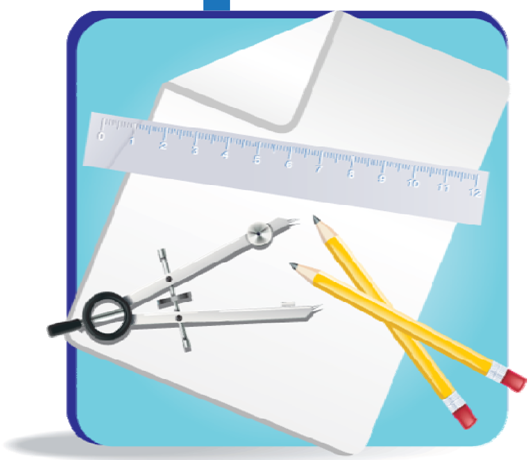
گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

حساب دیفرانسیل و انتگرال



فصل ۱

حساب دیفرانسیل و انتگرال — فصل ۱: دنباله‌ها

۱- به فرض آن‌که $a_n = \begin{cases} \dfrac{n+۴}{n+۲} & n < ۱۰ \\ \dfrac{۱}{۲}a_{n-۱} & n \geq ۱۰ \end{cases}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) غیریکنوا و واگراست.
۲) یکنوا ولی بی‌کران است.
۳) غیریکنوا و همگرا به $\frac{۱}{۲}$ است.
۴) یکنوا و همگرا به صفر است.

۲- کدام گزینه برای دنباله واگرا صحیح است؟

۱) اگر صعودی باشد بی‌کران است.
۲) اگر بی‌کران باشد الزاماً غیریکنواست.
۳) اگر نزولی باشد الزاماً کراندار است.
۴) اگر کراندار باشد الزاماً یکنواست.

۳- اگر در دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ برای هر عدد طبیعی n، $۰ \leq a_n \leq b_n$ و .... باشد، اگر $\{b_n\}$ همگرا باشد، آن‌گاه $\{a_n\}$ نیز همگراست.

۱) $\{a_n\}$ کراندار
۲) $\{b_n\}$ کراندار
۳) $\{b_n\}$ یکنوا
۴) $\{a_n\}$ یکنوا

۴- کدام گزینه صحیح است؟

۱) هر دنباله همگرا با جملات گویا دارای حد گویاست.
۲) نمی‌توان دنباله‌ای با جملات گنگ پیدا کرد که حد گویا داشته باشد.
۳) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ و $L > ۰$ آن‌گاه $a_n \geq ۰$.
۴) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ و $a_n > ۰$ آن‌گاه $L \geq ۰$.

۵- اگر $f(x) = [۲x]$، دنباله $\{a_n\}$ کدام باشد تا دنباله $\{f(a_n)\}$ همگرا به ۵ باشد؟

۱) $a_n = \dfrac{۳n+۱}{n+۵}$
۲) $a_n = \dfrac{۲n+۱}{n+۱}$
۳) $a_n = \dfrac{۳n+۱۰}{n+۱}$
۴) $a_n = \dfrac{۵n+۱}{n+۱}$

۶- جملات دنباله $\left\{\dfrac{۳n^۲+۲}{n^۲+۱۹}\right\}$ برای $n > ۸$ به کدام بازه تعلق دارند؟

۱) $[۲/۳۴ , ۳)$
۲) $[۲/۴۵ , ۳)$
۳) $(۳ , ۳/۵۵]$
۴) $(۳ , ۳/۶۶]$

۷- اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای واگرا باشد، کدام دنباله الزاماً واگراست؟

۱) $b_n = (-۱)^n a_n$
۲) $b_n = a_{۲n}$
۳) $b_n = a_{۲n} + a_{۲n-۱}$
۴) $b_n = \dfrac{۱-۲a_n}{۳}$

۸- دنباله‌ی $\left\{\left[\dfrac{۲n-۱}{n+۲}\right]\right\}$ به چه عددی همگراست؟ ($[\ ]$ نماد جز صحیح است)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۲-
۴) واگراست

۹- اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا به عدد مثبت L باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) بی‌شمار جمله از جملات دنباله مثبت می‌باشند.
۲) تعداد متناهی از جملات دنباله عددی مثبت می‌باشند.
۳) تمام جملات دنباله، اعداد مثبت می‌باشند.
۴) تمام جملات دنباله غیرمنفی هستند.

