معادله به فرم $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$ را یک معادله درجه ی دوم می نامند و فرم منحنی آن به صورت سهمی می باشد.

دو روش برای پیدا کردن ریشه های معادله وجود دارد.
- روش $\Delta$
- روش $\Delta'$

۱- روش $\Delta$

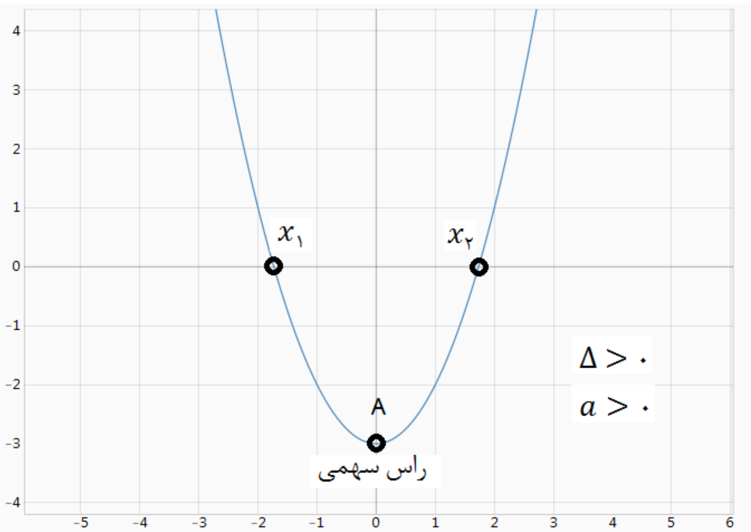
$$\Delta = b^2-4ac \rightarrow \begin{cases} \Delta>0 & \text{دو ریشه ی حقیقی دارد} \\ \Delta=0 & \text{یک ریشه ی مضاعف دارد} \\ \Delta<0 & \text{ریشه ی حقیقی ندارد} \end{cases}$$

زمانیکه $\rightarrow \quad x_1 , x_2 = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

زمانیکه $\Delta=0 \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{-b}{2a}$

- زمانیکه $\Delta>0$ دو ریشه دارد ، یعنی محور OX هارا در دو نقطه قطع می کند
- اگر $a>0$ سهمی رو به بالا خواهد بود .
- اگر $a<0$ سهمی رو به پایین خواهد بود.

در این حالت سهمی دارای Min خواهد بود. $a>0$



مختصات رأس منحنی

$$A = \begin{vmatrix} x = -\dfrac{b}{2a} \\ y = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{vmatrix}$$

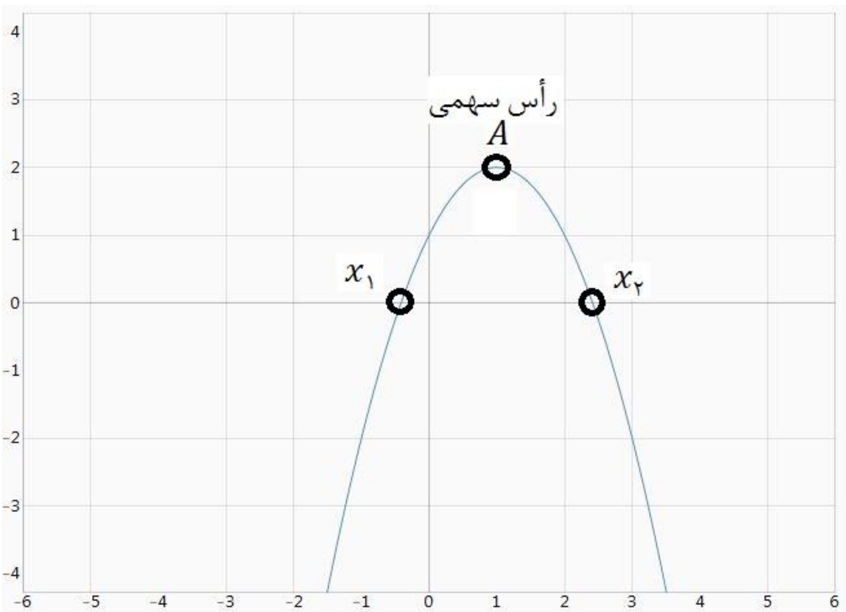
معادله ی محور تقارن سهمی

$$x = -\frac{b}{2a}$$

✓ نکته ی مهم : اگر در تست ها بحث Max و Min کردند منظورشان $-\dfrac{\Delta}{4a}$ می باشد.

