گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

حساب دیفرانسیل و انتگرال

• فصل ۴

حساب دیفرانسیل و انتگرال — فصل ۴: انتگرال

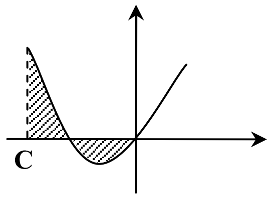
۱- میانگین مجموع بالا و پایین برای تابع $y=x^3$ در بازه‌ی $[-1,1]$ در حالت $n=4$ چه عددی است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۲- سطح محصور بین نمودار $y=1+\cos 2x$ و محورهای مختصات در ناحیه‌ی اول چه عددی است؟

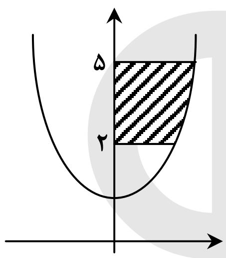
۱) π ۲) $1+\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\pi-1$

۳- با فرض آن‌که $f(x)=x^2+4x$ و دو سطح سایه خورده باهم برابر باشند، C چه عددی است؟



۱) ۸-
۲) ۶-
۳) ۶/۵-
۴) ۹-

۴- مساحت قسمت هاشورخورده در شکل مقابل با فرض آن‌که $f(x)=x^2+1$ چقدر است؟

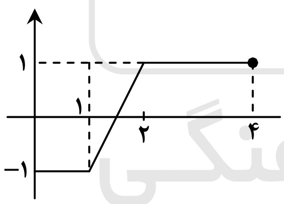


۱) $\frac{17}{3}$ ۲) $\frac{8}{3}$
۳) $\frac{14}{3}$ ۴) $\frac{16}{3}$

۵- اگر $f(x)=\sin^2\pi x$ بر $[0,1]$ تعریف شده باشد. مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} U_n f+\lim\limits_{n\to\infty} L_n f$ چه عددی است؟

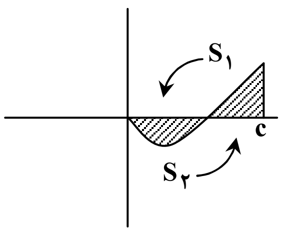
۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۶- نمودار تابع f شکل مقابل است. اگر $F(x)=\int_2^x f(t)\,dt$ مقدار $F(0)+F(3)$ چه عددی است؟



۱) ۲
۲) صفر
۳) $-\frac{1}{2}$
۴) ۳

۷- اگر $f(x)=x-\sqrt{x}$ به‌طوری‌که $S_1=S_2$ مقدار c چه عددی است؟



۱) $\frac{4}{3}$
۲) ۲
۳) $\frac{16}{9}$
۴) $\frac{16}{3}$

۸- مقدار $\int_0^5 |x-1|\left[\frac{x}{2}\right]dx$ کدام عدد است؟

۱) ۱۱ ۲) ۴ ۳) ۱۳ ۴) ۷/۵

۹- مقدار $\int_0^3 \sin\frac{\pi[x]}{2}dx$ چند برابر $\int_0^2 \cos\frac{\pi[x]}{2}dx$ است؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۰- مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i^2}{n^3}$ برابر کدام عدد است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۱- اگر $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 dx = A$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 x\,dx = B$ مقدار $A+B$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۲- اگر $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & x\geq 1\\ x-[x] & x<1\end{cases}$ حاصل $\int_{-1}^{2}f(x)\,dx$ چه عددی است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱-

۱۳- مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ برابر کدام عدد است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $2-\sqrt{2}$

۱۴- مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+16}+\frac{n}{n^2+36}+\dots+\frac{n}{n^2+4n^2}$ به‌کمک مفهوم انتگرال معین چه عددی است؟

۱) $2\tan^{-1}\frac{1}{2}$ ۲) $2\tan^{-1}2$ ۳) $\frac{1}{2}\tan^{-1}2$ ۴) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{2}$

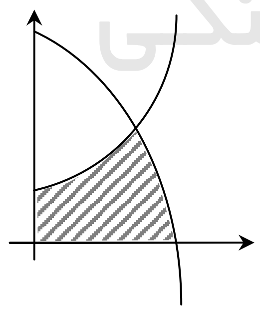
۱۵- برای تابع $y=3x+1$ حداقل تعداد تقسیم‌ها در بازه $[1,5]$ چقدر باشد تا اختلاف مجموع بالا و مجموع پایین کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{40}$ باشد؟

۱) ۱۹۲۰ ۲) ۹۶۰ ۳) ۶۴۰ ۴) ۱۲۸۰

۱۶- اگر $f(x)=\cos x$ در بازه‌ی $[0,\pi]$ تعریف شده باشد، مقدار $L_3 f$ چه عددی است؟ ($L_3 f$ یعنی مجموع پایین با فرض آن‌که طول زیربازه‌ها را برابر فرض کنیم)

۱) $\frac{-\pi}{6}$ ۲) $\frac{-\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) صفر

۱۷- اگر دو تابع نشان داده شده $y=x^2+1$ و $y=9-x^2$ باشند، سطح سایه‌خورده شده برابر با چه مساحتی است؟



