گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

حساب دیفرانسیل و انتگرال

- فصل ۳

۱- اگر $x^۲ - ۳y^۲ + ۳x = ۱$، مشتق x نسبت به y کدام است؟

۱) $\frac{۶y}{۲x+۳}$ ۲) $-\frac{۲x+۳}{۶y}$ ۳) $-\frac{۶y}{۲x+۳}$ ۴) $\frac{۲x+۳}{۶y}$

۲- اگر معادله‌ی مماس بر تابع معکوس‌پذیر $y = f(x)$ در نقطه‌ای به‌طول ۲ واقع بر f خط $y = ۳x - ۴$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{f(x) - f^{-۱}(x)}{x^۲ - ۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳- اگر $f(x) = x|x|$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰^+} \frac{f'(h) - f'(-h)}{h}$ چه عددی است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۴- ۴) وجود ندارد.

۴- اگر $f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in Q \\ ۰ & x \in R - Q \end{cases}$ تابع fof در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) بی‌شمار ۲) صفر ۳) دو ۴) یک

۵- به فرض آن‌که $f(x) = x^۳ + x$، مقدار $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f^{-۱}(h) - f^{-۱}(-h)}{h}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱-

۶- در یک نقطه از منحنی $۶x = \sqrt{y} + xy\sqrt{x}$ خط مماس موازی محور xها می‌باشد. طول آن نقطه چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۷- اگر $f(x) = (x-۱)^۵(۲x+۱)$، مقدار $f^{(۵)}(۱)$ چه عددی است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۷۲۰

۸- به فرض آن‌که $۳x^۲ - ۲y^۲ = ۴$ و $y''y^۳ = k$، مقدار k چه عددی است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳- ۴) ۳

۹- تابع $y = (۲x-۱)^۵(x-۱)^۴$ داده شده است. کدام گزینه درست است؟

۱) $y^{(۱۰)}(۱) = ۳۲$ ۲) $y^{(۹)}(۱) = ۹!$ ۳) $y^{(۹)}(۱) = ۳۲ \times ۹!$ ۴) $y^{(۱۰)}(۱) = ۹!$

۱۰- اگر $x > ۰$ و $f'(\frac{۱}{x}) = ۲x^۲$ باشد، مشتق دوم $f(x\sqrt{x})$ به‌ازای $x = ۱$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) ۴- ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{-۵}{۲}$ ۴) $\frac{-۱۵}{۲}$

۱۱- اگر $f(x) = (۹x^۲ - ۱)^۲\sqrt{۶x+۲}$ مقدار $f''(\frac{۱}{۳})$ چه عددی است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۷۲ ۳) ۱۶ ۴) ۴۸

۱۲- اگر $\sqrt{x+y^۲} + \sqrt{y} = ۳$ باشد، مقدار y'_x به‌ازای $A(۳,۱)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{-۱}{۴}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۳- به فرض آن‌که $f(x) = \sin\frac{\pi}{۲}x$ مشتق $y = fof(x)$ به ازاء $x = ۲$ چقدر است؟

۱) صفر ۲) $\frac{\pi^۲}{۴}$ ۳) $-\frac{\pi^۲}{۴}$ ۴) ۱

۱۴- یک شرکت تولیدکننده‌ی رنگ در روز $C(x)=1000+5x+\frac{1}{100}x^2$ تومان هزینه برای تولید x کیلو رنگ دارد. اگر در یک روز ۵۰۰ کیلوگرم رنگ تولید شود، هزینه‌ی متوسط هر کیلوگرم رنگ چقدر بوده است؟

۱) ۷ ۲) ۱۲ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۱۵- اگر $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)+2}{x+1}=4$ و $f(x)$ همواره تابعی پیوسته باشد، مشتق $f^2(x)$ به ازاء $x=-1$ چقدر است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۶- ۳) ۸ ۴) ۸-

۱۶- اگر $f(x)=\operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}^3x$، مقدار $f^{(5)}(0)$ چقدر است؟ ($f^{(5)}$ یعنی مشتق مرتبه‌ی پنجم تابع f)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $\sqrt{3}$

۱۷- اگر $x>1$ و $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ و خط $9y=x+3m$ بر نمودار تابع f^{-1} مماس باشد، مقدار m چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{25}{3}$ ۳) ۱۲/۵ ۴) ۱۵

۱۸- به فرض آن‌که f تابعی معکوس‌پذیر باشد و $f(3)=6$ و $g(x)=2f^{-1}(3x)$، مقدار $g'(2)f'(3)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) ۶ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۱۹- اگر $x>2$ و $f(x)=x+\frac{4}{x}$، عرض از مبدأ مماس بر f^{-1} در نقطه‌ای به‌طول ۵ واقع بر f^{-1} چه عددی است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{16}{3}$

۲۰- در یک مخروط همواره ارتفاع آب درون مخروط نصف شعاع قاعده مخروط است. در لحظه‌ای که ارتفاع آب به ۲ می‌رسد، حجم آب با آهنگ $\frac{\pi}{2}$ در حال بالا آمدن است. در این لحظه آهنگ بالا آمدن ارتفاع آب چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{32}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۲۱- میزان آب در یک مخزن برحسب لیتر که t دقیقه بعد از شروع تخلیه در مخزن موجود است، برابر $P(t)=1000(50-t)^2$ می‌باشد. در لحظه‌ی $t=20$ آهنگ آنی خروج آب چقدر است، هرگاه حجم آب اولیه، ۲۵۰۰۰۰ لیتر بوده باشد؟

۱) 4×10^4 ۲) 2×10^4 ۳) 8×10^4 ۴) 6×10^4

۲۲- اگر $n\in\mathbb{N}$ و $f(x)=x^n\cdot|x|$، حداقل عدد طبیعی n چه عددی باشد تا مشتق چهارم تابع در $x=0$ موجود باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۳- f تابعی فرد است. اگر $f'(2)=-1$ و $f(2)=3$، مقدار $(f^{-1})'(-3)$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۳-

۲۴- اگر $f(x)=x+2\sqrt{x}$، مقدار $(f^{-1})'(8)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۵- اگر $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-3}{x-3}=2$ مشتق $f(-x+2f(x))$ به‌ازای $x=3$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۶- ۴) ۶

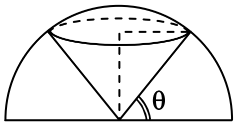
۲۶- فاصله‌ی کانونی یک عدسی محدب ۶ سانتی‌متر است. اگر جسمی که فاصله‌ی آن تا عدسی ۱۰ سانتی‌متر است با سرعت ثابت ۲ سانتی‌متر بر ثانیه به عدسی نزدیک شود، فاصله‌ی تصویر از عدسی با چه آهنگی تغییر می‌کند؟ (برحسب سانتی‌متر بر ثانیه)

۱) ۹ ۲) ۴/۵- ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۲۵-

۲۷- اگر f تابعی معکوس‌پذیر باشد به‌طوری‌که $\lim_{x\to 1}\frac{f^{-1}(x)+1}{x^2-1}=-\frac{1}{4}$، مقدار $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-1}{x^3+1}$ چه عددی است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

۲۸- مخروطی درون یک نیم‌کره به شعاع ۲۰ محاط شده است. اگر در شکل مقابل θ با آهنگ ۰/۵ رادیان بر ثانیه کاهش یابد، آهنگ کاهش حجم مخروط وقتی θ به $\frac{\pi}{6}$ می‌رسد چقدر است؟



۱) $\frac{500\pi\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{1000\pi\sqrt{3}}{3}$

۳) $\frac{4000\pi\sqrt{3}}{3}$ ۴) $\frac{8000\pi\sqrt{3}}{3}$

۲۹- اگر $f(x)=\frac{x^2+x+3}{x-1}$، مشتق پنجم تابع به‌ازای $x=0$ چقدر است؟

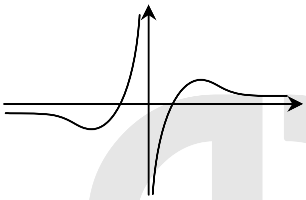
۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۰- ۳) ۶۰۰ ۴) ۶۰۰-

۳۰- اگر c طول اکسترمم نسبی تابع f باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $f'(c)=0$ ۲) f در c پیوسته است.

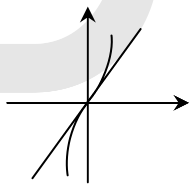
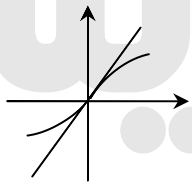
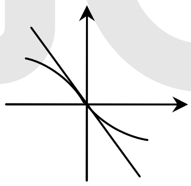
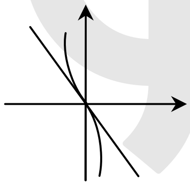
۳) c طول اکسترمم مطلق f است. ۴) f در همسایگی c تعریف شده است.

۳۱- اگر نمودار تابع $y=\frac{x^2+ax-4}{x^3+b}$ شکل مقابل باشد، مقدار $a-b$ چه عددی است؟



۱) صفر
۲) ۱
۳) ۱-
۴) ۲

۳۲- نمودار تابع $f(x)=2x-\sin^{-1}x$ در مجاورت $x=0$ چگونه است؟

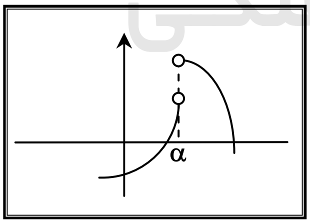
۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

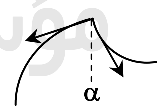
۳۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\sin x & x\in Q\\ 1 & x\in \mathbb{R}-Q\end{cases}$ در $x=0$ کدام وضعیت را دارد؟

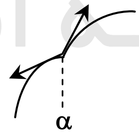
۱) Max نسبی است. ۲) Min نسبی است.

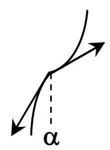
۳) عطف است. ۴) بحرانی است اما اکسترمم نسبی نیست.

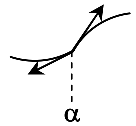
۳۴- اگر نمودار مشتق تابع پیوسته f به‌صورت مقابل باشد، نمودار f در همسایگی α به کدام صورت است؟



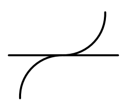
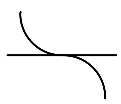
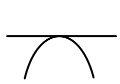
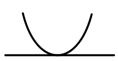
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۵- نمودار تابع $y=\frac{x|x|}{x-1}$ در همسایگی $x=0$ به کدام صورت است؟

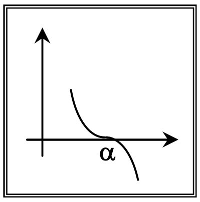
۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

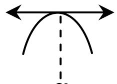
۳۶- اگر تابع $y=4x^2+\frac{a}{2x}$ دارای Max نسبی باشد، حدود a کدام است؟

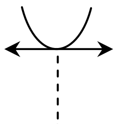
۱) $a<0$ ۲) $a>2$

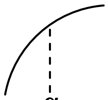
۳) $-2<a<2$ ۴) هیچ مقداری برای a یافت نمی‌شود.