$a < 0$ در این حالت سهمی دارای Max خواهد بود.

معادله ی تنها مماس افقی سهمی $y = -\dfrac{\Delta}{4a}$




✓ هرگاه در تستی گفته شد ، سهمی از هر سه ناحیه یا چهار ناحیه می گذرد منظورشان $\Delta > 0$ می باشد.

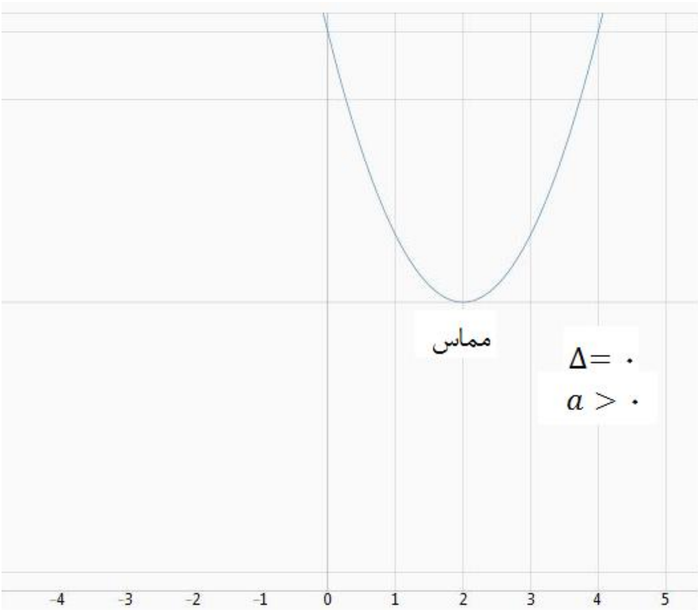
نکته : هر تابع درجه ی دوم، محور y ها را فقط در یک نقطه قطع می کند.

نکته : هر جا گفتند محور x ها را قطع کرده است منظورشان $y = 0$ می باشد.

نکته : هر جا گفتند محور y ها را قطع کرده است منظورشان $x = 0$ می باشد.

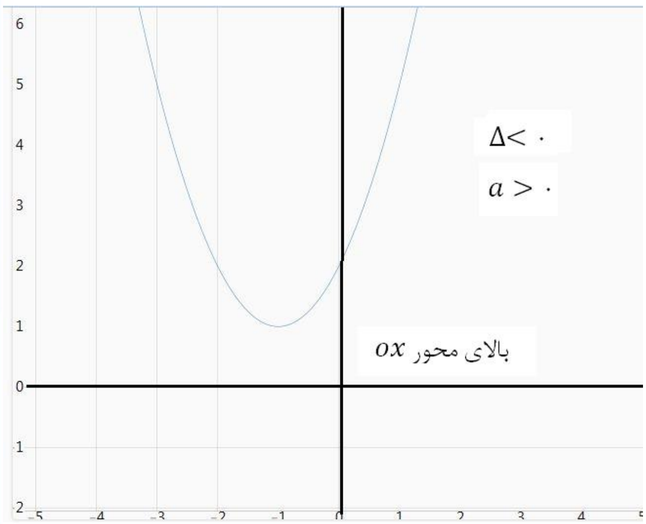
زمانیکه $\Delta = 0$ شود، یعنی فقط و فقط یک ریشه مضاعف(مکرر مرتبه ی زوج) دارد.