۱۰- دنباله‌ی $a_n = \dfrac{۱+۲+۳+\cdots+n}{n} - \dfrac{n}{۲}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) صفر
۳) $\frac{۱}{۴}$
۴) ۱

۱۱- اگر $a_n = \sqrt{n^۲+kn} - n$ همگرا به ۲- باشد دنباله $b_n = n - \sqrt{n^۲-kn}$ به چه عددی همگراست؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۴-
۴) ۲-

۱۲- اگر $A = \left\{\dfrac{(-۱)^n}{n+۱} : n \in \mathbb{N}\right\}$، حاصل $\dfrac{Max(A)}{Min(A)}$ چه عددی می‌باشد؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $-\frac{۲}{۳}$
۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۳- اگر $a_n = (|x| - 2x)^{2n+1}$ یک دنباله همگرا باشد، حدود x کدام است؟

۱) $x \in (-\frac{1}{3} , 1)$ ۲) $x \in (-\frac{1}{3} , +\infty)$ ۳) $x \in (-\infty , 1]$ ۴) $x \in [-\frac{1}{3} , 1]$

۱۴- دنباله $a_n = \frac{n^3}{2n^2 - 1} - \frac{n^2}{2n+5}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) همگرا به صفر ۲) همگرا به $\frac{5}{4}$ ۳) همگرا به $\frac{5}{2}$ ۴) واگراست

۱۵- اگر $a_n = -2n.\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}$ دنباله $[a_n]$ و $|a_n|$ به‌ترتیب به کدام اعداد همگرایند؟

۱) ۶- و 2π ۲) ۶- و صفر ۳) ۷- و 2π ۴) ۷- و صفر

۱۶- به فرض آن‌که $a_{n+1} = (-1)^n a_n + \frac{1}{n}$ مقدار $a_4 + a_6$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{20}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $-\frac{1}{20}$ ۴) $-\frac{1}{12}$

۱۷- به فرض آن‌که $a_n = (1 - \frac{1}{n+1}).\cos\frac{\pi}{n+1}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) نزولی است و همگرا به ۱ ۲) غیریکنواست و کراندار ۳) واگراست ولی کراندار است. ۴) صعودی و همگرا به ۱ است.

۱۸- جملات دنباله $\left\{\frac{2n+5}{n+3}\right\}$ برای $n > 21$ به کدام بازه تعلق دارند؟

۱) $(2 , 2/44]$ ۲) $[1/96 , 2)$ ۳) $(1/79 , 2/21)$ ۴) $(1/99 , 2/01)$

۱۹- در کدام گزینه دنباله داده شده یک دنباله همگرا می‌باشد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) $\left\{n\cos\frac{\pi}{n}\right\}$ ۲) $\left\{n\sin\frac{\pi}{n}\right\}$ ۳) $\left\{\left[\frac{\sin n}{n+\cos n}\right]\right\}$ ۴) $\left\{\left[\frac{\cos n}{n-\sin n}\right]\right\}$

۲۰- دنباله $a_n = n((1+\frac{a}{n})^3 - 1)$ همگرا به عدد $-\frac{1}{6}$ می‌باشد. مقدار a چه عددی است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{18}$

۲۱- دنباله‌ی $\left\{\frac{1+3n}{4+n}\right\}$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) کراندار- نزولی ۲) بی‌کران- واگرا ۳) کراندار- صعودی ۴) بی‌کران- همگرا

۲۲- اگر $a_n = \frac{n+k+3}{n+2}$ و $f(x) = (x+1)[2x]$ حدود k کدام باشد تا دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا به ۲ باشد؟

۱) $k > 1$ ۲) $k < -1$ ۳) $|k| < 1$ ۴) $|k| > 1$

۲۳- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ و دنباله $\{f(a_n)\}$ همگرا به صفر باشد $\{a_n\}$ کدام دنباله می‌تواند باشد؟

۱) $a_n = \frac{2n+1}{n+7}$ ۲) $a_n = \frac{2n+5}{n+1}$ ۳) $a_n = \frac{4n+1}{n+2}$ ۴) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$

۲۴- حداقل چند جمله از ابتدای دنباله‌ی $a_n = \frac{5^n}{(n-1)!}$ حذف کنیم تا دنباله یکنوا شود؟

۱) هیچ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۵- کدام دنباله همگرا به صفر می‌باشد؟

۱) $a_n = \cos\frac{\pi}{\sqrt{2n+3}}$ ۲) $a_n = n\sin^{-1}\frac{2}{n^2}$ ۳) $a_n = n^2\tan^{-1}\frac{\pi}{n}$ ۴) $a_n = n\cos^{-1}\frac{2}{n^2}$

۲۶- اگر $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ و اگر $f(x) = \frac{[2x]-[-x]}{x^2+1}$، دنباله $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگراست؟

۱) ۱ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) $\frac{7}{5}$ ۴) دنباله واگراست.