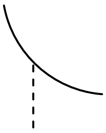
۳۷- شکل مقابل نمودار f' است. نمودار f در همسایگی α به کدام صورت است؟



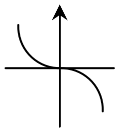
۱)  α

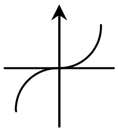
۲)  α

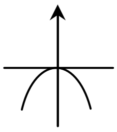
۳)  α

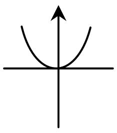
۴)  α

۳۸- نمودار تابع $y=1-\cos x-\frac{1}{2}x^2$ در همسایگی $x=0$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

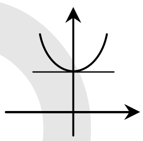
۳) 

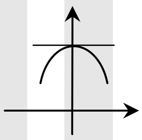
۴) 

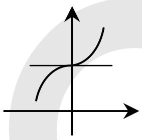
۳۹- تابع $f(x)=x+\frac{1}{x}$ مفروض است. در کدام بازه f' و f هر دو صعودی اکید هستند؟

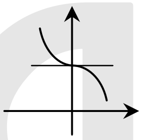
۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $\varnothing$

۴۰- نمودار تابع $y=\frac{x^2+1}{x^3+1}$ در نقطه‌ی تلاقی با محور عرض‌ها به کدام صورت است؟

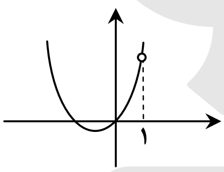
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۴۱- شکل مقابل نمودار تابع $y=\frac{4x^3+ax+b}{x-1}$ می‌باشد. زوج (a,b) کدام است؟



۱) $(4,0)$
۲) $(2,-1)$
۳) $(-4,0)$
۴) $(-2,-1)$

۴۲- برای تابع $y=(-1)^{[x]}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}$ نقاط $x=1$ و $x=2$ به‌ترتیب کدام‌اند؟

۱) min نسبی- max نسبی ۲) min نسبی- min نسبی ۳) max نسبی- max نسبی ۴) max نسبی- min نسبی

۴۳- کدام بیان برای تابع $y=x^2|x-3|$ در بازه‌ی $[-1,1]$ درست است؟

۱) تابع دارای max نسبی است.
۲) تابع دارای min نسبی و max نسبی است.
۳) تابع هیچ اکسترمم نسبی ندارد.
۴) تابع دارای min نسبی است.

۴۴- اگر مقدار اکسترمم نسبی $f(x)=\frac{x^2-ax+3}{x-2}$ برابر ۳ باشد، a کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۳- ۴) ۶-

۴۵- اگر $f(x)=\cos 2x-2\sin x$ بر $[0,\pi]$ تعریف شده باشد، ماکزیمم مطلق f از می‌نیمم مطلق آن چقدر بیش‌تر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶- کدام‌یک از توابع زیر فاقد اکسترمم نسبی است؟

۱) $y=[x]-x$ ۲) $y=x+\sin x$ ۳) $y=[x^2]$ ۴) $y=\tan^{-1}|x|$

۴۷- مقدار ماکزیمم مطلق تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x$ روی $\mathbb{R}$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt[3]{3}$ ۳) صفر ۴) تابع max مطلق ندارد.

۴۸- اگر حاصل جمع مقادیر اکسترمم مطلق تابع $y=k(\sin 2x-1)$ برابر ۶ باشد، k چه عددی است؟

۱) صفر ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۱- ۴) ۳-

۴۹- حدود a کدام باشد تا $y=\frac{x^2-2x}{x+a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد؟

۱) $0<a<2$ ۲) $a<0$ یا $a>2$ ۳) $a>0$ یا $a<-2$ ۴) $-2<a<0$

۵۰- عدد a کدام باشد تا نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-۳x^{۲}+ax$ روی نیمساز ناحیه‌ی چهارم باشد؟

۱) -۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۵۱- تابع $y=\sin^{۲}\pi x$ مفروض است. اگر $x\in(۰,۱)$، شیب خطوط مماس در نقطه‌ی عطف تابع چه عددی است؟

۱) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۲) ±۱ ۳) $\pm\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\pm\pi$

۵۲- تقعر تابع $y=x^{۲}+۴\sqrt{x}$ در کدام بازه تغییر می‌کند؟

۱) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(۱,\frac{۳}{۲})$ ۴) $(\frac{۳}{۲},۲)$

۵۳- تابع $y=(x^{۲}-۱)|x-۱|$ در m نقطه، y'' تغییر تقعر می‌دهد و n نقطه‌ی عطف دارد. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $m=n$ ۲) $m-n=۱$ ۳) $m-n=۲$ ۴) $n-m=۱$

۵۴- اگر $x\le ۱$ و $f(x)=x^{۳}-۳x$ و $g(x)=x^{۳}+x$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع gof چقدر است؟

۱) -۱۰ ۲) صفر ۳) ۱۰ ۴) ماکسیمم مطلق f وجود ندارد.

۵۵- اگر $f(x)=\begin{cases} x|x| & x\le ۱ \\ -x^{۲}+bx+c & x>۱\end{cases}$ و تابع $y=f(x)$ در $x=۱$ دارای عطف باشد، $b-c$ چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) -۲ ۴) -۴

۵۶- اگر $x=۱$ نقطه‌ی عطف تابع $y=ax^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$ باشد، عدد a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{-۱}{۳}$ ۴) -۳

۵۷- اگر طول Max نسبی $y=\frac{x^{۲}-a}{x^{۳}}$ برابر ۲ باشد. حاصل $f(۱)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{-۴}{۳}$ ۳) $\frac{-۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۵۸- تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=[x]\cos\pi x$ در بازه‌ی $[-۳,۰]$ چند عدد است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۹- تابع $f(x)=۲\sin x+\cos ۲x$ در کدام بازه نزولی است؟

۱) $(۰,\frac{\pi}{۲})$ ۲) $(\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۲})$ ۳) $(۰,\frac{\pi}{۶})$ ۴) $(۰,\frac{\pi}{۳})$

۶۰- حدود a کدام باشد تا $f(x)=\cos ۲x+a\cos x$ روی بازه‌ی $(۰,\pi)$ یکنوای اکید باشد؟

۱) $|a|\le ۴$ ۲) $|a|\ge ۴$ ۳) $۴|a|\le ۱$ ۴) $۴|a|\ge ۱$

۶۱- مقدار اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{\sin x}{۲+\cos x}$ در بازه‌ی $(\pi,۲\pi)$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

۶۲- اگر $A(۲,۱)$ اکسترمم نسبی $f(x)=\frac{ax}{x^{۲}+۲x+b}$ باشد، $f(۱)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۶}$ ۳) $\frac{۶}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۶۳- خطی که اکسترمم‌های تابع $f(x)=x-۲\sin x+۲$ در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ را به هم وصل می‌کند با کدام شیب است؟

۱) $۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{\pi}$ ۲) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲\pi}$ ۳) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{\pi}$ ۴) $۱+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi}$

۶۴- جهت تقعر تابع $y=\tan^{-۱}x+ax^{۲}$ در $x=-۱$ عوض می‌شود. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۶۵- اگر $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{۲}+\sin x}$ طول max نسبی آن در بازه‌ی $(۰,۲\pi)$ کدام عدد است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

۶۶- طول نقطه‌ی عطف تابع $y=x^۲ Lnx$ کدام است؟

۱) $e^{-\frac{۲}{۳}}$ ۲) $e^{\frac{۲}{۳}}$ ۳) $e^{-\frac{۳}{۲}}$ ۴) $e^{\frac{۳}{۲}}$

۶۷- نمودار تابع $f(x)=۲x^۳+mx^۲-۲x-۴$ محور x ها را در $x=-۲$ قطع می‌کند. طول عطف تابع چه عددی است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{-۳}{۴}$ ۴) $\frac{-۲}{۳}$

۶۸- اگر $x=۱$ طول اکسترمم $y=\sqrt[۳]{x^۲}(x-b)$ باشد. نوع اکسترمم و مقدار b کدام است؟

۱) $b=\frac{۵}{۲},Min$ ۲) $b=\frac{۲}{۵},Min$ ۳) $b=\frac{۲}{۵},Max$ ۴) $b=\frac{۵}{۲},Max$

۶۹- تابع $y=xSinx$ در بازه‌ی $(۰,\frac{\pi}{۲})$ چند عطف دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۷۰- تقعر تابع $y=\frac{x^۲+۱}{x^۲+۴}$ در بازه‌ی (a,b) رو به بالاست. بیش‌ترین مقدار $b-a$ چه عددی است؟

۱) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۷۱- حدود مقادیر a کدام باشد تا معادله‌ی $x^۴-۴x+a=۰$ دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامه باشد؟

۱) $۰<a<۱$ ۲) $۰<a<۳$ ۳) $a>۰$ ۴) $a<۰$

۷۲- کدام گزینه نقاط عطف تابع $y=x|x^۲-۳x|$ را مشخص می‌کند؟

۱) $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$ ۲) $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.$ ۳) $A\left|\begin{matrix}۱\\۲\end{matrix}\right.$ ۴) $A\left|\begin{matrix}۳\\۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$

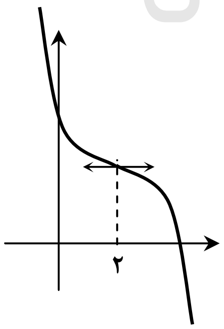
۷۳- اگر تابع $f(x)=\frac{a}{x^۲}+bx$ در نقطه $(۱,۳)$ می‌نیمم نسبی داشته باشد، $a+۲b$ کدام گزینه است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸

۷۴- تابع $y=|\cos x|$ در بازه $(۰,۲\pi)$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۵- نمودار تابع $y=-x^۳+ax^۲+bx+۹$ شکل مقابل است. $f(۱)$ چه عددی است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۲

۷۶- کدام نقطه، نقطه عطف تابع $f(x)=\frac{x^۳+۱}{x}$ می‌باشد؟

۱) $x=۱$ ۲) $x=۰$ ۳) $x=-۱$ ۴) $x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$

۷۷- اگر یکی از محورهای تقارن تابع هموگرافیک $y=ax+۱+\frac{bx^۲+۳x}{x-۲}$ خط $y=x+۴$ باشد عرض از مبدأ محور تقارن دیگر چه عددی است؟

۱) ۸ ۲) -۴ ۳) -۸ ۴) ۴

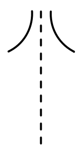
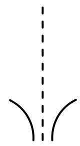
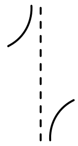
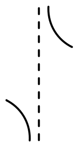
۷۸- نقاط عطف تابع $y = \text{Sin}^{۲}\pi x$ روی کدام خط قرار گرفته‌اند؟

۱) $y = ۰$ ۲) $y = ۱$ ۳) $۲y - ۱ = ۰$ ۴) $۲y + ۱ = ۰$

۷۹- تقعر تابع $y = (x - ۴)\sqrt[۳]{x}$ در بازه‌ی (a, b) رو به پایین است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

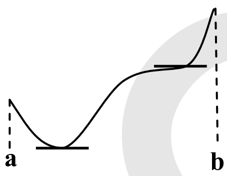
۸۰- نمودار تابع $y = \dfrac{x^{۲} - ۱}{۱ + \text{Cos}\pi x}$ در مجاورت $x = ۱$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸۱- برای معادله $x^{۳} + ۳^{x} - ۳ = ۰$ کدام گزینه صحیح است؟

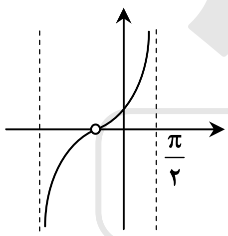
۱) دقیقاً یک ریشه مثبت دارد.
۲) دقیقاً یک ریشه منفی دارد.
۳) دو ریشه مختلف العلامه دارد.
۴) ریشه ندارد.

۸۲- اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، کدام گزینه برای f' در بازه‌ی (a, b) صحیح است؟



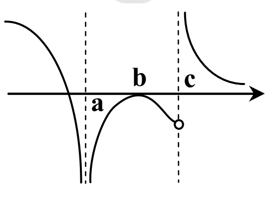
۱) f' فقط یک Min نسبی در این بازه دارد.
۲) f' فقط یک Max نسبی در این بازه دارد.
۳) f' ابتدا Min نسبی و سپس Max نسبی دارد.
۴) f' ابتدا Max نسبی سپس Min نسبی دارد.

