۲$

← کاری به سمت راست نداریم ← سمت چپ رو به توان ۲ می‌رسونیم

$$\int(\sqrt{x}-\frac{۱}{x})^{۲}dx=\int(x+\frac{۱}{x^{۲}}-۲\sqrt{x}.\frac{۱}{x})dx=\int x\,dx+\int x^{-۲}\,dx=-۲\int\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{x^{۱}}dx=\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{-۱}}{-۱}-۲\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}+C$$

$f(x)$　　$x^{-\frac{۱}{۲}}$　　درست و حسابی بنویس

$$=\frac{x^{۲}}{۲}-\frac{۱}{x}-۴\sqrt{x}+C\;\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}\;\frac{x^{۳}-۲-۸x\sqrt{x}}{۲x}+c=\frac{f(x)}{۲x}+c$$

چون $f(x)$ مخرج داره مخرج مشترک می‌گیریم　　　با سمت راست مقایسه کن

یه نکته خوب: اگه سمت راست $f(x)$ مخرج داشت ما هم مخرج مشترک می‌گیریم اما اگه $f(x)$ به صورت ضریب بود (مخرج نداره) اونوقت ما فاکتور می‌گیریم (گفتیم باید چیکار کنی)

تیپ دوم: کسری که مخرج اون یک‌جمله‌ای هستش $(x,\sqrt{x},\sqrt[۳]{x^{۲}},x\sqrt[۳]{x},\ldots)$ اول صورت روتا جایی که امکان داره ساده کن (اگه ساده نبود) اگه توان داره به توان برسون اگه حاصلضرب چند عبارته ضرب کن اگه رادیکالی داری توانی کن و. ..

حالا مخرج رو به صورت توانی بنویس (اگه رادیکالی بود) بعدش اون رو با توان قرینه در صورت ضرب کن

انتگرال بگیر ← آخر سر یا مخرج مشترک یا فاکتورگیری

۲- اگر $\int\frac{(۱+\sqrt{x})^{۲}-x}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}\,f(x)+C$ آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $۱+\sqrt{x}$　　۲) $۱+۲\sqrt{x}$　　۳) $۲+\sqrt{x}$　　۴) $۲+۲\sqrt{x}$

← کاری به سمت راست نداریم ← سمت چپ ← اول صورت رو ساده کن

$$\int\frac{(۱+x+۲\sqrt{x})-x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{۱+۲\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

← مخرج $\sqrt{x}$ رو به صورت توانی $x^{\frac{۱}{۲}}$ می‌نویسم و به صورت قرینه $x^{-\frac{۱}{۲}}$ در صورت ضرب می‌کنیم.

فاکتور　　$f(x)$

$$\int(۱+۲x^{\frac{۱}{۲}})x^{-\frac{۱}{۲}}\,dx=\int(x^{-\frac{۱}{۲}}+۲x^{\frac{۱}{۲}}.x^{-\frac{۱}{۲}})dx=\int(x^{-\frac{۱}{۲}}+۲)\,dx=۲x^{\frac{۱}{۲}}+۲x=۲\sqrt{x}+۲x=\sqrt{x}(۲+۲\sqrt{x})+c$$

$\Rightarrow \sqrt{x}\ f(x)+c \longrightarrow$ با سمت راست مقایسه کن

تیپ سوم: مخرج کسر چندجمله‌ای است $(1-\sqrt{x}, 1+\sqrt{x}, 1+x, \dots)$

اینجا دیگه انتقال مخرج به صورت و بقیه ماجرا جواب نمیده

چاره اینه صورت و مخرج رو با هم ساده کنیم با فاکتورگیری، اتحاد و در نهایت مخرج را حذف کنیم. چرا؟؟

$a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

اتحاد مزدوج مرموز $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$

۳- با شرط $x>1$ **آنگاه** $\int \frac{3-3x}{1-\sqrt{x}}dx = x.f(x)+C$ ، $f(x)$ **کدام است؟**