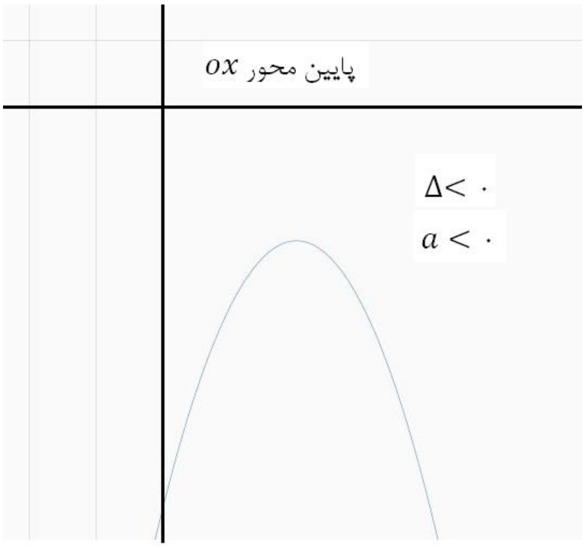
۱. هر گاه گفته شد بر محور OX مماس است منظور $\Delta = 0$ می باشد.
۲. هر گاه گفته شد مماس افقی سهمی، محور OX ها می باشد $\Delta = 0$ می باشد.




زمانیکه $\Delta < 0$ شود، یعنی معادله فاقد جواب می باشد.

۱. هر گاه گفته شد محور OX ها را قطع نمی کند منظور $\Delta < 0$ می باشد.
۲. هر گاه گفته شد بالای محور OX ها باشد $\Delta < 0$ و $a > 0$
۳. هر گاه گفته شد پایین محور OX ها باشد $\Delta < 0$ و $a < 0$



۱- تعیین علامت عبارت درجه ۱

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | مخالف علامت $a$ | | موافق علامت $a$ | |

$$F(x) = ax + b \qquad x = -\frac{b}{a}$$

الف) ابتدا ریشه ی معادله را پیدا کنید.

نکته : اگر کل عبارت داخل قدر مطلق باشد و ضریب آن مثبت باشد همواره مثبت خواهد بود.

$$|ax + b|$$

تعیین علامت عبارات درجه دوم

- اگر توانستیم از روش های تجزیه ، فاکتورگیری و … نیز ریشه ها را پیدا کنید.
- برای تعیین علامت عبارات درجه دوم بایستی $\Delta$ آن ها را محاسبه کنیم.

1) $\Delta > 0$

دو ریشه خواهد داشت

| $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | موافق علامت $a$ | | مخالف علامت $a$ | | موافق علامت $a$ | |

2) $\Delta = 0$

یک ریشه خواهد داشت

| $-\infty$ | | $x$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| | موافق علامت $a$ | | موافق علامت $a$ | |

3) $\Delta < 0$

ریشه ندارد

| $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|
| | همواره موافق علامت $a$ | |

نکته : اگر در تستی گفتند $x^a$ یا هر متغیر دیگری را طوری بیابید که عبارت درجه ی دوم زیر همواره مثبت یا همواره منفی باشد بایستی از روش زیر اقدام نمائید.

۱- بایستی .شود محاسبه $\Delta < 0$

۲- اگر گفتند همواره

الف ) مثبت ← $a > 0$

ب ) منفی ← $a < 0$

۳- در پایان بایستی از دو مجموعه جواب بدست امده اشتراک بگیریم

✓ در تعیین علامت ها ؛ عبارت $(x \pm a)^{\text{زوج}}$ همواره مثبت بوده و دارای ریشه ی مضاعف می باشد.

✓ عبارت $x^2 + x + k$ به شرط اینکه $k \geq 1$ باشد همواره مثبت می باشد و فاقد ریشه نیز می باشد.

نکته : اگر در تستی یا سوالی گفتند که دو تابع $f$ و $g$ یکدیگر را قطع می کنند، مختصات محل تلاقی آن ها را پیدا کنید. که در سال های قبل بسیار بسیار تکرار شده اند؛ کافیست معادله ی آن ها را مساوی هم قرار دهیم سپس معادله ی حاصل شده را حل نمائیم؛ مختصات بدست آمده، محل تلاقی دو تابع خواهد بود.