۱) $\frac{16}{3}$
۲) $\frac{19}{3}$
۳) $\frac{22}{3}$
۴) $\frac{26}{3}$

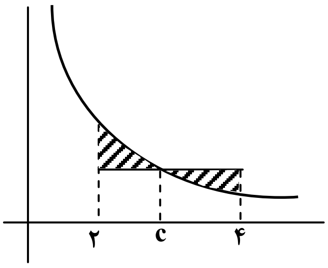
۱۸- اگر $f(x)=x^3+2x$ بر $[0,1]$ تعریف شده باشد، حاصل $U_3(f)$ چقدر است؟ (طول زیر بازه‌ها را برابر فرض کرده‌ایم)

۱) $\frac{114}{27}$ ۲) $\frac{126}{81}$ ۳) $\frac{143}{27}$ ۴) $\frac{16}{9}$

۱۹- $\int_{-1}^{1}(1-[x])\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$ برابر کدام گزینه است؟

۱) $\frac{6}{\pi}$ ۲) $\frac{2}{\pi}$ ۳) $\frac{3}{\pi}$ ۴) $\frac{1}{3\pi}$

۲۰- مساحت دو تکه سایه زده شده در شکل مقابل برای $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2}$ با هم برابر است. عدد c چه عددی است؟



۱) $2\sqrt{2}$

۲) $2+\sqrt{2}$

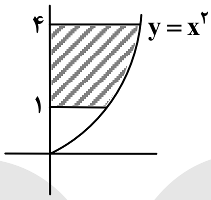
۳) $3\sqrt{2}$

۴) $2\sqrt{3}$

۲۱- اگر $f(x)=x\cos\frac{\pi[x]}{2}$ حاصل $\int_0^4 f(x)dx$ چقدر است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) -2 ۴) $\frac{5}{2}$

۲۲- سطح هاشور زده شده چقدر است؟



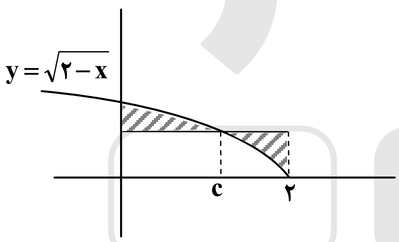
۱) $\frac{20}{3}$ ۲) $\frac{14}{3}$

۳) $\frac{17}{3}$ ۴) $\frac{15}{3}$

۲۳- f تابعی پیوسته و فرد است به طوری که مقدار متوسط f بر $[-1,3]$ برابر ۵ می‌باشد. هرگاه $\int_1^3 (ax+f(x))dx=17$ مقدار a چه عددی است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) 3 ۴) -4

۲۴- در شکل مقابل مساحت دو قسمت سایه زده شده با هم برابرند، عدد c کدام است؟



۱) $c=0/9$

۲) $c=1$

۳) $c=\frac{10}{9}$

۴) $c=\frac{5}{4}$

۲۵- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y=(1+\sin 2x)\cos x$ و محور x ها و دو خط $x=-\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{\pi}{3}$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) 2 ۴) $4\sqrt{3}$

۲۶- مساحت محصور به منحنی‌های $x=y^2$ و $x=2y$ چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۷- حاصل $\int_0^4 |x-2|dx$ برابر است با:

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۳

۲۸- مقدار عددی $\int_{-2}^{2}(x+1)\operatorname{Sgn}(x)dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

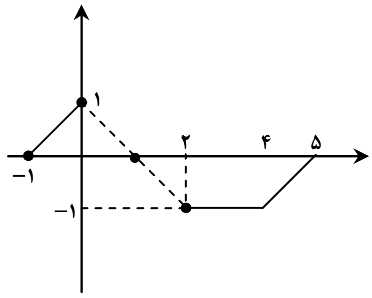
۲۹- مقدار عددی $\int_{-1}^{2}(2\cos^2 x-\cos 2x)dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۰- مقدار عددی $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}([x]+[-x])dx$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{10}$ ۴) $-\frac{1}{12}$

۳۱- حاصل $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ اگر نمودار $f(x)$ به‌صورت روبرو باشد کدام است؟



۱) ۲-

۲) ۴-

۳) ۴

۴) ۲

۳۲- مقدار $\int_{-1}^{1}\big|x+|x|\big|$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۳۳- حاصل $\int_{2}^{3}[x+\frac{1}{2}]\,dx$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۱

۳۴- اگر $f(x)=2x-1$ بر بازه $[0,4]$ تعریف شده باشد حداقل n کدام باشد تا $\left|u_n f-\int_{0}^{4} f(x)\,dx\right|<\frac{1}{20}$ (که در آن $u_n f$ همان مجموع بالا می‌باشد)

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۶۱ ۳) ۳۲۱ ۴) ۳۲۰

۳۵- حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\frac{n}{(n+3)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+n)^2}$ به کمک انتگرال معین چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۱-

۳۶- به کمک مفهوم انتگرال معین مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$ برابر کدام عدد است؟

۱) $\frac{2}{3}(\sqrt{2}+1)$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $\frac{3}{2}(\sqrt{2}-1)$ ۴) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

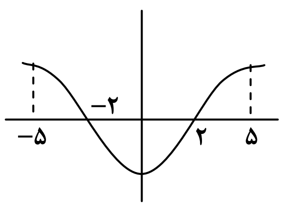
۳۷- مقدار $\int_{e^2}^{e^3}\frac{\ln x^2}{x}\,dx$ چه عددی است؟