۲۷- کدام دنباله همگراست؟

۱) $a_n = \left[\dfrac{\text{Sin}\frac{n\pi}{2}}{n}\right]$ ۲) $a_n = \log\dfrac{2}{n+3}$ ۳) $a_n = n + \tan^{-1}\dfrac{2}{n}$ ۴) $a_n = n\log(1+\dfrac{1}{n})$

۲۸- اگر $a_n = \sqrt{4n^2+2n}$ و $b_n = 2\sqrt{n^2-n}$ دنباله‌های $\dfrac{a_n}{b_n}$ و $a_n - b_n$، به‌ترتیب به کدام اعداد همگرا هستند؟

۱) ۱ و $\dfrac{3}{2}$ ۲) ۲ و صفر ۳) ۲ و $\dfrac{3}{2}$ ۴) ۱ و $-\dfrac{1}{2}$

پاسخ تست‌های فصل ۱

۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$n<۱۰ \Rightarrow$ a_n یک دنباله نزولی و کراندار است.

اما در کل وقتی $n\geq ۱۰$ دنباله مرتباً کاهش می‌یابد پس در کل نزولی، کراندار و همگرا به صفر است، چون هر جمله نصف جمله‌ی قبلی است.

۲- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم هر دنباله یکنوا و کراندار، همگراست. پس اگر دنباله‌ای واگرا باشد آنگاه یا بی‌کران است یا غیریکنوا. اگر به گزاره ۱ به دقت بنگریم تنها گزینه درست است، چون دنباله صعودی اگر کراندار باشد همگراست. پس حال که واگراست، پس بی‌کران است.

مثال نقض گزینه‌ی ۲: $\{n\}$

مثال نقض گزینه‌ی ۳: $\{-n\}$

مثال نقض گزینه‌ی ۴: $\{(-۱)^n\}$

۳- گزینه ۴ پاسخ است.

چون $\{b_n\}$ همگراست پس کراندار است لذا $\{b_n\}$ از بالا کراندار است، پس $\{a_n\}$ هم از بالا کراندار است. از طرفی از پایین هم کراندار است، پس $\{a_n\}$ کراندار است. برای همگرایی $\{a_n\}$ لازم است که $\{a_n\}$ یکنوا هم باشد.

۴- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به قضایای کتاب درسی گزینه‌ی ۴ بدیهی است، اما یک دنباله با جملات گویا و یا گنگ می‌تواند حد گویا یا حد گنگ داشته باشد.

دنباله با جملات گویا و حد گنگ: $a_n=\dfrac{[۱۰^n\pi]}{۱۰^n}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\pi\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

دنباله با جملات گنگ و حد گنگ: $b_n=\pi+\dfrac{۱}{n}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n=\pi\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

دنباله با جملات گنگ و حد گویا: $c_n=۲+\dfrac{\pi}{n}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n=۲\in\mathbb{Q}$

دنباله با جملات گویا و حد گویا: $d_n=۲+\dfrac{۱}{n}\in\mathbb{Q} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d_n=۲\in\mathbb{Q}$

۵- گزینه ۱ پاسخ است.

در گزینه‌ی ۱: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=۳$ ، اما این دنباله همواره از ۳ کم‌تر است، پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{۶n+۲}{n+۵}\right]=۵$$

در گزینه‌ی ۲: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=۲$ و در این حالت:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{۴n+۲}{n+۱}\right]=۳$$

در گزینه‌ی ۳: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=۳$ ، این دنباله همواره از ۳ بیش‌تر است، پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{۶n+۲۰}{n+۱}\right]=۶$$

در گزینه‌ی ۴: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=۵$ ، این دنباله کم‌تر از ۵ است، پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{۱۰n+۲}{n+۱}\right]=۹$$

۶- گزینه ۲ پاسخ است.

این دنباله یک دنباله صعودی و همگرا به ۳ می‌باشد لذا وقتی $n>۸$ آن‌گاه جملات دنباله در بازه‌ی $[a_۹,۳)$ قرار می‌گیرند، پس:

$$a_۹=\frac{۳\times ۸۱+۲}{۸۱+۱۹}=\frac{۲۴۵}{۱۰۰}=۲/۴۵ \to a_n\in[۲/۴۵,۳)$$

۷- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر فرض کنیم $a_n=(-۱)^n$ ، هر ۳ گزینه‌ی ۱ و ۲ و ۳ همگرا خواهند شد، اما گزینه‌ی ۴ در همه حال واگراست.

نکته: اگر $\{a_n\}$ همگرا به L باشد دنباله‌های $\{a_{۲n}\}$، $\{a_{۲n-۱}\}$، $\{a_{n+۱}\}$ و... همگرا به L خواهند بود، اما اگر $\{a_n\}$ واگرا باشد شاید $\{a_{۲n}\}$، $\{a_{۲n+۱}\}$ و... همگرا باشند.

۸- گزینه ۱ پاسخ است.

راه اول:

$$\frac{۲n-۱}{n+۲}=\frac{۲n+۴-۵}{n+۲}=۲-\frac{۵}{n+۲}$$

پس وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، دنباله با مقادیر کم‌تر از ۲ به سمت ۲ نزدیک می‌شود. لذا:

$$\lim_{n\to\infty}[۲-\frac{۵}{n+۲}]=۱$$

راه دوم: چون $a'_n=\frac{۴-۱}{(n+۲)^۲}=\frac{۳}{(n+۲)^۲}>۰$ پس دنباله صعودی است و لذا با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ میل می‌کند.

۹- گزینه ۱ پاسخ است.

می‌دانیم وقتی $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ، بی‌شمار جمله از جملات دنباله در همسایگی L قرار می‌گیرند. چون حد دنباله مثبت است، پس بی‌شمار از جملات مثبت هستند، اما لزومی ندارد که تمام جملات دنباله مثبت باشند مثلاً $a_n=\frac{n-۲۰۰}{n+۱}$ همگرا به عدد مثبت ۱ است، اما تمام جملات مثبت نمی‌باشند.

۱۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{n^۲}{۲}+\frac{n}{۲}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^۲}{۲}+\frac{n}{۲}}{n}-\frac{n}{۲}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{۲}+\frac{۱}{۲}-\frac{n}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ است.

نکته: $\lim_{n\to\infty}\sqrt{an^۲+bn+c}\sim\sqrt{a}(n+\frac{b}{۲a})$, $a>۰$، پس:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^۲+kn}-n=\lim_{n\to\infty}(n+\frac{k}{۲})-n=\frac{k}{۲}=-۲\Rightarrow k=-۴$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}n-\sqrt{n^۲-kn}=\lim_{n\to\infty}n-(n-\frac{k}{۲})=\frac{k}{۲}=-۲$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$\lim_{n\to\infty}\frac{(-۱)^n}{n+۱}=۰$ ، از طرفی این دنباله نوسانی و در حال کاهش است، پس ۲ جمله‌ی اول آن یکی بیش‌ترین و دیگری کم‌ترین است. پس:

$$\left.\begin{array}{l}a_۱=-\frac{۱}{۲}=Min\\ a_۲=\frac{۱}{۳}=Max\end{array}\right.\Rightarrow\frac{Max}{Min}=\frac{\frac{۱}{۳}}{-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۲}{۳}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ است.

شرط آن‌که دنباله $\{a^n\}$ همگرا باشد آن است که $-۱<a\le ۱$. البته اگر دنباله به صورت $\{(a)^{۲n}\}$ یا $\{(a)^{۲n-۱}\}$ باشد شرط به صورت $-۱\le a\le ۱$ به‌دست می‌آید.

در این تست شرط همگرایی آن است که $-۱\le -۲x-|x|\le ۱$.

$$\left.\begin{array}{l}x\ge ۰\Rightarrow -۱\le -x\le ۱\Rightarrow -۱\le x\le ۱\Rightarrow ۰\le x\le ۱\\ x<۰\Rightarrow -۱\le -۳x\le ۱\Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le x\le\frac{۱}{۳}\Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le x<۰\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le x\le ۱$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$a_n=\frac{n^۳}{۲n^۲-۱}-\frac{n^۲}{۲n+۵}=\frac{۲n^۴+۵n^۳-۲n^۴+n^۲}{(۲n^۲-۱)(۲n+۵)}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۵n^۳}{۴n^۳}=\frac{۵}{۴}$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\underset{n\to\infty}{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}}} \sim \underset{n\to\infty}{\sin\frac{\pi}{n}} \sim \frac{\pi}{n}$$ پس:

$$\lim_{n\to\infty} -2n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} -2n.\frac{\pi}{n} = -2\pi$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 2\pi$$

$$\lim_{n\to\infty} [a_n] = [-2\pi] = -7$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ است.

$$a_{n+1} = (-1)^n a_n + \frac{1}{n} \qquad \begin{cases} n=5 \Rightarrow a_6 = -a_5 + \frac{1}{5} \\ n=4 \Rightarrow a_5 = a_4 + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a_6 + a_5 = \frac{1}{5} \\ a_5 - a_4 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad a_6 + a_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ است.

$$a_n = \frac{n}{n+1}.\cos\frac{\pi}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1\times 1 = 1 \Rightarrow$$ a_n همگرا به ۱ می‌باشد

$\frac{n}{n+1}$ صعودی است و مثبت است. $\cos\frac{\pi}{n+1}$ هم صعودی و مثبت است پس حاصل‌ضرب آن‌ها صعودی است، لذا این دنباله صعودی و همگرا به ۱ است. حاصل‌ضرب دو دنباله صعودی و مثبت درهم یک دنباله صعودی است.

۱۸- گزینه ۲ پاسخ است.

این دنباله صعودی و همگرا به ۲ می‌باشد (چون $a'_n \ge 0$)، پس جملات کم‌تر از ۲ می‌باشند به‌طوری‌که:

$$n > 21 \Rightarrow n \ge 22 \Rightarrow a_n \in [a_{22}, 2) \Rightarrow a_n \in [\frac{49}{25}, 2) = [1/96, 2)$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ است.

در گزینه‌ی ۱ دنباله بی‌کران و واگراست. لذا $\lim_{n\to\infty} n\cos\frac{\pi}{n} = \infty$

در گزینه‌ی ۲ این دنباله همگرا به π است زیرا $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \pi$

در گزینه‌های ۳ و ۴ چون دنباله داخل جزء صحیح یک دنباله نوسانی همگرا به صفر است پس این دنباله‌ها واگرا هستند.

نکته: دنباله‌های نوسانی که تا بی‌نهایت نوسان خود را حفظ کنند، واگرا هستند.

۲۰- گزینه ۴ پاسخ است.

راه اول:

$$\lim_{n\to\infty} n\left((1+\frac{a}{n})^3 - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{3a}{n} + \frac{3a^2}{n^2} + \frac{a^3}{n^3} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} 3a + \frac{3a^2}{n} + \frac{a^3}{n^2} = -\frac{1}{6} \to 3a = \frac{-1}{6} \to a = \frac{-1}{18}$$

راه دوم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{a}{n})^3 - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+at)^3 - 1}{t} \overset{H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{3a(1+at)^2}{1} = 3a$$

$$\frac{1}{n} = t$$

پس $3a = -\frac{1}{6}$ آن‌گاه $a = -\frac{1}{18}$

استفاده از قاعده هوپیتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ توصیه می‌شود.

۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$y=\frac{۳n+۱}{n+۴}$$

تابع داده شده یک تابع هموگرافیک است.

در حالت کلی $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ یک تابع هموگرافیک نامیده می‌شود با شرط $ad-bc>۰$ هر شاخه آن صعودی اکید و با شرط $ad-bc<۰$ هر شاخه آن نزولی اکید است. البته باید به محل مجانب قائم به شدت دقت نمود. در این مثال چون مجانب قائم تابع $n=-۴$ است پس تمام جملات دنباله روی یک شاخه واقع شده‌اند لذا دنباله برای $n\geq ۱$ در شرط $ad-bc>۰$ صدق می‌کند، پس صعودی و همگرا به ۳ است. پس کلاً همگرا، کراندار و صعودی است.

۲۲- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر قرار باشد $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=۲$ باید ببینیم تابع $f(x)$ با چه شرطی حدی برابر ۲ خواهد داشت. با توجه به آن‌که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=۱$ داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲\times ۲=۴$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۲\times ۱=۲ \Rightarrow a_n<۱$$

یعنی باید $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و همگرا به ۱ باشد. برای آن‌که $\{a_n\}$ صعودی باشد باید $ad-bc>۰$ یعنی: $۲-(k+۳)>۰$

$$۲-k-۳>۰ \Rightarrow k<-۱$$

راه حل دوم: چون می‌خواهیم $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+k+۳}{n+۲}=۱^-$ باشد یعنی از سمت چپ به ۱ میل کند، باید صورت کسر همواره از مخرج کسر کوچک‌تر باشد:

$$n+k+۳<n+۲ \Rightarrow k<-۱$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ است.

دنباله‌ای که مورد نظر است یا باید با یک روند نزولی همگرا به ۲ باشد که $a_n>۲$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=۲$ و یا با یک روند صعودی همگرا به ۲- باشد یعنی $a_n<-۲$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-۲$ بدیهی است از این دست دنباله‌ها زیاد داریم. مثلاً:

$$a_n=\frac{۲n+۵}{n+۱}$$

$$a_n=\frac{۲n+۲+۳}{n+۱}=۲+\frac{۳}{n+۱} \qquad a_n>۲ \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_n=۲$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ است.

این دنباله با جملات مثبت است. اگر بخواهیم یکنوایی آن را بررسی کنیم می‌توانیم $\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ را با عدد یک مقایسه کنیم:

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n}=\frac{\frac{۵^{n+۱}}{n!}}{\frac{۵^n}{(n-۱)!}}=\frac{۵}{n}\leq ۱ \Rightarrow n\geq ۵$$

یعنی از جمله پنجم به بعد نزولی است و تا جمله پنجم صعودی است. از طرفی:

$$a_۵=\frac{۵^۵}{۴!}=a_۶ \Rightarrow$$

با حذف ۴ جمله اول این دنباله نزولی خواهد شد البته اگر بیش‌تر هم حذف کنیم اشکالی ندارد اما حداقل ۴ جمله حذف کنیم یکنوا خواهد شد.

۲۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{n\to\infty} \text{Cos}\frac{\pi}{\sqrt{۲n+۳}}=\text{Cos}\,۰=۱$$ همگراست ولی به یک

$$\lim_{n\to\infty} n\text{Sin}^{-۱}\frac{۲}{n^۲}=\lim_{n\to\infty} n\times\frac{۲}{n^۲}=۰$$

$$\lim_{n\to\infty} n^۲\tan^{-۱}\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to\infty} n^۲\times\frac{\pi}{n}=\infty$$ واگراست

$$\lim_{n\to\infty} n\,\text{Cos}^{-۱}\frac{۲}{n^۲}=\lim_{n\to\infty} n\times\frac{\pi}{۲}=\infty$$ واگراست

۲۶- گزینه ۱ پاسخ است.

دنباله $a_n = \frac{۲n+۱}{n+۳}$ یک دنباله صعودی و همگرا به ۲ است. لذا $a_n < ۲$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{[۲a_n]-[-a_n]}{a_n^۲+۱} = \frac{۳-(-۲)}{۴+۱} = \frac{۵}{۵} = ۱$$

باید بدانیم که $a_n < ۲$ آن‌گاه $۲a_n < ۴$ و $-a_n > -۲$ لذا:

$$\begin{cases}[۲a_n]=۳\\ [-a_n]=-۲\end{cases}$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ است.

در گزینه‌ی ۱: با توجه به آن‌که $\left\{\frac{\operatorname{Sin}\frac{n\pi}{۲}}{n}\right\}$ یک دنباله نوسانی و همگرا به صفر است، پس جزء صحیح آن واگراست.

در گزینه‌ی ۲: واگراست زیرا $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftarrow a_n = \log\frac{۲}{n+۳} = -\log\frac{n+۳}{۲}$

در گزینه‌ی ۳: $\lim_{n\to\infty} \tan^{-۱}\frac{۲}{n} = ۰$ پس همگرا لذا کراندار است از طرفی $a_n = n + \tan^{-۱}\frac{۲}{n}$ جمع یک دنباله همگرا و واگراست لذا واگرا و از طرفی بی‌کران است.

و اما گزینه‌ی ۴:

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\log(۱+\frac{۱}{n}) = \lim_{n\to\infty}\log(۱+\frac{۱}{n})^n = \log e$$

نکته: $\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{۴n^۲+۲n}}{۲\sqrt{n^۲-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{۴n^۲}}{۲\sqrt{n^۲}} = ۱$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{۴n^۲+۲n} - ۲\sqrt{n^۲-n} = \lim_{n\to\infty} ۲(n+\frac{۲}{۸}) - ۲(n-\frac{۱}{۲}) = \lim_{n\to\infty} ۲n+\frac{۱}{۲}-۲n+۱ = \frac{۳}{۲}$$

نکته: هم‌ارزی زیر در بی‌نهایت صادق است.

$$a > ۰ \Rightarrow \sqrt{an^۲+bn+c} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{a}\,(n+\frac{b}{۲a})$$