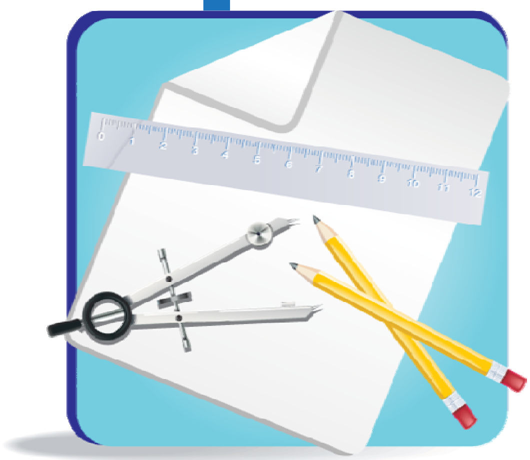
گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

# حساب دیفرانسیل و انتگرال

- فصل ۲



## حساب دیفرانسیل و انتگرال — فصل ۲: حد و پیوستگی

۱- اگر $f(x)=\begin{cases}2x+a & x\in\mathbb{Q}\\ x+3 & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ مقدار a کدام باشد تا $\lim\limits_{x\to 1} fof(x)$ موجود باشد؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۲- ۴) ۱

۲- اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x(\sqrt{\frac{x-k}{x+1}}-1)$ برابر ۲- باشد مقدار k چه عددی است؟

۱) ۳- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۳

۳- مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2-x^3\sin\frac{2}{x})$ چه عددی است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) صفر

۴- اگر $f(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})=[-2x]$ حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) $+\infty$ ۴) وجود ندارد

۵- مقدار $\lim\limits_{x\to 0} \cot 2x.\cot(\frac{\pi}{2}+x)$ برابر است با:

۱) صفر ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\infty$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۶- هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ کدام نتیجه‌گیری درست نمی‌باشد؟

۱) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|\ell|$ ۲) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\ell$ ۳) $\lim\limits_{x\to 2a} f(x-a)=\ell$ ۴) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=\ell$

۷- مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}+1}$ برابر است با:

۱) $8\pi^2$ ۲) $4\pi^2$ ۳) $\frac{\pi^2}{4}$ ۴) $\frac{-\pi^2}{2}$

۸- مقدار $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos 2x}{\sin\frac{x}{2}-1}$ برابر کدام عدد است؟

۱) ۴- ۲) ۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۶-

۹- اگر $f(x)=\frac{x+1}{x+\sqrt{-x}}$ مقدار $\lim\limits_{x\to-1} f(f(x))$ چه عددی است؟

۱) $2-\sqrt{2}$ ۲) $-2-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}-2$ ۴) وجود ندارد

۱۰- مقدار $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sin\frac{\pi x}{4}}{\sqrt{x}-2}$ کدام عدد است؟

۱) $-\pi$ ۲) $\pi$ ۳) ۴- ۴) ۴

۱۱- مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\tan(x+\frac{\pi}{2})\times\tan\frac{\pi x}{4}$ کدام عدد است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $-\frac{\pi}{4}$

۱۲- مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) صفر

۱۳- مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}$ برابر کدام عدد می‌باشد؟

۱) $\dfrac{-1}{4}$ ۲) $\dfrac{1}{4}$ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) $-\dfrac{1}{2}$

۱۴- مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{Cos}x-\sqrt{\mathrm{Cos}3x}}{1-\mathrm{Cos}x}$ چه عددی است؟

۱) $\dfrac{7}{4}$ ۲) $\dfrac{7}{2}$ ۳) ۴ ۴) $-\dfrac{1}{4}$

۱۵- به فرض آن‌که $f(x)=\begin{cases}2 & x\in Q\\ -1 & x\in\mathbb{R}-Q\end{cases}$ دنباله $\{a_n\}$ کدام باشد تا $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ موجود باشد؟

۱) $a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ ۲) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$ ۳) $a_n=\dfrac{n^2}{n+1}$ ۴) $a_n=\pi\mathrm{Sin}\dfrac{n\pi}{2}$

۱۶- علاوه بر دنباله‌ی $a_n=2+\dfrac{1}{2n}$ کدام دنباله دیگر برای اثبات عدم وجود $\lim\limits_{x\to 2}\mathrm{Sin}\dfrac{\pi}{x-2}$ مناسب می‌باشد؟

۱) $b_n=2+\dfrac{2}{4n+1}$ ۲) $b_n=2-\dfrac{1}{2n}$ ۳) $b_n=2-\dfrac{1}{n}$ ۴) $b_n=2+\dfrac{1}{n}$

۱۷- هرگاه $f(x)=|x-1|+[2x]$ و $a_n=\sqrt{n^2-2n+a}-n$ حدود a کدام باشد تا $\{f(a_n)\}$ یک دنباله همگرا به ۱- باشد؟ ([ ] نماد جزء صحیح)

۱) $a\geq -1$ ۲) $a>1$ ۳) $a<1$ ۴) $a\geq 0$

۱۸- برای تابع $y=\dfrac{x}{2-\sqrt{x^2-1}}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) ۲ مجانب افقی دارد و مجانب قائم ندارد.
۲) مجانب قائم دارد و مجانب افقی ندارد.
۳) ۲ مجانب افقی و ۲ مجانب قائم دارد.
۴) ۲ مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد.