۱) $10e$ ۲) $5e$ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۳۸- مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos^2\frac{i\pi}{2n}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۳۹- f تابعی زوج است و نمودار f بر بازه‌ی $[-5,5]$ شکل مقابل است. اگر $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx=A$ و $\int_{0}^{2} f(x)\,dx=B$ مقدار متوسط $f+|f|$ بر بازه‌ی $[-5,0]$ چقدر است؟



۱) $\frac{2B-A}{5}$

۲) $\frac{2A+3B}{5}$

۳) $\frac{2A-2B}{5}$

۴) $\frac{2A-4B}{5}$

۴۰- با استفاده از مفهوم انتگرال معین $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{(n+2i)^2}$ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{-1}{3}$ ۴) $\frac{-2}{3}$

۴۱- هرگاه $\int\frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = f(x)\sqrt{2x-1}+c$ تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x-1}{3}$ ۲) $\frac{x-1}{6}$ ۳) $\frac{x+1}{3}$ ۴) $\frac{x+1}{6}$

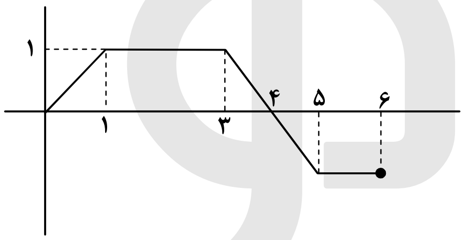
۴۲- f تابعی زوج است و $\int_{-2x}^{2x}f(t)dt=\tan^{-1}\frac{1}{x}$ مقدار $f(2)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{-1}{20}$ ۲) $\frac{-1}{8}$ ۳) $\frac{-1}{5}$ ۴) $\frac{-1}{10}$

۴۳- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}t\,\mathrm{Sin}2t\,dt}{x^n}=a$ مقدار $a.n$ چقدر است؟

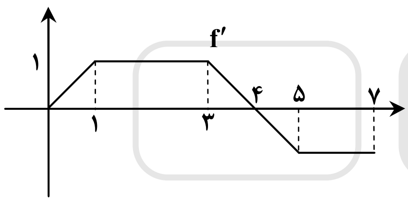
۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{4}{9}$

۴۴- هر گاه نمودار f' شکل مقابل باشد، با فرض $f(3)=4$، مقدار $2f(1)-f'(2)+f''(4)$ چقدر می‌باشد؟



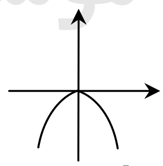
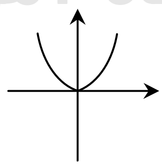
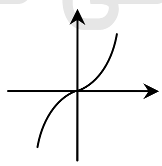
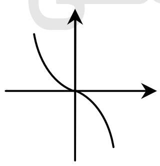
۱) ۲-
۲) ۳
۳) ۱-
۴) ۲

۴۵- نمودار f' شکل مقابل است. به طوری که $f(3)=4$ مقدار $f(5)-2f(1)$ چقدر است؟



۱) ۴-
۲) صفر
۳) ۴
۴) ۸

۴۶- نمودار $f(x)=\left(\int_0^{2x}t\,\mathrm{Sin}\,t\,dt\right)'$ در همسایگی مبدأ مختصات به کدام صورت است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۴۷- هرگاه $g(x)=\int_0^{2x}\frac{dt}{3+t^3}$ و $f(x)=g(\sqrt[3]{x})$ مقدار $f'(1)$ چه عددی است؟

۱) $\frac{1}{33}$ ۲) $\frac{2}{33}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ تست‌های فصل ۴

۱- گزینه ۴ پاسخ است.

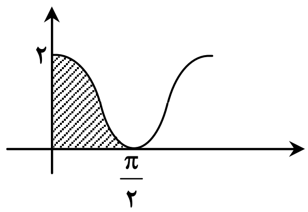
تابع بر این بازه صعودی اکید است و در ضمن این تابع فرد است، پس:

$$L_۴f=\frac{۲}{۴}(f(-۱)+f(-\frac{۱}{۲})+f(۰)+f(\frac{۱}{۲}))=\frac{۲}{۴}\times -۱=-\frac{۱}{۲}$$

$$U_۴f=\frac{۲}{۴}(f(-\frac{۱}{۲})+f(۰)+f(\frac{۱}{۲})+f(۱))=\frac{۲}{۴}\times ۱=\frac{۱}{۲}$$

پس $\frac{L_۴f+U_۴f}{۲}=۰$ = میانگین

۲- گزینه ۳ پاسخ است.



$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\text{Cos}\,۲x)dx=x+\frac{۱}{۲}\text{Sin}\,۲x\Big)_۰^{\frac{\pi}{۲}}=\frac{\pi}{۲}$$

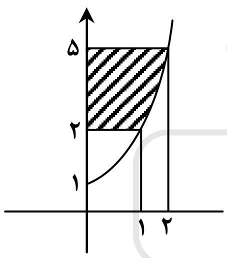
۳- گزینه ۲ پاسخ است.