۸۳- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = \dfrac{۱ + a\,\text{Sin}\,x}{b + \text{Cos}\,x}$ می‌باشد. $f(\dfrac{\pi}{۳})$ چه عددی است؟



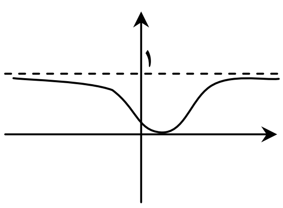
۱) $۲ + \sqrt{۳}$
۲) $۱ + \sqrt{۳}$
۳) $۱ + \dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $۲ + \sqrt{\dfrac{۳}{۲}}$

۸۴- f تابعی پیوسته است و نمودار f' به‌صورت مقابل است. نقاطی با طول a و b و c به‌ترتیب برای f چگونه‌اند؟



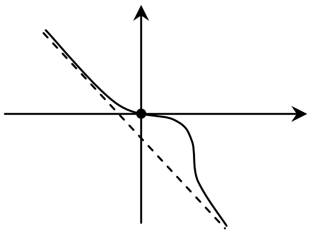
۱) عطف- عطف- زاویه‌دار غیراکسترمم نسبی
۲) عطف- عطف- min نسبی
۳) min نسبی- max نسبی- زاویه‌دار غیراکسترمم نسبی
۴) مجانب قائم- max نسبی- مجانب قائم

۸۵- اگر نمودار تابع $y = \dfrac{ax^{۲} + bx + c}{x^{۲} - x + ۳}$ به‌صورت مقابل باشد، زوج مرتب (b, c) کدام می‌باشد؟



۱) $(۱, \frac{۱}{۴})$ ۲) $(-۱, \frac{۱}{۴})$
۳) $(۲, ۱)$ ۴) $(-۲, ۱)$

۸۶- اگر نمودار تابع $y=\dfrac{-x^3+ax^2}{x^2-2x+b}$ به‌صورت شکل مقابل باشد، مقدار b چه عددی است؟



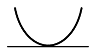
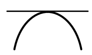
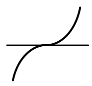
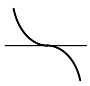
۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

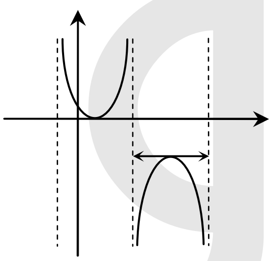
۸۷- نمودار تابع $y=\dfrac{2\operatorname{Sin}x}{1+2\operatorname{Sin}x}$ در مجاورت $x=\dfrac{\pi}{2}$ به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸۸- اگر f تابعی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و نزولی اکید و $f(-1)=0$، دامنه‌ی تعریف $y=\sqrt{\dfrac{x}{f(x)}}$ کدام است؟

۱) $(-\infty\,,-1)$ ۲) $(-\infty\,,-1)\cup[0\,,+\infty)$ ۳) $[0\,,+\infty)$ ۴) $(-1\,,0]$

۸۹- اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1+a\operatorname{Sin}x}{1+b\operatorname{Sin}x}$ در بازه‌ی $(-\dfrac{\pi}{6}\,,\dfrac{11\pi}{6})$ به‌صورت مقابل باشد، مقدار $\max$ نسبی تابع چقدر است؟



۱) ۲

۲) -1

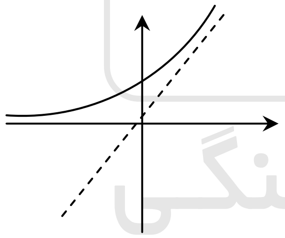
۳) -2

۴) $\dfrac{2}{3}$

۹۰- اگر T دوره‌ی تناوب تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\operatorname{Sin}x}{1+\operatorname{Cos}x}$ باشد، در بازه‌ی $(-\pi\,,\pi+T)$ چند نقطه‌ی عطف دارد؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۹۱- اگر نمودار تابع $f(x)=ax+\sqrt{x^2+bx+1}$ به‌صورت مقابل باشد، $f'(1)$ چه عددی است؟



۱) $1+\sqrt{2}$

۲) $1+2\sqrt{2}$

۳) $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $2+\sqrt{2}$

۹۲- ریشه‌های معادله‌ی $x^4+4x+1=0$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

۱) فقط یک ریشه‌ی منفی بین صفر و ۱- دارد.

۲) دو ریشه‌ی منفی دارد و یکی از ریشه‌ها بین صفر و ۱- و دیگری کم‌تر از ۱- می‌باشد.

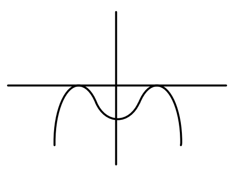
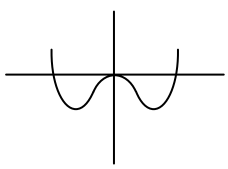
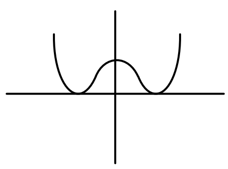
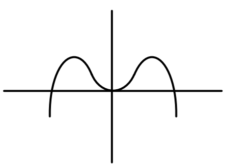
۳) دو ریشه‌ی منفی دارد هر دو کم‌تر از ۱- هستند.

۴) دو ریشه‌ی منفی دارد و هر دو بین صفر و ۱- هستند.

۹۳- در تابع هموگرافیک $y=ax+b+\dfrac{3x^2}{x+2}$ خط $x+y=4$ یکی از محورهای تقارن تابع می‌باشد. $a-b$ چه عددی است؟

۱) -3 ۲) ۹ ۳) -15 ۴) -9

۹۴- اگر $f(x)=x^2-1$، نمودار تابع $y=fof(x)$ شبیه کدام گزینه می‌باشد؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۹۵- اگر $A(2,3)$ اکسترمم $y=\frac{x}{a}+\frac{b}{ax^2}$ باشد، مقدار a و نوع اکسترمم آن کدام است؟

۱) ۱ و Min
۲) ۴ و Min
۳) ۱ و Max
۴) ۴ و Max

۹۶- معادله‌ی درجه سوم $x^3-x^2-x+a=0$ فقط یک ریشه‌ی حقیقی مثبت دارد. حدود مقادیر a کدام است؟

۱) $a<-\frac{5}{27}$
۲) $a<-1$
۳) $a>1$
۴) $a>\frac{5}{27}$

پاسخ تست‌های فصل ۳

۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$x'_y = -\frac{f'_y}{f'_x} = -\frac{-۶y}{۲x+۳} = \frac{۶y}{۲x+۳}$$

۲- گزینه ۴ پاسخ است.

با توجه به آن‌که $(f^{-1})'(۲) = \frac{۱}{f'(۲)} = \frac{۱}{۳} \Leftarrow A\left|\begin{matrix}۲\\۲\end{matrix}\right. \in f$ داریم:

$$\overset{Hop}{=\!=} \lim_{x\to ۲} \frac{f'(x)-(f^{-1})'(x)}{۲x} = \frac{f'(۲)-(f^{-1})'(۲)}{۴} = \frac{۳-\frac{۱}{۳}}{۴} = \frac{\frac{۸}{۳}}{۴} = \frac{۲}{۳}$$

۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x \leq ۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x & x \geq ۰ \\ -۲x & x \leq ۰ \end{cases}$$

$$\lim_{h\to ۰^+} \frac{f'(h)-f'(-h)}{h} = \lim_{h\to ۰^+} \frac{۲h-(۲h)}{h} = ۰$$

راه حل دیگر: هوپیتال: $\overset{H}{=} \lim \frac{f''(۰^+)+f''(۰^-)}{۱} = ۲-۲ = ۰$

۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in \mathbb{Q} \\ ۰ & x \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{Q} \Rightarrow fof\,(x) = ۱$$

fof تابعی ثابت با دامنه R است پس در تمام R پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f^{-1}(h)-f^{-1}(-h)}{h} = ۲(f^{-1})'(۰) = ۲$$

$$A\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \in f \Rightarrow (f^{-1})'(۰) = \frac{۱}{f'(۰)} = \frac{۱}{۱} = ۱ \qquad (f'(x) = ۳x^۲+۱ \Rightarrow f'(۰) = ۱)$$

۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\sqrt{y} + xy\sqrt{x} - ۶x = ۰ \Rightarrow y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{۳}{۲}y\sqrt{x}-۶}{f'_y} = ۰$$

با توجه به ضابطه‌ی منحنی داریم: $y\sqrt{x} = ۴ \Rightarrow \frac{۲}{\sqrt[۴]{x}} + ۴x - ۶x = ۰$

$$\frac{۲}{\sqrt[۴]{x}} = ۲x \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۱\\۴\end{matrix}\right.$$

۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$f(x) = (x-\alpha)^n g(x) \Rightarrow f^{(n)}(\alpha) = n!g(\alpha)$$

مشروط بر آن‌که g در α پیوسته باشد.

$$f^{(۵)}(۱) = ۵! \times ۳ = ۳۶۰$$

۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$y' = -\frac{۶x}{-۴y} = \frac{۳}{۲}\frac{x}{y} \Rightarrow y'' = \frac{۳}{۲}\cdot\frac{y-xy'}{y^۲} \Rightarrow y'' = \frac{۳}{۲}\frac{y-x\cdot\frac{۳}{۲}\frac{x}{y}}{y^۲} \Rightarrow y'' = \frac{۳}{۲}\frac{۲y^۲-۳x^۲}{۲y^۳} = -\frac{۴}{۲y^۳}\times\frac{۳}{۲} = -\frac{۳}{y^۳}$$

$$\Rightarrow y''y^۳ = -۳ \Rightarrow k = -۳$$

۹- گزینه ۳ پاسخ است.

اگر تابع را بسط دهیم یک چند جمله‌ای از درجه ۹ با ضریب ۳۲ داریم یعنی:

$$y = ۳۲x^۹ + \cdots - ۱$$

تابع از درجه‌ی ۹ است، به‌طوری‌که اگر از تابع ۹ بار مشتق بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$y^{(۹)} = ۳۲ \times ۹!$$

و اگر $n \geq ۱۰$ آن‌گاه $y^{(n)} = ۰$.

۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.

$$y = f(x\sqrt{x}) \Rightarrow y = f(x^{\frac{۳}{۲}}) \Rightarrow y' = f'(x^{\frac{۳}{۲}}) \times \frac{۳}{۲}\sqrt{x}$$

از طرفی:

$$f'(\frac{۱}{x}) = ۲x^۲ \Rightarrow f'(x) = \frac{۲}{x^۲} \Rightarrow f'(x^{\frac{۳}{۲}}) = \frac{۲}{(x^{\frac{۳}{۲}})^۲} = \frac{۲}{x^۳}$$

پس:

$$y' = \frac{۲}{x^۳} \times \frac{۳}{۲}\sqrt{x} = \frac{۳\sqrt{x}}{x^۳} \Rightarrow y' = ۳x^{-\frac{۵}{۲}}$$

$$y'' = \frac{-۱۵}{۲}x^{-\frac{۷}{۲}} = \frac{-۱۵}{۲x^۳\sqrt{x}} \Rightarrow y''(۱) = -\frac{۱۵}{۲}$$

دقت کنید مشتق $f(g(x))$ با $f'(g(x))$ متفاوت است. در واقع $f'(g(x))$ مشتق تابع f در نقطه‌ی $X = g(x)$ است. اما در این سؤال مشتق دوم تابع در نقطه‌ی $x = ۱$ پرسیده شده است، یعنی $\left(f(g(x)) \right)''(۱)$

راه حل دوم:

$$(f(x^{\frac{۳}{۲}}))' = \frac{۳}{۲}x^{\frac{۱}{۲}}f'(x^{\frac{۳}{۲}})$$

$$(f(x^{\frac{۳}{۲}}))'' = \frac{۳}{۴}x^{-\frac{۱}{۲}}f'(x^{\frac{۳}{۲}}) + \frac{۹}{۴}xf''(x^{\frac{۳}{۲}})$$

$$f'(\frac{۱}{x}) = ۲x^۲ \Rightarrow -\frac{۱}{x^۲} \times f''(\frac{۱}{x}) = ۴x$$

$$x = ۱ \Rightarrow f'(۱) = ۲ \quad , \quad -f''(۱) = ۴ \Rightarrow f''(۱) = -۴$$

$$(f(x^{\frac{۳}{۲}}))''\Big|_{x=۱} = \frac{۳}{۴}f'(۱) + \frac{۹}{۴}f''(۱) = \frac{۳}{۲} - ۹ = -\frac{۱۵}{۲}$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$f(x) = (۳x-۱)^۲(۳x+۱)^۲\sqrt{۶x+۲}$$

$$f(x) = ۹(x-\frac{۱}{۳})^۲(۳x+۱)^۲\sqrt{۶x+۲}$$

با توجه به آن‌که $f(x) = (x-\alpha)^n . g(x)$ داریم:

$$f^{(n)}(\alpha) = n!\,g(\alpha)$$

$$f''(\frac{۱}{۳}) = ۹ \times ۲! \times ۲^۲ \times \sqrt{۴} = ۹ \times ۲ \times ۴ \times ۲ = ۱۴۴$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x+y^۲}}}{\frac{۲y}{۲\sqrt{x+y^۲}} + \frac{۱}{۲\sqrt{y}}} = -\frac{\frac{۱}{۲\times۲}}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}} = -\frac{۱}{۴}$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$f(۲) = \sin\pi = ۰$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۲} \to f'(۲) = -\frac{\pi}{۲}$$

$$f'\big(f(۲)\big) = f'(۰) = \frac{\pi}{۲}$$

$$\big(f(f(x))\big)'\Big|_{x=۲} = f'(۲)\times f'\big(f(۲)\big) = -\frac{\pi}{۲}\times\frac{\pi}{۲} = -\frac{\pi^۲}{۴}$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\overline{C} = \frac{C(۵۰۰)}{۵۰۰} = \frac{۱۰۰۰ + ۵\times۵۰۰ + \frac{۱}{۱۰۰}\times۵۰۰\times۵۰۰}{۵۰۰} = ۲ + ۵ + ۵ = ۱۲$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to-۱}\frac{f(x)+۲}{x+۱} = ۴ \Rightarrow f'(-۱) = ۴$$