۱) $3+2\sqrt{x}$ ۲) $3+\sqrt{x}$ ۳) $3x-\sqrt{x}$ ۴) $3x-3\sqrt{x}$

دیگه مخرج یک جمله‌ای نیست باید مخرج رو از بین ببریم. من یه $1-\sqrt{x}$ می‌خوام

$$\int \frac{3(1-x)}{1-\sqrt{x}}dx = 3\int \frac{\cancel{(1-\sqrt{x})}(1+\sqrt{x})}{\cancel{1-\sqrt{x}}}dx = 3\int (1+\sqrt{x})dx = 3(x+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) = 3x+2x\sqrt{x} = x(3+2\sqrt{x})+c$$

مزدوج ، $x^{\frac{1}{2}}$ ، فاکتور ، $f(x)$

$\Rightarrow x.f(x)+c \longrightarrow$ با سمت راست مقایسه کن

بخش دوم: مثلثاتی و نمایی لگاریتمی:

$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

$\int (1+\tan^2 ax)dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$

$\int (1+\cot^2 ax)dx = -\frac{1}{a}\cot ax + c$

⬅ خیلی واضح بهت بگم که فقط همین چهار تا رو برای مثلثات داریم یعنی هر چی بهت دادن باید به یکی از این چهار تا برسی به کمک اتحادها مثلثاتی

⬅ اینم تمام فرمول‌های مثلثات موردنیاز

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\cos^2 x = 1-\sin^2 x = (1-\sin x)(1+\sin x)$

$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = (1-\cos x)(1+socx)$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$

✓ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

✓ $\cos 2x = 1-2\sin^2 x \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

✓ $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

✓ $\frac{1}{\sin^2 x} = 1+\cot^2 x$

این ٤ تای آخر واسه زمانی کاربرد دارن که انتگرال $\sin^2$ و $\cos^2$ مطرح است باید خیلی سریع تبدیل کنیم (چون توان ۲ مثلثاتی براش قاعده مستقیم نداریم).

$$٤)\ \int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\,dx \overset{\text{مزدوج}}{=}\int \frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}{\cancel{\cos x-\sin x}}\,dx$$

$$\int(\cos x+\sin x)\,dx=\sin x-\cos x+c$$

$$٥)\ \int(\sqrt{1+tag^2 x}\,\sin x)\,dx \quad\to\quad if \qquad \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$$

$$\int\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\sin 2x\,dx=\int(\frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}2\sin x\cos x)\,dx=\int\frac{1}{|\cos x|}\times 2\sin x\cos x\,dx\to\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\to\cos x<0$$

$$\to\ \int\frac{1}{\cancel{-\cos x}}\times 2\sin x\cancel{\cos x}\,dx=\int -2\sin x\,dx=2\cos x+c$$

$$٦)\ \int\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\,dx\overset{\text{مزدوج}}{=}\int\frac{\cancel{(1-\cos x)}((1+\cos x))}{\cancel{1-\cos x}}\,dx=\int(1+\cos x)\,dx=x+\sin x+c$$

انتگرال e^x و $\frac{1}{x}$

$$\int e^x\,dx=e^x+c \quad,\quad \int e^{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+c \quad\to\quad \int e^{3x+6}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x+6}+c$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int x^{-1}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx=Ln|x|+c$$

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}Ln|ax+b|+c \quad\to\quad \int\frac{dx}{2x+1}=\frac{1}{2}Ln|2x+1|+c$$

بخش سوم: انتگرال معین

همون انتگرال قبلی هستش فقط آخرش اختلاف حد پایین و بالا را حساب می‌کنیم.

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

$$٧)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sin x+\cos x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x+\cos x\ dx=-\cos x+\sin x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=(-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2})-(-\cos 0+\sin 0)=2$$

$$٨)\ \int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\frac{1}{|\cos x|}}=\int_0^{\pi}|\cos x|\,dx \xlongequal[\text{و در ربع دوم منفیه}]{\cos x\ \text{در ربع اول مثبت}} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos x\,dx$$

$$=\sin x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\ \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=(1-0)-(0-1)=2$$

⬅ از رو شکل که جلوتر می‌گیم ساده‌تر انتگرالش حساب میشه

$$٩)\ \int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos x}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos x)}\,dx\xrightarrow{1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}}=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{x}{2}}\,dx=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{x}{2}\right|dx$$

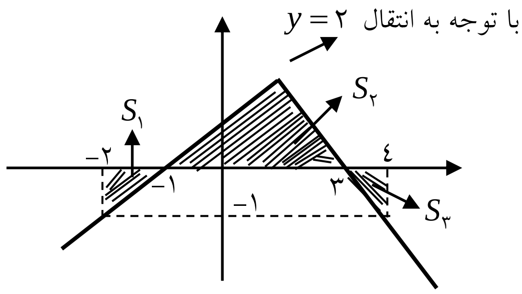
$$\xlongequal[\sin\frac{x}{2}\geq 0]{0\leq x\leq 2\pi\to 0\leq\frac{x}{2}<\pi} 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{x}{2}\,dx=2(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\ \cos\frac{x}{2})\ \Big]_0^{2\pi}=-4(-1-1)=8$$

- کلاً زیر رادیکال رو یه جوری باید بنویسیم که بتونیم از شر رادیکال خلاص بشیم
- بهترین کار اینه که زیر رادیکال رو به صورت توان ۲ یه عبارتی دربیاریم و بعد از اون قدرمطلق و ....

بخش چهارم: انتگرال‌های قدرمطلقی و جزء صحیح

قبلش اینو بدون که انتگرال یعنی مساحت علامت‌دار یعنی مساحت اون قسمت‌هایی که بالای محور x هاست رو مثبت و اون قسمت‌هایی که پایین محور x هاست رو منفی در نظر می‌گیریم و این مقادیر رو با هم جمع می‌کنیم تا انتگرال به دست بیاد.

تیپ اول: خودش شکل رو میده و ما یه مساحت ساده را حساب می‌کنیم.



۱۰) $\int_{-2}^{4}(2-|x-1|)\,dx$

زیر محور xها — بالای محور xها

جواب: $-S_1+S_2-S_3$ — زیر محور xها

$$\begin{cases} \text{محل برخورد تابع با محور } x \text{ها لازمه} \rightarrow \quad y=0 \\ 2-|x-1|=0 \Rightarrow |x-1|=2 \Rightarrow x-1=2 \rightarrow x=3 \\ x-1=-2 \rightarrow x=-1 \end{cases}$$

ارتفاع هم لازمه $\begin{cases} f(-2)=-1 \\ f(4)=-1 \end{cases}$

$$S_1=\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{4\times 2}{2}=4$$

$$-\frac{1}{2}+4-\frac{1}{2}=3$$

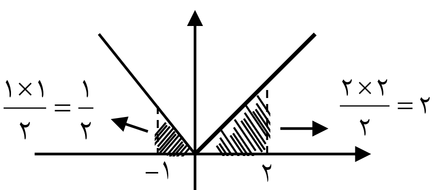
$$S_3=\frac{1\times 1}{2}=\frac{1}{2}$$

تیپ دوم: شکل نمیده ولی خودمون می‌تونیم رسم کنیم.

۱۱- اگر $f(x)=|x|-[x]$ آنگاه حاصل $\int_{-1}^{2}f(x)\,dx$ کدام است؟

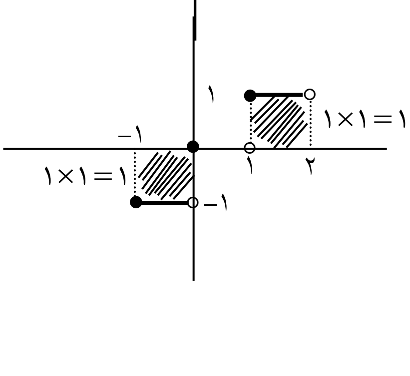
۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

کافیه شکل‌ها رو رسم کنی در بازه خواسته شده



$$\longrightarrow 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{5}{2}-0=\frac{5}{2}$$



$$\longrightarrow 1-1=0$$

تیپ سوم: نمیشه شکل کشید باید قدرمطلق رو تعیین علامت و جزء صحیح رو تعیین مقدار کنیم.