چون دو سطح با هم برابرند، پس جمع جبری آن‌ها صفر است، لذا:

$$\int_c^۰(x^۲+۴x)dx=۰\Rightarrow \frac{۱}{۳}x^۳+۲x^۲\Big)_C^۰=۰\Rightarrow -\frac{C^۳}{۳}-۲C^۲=۰$$

$$\Rightarrow \frac{C^۳}{۳}+۲C^۲=۰\Rightarrow C^۲(\frac{C}{۳}+۲)=۰\Rightarrow C=-۶$$

۴- گزینه ۳ پاسخ است.

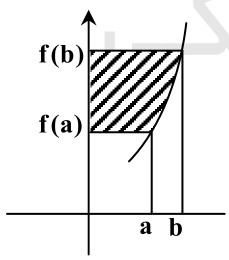


$$f(x)=x^۲+۱\Rightarrow \begin{matrix} y=۲\Rightarrow x=۱\\ y=۵\Rightarrow x=۲\end{matrix}$$

$$S=۱۰-۲-\int_۱^۲(x^۲+۱)dx$$ هاشوری

$$۸-[(\frac{۱}{۳}x^۳+x)\Big|_۱^۲]=۸-((\frac{۸}{۳}+۲)-(\frac{۱}{۳}+۱))=۸-(\frac{۷}{۳}+۱)=\frac{۱۴}{۳}$$

راه حل دیگر: برای محاسبه‌ی سطح محصور بین یک تابع با محور y ها می‌توانیم سطح محصور بین تابع $x=f^{-۱}(y)$ را با محور yها بیابیم.



$$S=\int_{f(a)}^{f(b)}f^{-۱}(y)dy$$

در واقع تابع را نسبت به خط $y=x$ قرینه کرده‌ایم و مساحت زیر آن را از $f(a)$ تا $f(b)$ یافته‌ایم.

$$\underset{x>۰}{f(x)=x^۲+۱}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}$$

$$\Rightarrow S=\int_۲^۵\sqrt{x-۱}\,dx=\frac{۲}{۳}(x-۱)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۲^۵=\frac{۲}{۳}(۸-۱)=\frac{۱۴}{۳}$$

۵- گزینه ۳ پاسخ است.

چون تابع بر بازه داده شده انتگرال‌پذیر است، پس $\lim\limits_{n\to\infty}L_nf=\lim\limits_{n\to\infty}U_nf=\int_۰^۱\text{Sin}^۲\pi x dx$

پس:

$$\int_۰^۱\text{Sin}^۲\pi x dx=\int_۰^۱\frac{۱-\text{Cos}۲\pi x}{۲}dx=\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۲\pi}\text{Sin}۲\pi x)\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}U_nf=\lim_{n\to\infty}L_nf=\frac{۱}{۲}$$

پس جمع آن‌ها برابر یک می‌باشد.

ریمان ثابت کرد: $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\int_a^b f(x)dx$

۶- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\left.\begin{array}{l} F(0)=\int_2^0 f(t)dt=-\int_0^2 f(t)dt=+1 \\ F(3)=\int_2^3 f(t)dt=1 \end{array}\right\} \Rightarrow F(0)+F(3)=2$$

۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$f(x)=0 \Rightarrow x=0 \;,\; x=1 \Rightarrow \left|\int_0^1 (x-\sqrt{x})dx\right| = \left|\int_1^c (x-\sqrt{x})dx\right|$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Big|_1^c$$

$$\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{2}c^2-\frac{2}{3}c\sqrt{c}\right)-\left(-\frac{1}{6}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}c^2-\frac{2}{3}c\sqrt{c}=0$$

$$c\left(\frac{1}{2}c-\frac{2}{3}\sqrt{c}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} c=0 \quad \text{غ ق ق} \\ \sqrt{c}=\frac{4}{3} \Rightarrow c=\frac{16}{9} \end{cases}$$

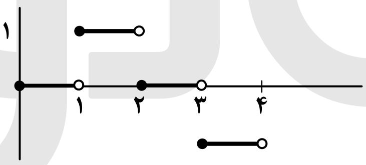
۸- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\int_0^5 |x-1|\left[\frac{x}{2}\right]dx = \int_0^2 |x-1|\times 0\, dx + \int_2^4 (x-1)\times 1 dx + \int_4^5 (x-1)\times 2 dx = 0+0+2\times 2+1\times 7 = 7+4 = 11$$

نکته مهم: اگر $f(x)=mx+n$ آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\cdot f(\frac{a+b}{2})$.

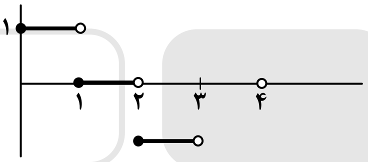
۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$y=\operatorname{Sin}\frac{\pi[x]}{2}$$



$$\int_0^3 \operatorname{Sin}\frac{\pi[x]}{2}dx=1$$

$$y=\operatorname{Cos}\frac{\pi[x]}{2}$$



$$\int_0^2 \operatorname{Cos}\frac{\pi[x]}{2}dx=1$$

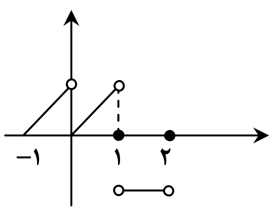
۱۰- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.2\left(\frac{i}{n}\right)^2 = 2\int_0^1 x^2dx = 2\times\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ است.

$$A+B=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^4 x+\tan^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x(1+\tan^2 x)dx=\frac{1}{3}\tan^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ است.



$$\int_{-1}^{2} f(x)dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\operatorname{Cos}^2 x}\;dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\operatorname{Cos}x|dx=\sqrt{2}\operatorname{Sin}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}(1-0)=\sqrt{2}$$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+4k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2(1+\frac{4k^2}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(1+(\frac{2k}{n})^2)}=\int_0^1\frac{dx}{1+4x^2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}2x\Big|_0^1=\frac{1}{2}\tan^{-1}2$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ است.