چون مخرج کسر در ۱- صفر است، باید صورت هم صفر باشد تا کسر به‌صورت مبهم درآید پس: $f(-۱) = -۲$

تذکر: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

$$y = f^۲(x) \to y' = ۲f(x)f'(x) \Rightarrow$$

$$y'(-۱) = ۲f(-۱)f'(-۱) \Rightarrow y'(-۱) = ۲\times-۲\times۴ = -۱۶$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$g(x) = \cos^۳ x$ تابعی زوج است، پس $g^{(۵)}(x)$ تابعی فرد است پس $g^{(۵)}(۰) = ۰$ لذا:

$$f^{(۵)}(x) = (\sin x)^{(۵)} + g^{(۵)}(x) \Rightarrow f^{(۵)}(۰) = ۱ + ۰ = ۱$$

زیرا:

$$y = \sin x \Rightarrow y^{(۵)} = \sin(\frac{۵\pi}{۲} + x) \Rightarrow y^{(۵)}(x) = \cos x \Rightarrow y^{(۵)}(۰) = \cos ۰ = ۱$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ است.

شیب خط مماس بر تابع f^{-1} برابر $\frac{۱}{۹}$ است، پس $(f^{-1})'(\beta) = \frac{۱}{۹}$. از طرفی $(f^{-1})'(\beta) = \frac{۱}{f'(\alpha)}$، پس $f'(\alpha) = ۹$.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۹ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow \alpha = ۲$$

$$\beta = f(\alpha) \Rightarrow \beta = f(۲) = ۸ - ۶ + ۱ \Rightarrow A\Big|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix} \in f \Rightarrow A'\Big|\begin{matrix}۳\\۲\end{matrix} \in f^{-1}$$

یعنی A' روی خط مماس است.

$$۱۸ = ۳ + ۳m \Rightarrow m = ۵$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\begin{cases} g(۲) = ۲f^{-1}(۶) \\ f(۳) = ۶ \Rightarrow f^{-1}(۶) = ۳ \end{cases} \Rightarrow g(۲) = ۶$$

$$g'(x) = ۶(f^{-1})'(۳x) \Rightarrow g'(۲) = ۶(f^{-1})'(۶) = ۶\times\frac{۱}{f'(۳)} \Rightarrow g'(۲) = \frac{۶}{f'(۳)} \Rightarrow f'(۳)g'(۲) = ۶$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$A'\Big|^{5} \in f^{-1} \Rightarrow A\Big|_{5} \in f \Rightarrow f(\alpha)=5 \Rightarrow \alpha+\frac{4}{\alpha}=5 \Rightarrow \alpha=1$$

$$\left.\begin{array}{l} A\Big|^{1}_{5}\in f \\ \Rightarrow f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2} \Rightarrow f'(1)=-3 \\ (f^{-1})'(5)=\dfrac{1}{f'(1)} \end{array}\right\} \Rightarrow (f^{-1})'(5)=-\frac{1}{3} \Rightarrow y-1=-\frac{1}{3}(x-5) \Rightarrow y=-\frac{x}{3}+\frac{5}{3}+1=-\frac{x}{3}+\frac{8}{3}$$

عرض از مبدأ برابر $\frac{8}{3}$ است.

۲۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$R=2h \overset{h=2}{\Rightarrow} R=4$$

$$V=\frac{\pi}{3}R^2\cdot h \Rightarrow V=\frac{\pi}{3}R^2\cdot\frac{R}{2}=\frac{\pi}{6}R^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt}=\frac{3\pi}{6}R^2\frac{dR}{dt}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\times 16\times\frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dR}{dt}=\frac{1}{16} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dR}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{1}{32}$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$V(t)=25\times10^4-P(t) \Rightarrow V'(t)=-P'(t) \Rightarrow V'(t)=2000(50-t) \xrightarrow{t=20} V'(t)=60000$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ است.

$y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است اما مشتق‌ناپذیر و $y=x|x|$ در $x=0$ پیوسته است و مشتق‌پذیر، اما y'' در صفر وجود ندارد. اگر به‌همین ترتیب پیش برویم، با فرض $n=4$، تابع مشتق چهارم در $x=0$ دارد، اما مشتق پنجم در $x=0$ ندارد، پس حداقل عدد طبیعی n برای وجود مشتق چهارم $n=4$ است.

۲۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$A\Big|^{2}_{3}\in f \xrightarrow{\text{فرد است } f} B\Big|^{-2}_{-3}\in f \xrightarrow{\text{معکوس پذیر } f} B'\Big|^{-3}_{-2}\in f^{-1}$$

$$f'(2)=-1 \xrightarrow{\text{زوج است } f'} f'(-2)=-1 \Rightarrow (f^{-1})'(-3)=\frac{1}{f'(-2)}=-1$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} x+2\sqrt{x}=8 \Rightarrow x=4 \Rightarrow (f^{-1})'(8)=\dfrac{1}{f'(4)} \\ f'(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4)=\dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (f^{-1})'(8)=\frac{2}{3}$$

۲۵- گزینه ۴ پاسخ است.

اولاً کسر داده شده باید به‌صورت $\frac{0}{0}$ باشد در غیر این صورت ∞ می‌شود، پس $f(3)=3$ از طرفی: $f'(3)=2$.

$$\left(f(-x+2f(x))\right)'\Big|_{x=3}=\left(-1+2f'(3)\right)\times f'\left(-3+2f(3)\right)=3\times2=6$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{10}+\frac{1}{q}=\frac{1}{6} \Rightarrow q=\frac{30}{2}=15$$

که در آن p فاصله‌ی جسم تا عدسی و q فاصله‌ی تصویر از عدسی می‌باشد، چون فاصله‌ی کانونی ثابت است، لذا:

$$\Rightarrow \frac{-p'_t}{p^2}-\frac{q'_t}{q^2}=0 \Rightarrow q'_t=-\frac{q^2}{p^2}\cdot p'_t \Rightarrow q'_t=-\frac{225}{100}\times2=-4/5\ cm/s$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ است.

با توجه به آن‌که $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)+1}{(x-1)(x+1)}=-\dfrac{1}{4}$ ، داریم:

$$\begin{cases} f^{-1}(1)=-1 \Rightarrow f(-1)=1 \quad , \quad (f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'(-1)} \\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)+1}{x-1}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow (f^{-1})'(1)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow f'(-1)=-2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-1}{x^3+1}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{f(x)-1}{x^3+1}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)}{3x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{f'(-1)}{3}=-\frac{2}{3}$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\begin{cases} \operatorname{Sin}\theta=\dfrac{h}{20} \Rightarrow h=20\operatorname{Sin}\theta \\ \operatorname{Cos}\theta=\dfrac{R}{20} \Rightarrow R=20\operatorname{Cos}\theta \end{cases} \Rightarrow V_{\text{مخروط}}=\frac{\pi}{3}R^2h$$

$$V=\frac{\pi}{3}\times 400\operatorname{Cos}^2\theta\times 20\operatorname{Sin}\theta \Rightarrow V=\frac{8000\pi}{3}\operatorname{Cos}^2\theta\operatorname{Sin}\theta$$

$$V'_t=\frac{8000\pi}{3}(-2\operatorname{Sin}^2\theta\operatorname{Cos}\theta+\operatorname{Cos}^3\theta)\cdot\theta'_t \Rightarrow V'_t=\frac{8000\pi}{3}(-2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4})\times(-\frac{1}{2})=\frac{8000\pi}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{8}\times-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{500\sqrt{3}\pi}{3}$$

$$\theta=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} h=10 \\ R=10\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow V'_t=\frac{8000\pi}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8})\times(-\frac{1}{2})=\frac{8000\pi}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{8}\times\frac{-1}{2}=\frac{-500\sqrt{3}\pi}{3}$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ است.

$$y=\frac{(x-1)(x+2)+5}{x-1} \Rightarrow y=(x+2)+\frac{5}{x-1}$$

$$y=\frac{1}{ax+b} \Rightarrow y^{(n)}=\frac{(-a)^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$y^{(5)}=(\frac{5}{x-1})^{(5)} \Rightarrow y^{(5)}=5\times\frac{(-1)^5\times 5!}{(x-1)^6} \Rightarrow y^{(5)}(0)=-600$$

یا سریع مشتق بگیرید:

$$(\frac{5}{x-1})^{(5)}=(\frac{-5}{(x-1)^2})^{(4)}=(\frac{10}{(x-1)^3})^{(3)}=(\frac{-30}{(x-1)^4})''=(\frac{120}{(x-1)^5})'=(\frac{-600}{(x-1)^6})$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ است.

برای آن‌که c طول اکسترمم نسبی f باشد، نه پیوستگی f، در این نقطه لازم است نه مشتق‌پذیری آن، فقط باید تابع در همسایگی شامل نقطه‌ی c تعریف شده باشد.

۳۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$x=0$ مجانب قائم تابع است، لذا $x=0$ ریشه‌ی مخرج است، پس $b=0$.

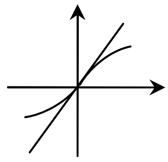
با توجه به نمودار تابع فرد است و مخرج هم تابعی فرد است، پس صورت یک تابع زوج است. (چون تقسیم تابع زوج بر تابع فرد، تابع فرد است.) در این صورت $a=0$، پس $a-b=0$ و ضابطه‌ی اصلی تابع به‌صورت $y=\dfrac{x^2-4}{x^3}$ است.

۳۲- گزینه ۲ پاسخ است.

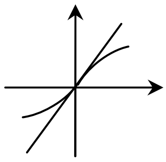
این تابع فرد است و در صفر و همسایگی صفر تعریف شده است و دارای تقعر است، پس $x=0$ طول عطف تابع است.

$$f'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x)=\frac{-2x}{2(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\begin{cases} x>0: f''(x)<0 \\ x<0: f''(x)>0 \end{cases}$$

پس نمودار تابع در همسایگی صفر به‌صورت  می‌باشد.

راه حل دوم: می‌دانیم $x \to 0: \operatorname{Sin}^{-1}x \approx x+\frac{x^3}{6}$



$$\underset{x\to 0}{f(x)} \approx 2x-(x+\frac{x^3}{6}) \sim x-\frac{x^3}{6}$$

۳۳- گزینه ۴ پاسخ است.

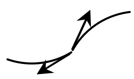
تابع در همسایگی $x=0$ هم اعداد گویا دارد هم اعداد اصم، از طرفی $f(0)=0$ پس در همسایگی $x=0$ هم نقطه‌ای وجود دارد که عرض آن کم‌تر از صفر است و هم نقطه‌ای وجود دارد که عرض آن بیش‌تر از صفر است، پس $x=0$ صرفاً یک نقطه‌ی بحرانی f است و طول اکسترمم نمی‌باشد.

۳۴- گزینه ۴ پاسخ است.

آن‌چه مهم است پیوستگی تابع است. تابع در این نقطه مشتق ندارد، به‌طوری‌که این نقطه برای تابع f زاویه‌دار است. اما قبل و بعد α مشتق مثبت است، پس f در همسایگی α صعودی است.