۱۹- اگر $A(1,-1)$ محل تلاقی مجانب‌های $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{ax^2+bx-1}$ باشد مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) $\dfrac{1}{3}$ ۴) $\dfrac{-1}{3}$

۲۰- مجانب‌های توابع $y=\dfrac{4x^3}{ax^2+1}$ و $y=\dfrac{1-9x^2}{ax}$ بر هم عمودند. a کدام است؟

۱) $\pm 1$ ۲) $\pm 6$ ۳) $\pm\dfrac{3}{2}$ ۴) $\pm\dfrac{3}{4}$

۲۱- تابع $y=2x-3+\dfrac{x-1}{2x^2+5}$ مجانب مایل خود را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

۱) $A(1,1)$ ۲) $A(-1,1)$ ۳) $A(1,-1)$ ۴) $A(-1,-1)$

۲۲- به فرض آن‌که $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ نقطه تلاقی مجانب‌های $y=f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $A\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$ ۲) $A\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ ۳) $A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$ ۴) $A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$

۲۳- اگر $y=-2x+3$ مجانب مایل تابع $y=4x+\sqrt{ax^2+bx-3}$ باشد. عرض از مبدأ مجانب دیگر چه عددی است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۳- ۴) ۳+

۲۴- اگر $f(x)=x\sqrt{\dfrac{4x+1}{x-2}}$ عرض نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها چقدر است؟

۱) $\dfrac{9}{4}$ ۲) ۶ ۳) $\dfrac{25}{4}$ ۴) $\dfrac{21}{4}$

۲۵- در تابع $y=\dfrac{x\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}}{|x|-4}$ کدام خط مجانب تابع <u>نمی‌باشد</u>؟

۱) $x=4$ ۲) $y=\dfrac{\pi}{2}$ ۳) $y=\dfrac{-\pi}{2}$ ۴) $y=1$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۲۶- نقطه تلاقی تابع $y=\frac{(x-1)^3}{x^2}$ با مجانب مایل آن از مجانب قائم به چه فاصله‌ای است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

۲۷- هرگاه در تابع $f(x)=\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}$ نقطه‌ی A نقطه تلاقی f با مجانب افقی و نقطه B نقطه تلاقی مجانب‌های تابع با یکدیگر باشد، AB چه عددی است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۲۸- به فرض آن‌که $f(x)=\tan(\pi \cos\frac{\pi x}{2})$ مجانب قائم تابع کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $x=2$ ۲) $x=\frac{3}{2}$ ۳) $x=\frac{1}{4}$ ۴) $x=\frac{2}{3}$

۲۹- تابع $y=\frac{\sin \pi x}{x^2-3x}$ دارای چند خط مجانب است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۳۰- تابع $y=\frac{(2x-1)^2}{x^2+ax+3}$ مجانب خودش را قطع نمی‌کند. مقدار a چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۱- ۴) ۴-

۳۱- اگر $y=2$ مجانب افقی تابع $y=-2x+3+\sqrt{ax^2+bx-1}$ باشد عرض از مبدأ مجانب مایل آن چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۲- ۴) ۲

۳۲- عرض از مبدأ مجانب $y=\sqrt{\frac{4x^3+6x^2}{x-1}}$ کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$

۳۳- اگر f تابعی پیوسته بر بازه $[0, 2]$ باشد با توجه به جدول مقابل در مورد ریشه‌های $f(x)=0$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) در بازه $(0,1)$ دقیقاً ۳ ریشه دارد.
۲) در بازه $(0,2)$ حداکثر ۲ ریشه دارد.
۳) در بازه $(0,1)$ لااقل ۳ ریشه دارد.
۴) در بازه $(0,2)$ دقیقاً ۳ ریشه دارد.

| x | ۰ | ۰/۲ | ۰/۴ | ۰/۶ | ۰/۸ | ۱ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | ۰/۴ | ۱ | ۰ | ۱- | ۱/۵ | ۲- |

۳۴- به فرض آن‌که تابع f در a پیوسته باشد، کدام تابع در a پیوسته است؟

۱) $fof(x)$ ۲) $f^{-1}(x)$ ۳) $\frac{1}{f(x)}$ ۴) $f^2(x)$

۳۵- چهارمین نقطه ناپیوستگی تابع $y=[x]-[x^2]$ با طول مثبت چه عددی است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{6}$

۳۶- تابع $y=(x^3-4x)[\frac{x}{2}]$ در بازه $[-3,3]$ دارای چند نقطه ناپیوستگی است؟

۱) هیچ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۷- تابع $y=[\frac{x}{3}]+[\frac{x+1}{3}]+[\frac{x+2}{3}]$ در کدام نقطه ناپیوسته است؟

۱) $\frac{-1}{3}$ ۲) $\frac{-2}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) ۱

۳۸- خط $y=\frac{a+b}{2}$ نمودار تابع $f(x)=(x-a)(x-b)+x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) گزینه ۲ یا گزینه ۳

۳۹- تابع $f(x)=[3x]\sin 3\pi x$ در $(0,\frac{3}{2})$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

گزینه دو مؤسسه آموزشی فرهنگی

۴۰- اگر تابع $y = (x^{۳} - ۹x).[kx]$ در بازه‌ی $(-۶,۶)$ پیوسته باشد، k کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۱- تابع $y = [\operatorname{Sin} ۲x]$ در کدام نقطه فقط پیوستگی چپ دارد؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\pi$

۴۲- حدود a کدام باشد تا یکی از ریشه‌های $ax^{۳} - ۲x^{۲} + x - ۴ = ۰$ در بازه‌ی $(۰ , ۱)$ قرار بگیرد؟

۱) $a < -۵$ ۲) $a > ۵$ ۳) $|a| > ۵$ ۴) $-۵ < a < ۵$

۴۳- کدام تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

۱) $y = \operatorname{Cos}\pi(x-[x])$ ۲) $y = \operatorname{Sin}\pi(x-[x])$ ۳) $y = \operatorname{Sin}\frac{\pi(x-[x])}{۲}$ ۴) $y = \operatorname{Cos}\frac{\pi(x-[x])}{۲}$

۴۴- تابع $y = (-۱)^{[x]} + \operatorname{Cos}\frac{\pi[x]}{۲}$ در چند نقطه از بازه $(۰,۳)$ ناپیوسته است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۴۵- خط $y = ۳$ نمودار تابع $y = mx^{۳} + x^{۲} - ۴x + ۳$ را در بازه‌ی $(۱,۳)$ لااقل در یک نقطه قطع کرده است. حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹} < m < ۳$ ۲) $m > ۳$ ۳) $m \in \mathbb{R}$ ۴) $m < \frac{۱}{۹}$

مؤسسه آموزشی فرهنگی

# پاسخ تست‌های فصل ۲

۱- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به گزینه‌ها که $a \in Q$ تابع fof را تشکیل می‌دهیم.

$$x \in Q \Rightarrow f(x) = ۲x + a \Rightarrow fof(x) = ۲(۲x + a) + a = ۴x + ۳a$$

$$x \in \mathbb{R} - Q \Rightarrow f(x) = x + ۳ \Rightarrow fof(x) = x + ۶$$

برای آن‌که $y = fof(x)$ در $x = ۱$ دارای حد باشد باید ۲ ضابطه‌ی به‌دست آمده را به ازاء $x = ۱$ با هم برابر قرار دهیم.

$$۴x + ۳a = x + ۶ \Rightarrow ۴ + ۳a = ۷ \Rightarrow a = ۱$$

۲- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to+\infty} ۲x\left(\sqrt{\frac{x-k}{x+۱}} - ۱\right) = \lim_{x\to+\infty} ۲x.\frac{\frac{x-k}{x+۱} - ۱}{\sqrt{\frac{x-k}{x+۱}} + ۱}$$

$$\lim_{x\to\infty} ۲x\frac{\frac{-(k+۱)}{x+۱}}{۲} = -(k+۱) \Rightarrow -(k+۱) = -۲ \Rightarrow k = ۱$$

راه حل دیگر:

هم‌ارزی برنولی:

$$\sqrt[n]{۱+u} \simeq ۱ + \frac{u}{n}$$

$$\sqrt{\frac{x-k}{x+۱}} = \sqrt{\frac{x+۱-k-۱}{x+۱}} = \sqrt{۱ - \underbrace{\frac{k+۱}{x+۱}}_{\frac{k+۱}{x+۱}\to ۰}} \simeq ۱ + \frac{\left(-\frac{k+۱}{x+۱}\right)}{۲} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} ۲x\left(۱ - \frac{k+۱}{۲(x+۱)} - ۱\right) = -(k+۱)$$

۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\frac{۱}{x} = t \Rightarrow t \to ۰ \Rightarrow \lim_{t\to۰} \frac{۲}{t^۲} - \frac{۱}{t^۳}.Sin۲t$$

$$\lim_{t\to۰} \frac{۲t - Sin۲t}{t^۳} \overset{H}{=} \lim_{t\to۰} \frac{۲ - ۲Cos۲t}{۳t^۲} = \lim_{t\to۰} \frac{۲\times\frac{۱}{۲}\times۴t^۲}{۳t^۲} = \frac{۴}{۳}$$

راه حل دیگر:

$$Sin\,x \simeq x - \frac{x^۳}{۶} \qquad \lim_{x\to۰} ۲x^۲ - x^۳\left(\frac{۲}{x} - \frac{\left(\frac{۲}{x}\right)^۳}{۶}\right) = \lim_{x\to۰} ۲x^۲ - ۲x^۲ + \frac{۸}{۶} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to۰^+} \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۳} = \frac{x^۲-۱}{x^۳} = \frac{-۱}{۰^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to۰^-} \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۳} = +\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to۰^+} f\left(\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x^۳}\right) = \lim_{x\to۰^+} [-۲x] = -۱$$

۵- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x\to۰} -Cot۲x.\tan x = \lim_{x\to۰} -\frac{\tan x}{\tan ۲x} = -\frac{۱}{۲}$$

۶- گزینه ۴ پاسخ است.

تنها گزینه غیرقابل قبول گزینه ۴ است.

موارد نقض زیادی هم دارد مثل: $f(x) = x$ که $\lim_{x\to۰} f(x) = ۰$ اما $\lim_{x\to۰}[x]$ وجود ندارد.

۷- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{(\sqrt[4]{x}-1)^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin\pi x}{2(\sqrt[4]{x}-1).\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}=-2\pi\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sqrt[4]{x}-1}$$

$$\overset{H}{=}-2\pi\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}=8\pi^2$$

۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin 2x}{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}\overset{H}{=}4\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos 2x}{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}=4\times\frac{2}{\frac{-1}{2}}=-16$$

۹- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x+\sqrt{-x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to -1}\frac{1}{1-\frac{1}{2\sqrt{-x}}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$\lim\limits_{x\to -1} f\big(f(x)\big)=f(2)$ وجود ندارد (چون دامنه‌ی f، $x<0$ است.)

۱۰- گزینه ۱ پاسخ است.

روش اول : هوپیتال

$$\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to 4}\frac{\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\frac{\frac{\pi}{4}\cos\pi}{\frac{1}{4}}=-\pi$$

روش دوم: می‌توان با تغییر متغیر $t=x-4$ نیز مسأله را حل کرد.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ است.

با استفاده از هم‌ارزی داریم:

$$\lim_{x\to 0}(-\cot x)\times\tan\frac{\pi x}{4}=\lim_{x\to 0}-\frac{\tan\frac{\pi x}{4}}{\tan x}\cong\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi x}{4}}{-x}=-\frac{\pi}{4}$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.

راه اول: استفاده از قضیه هوپیتال:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{-\cancel{2}\sin 2x}{-\cancel{2}\cos 2x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

راه دوم:

$$x-\frac{\pi}{4}=t$$

$$x\to\frac{\pi}{4}^- \qquad t\to 0^-$$

$$\lim_{t\to 0^-}\frac{\cos 2(t+\frac{\pi}{4})}{1-\sin 2(t+\frac{\pi}{4})}=\frac{\cos(2t+\frac{\pi}{2})}{1-\sin(2t+\frac{\pi}{2})}=\frac{-\sin 2t}{1-\cos 2t}=\frac{-(2t)}{\frac{(2t)^2}{2}}\underset{t\to 0^-}{=}\frac{-1}{t}=+\infty$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}-\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{(x+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=-\frac{1}{4}$$



گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

به کمک روش هم‌ارزی داریم:

$$\underset{x\to 0}{\mathrm{Cos}x} \sim 1-\frac{1}{2}x^2$$

$$\underset{x\to 0}{\mathrm{Cos}^m x} \sim 1-\frac{m}{2}x^2$$

$$\underset{x\to 0}{\mathrm{Cos}^m ax} \sim 1-\frac{m}{2}a^2x^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2-(1-\frac{\frac{1}{2}}{2}\times 9x^2)}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2}x^2+\frac{9}{4}x^2}{\frac{x^2}{2}}=\frac{7}{2}$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ است.

برای آن‌که $\{f(a_n)\}$ دنباله‌ای همگرا باشد باید $\{a_n\}$ یا همواره گویا باشد و یا تمام جملات آن اصم باشد (البته اگر تعداد متناهی جمله متمایز باشد اشکال ندارد) زیرا رفتار $f$ به ازاء جملات گویا و اصم رفتارهای متمایز است. بدین‌ترتیب تنها گزینه صحیح گزینه‌ی ۳ است.

گزینه‌ی (۱) گاهی گویا و گاهی گنگ است. مثلاً وقتی $n$ مربع کامل باشد، گزینه‌ی (۱) گویا است.

گزینه‌ی (۲) نیز هنگامی که زیر رادیکال مربع کامل است، گویا است.

گزینه‌ی (۳) همواره گویا است.

گزینه‌ی (۴) نیز گاهی $\pi$ و گاهی $-\pi$ و گاهی صفر است.

۱۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{x\to 2}\mathrm{Sin}\frac{\pi}{x-2} \quad \text{وجود ندارد} \quad \Rightarrow \begin{cases}\frac{\pi}{a_n-2}=2n\pi \Rightarrow a_n-2=\frac{1}{2n} \Rightarrow a_n=2+\frac{1}{2n}\\ \frac{\pi}{b_n-2}=2n\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow b_n-2=\frac{1}{2n+\frac{1}{2}} \Rightarrow b_n=2+\frac{2}{4n+1}\end{cases}$$

البته می‌توان دنباله‌های بی‌شماری پیدا کرد که این خاصیت را داشته باشند. $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به‌عنوان مثال هستند.

و چون $\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2+\frac{1}{2n}-2}=\mathrm{Sin}\,2n\pi=0$ لذا به‌دنبال دنباله‌ای هستیم که با قرار دادن آن به‌جای $x$ به صفر همگرا نباشد که این فقط در گزینه‌ی (۱) است.

۱۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(n-1)-n=-1$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}|x-1|+[2x]=\begin{cases}\overset{\text{حد چپ}}{2-3=-1}\\ \underset{\text{حد راست}}{2-2=0}\end{cases}$$

پس اگر قرار باشد $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=-1$ باید $a_n$ با مقادیر کم‌تر از ۱- به عدد ۱- برسد یعنی یک دنباله صعودی و همگرا به ۱- باشد. در این‌صورت $a<1$ چون باید عبارت داخل رادیکال کم‌تر از $(n-1)^2$ شود و به عبارتی $b_n=\sqrt{n^2-2n+a}-n$ برای $a=1$ ثابت و همگرا به ۱- است و اگر $a<1$ صعودی و اگر $a\ge 1$ دنباله نزولی و همگرا به ۱- است. یعنی اگر $a=1$ باشد، دنباله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{n^2-2n+1}-n=|n-1|-n=-1$$

یعنی همواره ۱- است، لذا $f(a_n)$ همگرا به صفر خواهد بود. اما برای مقادیر کم‌تر از ۱ عبارت کمی کم‌تر از ۱- است و لذا $f(a_n)$ همگرا به ۱- خواهد بود.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۱۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$۲-\sqrt{x^۲-۱}=۰ \Rightarrow x^۲-۱=۴ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۵}$$

پس تابع دارای ۲ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-|x|} \Rightarrow y=-۱ \text{ مجانب افقی}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-|x|} \Rightarrow y=۱ \text{ مجانب افقی}$$

تابع دارای ۲ مجانب قائم و دو مجانب افقی است، پس کلاً ۴ مجانب خواهد داشت.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$y=-۱ \text{ مجانب افقی} \Rightarrow \frac{۱}{a}=-۱ \Rightarrow a=-۱$$

و چون $x=۱$ مجانب قائم تابع است پس ریشه مخرج است، لذا:

$$a+b-۱=۰ \Rightarrow -۱+b-۱=۰ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow y=\frac{x^۲-۳x+۲}{-x^۲+۲x-۱}$$

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{(x-۲)(x-۱)}{-x^۲+۲x-۱}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{(x-۲)(x-۱)}{-(x-۱)^۲}=\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{x-۲}{-(x-۱)}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=-۳$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ است.

می‌دانیم اگر $y=mx+h$ مجانب مایل $y=f(x)$ باشد آن‌گاه $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ پس برای آن‌که مجانب‌ها بر هم عمود باشند باید مجانب‌های مایل آن‌ها بر هم عمود باشد، پس حاصل‌ضرب شیب آن‌ها باید برابر ۱- باشد، لذا:

$$\frac{۴}{a}\times\frac{-۹}{a}=-۱ \Rightarrow a^۲=۳۶ \Rightarrow a=\pm۶$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

در $f(x)=ax+b+\frac{g(x)}{h(x)}$ که در آن $g(x)$ و $h(x)$ دو چند جمله‌ای باشند که $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{h(x)}=۰$ آن‌گاه $y=ax+b$ مجانب مایل تابع است و ریشه‌های $g(x)=۰$ نقاط تلاقی تابع با مجانب مایل هستند، پس در این مثال $x=۱$ طول نقطه تلاقی تابع با مجانب مایل است و $y=۲x-۳$ هم مجانب مایل آن است پس $A(۱,-۱)$ نقطه مورد نظر است.

۲۲- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر نقاط تلاقی مجانب‌های f را بیابیم و مختصات آن را عوض کنیم (جای x,y را جابجا کنیم) نقطه تلاقی مجانب‌های $f^{-۱}$ پیدا می‌شود.

f مجانب قائم ندارد، اما:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+|x| \Rightarrow y=۲x \quad \text{مایل}\\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+|x|=۰ \quad y=۰ \quad \text{افقی}\end{array}\right\} \Rightarrow A\left|\begin{array}{l}۰\\۰\end{array}\right.$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} ۴x+\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right| \begin{cases} \xrightarrow{+\infty} y=(۴+\sqrt{a})x+\frac{b}{۲\sqrt{a}} \\ \xrightarrow{-\infty} y=(۴-\sqrt{a})x-\frac{b}{۲\sqrt{a}} \end{cases}$$

$$۴-\sqrt{a}=-۲ \Rightarrow \sqrt{a}=۶ \Rightarrow a=۳۶ \qquad \frac{-b}{۲\sqrt{a}}=۳ \Rightarrow \frac{-b}{۱۲}=۳ \Rightarrow b=-۳۶$$

$$\text{مجانب دیگر } y=(۴+۶)x+\frac{-۳۶}{۲\times۶}=۱۰x-۳ \Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=-۳$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$x=2$ مجانب قائم

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x+1}{x-2}}=2$ تابع مجانب مایل دارد

$$b=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{4x+1}{x-2}}-2\right)=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{\frac{4x+1}{x-2}-4}{4}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{4x}=\frac{9}{4}$$

$$\begin{cases}y=2x+\frac{9}{4}\\ x=2\end{cases}\Rightarrow A\left|\begin{matrix}2\\ \frac{25}{4}\end{matrix}\right.$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ است.

$x=\pm4$ مجانب قائم تابع هستند.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|-4}.\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x-4}.\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$y=\pm\frac{\pi}{2}$ مجانب افقی تابع است پس $y=1$ هیچ‌گاه مجانب تابع نمی‌تواند باشد.

۲۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$y=\frac{(x-1)^3}{x^2}=\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}=x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}=x-3+\frac{3x-1}{x^2}$$

پس $y=x-3$ مجانب مایل تابع است. ( چون حد دو جمله دیگر در $\infty$ صفر است.) اگر $\frac{3x-1}{x^2}=0$ باشد، نقطه تلاقی مجانب مایل با تابع به دست می‌آید پس $x=\frac{1}{3}$ و $y=-\frac{8}{3}$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$f(x)=\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}$$

$x=1$ مجانب قائم
$y=2$ مجانب افقی $\Rightarrow$ تلاقی مجانبها $B\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$

$f(x)=2\Rightarrow\frac{2x^2-3x}{x^2-2x+1}=2\Rightarrow-4x+2=-3x\Rightarrow x=2$ تلاقی تابع با مجانب افقی $A\left|\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right.$

$\Rightarrow|AB|=\sqrt{(1-2)^2+(2-2)^2}=1$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ است.

کافی است $\pi\,\text{Cos}\frac{\pi x}{2}$ برابر $k\pi+\frac{\pi}{2}$ شود. مثلاً فرض کنیم:

$$\pi\,\text{Cos}\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\text{Cos}\frac{\pi x}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

البته تابع بی‌شمار مجانب قائم دارد که به عنوان نمونه یکی از آنها را به‌دست آوردیم.

۲۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{Sin}\,\pi x}{x^2-3x}=\pi\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{Sin}\,\pi x}{\pi x(x-3)}=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow$ $x=0$ مجانب قائم نیست.

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\text{Sin}\,\pi x}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\text{Sin}(3\pi-\pi x)}{x(x-3)}=\pi\lim\limits_{x\to3}\frac{\text{Sin}\,\pi(3-x)}{\pi x(x-3)}=-\frac{\pi}{3}\Rightarrow$ $x=3$ مجانب قائم نیست.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\text{Sin}\,\pi x}{x^2-3x}=0$ تنها خط مجانب تابع، مجانب افقی $y=0$ است زیرا:

نکته: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\text{Sin}x}{x}=1$

۳۰- گزینه ۳ پاسخ است.

دقت بفرمایید هیچ تابعی نمی‌تواند مجانب قائم خودش را قطع کند (البته این تابع ممکن است مجانب قائم نداشته باشد) پس منظور عدم قطع مجانب افقی است.

$$y=4 \text{ مجانب افقی} \Rightarrow \frac{4x^2-4x+1}{x^2+ax+3}=4 \Rightarrow 4x^2-4x+1=4x^2+4ax+12 \Rightarrow (4a+4)x+11=0$$

معادله به‌دست آمده نباید ریشه داشته باشد لذا

ضریب $x$ برابر صفر است پس $4a+4=0 \Rightarrow a=-1$.

با توجه به مقدار به‌دست آمده برای $a$ مشخص شد تابع مجانب قائم هم ندارد.

۳۱- گزینه ۱ پاسخ است.

نقطه تلاقی مجانب‌های $f$ می‌باشد پس نقطه تلاقی مجانب‌های $f^{-1}$ هم، همان نقطه است.

$$\lim_{x\to\infty}(-2x+3+\sqrt{ax^2+bx-1})=\lim_{x\to\infty}(-2x+3+\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|)$$

$$x\to+\infty \Rightarrow y=(\sqrt{a}-2)x+3+\frac{b\sqrt{a}}{2a}$$

$$x\to-\infty \Rightarrow y=(-\sqrt{a}-2)x+3-\frac{b\sqrt{a}}{2a}$$

چون قرار است مجانب افقی داشته باشد پس باید ضریب $x$ برابر صفر باشد؛ لذا $\sqrt{a}-2=0$ پس $a=4$ و چون مجانب افقی $y=2$ است پس:

$$3+\frac{b\sqrt{a}}{2a}=2 \Rightarrow 3+\frac{b\times 2}{8}=2 \Rightarrow b=-4 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ مایل}=-3-\frac{b\sqrt{a}}{2a}=4$$

البته می‌توانستیم راه حل کوتاه برویم به‌طوری که از ابتدا مقدار $\frac{b\sqrt{a}}{2a}$ برابر ۱- است، پس جواب ۴ می‌باشد.

※ دقت کنید برای آن که مجانب افقی وجود داشته باشد ، لازم است ضریب $x$ در $\infty$ یا $-\infty$ صفر شود ، حال یا باید $\sqrt{a}=2$ شود یا $-\sqrt{a}=2$ که حالت دوم امکان‌پذیر نیست پس فقط حالت اول بامعنی می‌باشد.

۳۲- گزینه ۱ پاسخ است.

با روش تقسیم و استفاده از هم‌ارزی مجانب مایل را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+6x^2 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-4x^3+4x^2} & 4x^2+10x+10 \\ \quad 10x^2 & \\ \underline{-10x^2+10x} & \\ \quad 10x & \\ \underline{-10x+10} & \\ \quad 10 & \end{array} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{4x^3+6x^2}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+10x}=\lim_{x\to\infty}2\left|x+\frac{10}{8}\right|$$

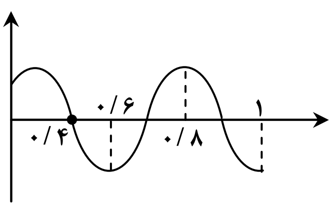
$$\Rightarrow \begin{cases} x\to\infty \ : y=2(x+\frac{10}{8}) \Rightarrow y=2x+\frac{5}{2} \\ x\to-\infty : y=-2(x+\frac{10}{8}) \Rightarrow y=-2x-\frac{5}{2} \end{cases} \text{مجانب‌های مایل}$$

$x=1$ مجانب قائم

۳۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$f$ تابعی پیوسته است و $f(0/4)=0$ از طرفی تعداد تغییر علامت $f$ را در نظر بگیریم آن‌گاه می‌توانیم شکل تقریبی $f$ به‌صورت مقابل ببینیم.

البته ممکن است $f=0$ ریشه‌های بیش‌تری هم داشته باشد. پس لااقل ۳ ریشه خواهیم داشت.




تذکر: اگر بازه $(1,2)$ را هم در نظر بگیریم ممکن است به تعداد ریشه‌ها اضافه شود.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۳۴- گزینه ۴ پاسخ است.

گزینه‌ی ۱:

$f(x)=\begin{cases} ۲ & x\in Q \\ x+۱ & x\in \mathbb{R}-Q \end{cases}$ تابع در $x=۱$ پیوسته است $fof(x)=\begin{cases} ۲ & x\in Q \\ x+۲ & x\in \mathbb{R}-Q \end{cases}$ و تابع $fof(x)$ در $x=۱$ پیوسته نمی‌باشد.

می‌توان گفت شرط پیوستگی fof این است که f(x) در f(a) نیز پیوسته باشد.

گزینه‌ی ۲: تابع f در a پیوسته باشد تابع $f^{-۱}$ در $f(a)$ پیوسته است.

گزینه‌ی ۳: اگر $f(a)=۰$ و f در a پیوسته باشد $\frac{۱}{f(a)}$ در a تعریف نشده است. لذا پیوسته هم نمی‌باشد.

گزینه‌ی درست گزینه‌ی ۴ است. زیرا حاصل ضرب ۲ تابع پیوسته درهم یک تابع پیوسته است پس $f^{۲}$ هم در a پیوسته است.

۳۵- گزینه ۴ پاسخ است.

در نقاط $x=k\in\mathbb{N}$ این تابع پیوسته است، گرچه هر دو تابع $y=[x]$ و $y=[x^{۲}]$ در این نقاط ناپیوسته هستند، امـا $y=[x]-[x^{۲}]$ در نقاطی که x طبیعی نباشد و $x^{۲}\in\mathbb{N}$ ناپیوستگی خواهد داشت.

مثلاً $x=\sqrt{۲},\sqrt{۳},\sqrt{۵},\sqrt{۶},\sqrt{۷},...$ پس چهارمین نقطه ناپیوستگی با طول مثبت، $x=\sqrt{۶}$ است.

۳۶- گزینه ۱ پاسخ است.

نقاط ناپیوستگی تابع نقاطی است که $\frac{x}{۲}$ صحیح باشد، اما $x^{۳}-۴x$ در آن نقطه صفر نباشد.

مثلاً $x=-۲, x=۲, x=۰$ نقاط ناپیوستگی $[\frac{x}{۲}]$ هستند اما نقاط پیوستگی تابع Y هستند، پس تابع در این بازه پیوسته و هیچ نقطه ناپیوستگی ندارد.

۳۷- گزینه ۴ پاسخ است.

$$y=[\frac{x}{۳}]+[\frac{x+۱}{۳}]+[\frac{x+۲}{۳}]=[x]$$

در نقاط صحیح ناپیوسته است.

راه دوم: در $x=۱$ داخل براکت سوم عدد صحیح می‌شود ولی داخل براکت‌های دیگر عدد صحیح نیستند ، لذا جمع یک تابع ناپیوسته بـا دو تابع پیوسته خواهد بود که ناپیوسته است.

۳۸- گزینه ۳ پاسخ است.

چون تابع f(x) بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است و $f(a)=a$ و $f(b)=b$ و $a<\frac{a+b}{۲}<b$ است. لذا بنابر قضیه مقدار میانی حتماً نقطـه‌ای وجود دارد که $f(c)=\frac{a+b}{۲}$ .

حال اگر این خط سهمی را قطع کند چون خط افقی است حتماً سهمی را در دو نقطه قطع خواهد کرد.

۳۹- گزینه ۱ پاسخ است.

نقاطی‌که باید وضعیت پیوستگی بررسی شود نقاطی است که عبارت داخل جزء صحیح عدد صحیح شود. مثل $x=\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳},۱,\frac{۴}{۳}$ و در تمام این نقاط $Sin۳\pi x$ برابر صفر است. لذا تعداد نقاط ناپیوستگی تابع برابر صفر است. پس تابع در تمام این بازه پیوسته اسـت، البتــه تــابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۴۰- گزینه ۴ پاسخ است.

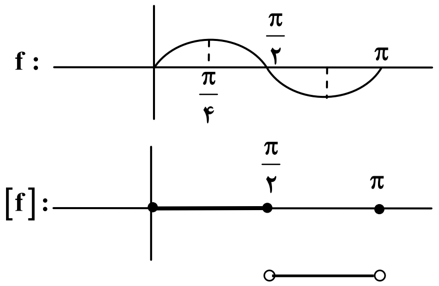
می‌دانیم این تابع در نقاطی که عبارت داخل جزء صحیح بتواند صحیح باشد، امکان ناپیوستگی دارد، اما در برخی نقاط عبارت $x^{۳}-۹x$ برابر صفر است. پس در کل:

$$x^{۳}-۹x=x(x-۳)(x+۳)$$

لذا ضریب k باید عددی باشد که در این بازه تنها در این نقاط عبارت داخل جزء صحیح عدد صـحیح شـود. مـثلاً $k=\frac{۱}{۳}$ البتـه K مقـادیر دیگری هم می‌تواند داشته باشد اما از بین گزینه‌ها $\frac{۱}{۳}$ مناسب است.

۴۱- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر $f$ با مقدار صحیح در همسایگی $\alpha$ نزولی اکید باشد و پیوسته آن‌گاه $[f]$ در $\alpha$ فقط پیوستگی چپ دارد. در این مثال آن نقطه $\frac{\pi}{۲}$ است.




۴۲- گزینه ۲ پاسخ است.

تابع $f(x) = ax^۳ - ۲x^۲ + x - ۴$ روی $\mathbb{R}$ و در نتیجه در بازه‌ی $(۰,۱)$ پیوسته است. از طرفی لازم است که $f(۰)f(۱) < ۰$

$f(۰)f(۱) = -۴(a-۵) < ۰ \Rightarrow a - ۵ > ۰ \qquad a > ۵$

$f'(x) = ۳ax^۲ - ۴x + ۱ \Rightarrow \Delta y' = ۱۶ - ۱۲a$

وقتی $a > ۵$ آن‌گاه $\Delta < ۰$ پس تابع صعودی اکید است (چون $a > ۰$ در نتیجه $f' > ۰$) پس $f = ۰$ فقط یک ریشه در این بازه دارد.

۴۳- گزینه ۲ پاسخ است.

تمام این توابع در اعداد غیرصحیح پیوسته هستند باید پیوستگی آن‌ها را در $n \in \mathbb{Z}$ بررسی کنیم.

گزینه‌ی ۱ : $\lim\limits_{x\to n^-} Cos\pi(x-[x]) = Cos\pi(n-(n-1)) = -۱$

گزینه‌ی ۱ در $\mathbb{Z}$ ناپیوسته

$\lim\limits_{x\to n^+} Cos\pi(n-n) = Cos۰ = ۱$

گزینه‌ی ۲ : $\lim\limits_{x\to n^+} Sin\pi(n-n) = ۰ \qquad \lim\limits_{x\to n^-} Sin\pi(n-(n-۱)) = ۰$

گزینه‌ی ۲ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

گزینه‌ی ۳ : $\lim\limits_{x\to n^+} Sin\frac{\pi}{۲}(n-n) = ۰ \qquad \lim\limits_{x\to n^-} Sin\frac{\pi}{۲}(n-(n-۱)) = ۱$

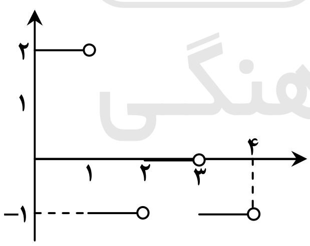
گزینه‌ی ۳ در $\mathbb{Z}$ ناپیوسته است.

گزینه‌ی ۴ : $\lim\limits_{x\to n^+} Sin\frac{\pi}{۲}(n-n) = ۱ \qquad \lim\limits_{x\to n^-} Cos\frac{\pi}{۲}(n-(n-۱)) = ۰$

گزینه‌ی ۴ در $\mathbb{Z}$ ناپیوسته است.

۴۴- گزینه ۲ پاسخ است.

این تابع با دوره تناوب ۴ است البته این بازه این بازه بخشی از یک دوره تناوب آن است و تابع در تمام نقاط صحیح ناپیوسته است. لذا در این بازه دارای ۲ نقطه ناپیوستگی است.




$x = ۱$ و $x = ۲$

۴۵- گزینه ۱ پاسخ است.

ابتدا قرار می‌دهیم $y = ۳$ یعنی تابع را با خط تلاقی می‌دهیم:

$mx^۳ + x^۲ - ۴x + ۳ = ۳$

تعریف می‌کنیم:

$h(x) = mx^۳ + x^۲ - ۴x + ۳ - ۳ \Rightarrow h(x) = mx^۳ + x^۲ - ۴x$

باید ضابطه‌ی $h(x)$ محور $x$ها را لااقل در یک نقطه در بازه‌ی $(۱,۳)$ قطع کند.

$h(۱).h(۳) < ۰ \Rightarrow (m+۱-۴)(۲۷m-۳) < ۰$

$(m-۳)(۹m-۱) < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۹} < m < ۳$