تذکر جدی: همیشه حق با جزء صحیح هستش یعنی تو بازه‌بندی وقتی قدرمطلق و جزء‌صحیح با هم بـودن اولویـت رو بـه جزء صحیح بده

⬅ اگر بین قدرمطلق، جزء صحیح و. .. ضرب بود دیگه شکل جواب نمیده ولی اگر جمع یا تفریق بود شکل بهتره

۱۲- اگر $f(x)=(x+|x|)[x]$ آنگاه $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ٤

دیگه نمی‌تونیم شکل بکشیم (چرا؟؟) چون بین عبارت‌ها ضرب هست.

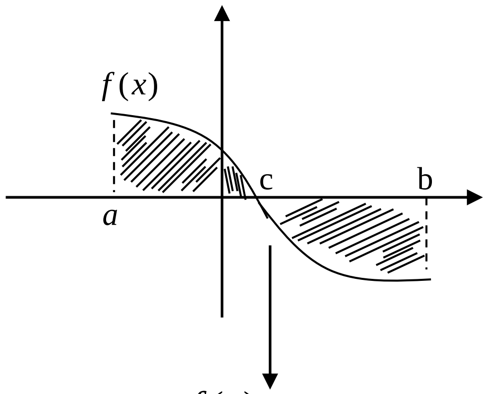
اولویت با جزء صحیح یعنی یک واحد قدرمطلق رو تعیین علامت و جزء صحیح رو تعیین مقدار می‌کنیم.

$$\int_{-1}^{0}(\cancel{x-x})(-1)\,dx+\int_{0}^{1}(\cancel{x+x})(0)\,dx+\int_{1}^{2}(x+x)(1)\,dx+\int 2x\,dx=x^{2}\Big]_{1}^{2}=3$$

در این بازه x منفی میشه و جزء صحیح هم میشه ۱-

در این بازه x مثبت میشه و جزء صحیح صفر میشه

بخش پنجم: سطح محصور



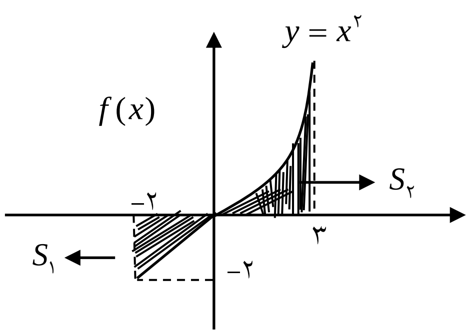
برای یافتن c کافیه که $f(x)=0$ قرار بدیم

$$S=\left|\int_{a}^{c} f(x)\,dx\right|+\left|\int_{c}^{b} f(x)\,dx\right|$$

اینجا قرار مساحت را پیدا کنیم و مساحت منفی هم نداریم هر جایی که منفی شد اونو مثبت می‌کنیم.

۱۳- مساحت ناحیه محصور بین نمودار $f(x)=\begin{cases} x; & -2\le x\le 0 \\ x^{2}; & 0\le x\le 3\end{cases}$ ، محـور xهـا و دو خـط $x=-2$ و $x=3$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ٤) ۱۱

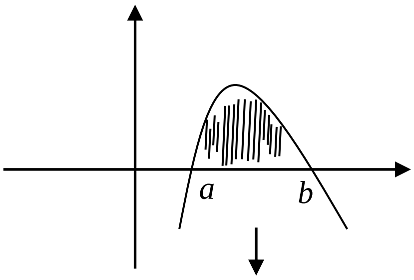


$$\begin{cases} S_1=\dfrac{2\times 2}{2}=2 \\ S_2=\left|\int_{0}^{3} x^{2}\,dx\right|=\left|\dfrac{x^{3}}{3}\Big]_{0}^{3}\right|=\dfrac{27}{3}-0=9 \end{cases}$$

مساحت ناحیه محصور ⬅ $S_1+S_2=2+9=11$

⬅ سطح محصور بین یک منحنی و محور xها

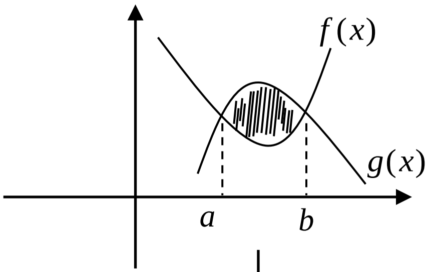
$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$



برای یافتن a و b کافیه که $f(x)=۰$ قرار بدیم.

⬅ سطح محصور بین دو منحنی (بدون محور xها)

$$S=\left|\int_a^b (f(x)-g(x)\,dx\right|$$

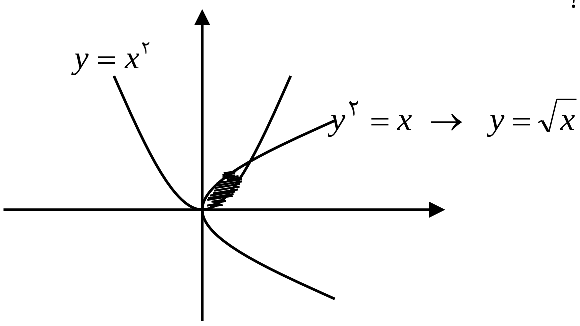


برای یافتن a و b کافیه که $f(x)=g(x)$ قرار بدیم.

۱۴- سطح محصور بین دو منحنی $x=y^۲$ و $y=x^۲$ کدام است؟

۱) ۱		۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۳}$		٤) $\frac{۴}{۳}$



ابتدا نقاط تلاقی را پیدا می‌کنیم.

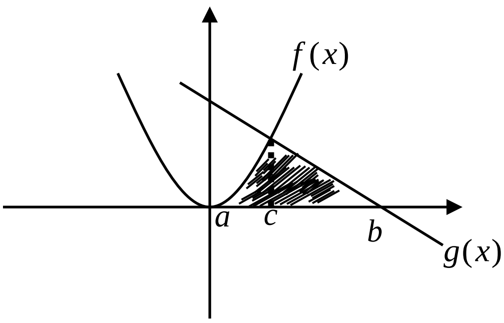
$$\begin{cases} y=x^۲ \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \to x^۲=\sqrt{x} \qquad x^۴=x \to x^۴-x=۰ \to x(x^۳-۱)=۰ \qquad \begin{matrix} x=۰ \\ x=۱ \end{matrix}$$

$$\left|\int_۰^۱ (x^۲-x^{\frac{۱}{۲}})\,dx\right| = \left|(\frac{x^۳}{۳}-\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}})\,\Big]_۰^۱\right| = \left|\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۳}\right| = \frac{۱}{۳}$$

⬅ سطح محصور بین دو منحنی و محور xها:

$$S=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b g(x)\,dx\right|$$

از c تا b مساحت زیر $g(x)$ هستش		از a تا c مساحت زیر $f(x)$ هستش

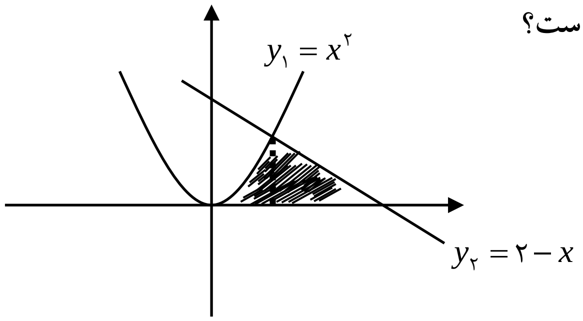


یافتن b: $g(x)=۰$

یافتن a: $f(x)=۰$

یافتن c: $f(x)=g(x)$

۱۵- با توجه به شکل مقابل، مساحت ناحیه سایه زده چه قدر است؟



۱) $\frac{4}{3}$ **۲)** $\frac{7}{6}$

۳) $\frac{5}{6}$ **٤)** $\frac{2}{3}$

نقاط تلاقی دو تابع را تعیین می‌کنیم.

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

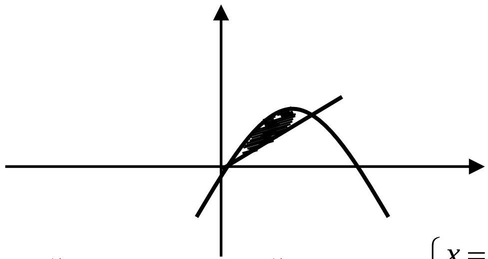
نقطه تلاقی y_2 را با محور xها تعیین می‌کنیم.

$$y_2 = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$

با توجه به شکل مساحت را پیدا می‌کنیم.

$$\left|\int_0^1 x^2\,dx\right| + \left|\int_1^2 (2-x)dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right| + \left|2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2\right| = \left|\frac{1}{3} - 0\right| + \left|2 - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

۱٦- مساحت ناحیه زیر منحنی به معادله‌ی $y = -x^2 + 5x$ و بالای خط $y = x$ کدام است؟



ابتدا نقاط تلاقی را پیدا می‌کنیم.

$$-x^2 + 5x = x \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

مساحت بین دو تابع قرار دارد.

$$S = \left|\int_0^4 (-x^2 + 5x) - x)\,dx\right| = \left|\int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx\right|$$

$$\left|(-\frac{x^3}{3} + 2x^2)\ \Big]_0^4\right| = \left|(\frac{-64}{3} + 32) - 0\right| = \frac{32}{3}$$

بخش ششم: انتگرال میده ← مشتق میخواد ← قضیه داریم براش

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

سمت راست بیا انتگرال را پاک کن، dx رو هم از بین ببر به جای t هم x بزار ← تموم شد.

بهتر است بدانیم که انتگرال یعنی مساحت وقتی انتگرال رو از a تا a می‌خوایم یعنی اصلاً حرکت نکردیم یعنی اصلاً مساحت درست نمی‌شه.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \rightarrow$$ این هم بدانیم، خوب است ضرر ندارد!!!!

۱۷- اگر $f(x)=\int_{1}^{x}\frac{dt}{1+t^2}$ معادله مماس بر نمودار تابع واقع بر آن به طول ۱ کدام است؟

۱) $y=2x-2$ ۲) $y=2x-1$ ۳) $2y=x-2$ ٤) $2y=x-1$

برای نوشتن معادله خط مماس چی می‌خوایم:

۱) x می‌خوایم ← خودش داده $x=1$

۲) y می‌خوایم ← یعنی $f(1)$ ← $f(1)=\int_{1}^{1}\frac{dt}{1+t^2}=0$ ← اصلاً تکون نخورده

۳) مشتق می‌خوایم ← می‌گیریم از دو طرف

$f'(x)=\frac{1}{1+x^3}$ انتگرال و dt پاک به جای t، x میزاریم. $\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$

حالا همه چیز داریم ← می‌ریم سراغ نوشتن معادله

$$y-y_0=m(x-x_0)\rightarrow\ y-0=\frac{1}{2}(x-1)\ \rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad \boxed{2y=x-1}$$

بخش هفتم: مشتق $f'(x)$ میده ← تابع اولیه $f(x)$ می‌خواد

سریع انتگرال بگیر $\int f'(x)\,dx=f(x)$

۱۸- اگه $f'(x)=\frac{1+tag^2x}{tag^2x}$, $f(\frac{\pi}{4})=0$ آنگاه $f(\frac{3\pi}{4})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ٤

$$\int f'(x)\,dx=f(x)+c\quad\Rightarrow\quad\int\frac{1+tag^2x}{tag^2x}=\int(\frac{1}{tag^2x}+1)\,dx=\int(\cot^2x+1)\,dx$$

$$=-\cot x+c\quad\rightarrow f(\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow -\cot(\frac{\pi}{4})+c=0\quad\Rightarrow\ c=1$$

$$f(x)=1-\cot x\quad\Rightarrow\quad f(\frac{3\pi}{4})=1-\cot(\frac{3\pi}{4})=1+1=2$$