طول نقاط تلاقی بدست می آید. $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow \quad f(x) = g(x)$

برای پیدا کردن عرض نقاط تلاقی کافیست مختصات طول را در ضابطه جاگذاری کنیم تا مختصات عرض آن ها نیز بدست بیاید.

## بحث در وجود و علامت ریشه های معادله درجه دوم :

۱- نکته بسیار مهم کنکوری که در تمامی تست های کنکوری کاربرد دارد و چندین بار در کنکورهای سال های اخیر مورد استفاده قرار گرفته اند.

در معادله ی $\quad ax^2 + bx + c = 0$

1) اگر $\quad a + b + c = 0 \quad \rightarrow$ معادله دو ریشه ی حقیقی دارد $\quad x_1 = 1 \ , \quad x_2 = \dfrac{c}{a}$

2) اگر $\quad a + c = b \quad \rightarrow$ معادله دو ریشه ی حقیقی دارد $\quad x_1 = -1 \ , \quad x_2 = -\dfrac{c}{a}$

3) اگر $c=0$ → نتیجه می دهد → $x_1=0\ , x_2=-\frac{b}{a}$

۴- اگر $\Delta>0$ باشد ، معادله دو ریشه ی متمایز دارد و داریم :

الف ) اگر $\frac{c}{a}>0$ باشد، دو ریشه ی هم علامت هستند و چنانچه :

- $-\frac{b}{a}>0$ دو ریشه مثبت
- $-\frac{b}{a}<0$ دو ریشه منفی
- ب ) اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد، دو ریشه مختلف العلامه هستند.

چنانچه :

۱- $-\frac{b}{a}>0$ آنگاه قدر مطلق ریشه ی مثبت از قدر مطلق ریشه ی منفی بزرگتر است.

۲- $-\frac{b}{a}<0$ آنگاه قدر مطلق ریشه ی منفی از قدر مطلق ریشه ی مثبت بزرگتر است.

۵- اگر $b=0$ باشد ، معادله دو ریشه قرینه هم خواهند بود ( به ش $ac<0$

۶- اگر $b=c=0$ معادله ی ریشه ی مضاعف صفر دارد و بالعکس.

۷- اگر $\boxed{a=c}$ آنگاه دو ریشه ی معادله عکس یکدیگرند و بالعکس.

۸- اگر $\boxed{a=-c}$ آنگاه دو ریشه ی معادله عکس و قرینه ی یکدیگرند و بالعکس.

۹- اگر دو معادله ی درجه دوم دارای یک ریشه ی مشترک باشند، می توان با حذف جمله ی درجه ی ۲ آن ریشه ی دیگر را نیز پیدا کنیم .

۱۰- **(نکته کنکوری )** : اگر دو معادله ی $\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ a'x^2+b'x+c'=0 \end{cases}$ دارای ریشه های یکسان باشند آنگاه :

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ نسبت ضرایب با هم برابر خواهد بود.

روابط بین ریشه ها و کاربرد آن ها

۱- تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه ی آن مشخص باشند، اگر مجموع دو ریشه را $S$ و حاصلضرب آن ها $P$ باشد، معادله ی تشکیل شده به صورت زیر خواهد بود :

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

$S = x_1 + x_2$

$P = x_1 \,.\, x_2$

روابط بین ریشه ها :

1. $x_1 + x_2 = S$
2. $x_1 \,.\, x_2 = P$
3. $\boxed{S = -\frac{b}{a}}$
4. $\boxed{P = \frac{c}{a}}$
5. $x^2 + x^2 = S^2 - 2P$
6. $x^3 + x^3 = S^3 - 3PS$
7. $x^4 + x^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$
8. $|x_1 - x_2| = \sqrt{S^2 - 4P} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
9. $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$
10. $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \sqrt{S - 2\sqrt{P}}$
11. $\frac{1}{\ } \qquad \frac{1}{x_2} = \frac{S}{P}$
12. $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$ یک ریشه ی معادله $k$ برابر دیگری باشد.