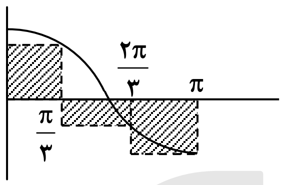
نکته: می‌دانیم اگر f یکنوای اکید و بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه $u_n f-L_n f=\frac{b-a}{n}|f(b)-f(a)|$

و در حالتی خاص که $f(x)=ax+b$ آنگاه:

$$\left|u_n f-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|L_n f-\int_a^b f(x)dx\right|=\frac{b-a}{2n}|f(b)-f(a)|\Rightarrow\frac{5-1}{n}|f(5)-f(1)|\le\frac{1}{40}\Rightarrow\frac{4}{n}(16-4)\le\frac{1}{40}$$

$$\frac{48}{n}\le\frac{1}{40}\Rightarrow n\ge 40\times 48\Rightarrow n\ge 1920$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ است.



$$L_3 f=\frac{\pi}{3}(f(\frac{\pi}{3})+f(\frac{2\pi}{3})+f(\pi))$$

$$L_3 f=\frac{\pi}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1)=-\frac{\pi}{3}$$

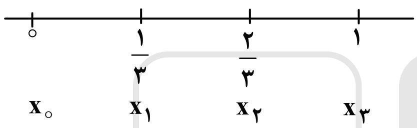
۱۷- گزینه ۳ پاسخ است.

$$9-x^2=x^2+1\Rightarrow 2x^2=8\Rightarrow x^2=4\overset{x>0}{\Rightarrow}x=2\ ,\ 9-x^2=0\xrightarrow{x>0}x=3$$

$$S=\int_0^2(x^2+1)dx+\int_2^3(9-x^2)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_0^2+\left(9x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_2^3$$

$$(\frac{8}{3}+2)+\left((27-9)-(18-\frac{8}{3})\right)=\frac{8}{3}+2+18-18+\frac{8}{3}=2+\frac{16}{3}=\frac{22}{3}$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ است.



برای محاسبه‌ی $U_3 f$ و $L_3 f$ کافی است بازه‌ی $[0,1]$ را با نقاط ۱ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$

و صفر به سه قسمت برابر افراز کنیم:

از طرفی تابع بر بازه‌ی داده شده صعودی اکید است، $(0<2+3x^2)$ پس:

$$U_3 f=\frac{1-0}{3}(f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+f(\frac{3}{3}))=\frac{1}{3}(\frac{1}{27}+\frac{2}{3}+\frac{8}{27}+\frac{4}{3}+1+2)=\frac{1}{3}(\frac{63}{27}+3)=\frac{63}{81}+1=\frac{16}{9}$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.

$$S=\int_{-1}^0 2\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}x\,dx+\int_0^1\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$f(x)=\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}x$ تابعی زوج است $\Rightarrow\int_{-1}^0\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}x=\int_0^1\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}x\,dx\Rightarrow S=3\int_0^1\mathrm{Cos}\frac{\pi}{2}x\,dx=3\times\frac{2}{\pi}\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}x\Big|_0^1=\frac{6}{\pi}$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ است.

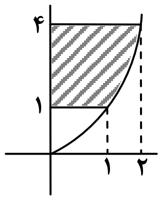
قضیه مقدار میانگین در مورد انتگرال بیان می‌کند. $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=f(c)$ به بیانی: مساحت مستطیل $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$

$$\Rightarrow\int_2^4(1+\frac{4}{x^2})dx=2\times\frac{c^2+4}{c^2}\Rightarrow x-\frac{4}{x}\Big|_2^4=2+\frac{8}{c^2}\Rightarrow 3-0=2+\frac{8}{c^2}\Rightarrow\frac{8}{c^2}=1\Rightarrow c=2\sqrt{2}$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\int_0^1 x\,dx+\underbrace{\int_1^2 0\,dx}_{0}+\int_2^3 -x\,dx+\underbrace{\int_3^4 0\,dx}_{0}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ است.



$$S = 2\times 4 - 1\times 1 - \int_1^2 x^2 dx$$

$$S = 8 - 1 - \frac{1}{3}x^3\Big)_1^2 = 7 - (\frac{8}{3} - \frac{1}{3})$$

$$= 7 - \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\frac{\int_{-1}^{3} f(x)dx}{4} = 5 \Rightarrow \frac{\int_{-1}^{+1} f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx}{4} = 5$$

f فرد است پس $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$ پس:

$$\int_1^3 f(x)dx = 20 \Rightarrow \int_1^3 (ax + f(x))dx = a\int_1^3 x dx + \int_1^3 f(x)dx = a\times 4 + 20 = 17 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ است.

مطابق قضیه مقدار میانگین در مورد انتگرال داریم:

$$\frac{\int_0^2 \sqrt{2-x}dx}{2} = f(c)$$

$$\frac{-\frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}\Big)_0^2}{2} = \sqrt{2-c} \Rightarrow \frac{0 + \frac{4}{3}\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2-c}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2-c} \Rightarrow \frac{8}{9} = 2 - c \Rightarrow c = 2 - \frac{8}{9} = \frac{10}{9} \Rightarrow c = \frac{10}{9}$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ است.

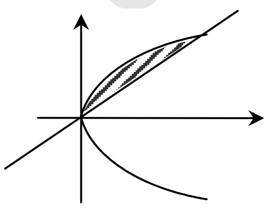
تابع در بازه $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ همواره مثبت است. پس انتگرال معین تابع در آن بازه همان سطح محصور خواسته شده است. پس:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \mathrm{Sin}\,2x)\mathrm{Cos}\,x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\mathrm{Cos}\,x + 2\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}^2 x)dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\mathrm{Cos}\,x}_{\text{تابع زوج}} dx + 2\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}^2 x}_{\text{تابع فرد}} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{Cos}\,x\,dx + 0 = 2\,\mathrm{Sin}\,x\Big)_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$$

f تابعی فرد باشد $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ — f تابعی زوج باشد $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ است.



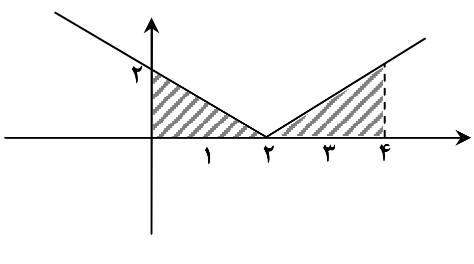
$$2y = y^2 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$\int_0^4 (\sqrt{x} - \frac{x}{2})dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2\Big)_0^4$$

$$= \frac{2}{3}\times 8 - 4 = \frac{16}{3} - \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$$

۲۷- گزینه ۳ پاسخ است.

نمودار $y = |x-2|$ به صورت زیر است:

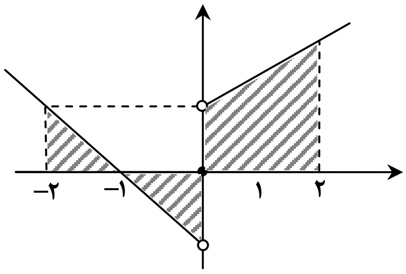


$$\int_0^4 |x-2|dx = \int_0^2 |x-2|dx + \int_2^4 |x-2|dx = \frac{2\times 2}{2} + \frac{2\times 2}{2} = 4$$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ است.

$$f(x)=(x+1)\mathrm{Sgn}(x)=(x+1)\times\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}=\begin{cases}x+1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -x-1 & x<0\end{cases}$$

نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است:



$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx+\int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

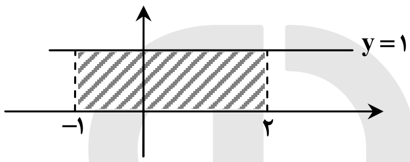
$$=-\frac{1\times 1}{2}+\frac{1\times 1}{2}+\frac{(1+3)\times 2}{2}=4$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ است.

$$f(x)=2\cos^2 x-\cos 2x=2\cos^2 x-(2\cos^2 x-1)=1$$

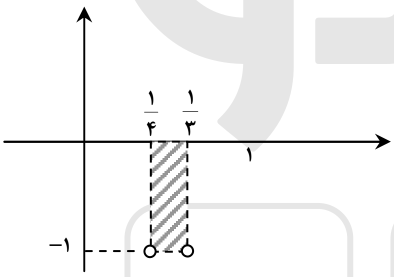
$$\int_{-1}^{2}(2\cos^2 x-\cos 2x)\,dx=\int_{-1}^{2}dx$$

نمودار $y=1$ خط افقی به شکل زیر است:



$$\int_{-1}^{2}dx=1\times 3=3$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ است.



داریم: $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ 1 & x\notin Z\end{cases}$

بنابراین، با توجه به این‌که $\frac{1}{3}>x>\frac{1}{4}$ و $x\notin Z$ بنابراین $[x]+[-x]=-1$ و می‌توان نوشت:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}([x]+[-x])\,dx=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}(-1)\,dx=-\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times 1\right]=-\frac{1}{12}$$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ است.

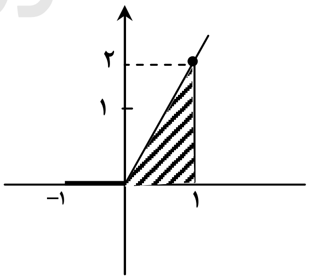
$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{5} f(x)\,dx=\frac{2\times 1}{2}-\frac{(4+2)\times 1}{2}=-2$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ است.

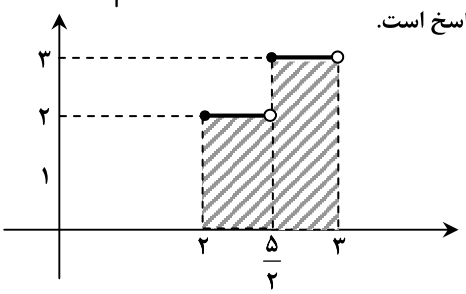
$$f(x)=\big|x+|x|\big|$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0 \quad -1<x<0\Rightarrow |x|=-x\Rightarrow f(x)=0\\ 2x & 0<x<1 \quad 0<x<1\Rightarrow |x|=x\Rightarrow f(x)=2x\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}\big|x+|x|\big|\,dx=\int_{-1}^{0}(0)\,dx+\int_{0}^{1}(2x)\,dx=0+\frac{1\times 2}{2}=1$$



۳۳- گزینه ۳ پاسخ است.



$$2\le x<\frac{5}{2}\Rightarrow \frac{5}{2}\le x+\frac{1}{2}<3\Rightarrow \left[x+\frac{1}{2}\right]=2$$

$$\frac{5}{2}\le x<3\Rightarrow 3\le x+\frac{1}{2}<\frac{7}{2}\Rightarrow \left[x+\frac{1}{2}\right]=3$$

$$\int_{2}^{3}\left[x+\frac{1}{2}\right]dx=\int_{2}^{\frac{5}{2}}(2)\,dx+\int_{\frac{5}{2}}^{3}(3)\,dx=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

۳۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$$u_n f=\sum_{K=۱}^{n}\frac{b-a}{n}f(a+K.\frac{b-a}{n})=\sum_{K=۱}^{n}\frac{۴}{n}f(\frac{۴K}{n})=\sum_{K=۱}^{n}\frac{۴}{n}(\frac{۸K}{n}-۱)$$

$$=\frac{۳۲}{n^۲}.\frac{n(n+۱)}{۲}-۴=\frac{۱۶(n+۱)}{n}-۴=\frac{۱۲n+۱۶}{n}=۱۲+\frac{۱۶}{n}$$

$$\int_۰^۴ f(x)dx=\int_۰^۴(۲x-۱)dx=۴\times۳=۱۲\Rightarrow|U_n f-\int_۰^۴ f(x)dx|=|۱۲+\frac{۱۶}{n}-۱۲|<\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow n>۳۲۰\Rightarrow n\geq۳۲۱$$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{K=۱}^{n}\frac{n}{(n+K)^۲}=\lim_{n\to\infty}\sum_{K=۱}^{n}\frac{n}{n^۲(۱+\frac{K}{n})^۲}=\lim_{n\to\infty}\sum_{K=۱}^{n}\frac{۱}{n}\cdot\frac{۱}{(۱+\frac{K}{n})^۲}=\int_۰^۱\frac{dx}{(۱+x)^۲}=\frac{-۱}{x+۱}\Big)_۰^۱=-\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۱}{۲}$$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{b-a}{n}f(a+i\frac{b-a}{n})$$

$$\lim\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n}\sqrt{۱+\frac{i}{n}}=\int_۰^۱\sqrt{۱+x}\,dx=\frac{۲}{۳}(۱+x)^{\frac{۳}{۲}}\Big)_۰^۱=\frac{۲}{۳}(۲^{\frac{۳}{۲}}-۱)=\frac{۲}{۳}(۲\sqrt{۲}-۱)$$

۳۷- گزینه ۴ پاسخ است.

$$\int_{e^۲}^{e^۳}\frac{Ln\,x^۲}{x}dx=۲\int_{e^۲}^{e^۳}\frac{Ln\,x}{x}dx=۲\int_۲^۳ u\,du=u^۲\Big|_۲^۳=۹-۴=۵$$

$$Ln\,x=u\Rightarrow\frac{dx}{x}=du$$

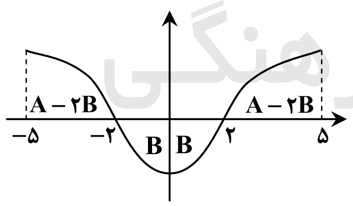
۳۸- گزینه ۱ پاسخ است.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{b-a}{n}f(a+i\frac{b-a}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n}f(\frac{i}{n})=\int_۰^۱ f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}Cos^۲\frac{\pi i}{۲n}=\int_۰^۱ Cos^۲\frac{\pi x}{۲}dx=\int_۰^۱(\frac{۱+Cos\pi x}{۲})dx=\frac{x+\frac{۱}{\pi}Sin\pi x}{۲}\Big|_۰^۱=\frac{۱}{۲}$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ است.



$$\frac{\int_{-۵}^{۰}(f+|f|)dx}{۵}=\frac{\int_{-۵}^{۰}f(x)dx+\int_{-۵}^{۰}|f(x)|dx}{۵}$$

$$=\frac{(A-۲B-B)+(A-۲B)+B}{۵}$$

$$=\frac{۲A-۴B}{۵}$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ است.

مطابق روش ریمان برای محاسبه‌ی انتگرال معین داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{b-a}{n}f(a+\frac{i(b-a)}{n})=\int_a^b f(x)dx$$

و در حالتی از آن داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n}f(\frac{i}{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱-۰}{n}f(۰+i\frac{(۱-۰)}{n})=\int_۰^۱ f(x)dx$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{(n+۲i)^۲}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{n}{n^۲(۱+\frac{۲i}{n})^۲}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{n}.\frac{۱}{(۱+\frac{۲i}{n})^۲}=\frac{۱}{۲}\int_۱^۳\frac{dx}{x^۲}=\frac{۱}{۲}\frac{-۱}{x}\Big|_۱^۳=\frac{۱}{۳}$$

راه حل دیگر:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{(n+2i)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2(1+\frac{2i}{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.\frac{1}{(1+\frac{2i}{n})^2}\Rightarrow\int_0^1\frac{1}{(1+2x)^2}dx=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2x+1}\Big|_0^1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{1})=-\frac{1}{2}\times\frac{-2}{3}=\frac{1}{3}$$

۴۱- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x-1+1}{\sqrt{2x-1}}dx=\frac{1}{2}\int(\sqrt{2x-1}+\frac{1}{\sqrt{2x-1}})dx=\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{(2x-1)^3}+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$$

$$=\frac{1}{6}(2x-1)\sqrt{2x-1}+\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C=\sqrt{2x-1}\,(\frac{2x-1}{6}+\frac{3}{6})+C=\sqrt{2x-1}\,(\frac{x+1}{3})+C$$

راه حل دیگر:

$$\int\frac{x\ dx}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\sqrt{2x-1}=t\Rightarrow 2x-1=t^2\Rightarrow 2dx=2tdt$$

$$\int\frac{\frac{t^2+1}{2}}{t}tdt=\frac{1}{2}\int(t^2+1)dt=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}t^3+t)+c=t(\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{2})+c=\sqrt{2x-1}(\frac{1}{6}(2x-1)+\frac{1}{2})+c=\sqrt{2x-1}\,\underbrace{(\frac{x}{3}+\frac{1}{3})}_{f(x)}+c$$

۴۲- گزینه ۲ پاسخ است.

چون f تابعی زوج است، پس داریم:

$$\int_{-2x}^{2x}f(t)dt=2\int_0^{2x}f(t)dt$$

از طرفین فرض مشتق می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$2\times 2f(2x)=\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\Rightarrow 4f(2x)=\frac{-1}{x^2+1}\xrightarrow{x=1}f(2)=\frac{-1}{2\times 4}=-\frac{1}{8}$$

نکته‌ی درسی: $\boxed{(\int_a^{u(x)}f(t)dt)'=u'(x).f\big(u(x)\big)}$

۴۳- گزینه ۳ پاسخ است.

با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال داریم:

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4x\times \mathrm{Sin}4x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{16x^2}{nx^{n-1}}=a\Rightarrow n-1=2\Rightarrow n=3\Rightarrow\frac{16}{3}=a\Rightarrow a.n=16$$

۴۴- گزینه ۴ پاسخ است.

اگر تعریف کنیم $f(x)=\int_3^x f'(t)\,dt+4$ اولاً $f(3)=4$ بدیهی است $f'(2)=1$، ثانیاً با مفهوم انتگرال معین سازگاری دارد.

$$f(1)=\int_3^1 f'(t)\,dt+4=4-\int_1^3 f'(t)\,dt=4-2=2\Rightarrow f(1)=2$$

با توجه به نمودار $f''(4)$ یعنی شیب نمودار f' در $x=4$ که برابر ۱- است. پس:

$$2f(1)-f'(2)+f''(4)=4-1+(-1)=2$$

۴۵- گزینه ۲ پاسخ است.

اگر تعریف کنیم $f(x)=\int_3^x f'(t)\,dt+4$ آن‌گاه مطابق قضیه بنیادی اول شرط برقرار است. از طرفی:

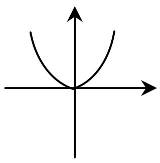
با توجه به نمودار f' داریم $\begin{cases}\int_1^3 f'(t)dt=1\\ \int_3^5 f'(t)dt=0\end{cases}$

$$f(1)=\int_3^1 f'(t)dt+4=4-\int_1^3 f'(t)dt=4-2=2$$

$$f(5)=\int_3^5 f'(t)dt+4=0+4=4\Rightarrow f(5)-2f(1)=4-2\times 2=0$$

۴۶- گزینه ۲ پاسخ است.

$$f(x)=۲\times ۲x\,\mathrm{Sin}\,۲x=۴x\,\mathrm{Sin}\,۲x$$



چون رفتار تابع در مجاورت $x=۰$ را می‌خواهد می‌توانیم از هم‌ارزی $\mathrm{Sin}\,۲x\sim ۲x$ در همسایگی صفر استفاده کنیم. پس $f(x)\sim ۸x^۲$ یعنی $x=۰$ طول Min نسبی است. یعنی به صورت مقابل می‌باشد.

۴۷- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left(\int_a^{u(x)} f(t)\,dt\right)'=u'(x).f(u(x))$$

$$f(x)=g(\sqrt[۳]{x})\Rightarrow f'(x)=g'(\sqrt[۳]{x}).\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\Rightarrow f'(۱)=g'(۱).\frac{۱}{۳}$$

$$g'(x)=۲\times\frac{۱}{۳+(۲x)^۳}=\frac{۲}{۳+۸x^۳}\Rightarrow g'(۱)=\frac{۲}{۱۱}\Rightarrow f'(۱)=\frac{۲}{۱۱}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳۳}$$