اما قبل α، f' صعودی است، پس تقعر تابع رو به بالا و بعد α تابع f' نزولی است، پس تابع رو به پایین است. به‌عبارتی:

x		α	
f'	+		+
f''	+		−
f			

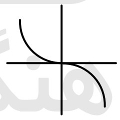
$\Rightarrow$ 

$f'_-(\alpha)<f'_+(\alpha)$ پس شیب نیم‌مماس چپ کم‌تر است.

۳۵- گزینه ۲ پاسخ است.

f در $x=0$ پیوسته است و $f'(0)=0$ از طرفی:

$$f(0)=0$$
$$x>0 \Rightarrow y<0$$
$$x<0 \Rightarrow y>0$$

$\Rightarrow$ 

۳۶- گزینه ۴ پاسخ است.

تابع مشتق‌پذیر است برای وجود اکسترمم‌ها از ریشه‌های مشتق و علامت f' استفاده می‌کنیم.

$$y'=+8x-\frac{a}{2x^2}=\frac{+16x^3-a}{2x^2}=0 \Rightarrow x=+\sqrt[3]{\frac{a}{16}}$$

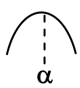
	$-\infty$	$\sqrt[3]{\frac{a}{16}}$	$+\infty$
y'	−	0	+
y	↘	Min	↗

پس این تابع همواره دارای Min است، پس هیچ‌گاه Max نسبی ندارد.

۳۷- گزینه ۱ پاسخ است.

قبل از α ، $f'>0$ ، f' نزولی اکید است، پس تابع f صعودی با تقعر رو به پایین است.

بعد از α ، $f'<0$ ، f' نزولی اکید است، پس تابع f نزولی با تقعر رو به پایین است.

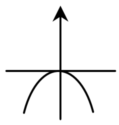
پس شکل تقریبی f در همسایگی α به صورت  می‌باشد.

۳۸- گزینه ۳ پاسخ است.

اولاً چون تابع زوج است نمودار f در همسایگی $x=0$ نسبت به محور عرض‌ها متقارن است.

$$y' = \mathrm{Sin}x - x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & 0 & \\ \hline y' & + & 0 & - \\ & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

$$y'' = \mathrm{Cos}x - 1 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & 0 & \\ \hline y'' & - & 0 & - \\ & \cap & & \cap \end{array} \Rightarrow$$



$y(0)=0$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ است.

شرط آن‌که f و f' هر دو با هم صعودی اکید باشند آن است که f' و f'' هر دو مثبت باشند.

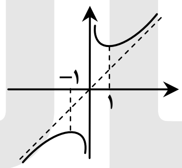
(شرط دامنه $x \neq 0$)

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0 \Rightarrow x > 0 \\ f'(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2} > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 1 \text{ جواب نهایی}$$

اما نمودار تابع به‌صورت



می‌باشد.

جواب بازه‌ای است که f صعودی اکید با تقعر رو به بالا باشد.

۴۰- گزینه ۱ پاسخ است.

$$y' = \frac{2x(x^3+1) - 3x^2(x^2+1)}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 - 3x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^3+1)^2} = \frac{x(-x^3 - 3x + 2)}{(x^3+1)^2}$$

این تابع در اطراف نقطه‌ی $x=0$ رفتار تابع $y'=x$ را دارد. (همواره می‌توان در بررسی تابع در اطراف یک نقطه رفتار تابع هم‌ارز آن را در اطراف آن نقطه بررسی کرد.)

$$y'(0) = 0 \quad , \quad \begin{array}{c|ccc} x & & 0 & \\ \hline y' & - & 0 & + \\ & \searrow & & \nearrow \end{array} \Rightarrow$$

$x=0$ طول min نسبی f است.

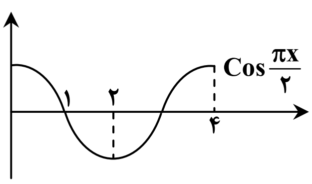
۴۱- گزینه ۳ پاسخ است.

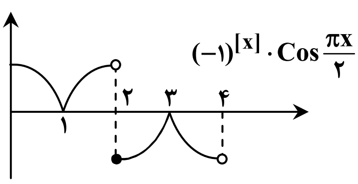
$x=1$ نقطه‌ی ناپیوستگی رفع‌شدنی f است، پس $x=1$ ریشه‌ی صورت هم باید باشد. از طرفی نمودار تابع از مبدأ عبور کرده، پس $x=0$ هم ریشه‌ی صورت است، پس:

$$g(x) = 4x^3 + ax + b$$

$$\left.\begin{array}{l} g(1) = 0 \Rightarrow 4 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -4 \\ g(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow (a,b) = (-4,0)$$

۴۲- گزینه ۲ پاسخ است.





$x=1$ طول min نسبی و $x=2$ هم طول min نسبی است.

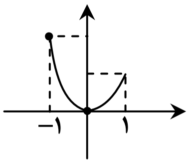
۴۳- گزینه ۴ پاسخ است.

$$-1 \le x \le 1 \Rightarrow x-3<0 \Rightarrow y=3x^2-x^3$$

$$y'=6x-3x^2=0 \Rightarrow 3x(2-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\text{نقاط بحرانی}: \Rightarrow \begin{cases} x=0 & f(0)=0 & \text{مطلق } \min=0 \\ x=1 & f(1)=2 & \\ x=-1 & f(-1)=4 & \text{مطلق } \max=4 \end{cases}$$

$x=0$ طول min نسبی تابع است زیرا تابع در همسایگی آن تعریف شده است، اما max نسبی ندارد. مطابق شکل:



۴۴- گزینه ۱ پاسخ است.

اگر تابع مشتق‌پذیری دارای اکسترممی برابر k باشد، معادله‌ی $f(x)=k$ دارای ریشه‌ی مضاعف است. پس:

$$\frac{x^2-ax+3}{x-2}=3 \Rightarrow x^2-(a+3)x+9=0$$

$$\Delta=(a+3)^2-36=0 \Rightarrow \begin{cases} a+3=6 \Rightarrow a=3 \\ a+3=-6 \Rightarrow a=-9 \end{cases}$$

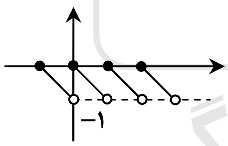
۴۵- گزینه ۴ پاسخ است.

$$f=1-2\sin^2x-2\sin x=-2\sin^2x-2\sin x+1$$

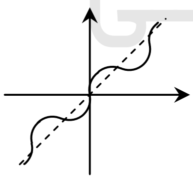
$$f'=-4\sin x\cos x-2\cos x=-2\cos x(2\sin x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} \\ 2\sin x+1=0 \ \text{غیرممکن در بازه } [0,\pi] \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} f(0)=1 \\ f(\pi)=1 \\ f(\frac{\pi}{2})=-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \text{مطلق } \max=1 \\ \text{مطلق } \min=-3 \end{matrix} \Rightarrow 4=\text{اختلاف}$$

۴۶- گزینه ۲ پاسخ است.

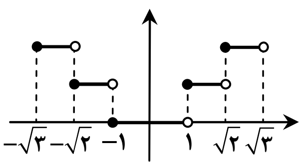


گزینه‌ی ۱: با توجه به نمودار $y=[x]-x$ تمام نقاط صحیح طول max نسبی تابع هستند.

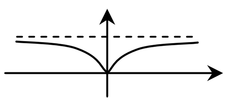


گزینه‌ی ۲: $y'=1+\cos x=0 \Rightarrow x=(2k+1)\pi$

تابع بی‌شمار بحرانی دارد اما مشتق تغییر علامت نمی‌دهد، پس هیچ‌کدام طول اکسترمم نسبی نمی‌باشند.



گزینه‌ی ۳: بی‌شمار اکسترمم نسبی دارد.



گزینه‌ی ۴: $x=0$ طول min نسبی تابع است.

۴۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$x^3-3x^2 \le x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3-3x^2} \le x \Rightarrow f(x) \le 0$$

پس بیش‌ترین مقدار تابع صفر است.

۴۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\begin{cases}\mathrm{Sin}\,2x=1 & \Rightarrow \quad \max(\mathrm{Sin}\,2x-1)=0\\ \mathrm{Sin}\,2x=-1 & \Rightarrow \quad \min(\mathrm{Sin}\,2x-1)=-2\end{cases} \Rightarrow \quad \max+\min=0-2k=-2k=6 \Rightarrow k=-3$$

۴۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$y'=\frac{2(x-1)(x+a)-x^2+2x}{(x+a)^2}=\frac{x^2+2ax-2a}{(x+a)^2}$$

باید $\Delta>0$ باشد، پس:

$$\Delta=4a^2+8a=4a(a+2)>0 \Rightarrow \begin{cases}a>0\\ a<-2\end{cases} \text{یا}$$

۵۰- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر قرار باشد نقطه‌ی عطف روی نیمساز ناحیه‌ی چهارم باشد باید $\alpha>0$ و $A\left|\begin{matrix}\alpha\\-\alpha\end{matrix}\right.$، اما در تابع درجه‌ی سوم $y=ax^3+bx^2+cx+d$

طول نقطه‌ی عطف $-\frac{b}{3a}$ است، پس:

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3-3x^2+ax \Rightarrow x_{\text{عطف}}=\frac{3}{3\times\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

$$f(\frac{3}{2})=-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3}\times\frac{27}{8}-3\times\frac{9}{4}+a(\frac{3}{2})=-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{9}{4}-\frac{27}{4}+\frac{3a}{2}+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow \frac{-18+6+6a}{4}=0 \Rightarrow 6a=12 \Rightarrow a=2$$

۵۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\mathrm{Sin}^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\mathrm{Cos}\,2\alpha) \Rightarrow y=\frac{1}{2}(1-\mathrm{Cos}\,2\pi x) \Rightarrow y'=\frac{1}{2}(2\pi\,\mathrm{Sin}\,2\pi x)=\pi\,\mathrm{Sin}\,2\pi x$$

$$y''=2\pi^2\mathrm{Cos}\,2\pi x=0 \Rightarrow \begin{cases}2\pi x=\frac{\pi}{2} & \Rightarrow \quad x=\frac{1}{4}\\ 2\pi x=\frac{3\pi}{2} & \Rightarrow \quad x=\frac{3}{4}\end{cases} : \text{طول نقاط عطف در بازه‌ی } (0,1)$$

$$\begin{cases}f'(\frac{1}{4})=\pi\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{4}=\pi\\ f'(\frac{3\pi}{4})=\pi\,\mathrm{Sin}\frac{6\pi}{4}=-\pi\end{cases} \Rightarrow \text{شیب خطوط مماس در عطف}=\pm\pi$$

۵۲- گزینه ۲ پاسخ است.

$$x>0 \Rightarrow y=x^2+4\sqrt{x} \Rightarrow y'=2x+\frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow y'=2(x+x^{-\frac{1}{2}}) \Rightarrow y''=2-x^{-\frac{3}{2}}=2-\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$y''=0 \Rightarrow 2x\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow x\sqrt{x}=\frac{1}{2} \Rightarrow x^3=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \text{ طول عطف}$$

$$\sqrt[3]{8}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[3]{1} \Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}<1$$

۵۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$y=\begin{cases}(x^2-1)(x-1) & x\ge1\\ (x^2-1)(1-x) & x\le1\end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases}(x-1)^2(x+1) & x\ge1\\ -(x-1)^2(x+1) & x\le1\end{cases}$$

$$y'=\begin{cases}2(x-1)(x+1)+(x-1)^2 & x\ge1\\ -2(x-1)(x+1)-(x-1)^2 & x\le1\end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases}(x-1)(3x+1) & x\ge1\\ (1-x)(3x+1) & x\le1\end{cases}$$

$$y''=\begin{cases}3x+1+3x-3 & x>1\\ -3x-1+3-3x & x<1\end{cases} \Rightarrow y''=\begin{cases}6x-2 & x>1\\ 2-6x & x<1\end{cases}$$

y'' در $x=1$ و $x=\frac{1}{3}$ تغییر علامت می‌دهد و اتفاقاً هر ۲ نقطه عطف هستند (چرا؟)

۵۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$g(x)$ یک تابع صعودی اکید است، زیرا $g'(x)=3x^2+1>0$

پس کافی است بیش‌ترین مقدار f را با توجه به $x\le 1$ در تابع $g(x)$ قرار دهیم تا Max آن یافت شود.

$$f(x)=x^3-3x \Rightarrow \left.\begin{matrix} f'(x)=3x^2-3=0 \\ x\le 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=1 & f(1)=-2 \\ x=-1 & f(-1)=2\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ پس Max مطلق f برابر ۲ است.

$\text{Max}(gof)=g(2)=10$ مطلق

۵۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\text{شرط پیوستگی}\begin{cases} \text{حدچپ} = 1 \\ \text{حدراست} = -1+b+c \end{cases} \Rightarrow -1+b+c=1 \Rightarrow b+c=2$$

برای آن‌که $x=1$ طول نقطه‌ی عطف تابع باشد باید تابع در $x=1$ خط مماس داشته باشد، پس باید در $x=1$ مشتق‌های چپ و راست با هم برابر باشند.

$$\text{شرط مشتق‌پذیری}\begin{cases} f'_+(1)=-2+b \\ f'_-(1)=2 \end{cases} \Rightarrow -2+b=2 \Rightarrow b=4 \Rightarrow c=-2$$

تغییر علامت f'' هم لازم است.

$$\left.\begin{matrix} f''_+(1)=-2<0 \\ f''_-(1)=2>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{علامت } f'' \text{ در } x=1 \text{ تغییر می‌کند}$$

$b-c=4+2=6$

۵۶- گزینه ۴ پاسخ است.

برای آن‌که $x=1$ طول عطف تابع باشد باید $f''(1)=0$ زیرا تابع دارای مشتق مرتبه‌ی دوم صفر است.

$$y'=2ax-\frac{2}{x^3} \Rightarrow y''=2a+\frac{6}{x^4} \Rightarrow y''(1)=0$$

$2a+6=0 \Rightarrow a=-3$

۵۷- گزینه ۳ پاسخ است.

می‌دانیم اکسترمم تابع کسری علاوه بر خود تابع در هوپیتال تابع صدق می‌کند.

$$H(x)=\frac{2x}{3x^2}=\frac{2}{3x} \Rightarrow H(2)=\frac{1}{3} \Rightarrow A\left|\begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{3}\end{matrix}\right. \Rightarrow f(2)=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4-a}{8}=\frac{1}{3} \Rightarrow 12-3a=8 \Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

$$f(x)=\frac{x^2-\frac{4}{3}}{x^3} \Rightarrow f(1)=\frac{\frac{-1}{3}}{1}=\frac{-1}{3}$$

راه حل دیگر:

$$y=\frac{x^2-9}{x^3}=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^3} \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}+\frac{3a}{x^4} \Rightarrow y'(2)=0 \Rightarrow y'(2)=-\frac{1}{4}+\frac{3a}{16}=0 \Rightarrow \frac{3a}{16}=\frac{1}{4} \Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

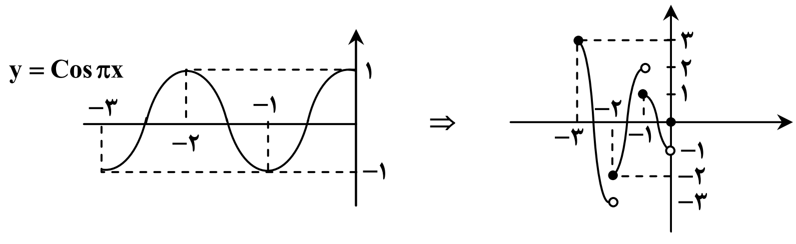
۵۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$-3\le x<-2 \Rightarrow y=-3\cos\pi x$

$-2\le x<-1 \Rightarrow y=-2\cos\pi x$

$-1\le x<0 \Rightarrow y=-\cos\pi x$

$x=0 \Rightarrow y=0$



۴ نقطه‌ی بحرانی با طول $0,-1,-2,-3$ دارد.

۵۹- گزینه ۲ پاسخ است.

$$f'(x) = ۲\cos x - ۲\sin ۲x = ۲\cos x - ۲\times ۲\sin x\cos x = ۲\cos x(۱-۲\sin x)$$

با توجه به گزینه‌ها داریم:

x	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۲}$
y′		+	۰	−	۰
y		↗		↘	

البته این روند در دوره تناوب‌های بعدی نیز تکرار می‌شود.

۶۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$f'(x) = -۲\sin ۲x - a\sin x = -۴\sin x\cos x - a\sin x = -\sin x(۴\cos x + a)$$

$$۰ < x < \pi \Rightarrow -\sin x < ۰$$

باید $۴\cos x + a$ همواره دارای یک علامت باشد، به‌عبارتی تغییر علامت ندهد، پس باید در آن بازه فاقد ریشه‌ی ساده باشد.

$$\cos x = -\frac{a}{۴}$$

اگر قرار دهیم $\left|-\frac{a}{۴}\right| \geq ۱$ حل می‌شود، پس: $|a| \geq ۴$.

۶۱- گزینه ۱ پاسخ است.

$$y' = \frac{\cos x(۲+\cos x)+\sin^۲ x}{(۲+\cos x)^۲} = \frac{۱+۲\cos x}{(۲+\cos x)^۲} = ۰$$

$$y' = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \text{ ریشه‌ی ساده } \Rightarrow x = \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow f(\frac{۴\pi}{۳}) = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲-\frac{۱}{۲}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۶۲- گزینه ۳ پاسخ است.

اکسترمم توابع کسری و مشتق‌پذیر $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ علاوه بر تابع در هوپیتال تابع یعنی $y(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ نیز صدق می‌کنند.

$$f(۲) = ۱ \Rightarrow \frac{۲a}{۴+۴+b} = ۱ \Rightarrow ۲a = ۸ + b$$

$$H(۲) = ۱ \Rightarrow H(x) = \frac{a}{۲x+۲} \Rightarrow ۱ = \frac{a}{۶} \Rightarrow a = ۶ \Rightarrow b = ۴$$

$$f(x) = \frac{۶x}{x^۲+۲x+۴} \Rightarrow f(۱) = \frac{۶}{۷}$$

۶۳- گزینه ۴ پاسخ است.

چون تابع مشتق‌پذیر است، پس برای یافتن اکسترمم‌ها کافی است $y' = ۰$ را حل کنیم:

$$f'(x) = ۱ - ۲\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{۳} \\ x = \frac{۵\pi}{۳} \end{cases}$$

$$f(\frac{\pi}{۳}) = \frac{\pi}{۳} - \sqrt{۳} + ۲$$

$$f(\frac{۵\pi}{۳}) = \frac{۵\pi}{۳} + \sqrt{۳} + ۲$$

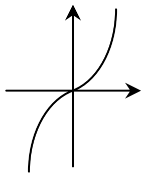
$$m = \frac{(\frac{۵\pi}{۳}+\sqrt{۳}+۲)-(\frac{\pi}{۳}-\sqrt{۳}+۲)}{\frac{۵\pi}{۳}-\frac{\pi}{۳}} = \frac{\frac{۴\pi}{۳}+۲\sqrt{۳}}{\frac{۴\pi}{۳}} = ۱ + \frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi}$$

۶۴- گزینه ۳ پاسخ است.

f تابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ است و در تمام $\mathbb{R}$ دارای مشتقات از مرتبه‌ی بالاتر است، پس برای آن‌که در $x=-1$ جهت تقعر عوض شود باید $y''(-1)=0$.

$$y'=\frac{1}{1+x^2}+2ax \Rightarrow y''=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+2a \Rightarrow y''(-1)=0 \Rightarrow \frac{2}{4}+2a=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

نکته: در تابع $y=x|x|$ در $x=0$ اصلاً مشتق دوم نداریم، اما این طول نقطه‌ی عطف تابع است.



$$y'=\begin{cases}2x & x\ge 0\\ -2x & x\le 0\end{cases}$$

$$y''=\begin{cases}2 & x>0\\ -2 & x<0\end{cases}$$

۶۵- گزینه ۴ پاسخ است.

چون تابع مشتق‌پذیر است برای آن‌که اکسترمم آن را پیدا کنیم باید معادله $f'(x)=0$ را حل کنیم:

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\sqrt{2}\operatorname{Sin}x-\operatorname{Sin}^2x-\operatorname{Cos}^2x=0 \Rightarrow \operatorname{Sin}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

با توجه به بازه‌ی داده شده ریشه‌ها $x=\frac{5\pi}{4}$ و $x=\frac{7\pi}{4}$ است؛ چون $f(\frac{3\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})=0$ و تابع در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ منفی است، پس $x=\frac{5\pi}{4}$ طول Min نسبی است و چون $f(\frac{3\pi}{2})=f(\frac{5\pi}{2})=0$ و تابع در بازه‌ی $(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ مثبت است، پس $x=\frac{7\pi}{4}$ طول Max نسبی است، البته با آزمون‌های مشتق هم می‌توانستیم وضعیت اکسترمم‌ها را معلوم کنیم.

۶۶- گزینه ۳ پاسخ است.

$$y'=2x\operatorname{Ln}x+x^2.\frac{1}{x}=2x\operatorname{Ln}x+x$$

$$y''=2\operatorname{Ln}x+2+1=0 \qquad \operatorname{Ln}x=-\frac{3}{2} \Rightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$$

می‌دانیم ریشه‌ی ساده $y''=0$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

۶۷- گزینه ۴ پاسخ است.

چون محور x ها را در $x=-2$ قطع می‌کند. پس: $f(-2)=0$

$$2(-2)^3+m\times 4+4-4=0 \Rightarrow -16+4m=0 \Rightarrow m=4$$

در تابع درجه ۳، $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ طول نقطه‌ی عطف تابع $x=\frac{-b}{3a}$ می‌باشد، لذا در تابع:

$f(x)=2x^3+4x^2-2x-4 \Rightarrow$ طول نقطه‌ی عطف $=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

۶۸- گزینه ۱ پاسخ است.

$$y=x^{\frac{5}{3}}-bx^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2b}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$y'(1)=0 \Rightarrow \frac{5}{3}-\frac{2b}{3}=0 \Rightarrow b=\frac{5}{2}$$

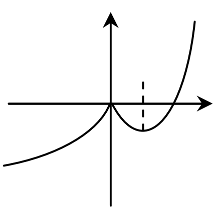
$$y'=\frac{1}{3}(5x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{-1}{3}}) \Rightarrow y''=\frac{1}{3}(\frac{10}{3}x^{\frac{-1}{3}}+\frac{5}{3}x^{\frac{-4}{3}})$$

$y''(1)>0 \Rightarrow$ $x=1$ طول Min نسبی است.

$b=\frac{5}{2}$ و طول Min نسبی است.

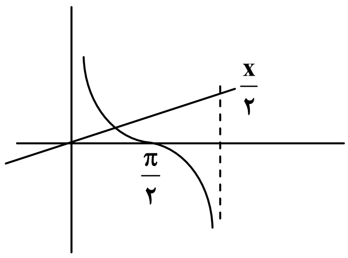
راه حل دیگر: چون تابع در نقطه‌ی $x=0$ حالت بازگشتی دارد می‌توانیم بعد از به‌دست آوردن b، تابع را به‌صورت حدودی رسم کنیم:

$$y=\sqrt[3]{x^2}(x-\frac{5}{2})$$



پس $x=1$ مینیمم نسبی است.

۶۹- گزینه ۲ پاسخ است.



$$y = x\,\text{Sinx} \Rightarrow y' = \text{Sinx} + x\text{Cosx} \Rightarrow y'' = \text{Cosx} + \text{Cosx} - x\text{Sinx} = ۰$$

$$y'' = ۰ \Rightarrow ۲\text{Cosx} = x\text{Sinx} \Rightarrow \text{Cotx} = \frac{x}{۲}$$

با توجه به رسم نمودار معادله‌ی فوق فقط یک ریشه‌ی ساده دارد، پس $y'' = ۰$ فقط یک ریشه ساده در بازه $(۰,\frac{\pi}{۲})$ دارد، پس تابع فقط یک عطف در این بازه دارد.

۷۰- گزینه ۱ پاسخ است.

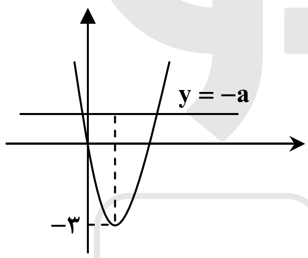
$$y' = \frac{۳}{(x^۲+۴)^۲}.۲x = \frac{۶x}{(x^۲+۴)^۲} \Rightarrow y'' = \frac{۶(x^۲+۴)^۲ - ۴x(x^۲+۴)۶x}{(x^۲+۴)^۴}$$

$$y'' = \frac{۶(x^۲+۴) - ۲۴x^۲}{(x^۲+۴)^۳} = \frac{-۱۸x^۲+۲۴}{(x^۲+۴)^۳} \geq ۰$$

$$۱۸x^۲ \leq ۲۴ \Rightarrow x^۲ \leq \frac{۴}{۳} \Rightarrow |x| \leq \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a = -\frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \\ b = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \end{array} \right.$$

$$b - a = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۷۱- گزینه ۴ پاسخ است.



برای حل می‌توانیم فرض کنیم $f(x) = x^۴ - ۴x$ و نمودار f را رسم کنیم، سپس نمودار f را با خط $y = -a$ قطع دهیم.

$$f'(x) = ۴(x^۳ - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$A\left| \begin{array}{l} ۱ \\ -۳ \end{array} \right.$ Min نسبی

برای آن‌که دو ریشه مختلف‌العلامه باشد باید $y = -a$ بالای محور xها باشد:

$$-a > ۰ \Rightarrow a < ۰$$

۷۲- گزینه ۱ پاسخ است.

$$y = \begin{cases} x^۳ - ۳x^۲ & x \geq ۳ \text{ یا } x \leq ۰ \\ -(x^۳ - ۳x^۲) & ۰ \leq x \leq ۳ \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} ۳x^۲ - ۶x & x > ۳ \text{ یا } x \leq ۰ \\ -۳x^۲ + ۶x & ۰ \leq x < ۳ \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} ۶x - ۶ & x > ۳ \text{ یا } x < ۰ \\ -۶x + ۶ & ۰ < x < ۳ \end{cases}$$

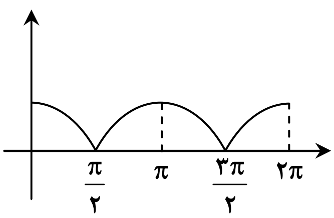
نقاط عطف $x = ۱$ و $x = ۰$، زیرا در این نقاط مشتق داریم و y'' تغییر علامت می‌دهد اما در $x = ۳$ اگرچه y'' تغییر علامت می‌دهد، اما تابع در این نقطه خط مماس ندارد. پس این نقطه عطف نمی‌باشد.

۷۳- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} f(۱) = a + b = ۳ \\ f'(۱) = -\frac{۲a}{x^۳} + b \Big|_{x=۱} = -۲a + b = ۰ \end{array} \right\} \Rightarrow a + ۲a = ۳ \Rightarrow a = ۱ \rightarrow b = ۲$$

پس $a + ۲b = ۵$.

۷۴- گزینه ۳ پاسخ است.



نقطه بحرانی نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریف است که مشتق صفر باشد و یا تابع در آن نقطه مشتق نداشته باشد. پس نقاط بحرانی $x = \frac{\pi}{۲}, \pi, \frac{۳\pi}{۲}$ می‌باشند.

۷۵- گزینه ۴ پاسخ است.

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b \Rightarrow f'(2)=0 \Rightarrow -3\times 4+4a+b=0 \Rightarrow -12+24+b=0 \Rightarrow b=-12$$

$$f''(x)=-6x+2a \Rightarrow f''(2)=0 \quad \text{یا} \quad \frac{-a}{-3}=2 \Rightarrow a=6$$

$$f(x)=-x^3+6x^2-12x+9$$

$$f(1)=-1+6-12+9 \Rightarrow f(1)=2$$

۷۶- گزینه ۳ پاسخ است.

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x} \to f'(x)=2x-\frac{1}{x^2} \to f''(x)=2+\frac{2}{x^3}=0 \to x^3=-1 \to x=-1$$

توجه کنید که جهت تقعر در $x=0$ تغییر می‌کند اما چون این نقطه در دامنه تابع نیست، نقطه‌ی عطف محسوب نمی‌شود.

۷۷- گزینه ۱ پاسخ است.

برای آن‌که تابع $y=ax+1+\frac{bx^2+3x}{x-2}$ هموگرافیک باشد داریم:

$$y=\frac{ax^2-2ax+x-2+bx^2+3x}{x-2}=\frac{(a+b)x^2+(4-2a)x-2}{x-2}$$

باید $a+b=0$ از طرفی هر تابع هموگرافیک ۲ محور تقارن با شیب ± 1 دارد که از محل تلاقی مجانب‌ها یعنی مرکز تقارن عبور می‌کند.

$A\left|\begin{matrix}2\\4-2a\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن

$$y=x+4 \Rightarrow 4-2a=2+4 \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow b=1$$

محور تقارن دیگر $y=-x+k$ که از مرکز تقارن عبور می‌کند.

$A\left|\begin{matrix}2\\6\end{matrix}\right.$

$$6=-2+k \Rightarrow k=8$$

راه تستی: چون $x=2$ مجانب قائم تابع است با قرار دادن $x=2$ داخل معادله مجانب مرکز تقارن تابع هموگرافیک به دست می‌آید.

$$y=2+4=6$$

حال کافی است خط گذرنده از نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}2\\6\end{matrix}\right.$ با شیب ۱- را بنویسیم:

$$y-6=-(x-2) \to y=-x+8$$

۷۸- گزینه ۳ پاسخ است.

$$y=\sin^2\pi x \Rightarrow y'=2\pi\sin\pi x\cos\pi x=\pi\sin 2\pi x$$

$$y''=2\pi^2\cos 2\pi x \Rightarrow y''=0 \Rightarrow \cos 2\pi x=0 \Rightarrow 2\pi x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4} \quad k\in Z$$

این تابع بی‌شمار عطف دارد طول تمام نقاط عطف به‌صورت $x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}$ است. $(k\in Z)$

اما عرض تمام این نقاط برابر $\frac{1}{2}$ است. زیرا:

$$y=\sin^2\pi x=\frac{1-\cos 2\pi x}{2}=\frac{1-\cos(k\pi+\frac{\pi}{2})}{2}=\frac{1}{2}$$

پس تمام عطف‌ها روی خط $y=\frac{1}{2}$ یا $2y-1=0$ می‌باشند.

۷۹- گزینه ۲ پاسخ است.

کافی است $y''>0$ باشد:

$$y=x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$y''=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}\right)=\frac{4}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{x\sqrt[3]{x^2}}\right) \Rightarrow y''=\frac{4}{9}\times\frac{x+2}{x\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow$$

x		-2		0	
y''	+	0	−	‖	+

پس $(a,b)=(-2,0)$ و $\max(b-a)=2$.

۸۰- گزینه ۴ پاسخ است.

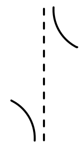
$$\lim_{x\to 1} 1+\cos\pi x=\lim_{x\to 1} 1-\cos(\pi-\pi x)=\frac{1}{2}(\pi-\pi x)^2=\frac{\pi^2}{2}(1-x)^2$$

نکته: $\lim\limits_{x\to 0} 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{\frac{\pi^2}{2}(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{\frac{\pi^2}{2}(x-1)}$$

نمودار تابع در همسایگی $x=1$ به‌صورت:

$$\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\end{matrix}\Rightarrow$$



راه دوم: استفاده از هوپیتال:

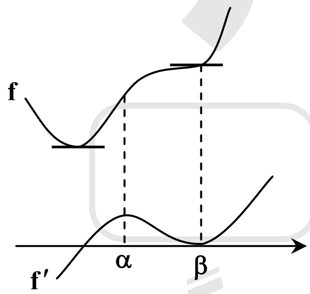
$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x}{-\pi\sin\pi x}=\frac{2}{-\pi\sin\pi x}\begin{cases}\nearrow \frac{2}{0^+}=\infty & x\to 1^+\\ \searrow \frac{2}{0^-}=-\infty & x\to 1^-\end{cases}$$

۸۱- گزینه ۱ پاسخ است.

تابع $y=x^3+3^x$ یک تابع پیوسته و صعودی اکید است، زیرا جمع دو تابع صعودی اکید یک تابع صعودی اکید است. از طرفی این تابع در شرط $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, f(0)=1$ صدق می‌کند پس هر خط افقی $y=k>1$ نمودار آن را در یک نقطه قطع می‌کند لذا معادله $x^3+3^x=3$ فقط یک ریشه مثبت دارد.

۸۲- گزینه ۴ پاسخ است.

می‌دانیم عطف‌های f، اکسترمم‌های f' می‌باشند چون f دارای ۲ عطف است (نقاطی با طول α و β) پس f' هم دارای ۲ اکسترمم است یکی Min و دیگری Max اما قبل α تقعر تابع رو به بالاست، پس f' صعودی و بعد α تقعر تابع رو به پایین است، پس f' نزولی است، لذا α طول Max نسبی و β طول Min نسبی برای f' است.



۸۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$x=\frac{\pi}{2}$ مجانب قائم f است. $\Rightarrow\ b+\cos\frac{\pi}{2}=0\ \Rightarrow\ b=0$

پس مخرج کسر $\cos x$ می‌ماند با توجه به نمودار نقطه‌ای روی محور xها می‌باشد که نقطه‌ی ناپیوستگی رفع‌شدنی برای f است. باید آن نقطه $x=-\frac{\pi}{2}$ باشد که هم ریشه‌ی مخرج است هم ریشه‌ی صورت.

$$\Rightarrow\ 1+a\sin(-\frac{\pi}{2})=0\ \Rightarrow\ a=1\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{1+\sin x}{\cos x}\ \Rightarrow\ f(\frac{\pi}{3})=2+\sqrt{3}$$

۸۴- گزینه ۲ پاسخ است.

$x=a$ طول عطف با مماس قائم f است. زیرا f پیوسته است و $f'_+(a)=f'_-(a)=-\infty$

$x=b$ ریشه‌ی مضاعف $f'=0$، پس طول عطف با مماس افقی f می‌باشد.

$x=c$ نقطه‌ی زاویه‌دار f است به‌طوری که f' تغییر علامت می‌دهد، پس طول min نسبی f است. قبل $x=c$ مشتق منفی و بعد $x=c$ مشتق مثبت است.

۸۵- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=۱ \Rightarrow a=۱$$

چون نمودار تابع f همواره زیر مجانب افقی تابع است. پس همواره داریم:

$$f(x)-۱<۰$$

$$\frac{x^۲+bx+c}{x^۲-x+۳}-۱<۰ \Rightarrow \frac{x^۲+bx+c-x^۲+x-۳}{x^۲-x+۳}<۰ \Rightarrow \frac{(b+۱)x+c-۳}{x^۲-x+۳}<۰$$

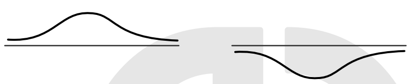
مخرج کسر همواره مثبت است (چون $a>۰$, $\Delta<۰$)، پس برای آن‌که در ∞ و $-\infty$ عبارت منفی باشد باید: $\begin{cases} b+۱=۰ \\ c-۳<۰ \end{cases}$

بدین‌ترتیب $b=-۱$ و $c<۳$ از طرفی تابع بر محور xها مماس است، لذا $y=۰$ ریشه‌ی مضاعف دارد. پس صورت ریشه‌ی مضاعف دارد، یعنی:

$$b^۲=۴ac \Rightarrow ۴c=۱ \Rightarrow c=\frac{۱}{۴}$$

یعنی زوج مناسب $(-۱,\frac{۱}{۴})$ است.

نکته: در توابعی به فرم $y=\frac{ax^۲+bx+c}{a'x^۲+b'x+c'}$ اگر مجانب قائم نداشته باشیم و $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=۰$ نمودار به یکی از صورت‌های مقابل است:



۸۶- گزینه ۴ پاسخ است.

اولاً نمودار $y=f(x)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع کرده است، پس صورت فقط یک ریشه دارد و در واقع آن نقطه، برای تابع عطف است، پس:

$$y=۰ \Rightarrow x^۲(a-x)=۰ \begin{cases} x=۰ \\ x=a \end{cases} \Rightarrow a=۰$$

ثانیاً با توجه به نمودار تابع مجانب مایل خودش را قطع نمی‌کند، پس $R(x)=۰$ ریشه ندارد. لذا پس از یافتن $R(x)$ کافی است ضریب x را صفر قرار دهیم.

$$\begin{array}{l|l} -x^۳ & x^۲-۲x+b \\ \cline{2-2} \underline{x^۳-۲x^۲+bx} & -x-۲ \\ -۲x^۲+bx & \\ \underline{۲x^۲-۴x+۲b} & \\ (b-۴)x+۲b \quad \Rightarrow \quad b=۴ & \end{array}$$

۸۷- گزینه ۲ پاسخ است.

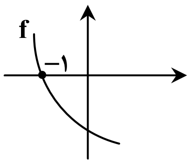
$$y=\frac{a\operatorname{Sin}x+b}{c\operatorname{Sin}x+d} \Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(c\operatorname{Sin}x+d)^۲}\cdot\operatorname{Cos}x$$

$$y'=\frac{۲}{(۲\operatorname{Sin}x+۱)^۲}\cdot\operatorname{Cos}x \Rightarrow y'(\frac{\pi}{۲})=۰$$

بخشی از جدول تغییرات به‌صورت زیر می‌باشد:

x		$\frac{\pi}{۲}$	
y'	+	۰	−
	↗	Max نسبی	↘

۸۸- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\Rightarrow \begin{array}{l} x > -۱ \Rightarrow f(x) < ۰ \\ x < -۱ \Rightarrow f(x) > ۰ \end{array}$$

		-۱		۰	
f	$+$	۰	$-$		$-$
x	$-$		$-$	۰	$+$
$\frac{x}{f(x)}$	$-$	∞	$+$	۰	$-$

$$\Rightarrow D_y = (-۱\,,\,۰]$$

۸۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$x = -\frac{\pi}{۶}$ مجانب قائم $\Rightarrow ۱ + b\,\text{Sin}(-\frac{\pi}{۶}) = ۰ \Rightarrow ۱ - \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow b = ۲$

از طرفی نمودار تابع بر محور xها مماس است، پس $۱ + a\,\text{Sin}\,x = ۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف است. پس $\text{Sin}\,x = -\frac{۱}{a}$ ریشه‌ی مضـاعف دارد، لذا:

$$-\frac{۱}{a} = ۱ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow f(x) = \frac{۱ - \text{Sin}\,x}{۱ + ۲\text{Sin}\,x} = \frac{-\text{Sin}\,x + ۱}{۲\text{Sin}\,x + ۱}$$

$-\frac{۱}{a} = -۱$ غ ق ق

طول نقاط اکسترمم این تابع $x = \frac{\pi}{۲}$ و $x = \frac{۳\pi}{۲}$ است، زیرا:

$$f'(x) = \frac{-۳\text{Cos}\,x}{(۲\text{Sin}\,x + ۱)^۲} \Rightarrow f' = ۰ \Rightarrow \text{Cos}\,x = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲}\ ,\ x = \frac{۳\pi}{۲}$$

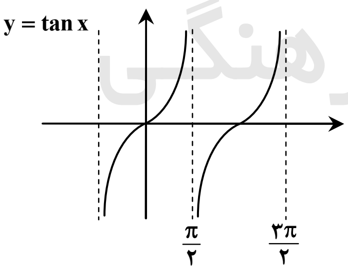
$$f(\frac{۳\pi}{۲}) = \frac{۲}{-۱} = -۲$$

۹۰- گزینه ۳ پاسخ است.

$$f(x) = \frac{۲\text{Sin}\frac{x}{۲}\,\text{Cos}\frac{x}{۲}}{۲\text{Cos}^۲\frac{x}{۲}} = \tan\frac{x}{۲} \Rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۲\pi$$

بازه‌ی موردنظر $(-\pi\,,\,۳\pi)$ است.

اما $y = \tan ax$ در نقاطی عطف دارد که $\tan ax = ۰$ یعنی:



طول نقاط عطف: $\tan\frac{x}{۲} = ۰ \Rightarrow \frac{x}{۲} = k\pi \Rightarrow x = ۲k\pi$

پس نقاط عطف درون آن بازه‌ی $۲\pi\,,\,۰ = x$ می‌باشند، پس در آن بازه دو عطف داریم.

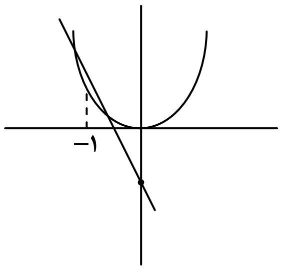
نکتـه: در توابـع $y = \text{Sin}\,ax$ و $y = \text{Cos}\,ax$ و $y = \tan ax$ و $y = \text{Cot}\,ax$ نقطـه‌ی تلاقی تابع با محور xها نقطه‌ی عطف تابع است.

۹۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = ۰ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} ax + \left|x + \frac{b}{۲}\right| = \lim_{x\to-\infty}(a-۱)x - \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a - ۱ = ۰ \\ -\frac{b}{۲} = ۰ \end{cases} \Rightarrow f(x) = x + \sqrt{x^۲ + ۱}$$

$$f'(x) = ۱ + \frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۱}} \Rightarrow f'(۱) = ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۹۲- گزینه ۲ پاسخ است.



به‌کمک رسم نمودار $y = x^4$, $y = -4x - 1$ داریم:

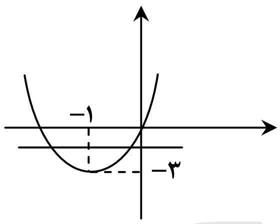
معادله ۲ ریشه منفی دارد یکی از آن‌ها بین صفر و ۱- و دیگری کم‌تر از ۱- می‌باشد.

زیرا اگر فرض کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = x^4 \\ g(x) = -4x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} f(0) = 0 & f(-1) = 1 \\ g(0) = -1 & g(-1) = 3 \end{matrix} \Rightarrow -1 < x_1 < 0 \quad \text{آن‌گاه} \quad \begin{matrix} f(-2) = 16 \\ g(-2) = 7 \end{matrix} \Rightarrow -2 < x_2 < -1$$

نکته: اگر f و g توابعی پیوسته باشند، به‌طوری‌که $f(\alpha) < g(\alpha)$ و $f(\beta) > g(\beta)$ آن‌گاه معادله‌ی $f = g$ لااقل یک ریشه بین β, α دارد.



راه حل دوم: نمودار $y = x^4 + 4x$ را رسم می‌کنیم:

$$y' = 4x^3 + 4 = 0 \ \rightarrow \ x = -1$$

حال خط $y = -1$ این منحنی را یک‌بار قبل از ۱- و یک‌بار هم بین ۱- تا صفر قطع می‌کند.

راه‌حل سوم: قضیه‌ی بولزانو:

$$\left.\begin{matrix} f(0) = 1 \\ f(-1) = -2 \end{matrix}\right\} \rightarrow f(0)f(-1) < 0 \rightarrow$$ حداقل یک ریشه بین صفر تا ۱- دارد.

$$\left.\begin{matrix} f(-1) = -2 \\ f(-2) = 9 \end{matrix}\right\} \rightarrow f(-1)f(-2) < 0 \rightarrow$$ حداقل یک ریشه بین ۱- تا ۲- دارد.

۹۳- گزینه ۳ پاسخ است.

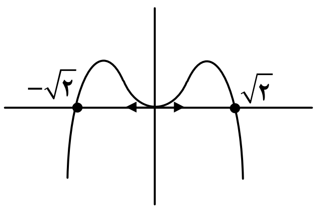
$$y = \frac{(a+3)x^2 + (b+2a)x + 2b}{x+2}$$

چون قرار است تابع هموگرافیک باشد، پس $a + 3 = 0$ لذا $a = -3$. از طرفی هر تابع هموگرافیک دو محور تقارن با شیب ± 1 دارد که از مرکز تقارن یعنی نقطه تلاقی مجانب‌ها عبور می‌کند، پس:

$$\text{مرکز تقارن } A \left| \begin{matrix} -2 \\ b+2a \end{matrix} \right. \Rightarrow x + y = 4 \Rightarrow -2 + b + 2a = 4 \Rightarrow b + 2a = 6 \xrightarrow{a=-3} b = 12$$

$$a - b = -3 - 12 = -15$$

۹۴- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\lim_{x \to \infty} fof(x) = -\infty$$

$$fof(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = 1 - 1 + 2x^2 - x^4 = x^2(2 - x^2)$$
$$= x^2(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)$$

۲ ریشه ساده $\pm\sqrt{2}$ دارد و در $x = 0$ بر محور x ها مماس است.

راه حل دیگر: این تابع درجه‌ی زوج با ضریب منفی است یعنی در $\pm\infty$، حد عبارت $-\infty$ است، پس گزینه‌های (۲) و (۳) امکان‌پذیر نمی‌باشند.

از طرفی $(-x^4 + 2x^2)$ در همسایگی صفر هم‌ارز $+2x^2$ است (چندجمله‌ای در اطراف صفر هم‌ارز جمله با کم‌ترین درجه است)، لذا باید رفتار تابع در اطراف مبدأ شبیه $2x^2$ باشد که با گزینه‌ی (۱) هم‌خوانی ندارد.

۹۵- گزینه ۱ پاسخ است.

اکسترمم‌های تابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در هوپیتال تابع نیز صدق می‌کنند یعنی اگر $y_{\circ}=\frac{f(x_{\circ})}{g(x_{\circ})}$، آن‌گاه $y_{\circ}=\frac{f'(x_{\circ})}{g'(x_{\circ})}$:

$$y=\frac{x^{۳}+b}{ax^{۲}} \Rightarrow H(x)=\frac{۳x^{۲}}{۲ax} \Rightarrow H(x)=\frac{۳x}{۲a}$$

$$H(۲)=۳ \Rightarrow ۳=\frac{۶}{۲a} \Rightarrow a=۱$$

$$y=\frac{x^{۳}+b}{x^{۲}} \Rightarrow y(۲)=۳ \Rightarrow ۳=\frac{۸+b}{۴} \Rightarrow b=۴$$

پس $f(x)=\frac{x^{۳}+۴}{x^{۲}}$ اما $A(۲,۳)$ طول Min نسبی f می‌باشد، زیرا:

$$y=x+\frac{۴}{x^{۲}} \Rightarrow y'=۱-\frac{۸}{x^{۳}} \Rightarrow y''=\frac{۲۴}{x^{۴}}$$ و $y''(۲)>\circ \Rightarrow$ A طول Min نسبی است

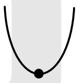
راه حل دیگر:

$$y=\frac{x}{a}+\frac{b}{ax^{۲}} \Rightarrow y'=\frac{۱}{a}+\frac{-۲ab}{a^{۲}x^{۳}} \Rightarrow y'=\frac{x^{۳}-۲b}{ax^{۳}}$$

$$y''(۲)=\circ \Rightarrow ۸-۲b=\circ \Rightarrow b=۴$$

$$y(۲)=۳ \Rightarrow \frac{۲}{a}+\frac{۴}{۴a}=۳ \Rightarrow a=۱$$

$$y'_{-}(۲)<\circ \quad , \quad y'_{+}(۲)>\circ \Rightarrow$$



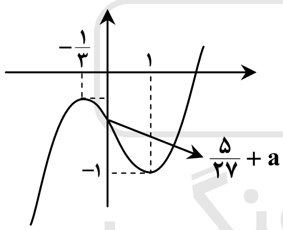
Min

۹۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$f(x)=x^{۳}-x^{۲}-x \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۲x-۱=\circ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

x		$-\frac{۱}{۳}$		۱	
f′(x)	+	∘	−	∘	+
	↗		↘		↗

$$f(-\frac{۱}{۳})=-\frac{۱}{۲۷}-\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۳}+a=\frac{۹-۳-۱}{۲۷}+a=\frac{۵}{۲۷}+a$$



برای آن‌که معادله فقط یک ریشه‌ی مثبت داشته باشد باید $f(-\frac{۱}{۳})<\circ$ باشد، پس $-a>\frac{۵}{۲۷}$ یعنی $a<-\frac{۵}{۲۷}$.