13. $\Delta = b^2 - 4ac = k^2a^2$ اگر یک ریشه $k$ واحد از ریشه ی دیگر بیشتر یا کمتر باشد:

اگر ضرایب $a$ , $b$ , $c$ گویا باشند و یک ریشه ی معادله $\alpha + \sqrt{\beta}$ باشد ، آنگاه ریشه ی دیگر معادله $\alpha - \sqrt{\beta}$ خواهد بود.

نوشتن معادله درجه ی دومی که ریشه هایش رابطه ی خاصی با ریشه های معادله ی مفروضی دارند :

۱- معادله ی درجه دومی که هر یک از ریشه هایش عکس ریشه های $ax^2 + bx + c = 0$ باشد عبارت است از :

$cx^2 + bx + a = 0$ جای $a$ , $c$ را تعویض می کنیم.

۲- معادله ی درجه دومی که ریشه هایش قرینه ی ریشه های $ax^2 + bx + c = 0$ باشد

عبارت است از:

$ax^2 - bx + c = 0$ علامت $b$ را قرینه می کنیم.

۳- معادله ی درجه دومی که ریشه هایش $k$ برابر ریشه های معادله ی $ax^2 + bx + c$ باشد

عبارت است از :

$$ax^2 + kbx + k^2c = 0$$

۴- معادله ی درجه ی دومی که ریشه هایش $k$ واحد از ریشه های معادله $ax^2 + bx + c$ بیشتر باشد عبارت است از :

$$a\left(\underline{x-k}\right)^2 + b\left(\underline{x-k}\right) + c = 0$$

۵- معادله درجه ی دومی که ریشه هایش $k$ واحد از ریشه های معادله ی $ax^2 + bx + c$ کمتر باشد عبارت است از :

$$a\left(\underline{x+k}\right)^2 + b\left(\underline{x+k}\right) + c = 0$$

۶- اگر در معادله $ax^2+bx+c=0$ ، $x$ را به $x^3$ تبدیل کنیم، معادله ی جدیدی بدست می آید که ریشه های آن جذر ریشه های معادله اولیه است.

$$ax^4+bx^2+c=0$$

۷- اگر در معادله ی $ax^2+bx+c=0$ ، $x$ را به $\sqrt{x}$ تبدیل کنیم، معادله جدیدی بدست می آید که ریشه های آن مربع مربع ریشه های معادله ی $ax^2+bx+c=0$ خواهد بود.

$$a\left(\sqrt{x}\right)^2+b\sqrt{x}+c=0 \ \rightarrow \ ax+b\sqrt{x}+c=0$$

نکته : در تمامی روابط بین ریشه ها، به صورت عکس ، عمل خواهیم کرد.

معادلات دو مجذوری : $ax^4+bx^2+c=0$

روش حل معادله :

برای حل این معادله ابتدا $x^2=t$ قرار بدهید ( تغییر مجهول ) معادله ی حاصل شده به شکل زیر خواهد بود $at^2+bt+c=0$ و سپس آنرا حل کرده و مقادیر حاصل شده برای $t$ را برابر با $x^2$ قرار خواهیم داد.

نکته : $x^2$ به هیچ وجه برابر مقدار منفی نخواهد بود.

بحث در مقدار و علامت ریشه های معادله ی دو مجذوری :

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=t} at^2 + bt + c = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta > 0$:

- $\frac{c}{a} > 0 \ , \ -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow$ چهار ریشه ی حقیقی متمایز
- $\frac{c}{a} > 0 \ , \ -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow$ ریشه ی حقیقی ندارد
- $\frac{c}{a} < 0 \rightarrow$ دو ریشه ی حقیقی متمایز

$\Delta = 0$:

- $-\frac{b}{2a} > 0 \rightarrow$ دو ریشه ی حقیقی متمایز
- $-\frac{b}{2a} < 0 \rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد