دینامیک

دینامیک علم بررسی نیروها و حرکت اجسام تحت تأثیر نیروهاست.

نیرو: برهمکنش یا تأثیر متقابل اجسام بر یکدیگر را نیرو گوییم یا عاملی که سبب تغییر وضعیت حرکت جسم می‌شود. انواع نیرو شامل نیروهای گرانشی، الکترومغناطیسی و هسته‌ای و ... می‌باشند.

قوانین دینامیک:

۱- قانون اول نیوتن (قانون لختی): یعنی اینکه اگر برجسمی نیرو اثر نکند یا برآیند نیروهای وارد برآن جسم صفر باشد، جسم وضعیت حرکتی خود را حفظ خواهد کرد. اگر ساکن باشد، ساکن می‌ماند و اگر سرعت ثابتی داشته باشد، با همان سرعت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

$$\Sigma F = 0 \iff a = 0$$

مثال: جسمی به جرم $5\,kg$ روی سطح افقی به وسیله فنری که ثابت آن $50\left(\frac{N}{m}\right)$ و امتدادش افقی است با سرعت ثابت کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک بین جسم و سطح 0.04 و $g=10\left(\frac{m}{s^2}\right)$ باشد، افزایش طول فنر چند سانتی‌متر است؟

پاسخ: چون گفته سرعت ثابت است پس: $\Sigma F = 0$

$$k\Delta x - \mu_k N = 0 \Rightarrow k\Delta x = \mu_k mg \Rightarrow \Delta x = \frac{0.04 \times 5 \times 10}{50}$$

$N = mg$

$$\Rightarrow \Delta x = 0.04\,(m)$$

*) راجع به نیروها جلوتر توضیح داده خواهد شد.

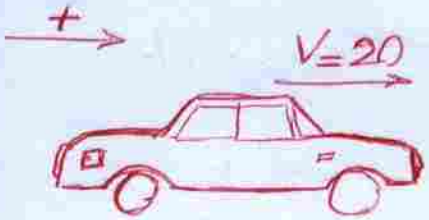
۲- قانون دوم نیوتن: هرگاه نیروهای وارد برجسمی صفر نباشد، $(\Sigma F \neq 0)$ جسم با شتاب حرکت خواهد کرد. این شتاب با برآیند نیروهای وارد بر جسم نسبت مستقیم و با جرم جسم رابطه‌ی وارون دارد.

$$\Sigma F = Ma$$

یکای نیرو در دستگاه SI، نیوتن است. به عبارتی یک نیوتن نیرویی است که اگر به جسمی به جرم $1\,kg$ اثر کند، به آن شتاب $1\,\frac{m}{s^2}$ بدهد.

(*) شتاب تند شونده مثبت و شتاب کند شونده منفی است.

مثال: اتومبیلی به جرم 900 کیلوگرم با سرعت 20 متر بر ثانیه در حرکت است. نیروی بازدارنده‌ای که بتواند پس از 6 ثانیه این اتومبیل را متوقف کند چند نیوتن است؟



$f = ma$

$$a = \frac{\Delta V}{t} = \frac{V_2 - V_1}{t} = \frac{0-20}{6} = -\frac{20}{6}$$

$$f = 900 \times \left(-\frac{20}{6}\right) = -3000$$

(-) یعنی اینکه جهت اعمال نیرو در خلاف جهت حرکت ماشین باید باشد.

مثال: اگر دو نیروی $F_1 = 6\hat{i} + \alpha\hat{j}$ و $F_2 = 2\hat{i} - 2\hat{j}$ به جسمی به جرم 2.5 کیلوگرم شتاب $4\frac{m}{s^2}$ بدهند، α برابر کدام می‌تواند باشد؟

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = 6\hat{i} + \alpha\hat{j} + 2\hat{i} - 2\hat{j} = 8\hat{i} + (\alpha-2)\hat{j} \Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{8^2 + (\alpha-2)^2}$$

$$F = ma \Rightarrow \sqrt{8^2 + (\alpha-2)^2} = 2.5 \times 4 \Rightarrow 64 + (\alpha-2)^2 = 100 \Rightarrow (\alpha-2)^2 = 36$$

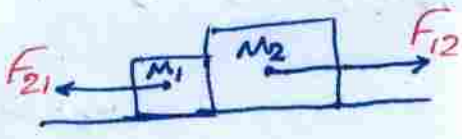
$$\alpha - 2 = 6 \Rightarrow \underline{\alpha = 8}$$

$$\alpha - 2 = -6 \Rightarrow \underline{\alpha = -4}$$

قانون سوم نیوتن: هر کنشی (عملی) را واکنشی (عکس العملی) است هم اندازه با آن و در جهت مخالف.

F_{12}: نیروی کنشی که جسم M_1 به جسم M_2 اثر می‌دهد.

F_{21}: نیروی واکنشی که جسم M_2 به جسم M_1 اثر می‌دهد.



$$\vec{F_{12}} = -\vec{F_{21}} \quad , \quad F_{12} = F_{21}$$

(*) نیروهای کنش و واکنش بر دو جسم اثر می‌کنند، یعنی نقطه اثر آن‌ها متفاوت است.

برآیند نیروها:

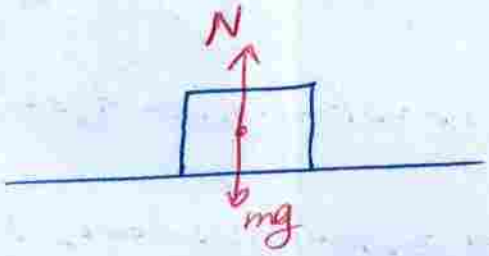
① جسم مورد نظر را شناسایی می‌کنیم.
② تکیه‌گاه را مشخص کرده و تصویر ساده‌ای از جسم و تکیه‌گاه‌ها رسم می‌کنیم.
③ نیروهای وارده از طرف اجسام دیگر بر جسم و برعکس را تعیین می‌کنیم.
④ مرکز اثر نیروها یا گرانیگاه را مشخص می‌کنیم.
⑤ راستای حرکت جسم را مشخص می‌کنیم.
⑥ دستگاه مختصات را تعیین می‌کنیم. (محور حرکت و عمود بر آن)
⑦ نیروها را برحسب به دستگاه مختصات تجزیه می‌کنیم.
⑧ سمت حرکت یا راستای a را راستای مثبت می‌گیریم و سپس به شکل زیر برآیندها را قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} \sum F_x = \sum F \quad , \quad \sum F_y = 0 \\ \sum F_x = ma \end{cases}$$

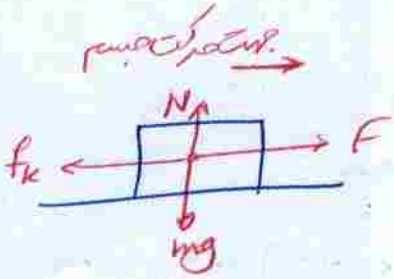
*) نیروی اصطکاک که گفته خواهد شد، جلوتر توضیح داده خواهد شد.

چند مثال از دیاگرام نیروها:

۱- جسم ساکن روی سطح افقی:



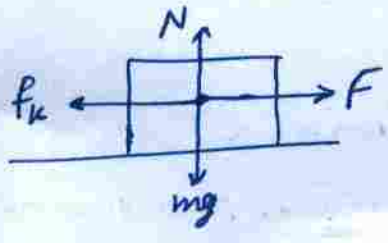
2- جسم با سرعت ثابت روی سطح افقی کشیده می‌شود:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F - f_k = 0 \Rightarrow \boxed{F = f_k}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg}$$

③ جسم با شتاب ثابت روی سطح افقی کشیده می‌شود:

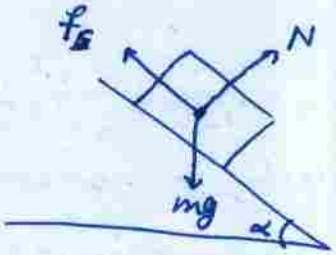


$$\sum F_x = ma \Rightarrow \boxed{F - f_k = ma}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg}$$

(4)

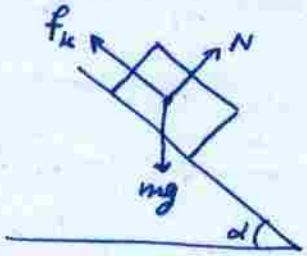
4- جسم ساکن روی سطح شیبدار



$\sum F_x = 0 \Rightarrow mg\sin\alpha - f_s = 0 \Rightarrow \boxed{f_s = mg\sin\alpha}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\alpha}$

5- جسم m بر روی سطح شیبدار با سرعت ثابت به طرف پایین می‌لغزد: $(f_k \neq 0)$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow mg\sin\alpha - f_k = 0 \Rightarrow \boxed{mg\sin\alpha = f_k}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\alpha}$

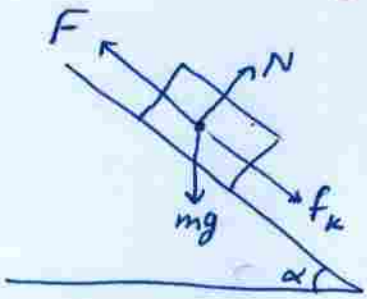
6- جسم m بر روی سطح شیبدار با شتاب a به طرف پایین می‌لغزد: $(f_k \neq 0)$

(شکل مانند مورد قبلی)

$\sum F_x = ma \Rightarrow \boxed{mg\sin\alpha - f_k = ma}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\alpha}$

7- جسم روی سطح شیبدار با سرعت ثابت به طرف بالا کشیده می‌شود: $(f_k \neq 0)$



$\sum F_x = 0 \Rightarrow F - mg\sin\alpha - f_k = 0$

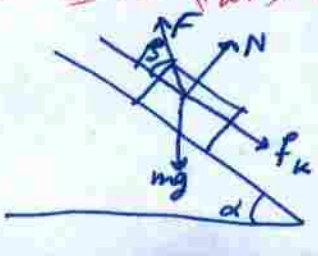
$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\alpha}$

(8)- جسم m روی سطح شیبدار با شتاب ثابت به طرف بالای سطح حل داده می‌شود: $(f_k \neq 0)$

$\sum F_x = ma \Rightarrow F - mg\sin\alpha - f_k = ma$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\alpha}$

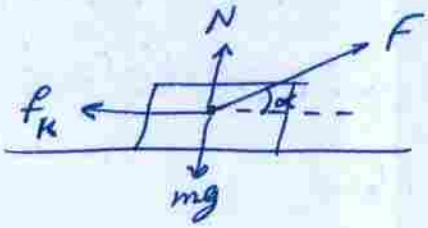
9- جسم m روی سطح شیبدار با شتاب ثابت به طرف بالا حل داده می‌شود: $(f_k \neq 0)$ و با این تفاوت که F مایل وارد می‌شود مانند شکل:



$\sum F_x = ma \Rightarrow F\cos\beta - f_k - mg\sin\alpha = ma$

$\sum F_y = ma \Rightarrow F\sin\beta + N - mg\cos\alpha \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\alpha - F\sin\beta}$

۱۰- جسم با شتاب ثابت روی سطح افقی با نیروی F مایل کشیده می‌شود.

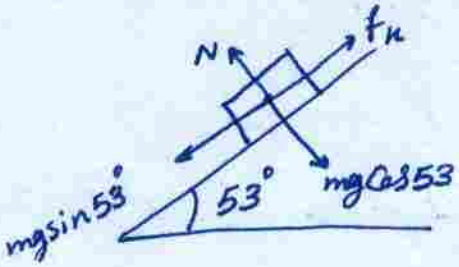


$$\sum F_x = ma \Rightarrow F\cos\alpha - f_k = ma$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N + F\sin\alpha - Mg = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N = mg - F\sin\alpha}$$

مثال: جسمی به جرم 4kg روی سطح شیبداری با شیب $\sin\alpha = 0.8$، تحت اثر نیروی وزش باشتاب $3\frac{m}{s^2}$ به پایین می‌لغزد، نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) در مقابل این حرکت چند نیوتن است؟ ($g=10$)

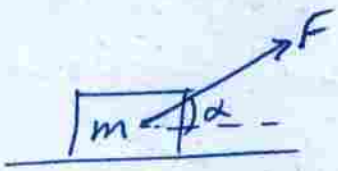


$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg\sin53^\circ - f_k = ma$$

$$\Rightarrow f_k = mg\sin53^\circ - ma = (4\times10\times0.8) - (4\times3)$$

$$\Rightarrow \boxed{f_k = 20N}$$

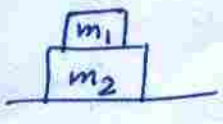
مثال: جسمی به جرم m روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد. نیروی F مطابق شکل زیر به آن وارد می‌شود. F چقدر باشد تا جسم از زمین جدا شود.



$$N = 0 \Rightarrow W = F\sin\alpha \Rightarrow mg = F\sin\alpha$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg}{\sin\alpha}$$

مثال: مطابق شکل دو جسم به جرم‌های $m_1=4kg$ و $m_2=8kg$ روی یک سطح افقی در حال سکون قرار دارند. نیروی عمودی وارد به جرم m_1 و m_2 از طرف تکیه‌گاه [redacted] چند نیوتن است؟



$$N_1 - m_1g = 0 \Rightarrow N_1 = m_1g = 4\times10 = 40N$$

$$N_2 - N_1 - m_2g = 0 \Rightarrow N_2 = N_1 + m_2g \Rightarrow N_2 = m_1g + m_2g = (8+4)\times10 = 120N$$

نیروی اصطکاک:

نیرویی است که در برابر حرکت جسم بر روی سطح مقاومت می‌کند. از نوع نیروهای الکترومغناطیسی است. این نیرو را سطح یا تکیه‌گاه بر جسم وارد می‌کند.

نیروی اصطکاک ایستایی: (f_s)

وقتی بر جسمی نیروی محرک اثر می‌کند، تا لحظه‌ای که جسم روی سطح ساکن است، نیروی اصطکاک از نوع ایستایی می‌باشد. نیروی اصطکاک ایستایی همواره هم اندازه و در جهت مخالف نیروی محرک است.

$$F = f_s$$

زمانی که اصطکاک ایستایی به بیشینه مقدار خود می‌رسد به آن اصطکاک در آستانه‌ی حرکت گویند.

ضریب اصطکاک ایستایی: (μ_s)

نسبت مقدار بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی به اندازه‌ی نیروی عمودی سطح را ضریب اصطکاک ایستایی می‌گویند.

$$\mu_s = \frac{f_{s\,max}}{N} \Rightarrow \boxed{f_{s\,max} = \mu_s N}$$

نیروی اصطکاک جنبشی:

در لحظه‌ای که جسم شروع به حرکت می‌کند نیروی اصطکاک وارد بر جسم از نوع جنبشی خواهد بود.
تفاوت اصطکاک جنبشی با اصطکاک ایستایی در این است که جنبشی بستگی به نیروی محرک وارد بر جسم ندارد و فقط بنیروی عمودی سطح (N) و ضریب اصطکاک جنبشی (μ_k) بستگی دارد.

ضریب اصطکاک جنبشی: نسبت اندازه‌ی نیروی اصطکاک جنبشی (f_k) به اندازه‌ی نیروی عمودی سطح (N) را ضریب اصطکاک جنبشی گویند.

$$\mu_k = \frac{f_k}{N} \Rightarrow \boxed{f_k = \mu_k N}$$

*) عوامل موثر در ضرایب اصطکاک عبارتند از:

الف) جنس سطوح تماس

ب) عوامل محیطی و ضیز یکی مانند رطوبت، دما

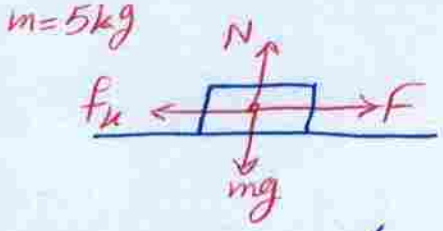
ج) زبری و نرمی سطوح تماس

*) ضریب اصطکاک ایستایی غالباً از ضریب اصطکاک جنبشی بزرگتر است:

$\mu_s > \mu_k \Rightarrow f_{s\,max} > f_k$

(7) مثال: بر جسم متحرکی مطابق شکل نیروی F سوزنی با سطح اثر می‌کند. برآیند نیروهای وارد بر جسم، اندازه نیروی اصطکاک و شتاب حرکت جسم را در حالات زیر بررسی کنید. $\left(g=10\frac{N}{kg}, \mu_k=\frac{1}{2}, \mu_s=\frac{3}{4}\right)$

الف) $F=0\,N$ ، ب) $F=20N$ ، پ) $F=25N$ ، ت) $F=37.5N$



پاسخ: چون سوال گفته جسم متحرک است پس در تمامی قسمتهای سوال اصطکاک از نوع جنبشی است.

الف) $F=0$

$f_k=\mu_k N=\frac{1}{2}\times5\times10=25$

$\sum F_x=F-f_k=0-25 \Rightarrow \sum F_x=-25N$

$\sum F_x=Ma \Rightarrow a=\frac{\sum F_x}{M}=\frac{-25}{5} \Rightarrow \boxed{a=-5\left(\frac{m}{s^2}\right)}$ جهت سرعت و شتاب مخالف هم‌اند.

ب) $F=20N$

$\sum F_x=F-f_k=20-25 \Rightarrow \sum F_x=-5N$

$\sum F_x=Ma \Rightarrow a=\frac{-5}{5} \Rightarrow \boxed{a=-1\frac{m}{s^2}}$ چون $F<f_k$ پس باز هم حرکت کند شونده است.

پ) $F=25\,N$

$\sum F_x=F-f_k=25-25 \Rightarrow \sum F_x=0$

چون برآیند نیروها صفر است پس شتاب نیز صفر و حرکت یکنواخت خواهد بود.

ت) $F=37.5\,N$

$\sum F_x=F-f_k=37.5-25 \Rightarrow \sum F_x=12.5N$

$\sum F_x=Ma \Rightarrow a=\frac{12.5}{5} \Rightarrow \boxed{a=2.5\frac{m}{s^2}}$

شتاب مثبت و تند شونده است.

مثال: حال اگر در مثال قبل نیروی $F=37.5$ به جسم ساکنی وارد شود چه اتفاقی می‌افتد؟

$f_{s\,max}=\mu_s N=\frac{3}{4}\times5\times10=37.5N$

$f_s=f_{s\,max}=F=37.5$

جسم هنوز حرکت نکرده اما در آستانه‌ی حرکت قرار دارد.

⑧ برآیند نیروهایی که سطح بر جسم وارد می‌کند: (نیروی واکنش سطح R)

نیروهایی که سطح بر جسم وارد می‌کند، عبارتند از نیروی عمودی سطح (N) و نیروی اصطکاک (f)

چون این دو نیرو بر هم عمودند پس: $R=\sqrt{N^2+f^2}$ ← نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند

1- جسم ساکن باشد: $(f_s<\mu_s N)$ در این صورت جای f، f_s را قرار می‌دهیم:

$$R=\sqrt{f_s^2+N^2}$$

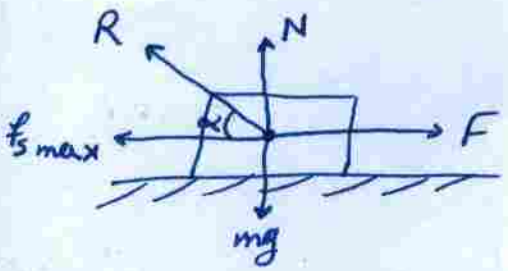
2- جسم در آستانه حرکت باشد: $(f_s=\mu_s N)$ در این صورت جای f، $\mu_s N$ را می‌گذاریم:

$$R=\sqrt{N^2+\mu_s^2N^2} \Rightarrow R=N\sqrt{1+\mu_s^2}$$

3- جسم در حال حرکت باشد: $(f_k=\mu_k N)$ در این صورت به جای f، $\mu_k N$ را قرار می‌دهیم:

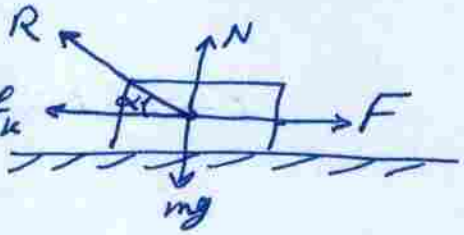
$$R=\sqrt{N^2+\mu_k^2N^2} \Rightarrow R=N\sqrt{1+\mu_k^2}$$

*) اگر جسم در آستانه حرکت باشد:



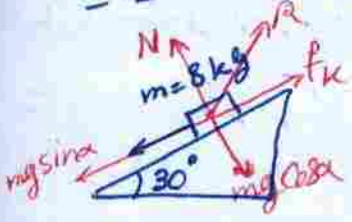
$$\mu_s=\frac{f_{s\,max}}{N} \Rightarrow \boxed{\mu_s=\text{ctg}\,\alpha}$$

اگر جسم در حال حرکت باشد:



$$\mu_k=\frac{f_k}{N} \Rightarrow \boxed{\mu_k=\text{ctg}\,\alpha}$$

مثال: در شکل زیر جسمی به جرم $m=8kg$ روی سطح شیبدار با سرعت ثابت به پایین می‌لغزد. نیرویی که از طرف سطح شیبدار بر جسم وارد می‌شود چند نیوتن است؟



$mg\sin\alpha=f_k$

$mg\cos\alpha=N$

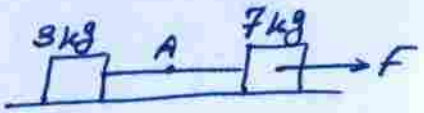
و لذا بدون محاسبه مشخص است که $R=mg=80\,N$ است. زیرا R برآیند f_k و N است و mg نیز برآیند $mg\sin\alpha$ و $mg\cos\alpha$ می‌باشد.

بررسی نیروی کشش نخ (T):

برای محاسبه‌ی نیروی کشش نخ، از محلی که نیروی کشش خواسته شده است، نخ را به طور فرضی می‌بریم سپس یک طرف دستگاه را حذف می‌کنیم و نیم دیگر را همانند یک جسم در نظر می‌گیریم. سپس نیروی مختلف وارده به آن را بررسی می‌کنیم.

اگر جرم نخ ناچیز باشد: اگر جرم نخ ناچیز باشد، محل دقیق بریدن برای محاسبه‌ی نیروی کشش تعیین کننده نیست.

مثال: دو جسم مطابق شکل با نیروی $F=100N$ بر روی سطح افقی بدون اصطکاک کشیده می‌شوند. نیروی کشش نخ چند نیوتن است؟

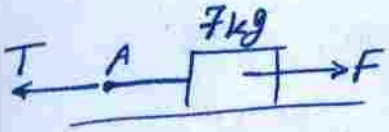


$$\sum F = Ma \Rightarrow 100 = (3+7)\times a \Rightarrow a = 10\ \frac{m}{s^2}$$

حال نخ را از نقطه‌ی A بریده می‌دهیم.

$$\sum F = Ma \Rightarrow T = M_1 a = 3\times 10 \Rightarrow \boxed{T = 30N}$$

حال طرف دوم دستگاه را در نظر می‌گیریم:

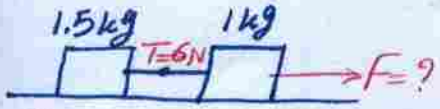


$$\sum F = Ma \Rightarrow F - T = M_2 a \Rightarrow 100 - T = 7\times 10 \Rightarrow \boxed{T = 30N}$$

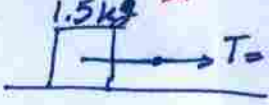
*) اگر جسم‌های تشکیل دهنده‌ی یک دستگاه دارای وضعیت مشابه باشند (یعنی همه روی یک سطح بوده و ضرایب اصطکاک برابر داشته باشند) می‌توان از تناسب زیر استفاده کرد:

$$\frac{T}{M_1} = \frac{F}{M_1 + M_2}$$

مثال: در شکل مقابل نیروی F چند نیوتن است؟ $(g=10\ \frac{N}{kg})$



$$\Rightarrow \sum F = Ma \Rightarrow T = M_1 a \Rightarrow 6 = 1.5\times a \Rightarrow a = 4\ \frac{m}{s^2}$$



$$\begin{cases} \sum F = Ma \Rightarrow F - f_{k_2} = (M_1+M_2)a \\ f_{k_2} = \mu_{k_2} N_2 = \mu_{k_2} M_2 g \end{cases} \Rightarrow F - (0.5\times 1\times 10) = (1.5+1)\times 4$$

و حال کل دستگاه:

$$\Rightarrow \boxed{F = 15N}$$

(10) جرم نخ ناچیز باشه: در این صورت محل دقیق برش برای محاسبه‌ی کشش نخ تعیین کننده است، چون جرم دارد و در شتاب حرکت دستگاه تأثیر می‌گذارد.

$$\sum F = Ma \Rightarrow F = (M_1 + M_2 + m)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{(M_1 + M_2 + m)}$$

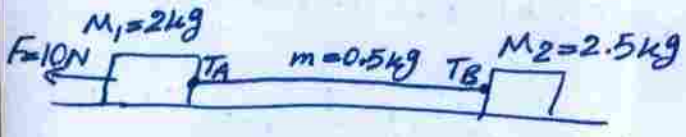
حال مثلاً نقطه‌ی A را برای برش انتخاب می‌کنیم:

جهت حرکت

$$T_A = (M_1 + m_1)a$$

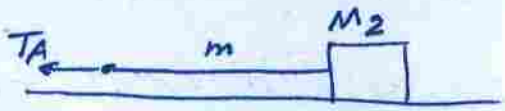
هر نقطه‌ی دیگر را می‌توانیم به همین شکل بررسی کنیم.

مثال: در شکل مقابل جرم طناب 0.5 کیلوگرم است، $T_A - T_B$ چند نیوتن می‌باشد؟ (از اصطکاک چشم‌پوشی کنید)



پاسخ: ابتدا شتاب دستگاه را پیدا می‌کنیم:

$$\sum F = Ma \Rightarrow F = (M_1 + M_2 + m)a \Rightarrow a = \frac{10}{2 + 0.5 + 2.5} = 2\ m/s^2$$



$$T_A = (M_2 + m)a = (2.5 + 0.5) \times 2 \Rightarrow T_A = 6\ N$$

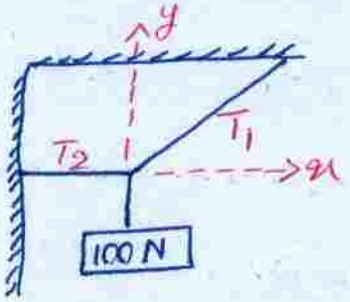
$$T_B = M_2 a = 2.5 \times 2 \Rightarrow T_B = 5N$$

$$T_A - T_B = 6 - 5 = \underline{1\ N}$$

نیروی کشش نخ در دستگاههای در حال تعادل:

در این حالت نخ را برش داده، به جای آن نیروهای کشش در امتداد نخ ها را رسم می کنیم.

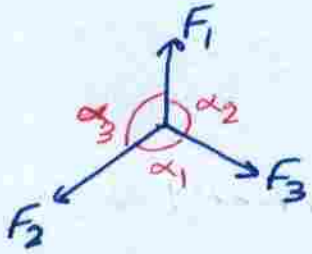
مثال: در شکل مقابل کشش هر یک از نخ ها چند نیوتن است؟ $(\cos 37^\circ = 0.8 \ , \ \sin 53^\circ = 0.8)$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 \sin 53^\circ - 100 = 0 \Rightarrow \boxed{T_1 = 125N}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_1 \cos 53^\circ - T_2 = 0 \Rightarrow \boxed{T_2 = 75N}$$

*) اگر در شرایطی مثل سوال بالا برآیند نیروها صفر باشد (در حال تعادل باشند) می توان از رابطه ی مقابل استفاده کرد.



$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3}$$

برای مثال بالا:

$$\frac{100}{\sin(90+37)} = \frac{T_1}{\sin 90} \Rightarrow \frac{100}{\cos 37} = \frac{T_1}{1} \Rightarrow \boxed{T_1 = 125N}$$

$$\frac{T_1}{\sin 90^\circ} = \frac{T_2}{\sin(90+53^\circ)} \Rightarrow \frac{125}{1} = \frac{T_2}{\cos 53^\circ} \Rightarrow \boxed{T_2 = 75N}$$

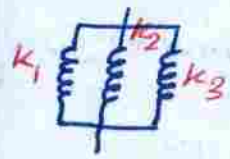
نیروی کشش فنر (قانون هوک):

اگر فنری را بکشیم یا جمع کنیم نیرویی در جهت خلاف جابجایی می خواهد فنر را به وضعیت عادی خود بازگرداند. این نیرو را نیروی کشش فنر می گوییم. متناسب با طول فنر است.

$F = kx$ ← کشش فنر ، x ← جابجایی از نقطه تعادل

$\vec{F} = -k\vec{x}$ (برداری)

در فنرهای موازی ثابت کل فنر برابر است با:

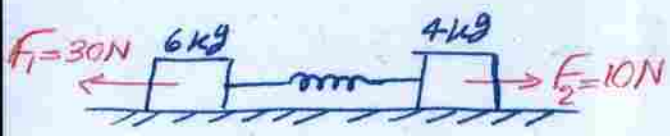


$$k_t = k_1 + k_2 + k_3$$

در فنرهای متوالی:

$$\frac{1}{k_t} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$

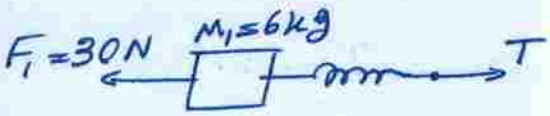
(12) مثال: در شکل مقابل نیروی کشش فنر چند نیوتن است؟ (از جرم فنر و اصطکاک چشم پوشی کنید)



$$\sum F = Ma \Rightarrow F_1 - F_2 = (M_1+M_2)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{30-10}{6+4} = 2\ \frac{m}{s^2}$$

حال فنر را برش می دهیم و یک طرف دستگاه را حذف می کنیم:

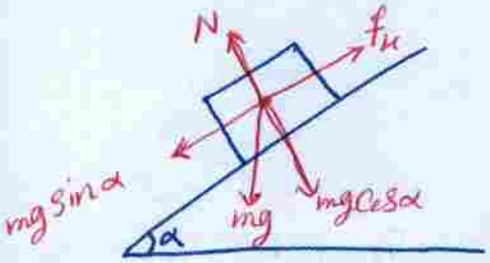


$$\sum F = Ma \Rightarrow F_1 - T = M_1 a \Rightarrow 30 - T = 6\times 2$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 18N}$$

بررسی شتاب حرکت جسم در سطح شیبدار:

1- جسم از بالای سطح شیبدار به طرف پایین سطح می لغزد:



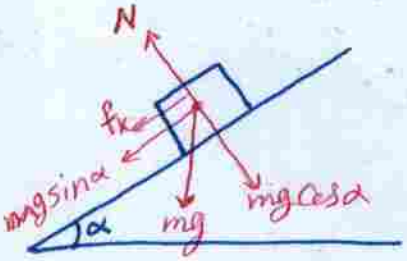
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - Mg\sin\alpha = 0 \Rightarrow N = Mg\cos\alpha$$

$$f_k = \mu_k N \Rightarrow f_k = \mu_k Mg\cos\alpha$$

$$\sum F_x = Mg\sin\alpha - f_k = Mg\sin\alpha - \mu_k Mg\cos\alpha = Mg(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$

$$a = \frac{\sum F}{M} = \frac{Mg(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)}{M} \Rightarrow \boxed{a = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)}$$

2- جسم از پایین سطح شیبدار به طرف بالای سطح پرتاب می شود:



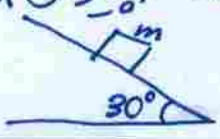
$$f_k = \mu_k Mg\cos\alpha$$

$$\sum F_x = -Mg\sin\alpha - f_k = -Mg\sin\alpha - \mu_k Mg\cos\alpha$$

$$= -Mg(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$

$$a = \frac{\sum F_x}{M} = \frac{-Mg(\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha)}{M} \Rightarrow \boxed{a = -g(\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha)}$$

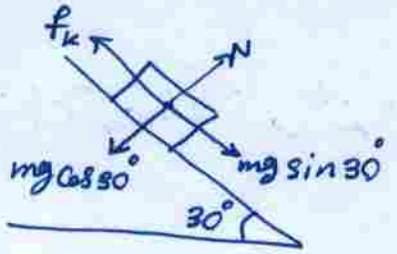
مثال: در شکل مقابل جسم m از حال سکون شروع به لغزیدن می کند و پس از 9m سرعتش به $6\frac{m}{s}$ می رسد. ضریب اصطکاک میان جسم و سطح شیبدار چقدر است؟



(13) پاسخ: از فصل حرکت شناسی داریم:

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x$$

$$\Rightarrow a = \frac{V^2 - V_0^2}{2\Delta x} = \frac{6^2 - 0^2}{2\times 9} = 2\ \frac{m}{s^2}$$



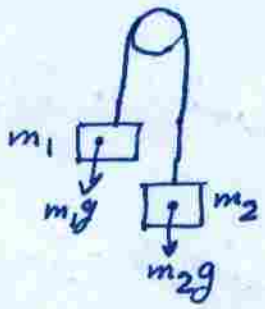
$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg\sin 30 - \mu_k mg\cos 30^\circ = ma$$

$$\Rightarrow a = g\sin 30^\circ - \mu_k g\cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow 2 = 10\left(\frac{1}{2} - \mu_k \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\mu_k = \frac{\sqrt{3}}{5}}$$

بررسی حرکت و شتاب حرکت دستگاه قرقره‌ی ثابت (آتوود)

در قرقره‌ی ثابت ابتدا جهت حرکت قرقره را با توجه به جرم بزرگتر تعیین می‌کنیم. سپس نیروها را با توجه به جهتشان بررسی می‌کنیم.



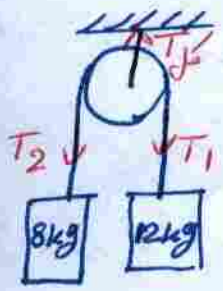
$$\sum F = M_t a \Rightarrow m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{|m_1 - m_2|}{m_1 + m_2} g$$

نیروی کشش نخ در قرقره‌ی مهم به شکل زیر است:

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

مثال: اگر در شکل زیر از نیروی اصطکاک و جرم نخ‌ها و قرقره چشم‌پوشی شود، نیروی کشش در نخی که قرقره را به سقف آویخته است چند نیوتن است؟ $\left(g = 10\ \frac{N}{kg}\right)$



$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2\times 8\times 12\times 10}{8+12} = 96$$

$$T_1 = T_2 \ , \quad T_{کل} = 2T_1 = 2\times 96 = 192$$

بررسی وزن ظاهری (W') در آسانسور:

1- آسانسور با شتاب a به طرف بالا حرکت می‌کند:

$$\sum F = ma \Rightarrow W' - Mg = Ma \Rightarrow W' = M(g+a)$$

الف) حرکت آسانسور تند شونده باشد.

$$a > 0 \Rightarrow W' > Mg$$

ب) حرکت آسانسور یکنواخت باشد.

$$V = \text{ثابت} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow W' = Mg$$

ج) حرکت آسانسور کند شونده باشد.

$$a < 0 \Rightarrow W' < Mg$$

2- آسانسور با شتاب a به طرف پایین حرکت می‌کند:

$$\sum F = ma \Rightarrow Mg - W' = Ma \Rightarrow W' = M(g-a)$$

الف) حرکت آسانسور به طرف پایین تند شونده باشد.

$$a > 0 \Rightarrow W' < Mg$$

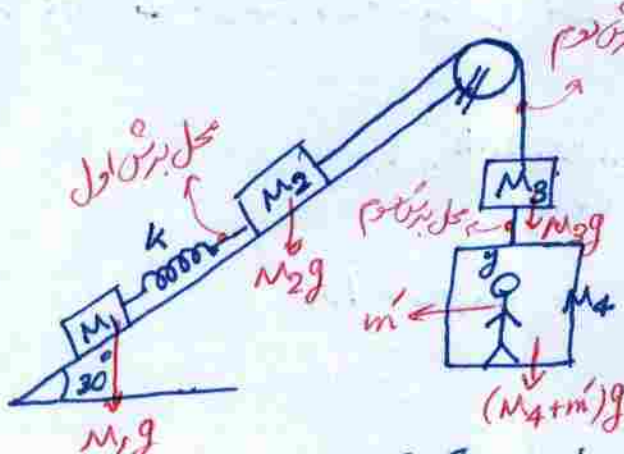
ب) حرکت آسانسور یکنواخت باشد.

$$a = 0 \Rightarrow W' = Mg$$

ج) حرکت آسانسور کند شونده باشد.

$$a < 0 \Rightarrow W' > Mg$$

مثال: دستگاه شکل زیر از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. با توجه به شکل به سوالات زیر پاسخ می‌دهیم:
(از جرم قرقره، فنر و طناب صرف نظر می‌کنیم.)



الف) شتاب حرکت دستگاه چقدر است؟

ب) نیروی کشش اتصالات بین جرم‌ها چقدر است؟

ج) وزن ظاهری آقای g چقدر است؟

د) تغییر طول فنر از طول عادی اش چقدر است؟

هـ) آقای g پس از 2 ثانیه از شروع حرکت چقدر جابجا می‌شود؟

(15)

الف) برای جسم 1: $\sum F_{y_1} = 0 \Rightarrow N_1 - M_1 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_1 = M_1 g\cos\alpha = 40\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3}\,N$

برای جسم 2: $\sum F_{y_2} = 0 \Rightarrow N_2 - M_2 g\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_2 = M_2 g\cos\alpha = 40\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 200\sqrt{3}\,N$

قبل از محاسبه $\sum F_x$ نیروهای اصطکاک بین سطح شیبدار و اجسام M_1 و M_2 را به دست می آوریم:

$$N_1 = N_2 \Rightarrow f_{k_1} = f_{k_2} = \mu_k N_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\times 200\sqrt{3} \Rightarrow f_{k_1} = f_{k_2} = 200N$$

اگر M_4 جرم کل دستگاه باشد، داریم:

$$\sum F_x = (M_4 + m')g + M_3 g - M_2 g\sin\alpha - f_{k_2} - M_1 g\sin\alpha - f_{k_1} = M_t a$$

$$a = \frac{[(50+60)\times 10] + (10\times 10) - (40\times 10\times\frac{1}{2}) - 200 - (40\times 10\times\frac{1}{2}) - 200}{40+40+10+50+60} \Rightarrow a = 2\ m/s^2$$

ب) نیروی کشش بین دو جسم M_2 و M_1 را حساب می کنیم. (T_{21} نیرویی است که جرم M_2 به جرم M_1 وارد می کند)

$$\sum F_1 = M_1 a \Rightarrow T_{21} - f_{k_1} - M_1 g\sin\alpha = M_1 a \Rightarrow T_{21} - 200 - 200 = 40\times 2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{21} = 480N} = T_{12}$$

T_{23} نیرویی است که جرم M_2 به جرم M_1 وارد می کند. ($T_{23} \neq T_{32}$ برابر است)

$$\sum F_2 = (M_3 + M_4 + m')a \Rightarrow (M_4 + m')g + M_3 g - T_{23} = (M_3 + M_4 + m')a$$

$$\Rightarrow T_{23} = 1100 + 100 - [(10+50+60)\times 2] \Rightarrow \boxed{T_{23} = 960N}$$

T_{34} نیرویی است که از طرف جرم M_3 به جرم M_4 وارد می شود.

$$\sum F_3 = (M_4 + m')a \Rightarrow (M_4 + m')g - T_{34} = (M_4 + m')a \Rightarrow T_{34} = 1100 - 220$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{34} = 880}$$

ج)

$$\sum F' = m'a \Rightarrow m'g - w' = m'a \Rightarrow w' = m'(g-a) \Rightarrow w' = 60(10-2) \Rightarrow \boxed{w' = 480N}$$

(16) د) برای محاسبه تغییر طول فنر بین جرم‌های M_2 و M_1 نیروی کشش را با نیروی فنر یکی می‌گیریم، چون برابرند.

$$F = k\Delta x \Rightarrow T_{21} = k\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{480}{1000} = 0.48\ m \Rightarrow \boxed{\Delta x = 48\ Cm}$$

ه) جابجایی آقای ۷ پس از 2S از شروع حرکت:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} \times 2 \times (2)^2 + (6 \times 2) = 4 \Rightarrow \boxed{\Delta x = 4}$$

تکانه (اندازه حرکت)

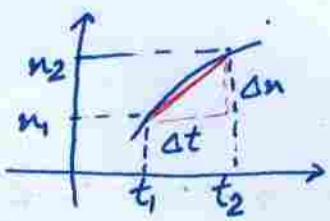
عبارت است از حاصل ضرب جرم جسم در سرعت حرکت جسم است.

$$p = mv \quad \begin{cases} \text{تکانه} \left(\frac{kg.m}{s}\right) \\ \text{سرعت جسم} \left(\frac{m}{s}\right) \\ \text{جرم جسم} (kg) \end{cases}$$

تکانه متوسط: حاصلضرب جرم جسم در سرعت متوسط آن را گویند.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1) \quad \vec{p} = m\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

اگر شیب نمودار (مکان-زمان) یک حرکت در بازه‌ی زمانی Δt را در جرم متحرک ضرب نماییم، اندازه‌ی تکانه متوسط حاصل می‌شود.

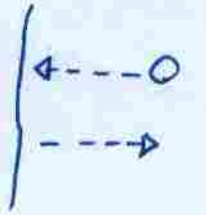


$$\left.\begin{array}{l} \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = tg\alpha \\ \bar{p} = m\bar{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{p} = m.tg\alpha$$

تکانه لحظه‌ای: تکانه‌ی جسم در هر لحظه را تکانه‌ی لحظه‌ای می‌نامیم:

$$p_{\text{لحظه‌ای}} = mv_{\text{لحظه‌ای}} \Rightarrow p_{\text{لحظه‌ای}} = \lim_{\Delta t \to 0} m\frac{\Delta x}{\Delta t} = m\frac{dx}{dt}$$

مثال: توپی به جرم 200gr با سرعت $10\frac{m}{s}$ به دیواری برخورد می‌کند و با همین اندازه‌ی سرعت از دیوار برمی‌گردد. تغییر تکانه‌ی آن چقدر است؟



$$\Delta p = m\Delta v = m(v_2 - v_1) = \frac{2}{10}(-10-10) = -4\ kg\frac{m}{s}$$

بررسی قانون دوم نیوتن از دریچه تکانه:

آهنگ تغییرات تکانه برابر برآیند نیروهای وارد بر جسم می‌باشد.

$$\sum F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \Rightarrow \sum F \Delta t = m\Delta v$$

قانون عمومی گرانش:

اگر F، اندازه‌ی نیروی گرانش، m_1 و m_2 جرم دو جسم و r فاصله‌ی گرانیگاه‌های دو جسم از یکدیگر باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} F \propto (m_1, m_2) \\ F \propto \frac{1}{r^2} \end{array}\right\} \Rightarrow F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

برای آنکه رابطه تناسبی به یک رابطه تساوی تبدیل شود، طرف دوم را در یک کمیت ضدیکی ثابت ضرب می‌کنیم.

G را ثابت جهانی گرانش می‌نامیم و یکای آن در SI، $\frac{Nm^2}{kg^2}$ می‌باشد.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6.67\times10^{-11}\ \frac{Nm^2}{kg^2}$$

محاسبه شتاب گرانش در سطح زمین:

می‌دانیم که وزن از نوع نیروهای گرانشی می‌باشد که جسم و زمین بر گرانیگاه‌های یکدیگر وارد می‌کنند.

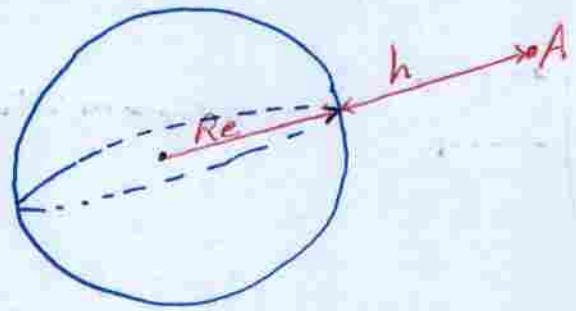
$$\left.\begin{array}{l} F = mg \\ F = G\frac{M_e m}{R_e^2} \end{array}\right\} \Rightarrow mg = G\frac{M_e m}{R_e^2} \Rightarrow \boxed{g = G\frac{M_e}{R_e^2}}$$

M_e: جرم زمین، R_e: شعاع زمین، g: شتاب گرانش زمین

(18)

رابطه شتاب گرانش زمین در ارتفاع h از سطح زمین :

$$g' = G\frac{M_e}{(R_e+h)^2}$$



رابطه نسبت شدت میدان گرانش در سطح دو کره :

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{M_A}{M_B} \times \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2$$

مثال: چگالی و شعاع کره‌ی A نصف چگالی و شعاع کره‌ی B است. اندازه‌ی شتاب گرانش در سطح کره A چند برابر شتاب گرانش در سطح کره‌ی B است؟

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} \times \frac{R_A}{R_B} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{از اینجا بدست آمد.} \Rightarrow \frac{g_A}{g_B} = \frac{M_A}{M_B}\left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 = \frac{\rho_A V_A}{\rho_B V_B} \times \frac{R_B^2}{R_A^2} = \frac{\rho_A \times \frac{4}{3}\pi R_A^3 \times R_B^2}{\rho_B \times \frac{4}{3}\pi R_B^3 \times R_A^2} = \frac{\rho_A R_A}{\rho_B R_B}$$

*) از تفنگی که جرم آن با گلوله داخلش M است، گلوله‌ای به جرم M' با سرعت V' شلیک شده و تفنگ با سرعت V به عقب رانده شده است. اندازه‌ی V' کدام است؟

تفنگ $M'' = M - M'$

گلوله $Ft = M'V' - M'V_0$

تفنگ $Ft = M''V - MV_0$

$$\Rightarrow M'(V') = (M-M')V \Rightarrow M'\Delta x = (M-M')\Delta x$$

$$\Rightarrow V' = \frac{(M-M')V}{M'}$$

این رابطه در مسئله قایقی که شخص از یک طرف آن به طرف دیگر آن می‌رود نیز صادق است.

حرکت دایره‌ای :

نمونه‌ای از حرکت در صفحه، حرکت بر مسیر دایره است.

حرکت دایره‌ای را نیز می‌توان مانند دیگر حرکت‌ها از جنبه دینامیکی و سینماتیکی بررسی کرد.

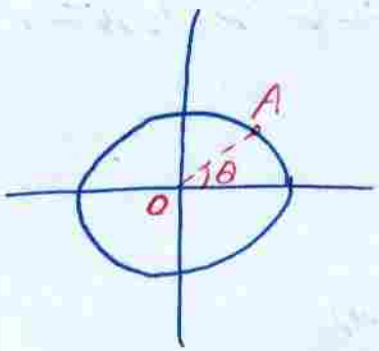
سینماتیک حرکت دایره‌ای :

۱- مکان زاویه‌ای :

مطابق شکل روبرو می‌توان هر نقطه از مکان دایره نسبت به محور x را با زاویه‌ای مثل θ نشان داد.

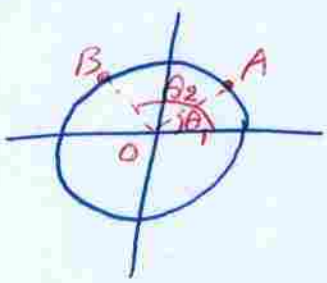
به این زاویه مکان زاویه‌ای نقطه A می‌گوییم.

در حرکت دایره‌ای θ تابعی از زمان $\theta(t)$ است.



2- جابجایی زاویه‌ای :

ذره‌ای را روی دایره در نظر بگیرید. زمانی که در نقطه A است مکان زاویه‌ای آن θ_1 و زمانی که در نقطه‌ی B است مکان زاویه‌ای آن θ_2 است. تفاضل این دو زاویه را جابجایی زاویه‌ای این ذره گویند.



$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

3- سرعت زاویه‌ای : آهنگ جابجایی زاویه‌ای را سرعت زاویه‌ای می‌نامیم.

الف) سرعت زاویه‌ای متوسط : نسبت جابجایی زاویه‌ای به بازه‌ی زمانی این جابجایی را سرعت زاویه‌ای متوسط می‌گویند.

$$\left(\frac{rad}{s}\right) \quad \bar{\omega} = \frac{\Delta\theta \ (rad)}{\Delta t \ (s)}$$

ب) سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای:

سرعت زاویه‌ای در هر لحظه را سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای گویند.

لحظه : $\Delta t \to 0$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \text{یا} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

مثال: تابع مکان زاویه‌ای - زمان ذره‌ای که روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، به صورت $\theta = \frac{\pi}{40}t^2 + \frac{\pi}{6}$ می‌باشد. (t بر حسب ثانیه و θ بر حسب رادیان است)

الف) مکان زاویه‌ای این ذره را در لحظه‌های $t_1 = 0s$ و $t_2 = 10s$ بدست آورید.

ب) سرعت زاویه‌ای متوسط متحرک در بازه‌ی زمانی صفر تا 10 ثانیه چند رادیان بر ثانیه است؟

پ) سرعت زاویه‌ای ذره در لحظه‌ی $t' = 3s$ چند رادیان بر ثانیه است؟

پاسخ:

الف)

$$\theta = \frac{\pi}{40}t^2 + \frac{\pi}{6}$$

$$t=0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{40}(0)^2 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}(rad)$$

$$t=10 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{40}(10)^2 + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}(rad)$$

ب)

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{8\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}(rad)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{5\pi/2}{10-0} = \frac{\pi}{4}$$

پ)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\left(\frac{\pi}{40}t^2 + \frac{\pi}{6}\right)}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{20}t$$

$$\omega = \frac{\pi}{20}t \xrightarrow{t'=3s} \omega = \frac{\pi}{20}\times(3) = \frac{3\pi}{20}\left(\frac{rad}{s}\right)$$

*) با توجه به رابطه سرعت متوسط می‌توان گفت شیب نمودار $(\theta - t)$ در بازه‌ی زمانی Δt بیانگر سرعت زاویه‌ای متوسط است.

$$\text{شیب نمودار } (\theta - t) = tg\alpha = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

*) با توجه به رابطه سرعت زاویه‌ای می‌توان گفت، شیب نمودار $(\theta - t)$ در هر لحظه بیانگر سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای در آن نقطه است.

$$\text{شیب نمودار } (\theta - t) = tg\alpha = \frac{d\theta}{dt}$$

مثال: در یک حرکت بر مسیر دایره‌ای، اندازه‌ی سرعت متحرک در نقاط A و B به ترتیب $1.5\frac{m}{s}$ و $2\frac{m}{s}$ می‌باشد. (مطابق شکل) اگر متحرک مسیر A to B را در مدت 0.5s طی کند اندازه شتاب متوسط حرکت در این مدت چند متر بر مجذور ثانیه خواهد بود؟

ابتدا بردارهای سرعت را هم مبدأ می‌کنیم تا بتوانیم اندازه‌ی بردار تغییرات سرعت (ΔV) را حساب می‌کنیم.

$$\vec{\Delta V} = \vec{V_B} - \vec{V_A}$$

$$|\vec{\Delta V}| = \sqrt{V_A^2 + V_B^2 - 2V_A V_B \cos\theta}$$

$$|\vec{\Delta V}| = \sqrt{(1.5)^2 + (2)^2 - 2(1.5)(2)\cos 90^\circ} \Rightarrow |\vec{\Delta V}| = 2.5\ m/s$$

حال شتاب متوسط را بدست می‌آوریم:

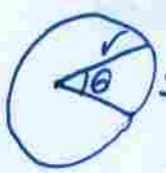
$$\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2.5}{0.5} \Rightarrow \boxed{\bar{a} = 5\frac{m}{s^2}}$$

ارتباط بین سرعت خطی لحظه‌ای و سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای:

اندازه‌ی جابجایی لحظه‌ای (dr)، برابر با مسافتی است که ذره روی محیط دایره طی می‌کند (یعنی کمان ds).

$$V = \frac{dr}{dt} \xrightarrow{dr = ds} V = \frac{ds}{dt}$$

همچنین زاویه θ برحسب رادیان برابر است با نسبت طول کمان روبروی زاویه‌ی θ به شعاع دایره.



$$\theta = \frac{s}{r}$$

پس:

$$s = r\theta \Rightarrow ds = r\,d\theta\ ,\quad V = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \boxed{V = r\omega}$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت :

هرگاه متحرکی با اندازه‌ی سرعت ثابت بر روی محیط یک دایره حرکت نماید، نوع حرکتش حرکت دایره‌ای یکنواخت است.

تابع (مکان زاویه‌ای - زمان) یا ($\theta - t$) حرکت دایره‌ای یکنواخت :

$$\left.\begin{matrix}\bar{\omega} = \omega \\ \bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0} \Rightarrow \boxed{\theta = \omega t + \theta_0}$$ ← اگر مبدا زمان را از زمان صفر بگیریم.

در نمودار ($\theta - t$) اگر شیب نمودار مثبت باشد ($\omega > 0$) یعنی متحرک پادساعتگردی چرخد و اگر شیب نمودار منفی باشد ($\omega < 0$) یعنی متحرک ساعتگردی چرخد.

دوره : بازه‌ی زمانی که طول می‌کشد تا متحرک روی محیط دایره یک دور کامل بزند را دوره می‌نامیم. یکای آن در SI، ثانیه است.

بسامد یا فرکانس : تعداد دورهای کاملی که متحرک در یکای زمان (یک ثانیه) بر روی محیط دایره می‌زند را بسامد یا فرکانس می‌نامیم. یکای آن در SI، هرتز (Hz) یا همان s^{-1} است.

رابطه‌ی بین بسامد، دوره، سرعت زاویه‌ای در حرکت دایره‌ای یکنواخت :

$$T = \frac{1}{f} \quad (\text{یا}) \quad f = \frac{1}{T}$$

رابطه‌ی ω و T :

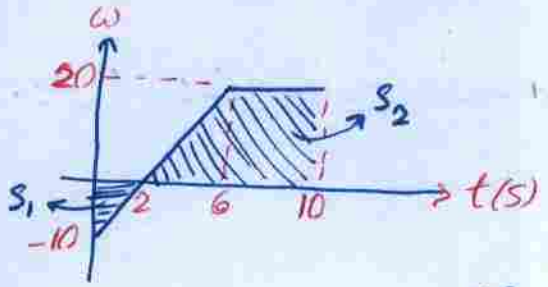
$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \ (\text{یا}) \ \boxed{\omega = 2\pi f}$$

مثال : اتومبیلی در یک میدان دایره‌ای شکل که شعاع آن 50 متر است با سرعت زاویه‌ای ثابت در هر 20s یک دور کامل می‌زند. سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی این اتومبیل را بدست آورید.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{20} \Rightarrow \omega = 0.1\pi \ (\text{rad/s})$$

$$V = r\omega \Rightarrow V = 50 \times 0.1\pi \Rightarrow V = 5\pi \ (\text{m/s})$$

مثال: (23) نمودار سرعت زاویه‌ای - زمان متحرکی حرکت دایره‌ای مطابق شکل است. سرعت زاویه‌ای متوسط در 10 ثانیه اول حرکت چند رادیان بر ثانیه است؟



مساحت زیر نمودار برابر تغییر مکان بوده و می‌توان نوشت:

$$\Delta\theta = S_2 - S_1$$

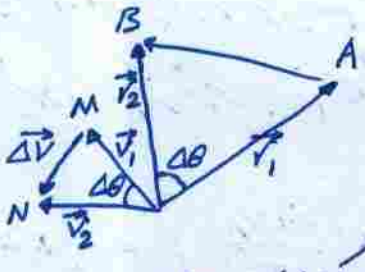
$$\Delta\theta = \left(\frac{8+4}{2}\times 20\right) - \left(\frac{10\times 2}{2}\right) = 110\ rad$$

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{110}{10} = 11\ \frac{rad}{s}$$

محاسبه شتاب در حرکت دایره‌ای یکنواخت:

می‌دانید که در حرکت دایره‌ای یکنواخت با آن که اندازه‌ی سرعت خطی ثابت است، اما بردار آن به دلیل تغییر جهت ثابت نمی‌ماند. طبق تعریف شتاب چون تغییرات سرعت وجود دارد، حرکت بر مسیر دایره (حتی یکنواخت‌حتی غیر یکنواخت) شتاب‌دار است.

اگر ذره‌ای در لحظه‌ی t_1 در مکان A در لحظه‌ی t_2 در مکان B باشد، بردارهای سرعت در این لحظات $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ خواهد بود. می‌دانیم شعاع دایره بر هر خط مماس بر دایره عمود است. پس در این جا بردارهای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ به ترتیب بر بردارهای $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ عمودند. با این اوصاف اگر دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ را هم مبدأ کنیم، زاویه‌ی بین آنها $\Delta\theta$ خواهد شد.



دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OMN}$ فقط در حرکت دایره‌ای یکنواخت متشابه‌اند:

$$\left.\begin{aligned} |\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = V \\ |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta r}{r} \Rightarrow \Delta V = \frac{V}{r}\Delta r$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \Rightarrow \bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \bar{a} = \frac{V}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$ شتاب متوسط

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{V}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{V}{r}\lim\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{V}{r}\frac{dr}{dt}$$ شتاب لحظه‌ای

(24)

$$a=\frac{V^2}{r}$$

$\frac{dr}{dt}$ را هم که از قبل می‌شناسیم:

به جای V رابطه‌ی مساویش یعنی $V=r\omega$

$$a=\frac{V^2}{r} \xrightarrow{V=r\omega} \boxed{a=r\omega^2}$$

(ب) $$a=\frac{V^2}{r}=\frac{V}{r}V \xrightarrow{\frac{V}{r}=\omega} \boxed{a=\omega V}$$

بردار شتاب در حرکت دایره‌ای یکنواخت همواره در راستای شعاع و به سوی مرکز دایره می‌باشد. به همین دلیل به این شتاب، شتاب مرکزگرا می‌گوییم.

دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت:

طبق قانون دوم نیوتن $F=ma$ می‌باشد.

با جایگذاری شتاب مرکزگرا داریم:

$$F=ma \begin{cases} F=mr\omega^2 \\ F=m\frac{V^2}{r} \\ F=m\omega V \end{cases}$$

نیروی مرکزگرا

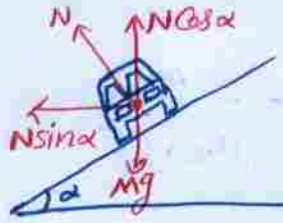
مثال: جسم‌های A و B به جرم‌های m_A و $m_B=2m_A$ بر روی یک صفحه‌ی گردان با بسامد 0.5Hz به طور یکنواخت در حال چرخش می‌باشند. اگر شعاع چرخش جسم A، r_A و شعاع چرخش جسم B، $r_B=\frac{r_A}{2}$ باشد، نسبت نیروی مرکزگرای جسم A به نیروی مرکزگرای جسم B چقدر است؟

$$\frac{F_A}{F_B}=\frac{m_A r_A \omega_A^2}{m_B r_B \omega_B^2}=\frac{m_A}{m_B}\times\frac{r_A}{r_B}\times\left(\frac{2\pi\nu_A}{2\pi\nu_B}\right)^2=\frac{1}{2}\times 2\times(1)^2 \Rightarrow \frac{F_A}{F_B}=1$$

مثال: در مثال قبل نسبت سرعت خطی جسم B به سرعت خطی جسم A کدام است؟

$$\frac{V_B}{V_A}=\frac{r_B\omega_B}{r_A\omega_A}=\frac{r_B}{r_A}\times\frac{2\pi\nu_B}{2\pi\nu_A}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

(25) رابطه بیشینه سرعت مجاز اتومبیل و زاویه شیب عرضی جاده با راستای افق :



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\alpha - Mg = 0 \Rightarrow N\cos\alpha = Mg$$

$$\sum F_x = Ma \Rightarrow N\sin\alpha = M\frac{V^2}{r}$$

از تقسیم دو رابطه بر یکدیگر:

$$\frac{N\sin\alpha}{N\cos\alpha} = \frac{M\frac{V^2}{r}}{Mg} \Rightarrow tg\alpha = \frac{V^2}{rg}$$

مثال : زاویه‌ی شیب عرضی جاده در یک پیچ 37° در نظر گرفته شده است. اگر شعاع گردش در این پیچ 30m باشد، بیشینه‌ی سرعت مجاز در این پیچ چند کیلومتر بر ساعت است؟

$$tg\alpha = \frac{V^2}{rg} \Rightarrow V = \sqrt{rg\,tg\alpha} \Rightarrow V = \sqrt{30\times10\times\frac{3}{4}} \Rightarrow V = 15\frac{m}{s}$$

سرعت برحسب کیلومتر بر ساعت خواسته شده است:

$$V = 15\frac{m}{s}\times 3.6 = 54\,km/h$$

رابطه بین سرعت خطی ماهواره و شعاع گردش ماهواره به دور زمین :

$$\left.\begin{aligned} g' &= G\frac{M_e}{(R_e+h)^2} \\ g &= G\frac{M_e}{R_e^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{R_e^2}{(R_e+h)^2} \Rightarrow g' = \frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}g$$

در رابطه بالا، g شتاب گرانش در سطح کره‌ی زمین، R_e شعاع کره‌ی زمین، M_e جرم کره‌ی زمین می‌باشد. گفتیم که در حرکت ماهواره به دور زمین شتاب مرکزگرا همان g' است، پس با توجه به رابطه‌ی شتاب مرکزگرا می‌توانیم بنویسیم:

$$a = \frac{V^2}{r} \Rightarrow g' = \frac{V^2}{(R_e+h)}$$

$$\left.\begin{aligned} g' &= \frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}g \\ g' &= \frac{V^2}{(R_e+h)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V^2}{(R_e+h)} = \frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}g \Rightarrow \boxed{V = R_e\sqrt{\frac{g}{R_e+h}}}$$

رابطه دیگری هم می‌توان بدست آورد:

$$\left.\begin{aligned} g' &= G\frac{M_e}{(R_e+h)^2} \\ g' &= \frac{V^2}{(R_e+h)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V^2}{(R_e+h)} = \frac{GM_e}{(R_e+h)} \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{\frac{GM_e}{R_e+h}}}$$

رابطه‌ی دوره چرخش و شعاع چرخش در حرکت دایره‌ای ماهواره:

$$\frac{V^2}{(R_e+h)} = \frac{GM_e}{(R_e+h)^2} \Rightarrow \frac{(R_e+h)^2\omega^2}{(R_e+h)} = \frac{GM_e}{(R_e+h)^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM_e}{(R_e+h)^3}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{R_e+h_2}{R_e+h_1}\right)^3$$

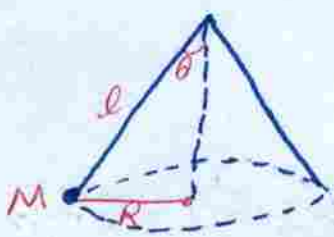
مثال: سرعت دو ماهواره که در ارتفاع h و $2h$ از سطح زمین به دور آن می‌چرخند به ترتیب V_1 و V_2 است. اگر $\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{0.8}$ باشد، h چه کسری از شعاع زمین است؟

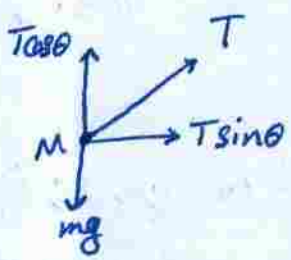
$$V = R_e\sqrt{\frac{g_0}{r}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \Rightarrow \sqrt{0.8} = \sqrt{\frac{R_e+h}{R_e+2h}} \Rightarrow 0.8 = \frac{R_e+h}{R_e+2h}$$

$$\Rightarrow 0.8R_e + 1.6h = R_e + h \Rightarrow \boxed{h = \frac{R_e}{3}}$$

رابطه‌ی آونگ مخروطی:

آونگ مخروطی جسم کوچکی به جرم M را نشان می‌دهد که به انتهای نخی به طول l بسته شده و با سرعت زاویه‌ای ثابت ω و خطی V حول یک دایره به شعاع R می‌چرخد. وقتی جسم دور می‌زند، نخ سطح یک مخروط را جارو می‌کند.





$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta - Mg = 0 \Rightarrow T\cos\theta = Mg$$

$$\sum F_n = Ma \Rightarrow T\sin\theta = M\frac{V^2}{r}$$

$$\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{M\frac{V^2}{r}}{Mg} \Longrightarrow \boxed{tg\theta = \frac{V^2}{Rg}}$$

از تقسیم دو رابطه:

$$tg\theta = \frac{(R\omega)^2}{Rg} \Rightarrow \boxed{tg\theta = \frac{R\omega^2}{g}}$$

با جایگذاری $V = R\omega$

$$tg\theta = \frac{a}{g} \longleftarrow a = R\omega^2$$

$$R = l\sin\theta$$

مثالهای حل شده ۸۰

① جسمی تحت تأثیر دو نیروی مساوی عمود برهم با شتاب ثابت $4\ m/s^2$ حرکت می‌کند. اگر یکی از نیروها حذف شود، اندازه‌ی شتاب چند متر بر مجذور ثانیه است؟

پاسخ: اگر بزرگی نیروهای برآینده را F فرض کنیم، بزرگی هریک از دو نیروی عمود برهم $F' = \frac{\sqrt{2}}{2}F$ خواهد شد. بنابراین با حذف یکی از نیروها، نیروی موثر $\frac{\sqrt{2}}{2}F$ شده و به همان دلیل شتاب جدید نیز $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ می‌شود.

$$F = 2F'\cos\frac{90}{2} \Rightarrow F' = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

$$a' = \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 4 = 2\sqrt{2}\ m/s^2$$

② اتوبیلی به جرم $1800\ kg$ که با سرعت $36\ km/h$ حرکت می‌کند در اثر نیروهای مقاوم پس از 20 ثانیه متوقف می‌شود. برآیند نیروهای وارد بر اتوبیل چند نیوتن است؟

$$V_{0x} = \frac{36}{3.6} = 10\ m/s$$

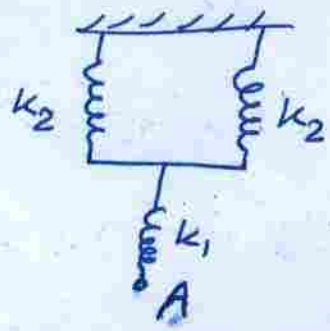
$$V_x = a_x t + V_{0x} \Rightarrow 0 = a_x \times 20 + 10 \Rightarrow a_x = -0.5\ m/s^2$$

③ اگر جرم و شعاع سیاره‌ای دو برابر جرم و شعاع زمین باشد، شتاب جاذبه روی آن سیاره چند برابر شتاب جاذبه روی زمین است؟

$$g_p = \frac{GM_p}{R_p^2} \Rightarrow g_p \propto \frac{M_p}{R_p^2}$$

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{M_2}{M_1} \times \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \frac{2M_1}{M_1} * \left(\frac{R_1}{2R_1}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

(28) (4) سه فنر مطابق شکل زیر به هم وصل کرده‌ایم. اگر به نقطه‌ی A نیروی F وارد کنیم تا آن را به اندازه‌ی ΔL پایین بیاوریم، نسبت $\frac{F}{\Delta L}$ چقدر است؟



ابتدا دو فنر موازی را به شکل موازی با هم جمع می‌کنیم.

$$k_t = k_2 + k_2 = 2k_2$$

سپس دوباره برآیند $2k_2$ و k_1 را به شکل متوالی حساب می‌کنیم.

$$\frac{1}{k_{کل}} = \frac{1}{2k_2} + \frac{1}{k_1} \Rightarrow k_{کل} = \frac{2k_1k_2}{2k_2 + k_1}$$

$$F = k_{کل}\Delta L \Rightarrow k_{کل} = \frac{F}{\Delta L} = \frac{2k_1k_2}{2k_2 + k_1}$$

(5) نیروسنج D مطابق شکل به دو وزنه که روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارند، متصل است و دو نیروی افقی به دو وزنه اعمال می‌شود. نیروسنج چند نیوتن را نشان می‌دهد؟

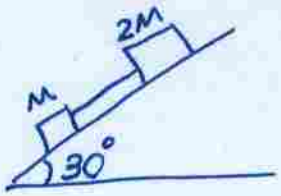
ابتدا شتاب کل دستگاه را محاسبه می‌کنیم:

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2} = \frac{25 - 10}{10 + 5} = 1 \ m/s^2$$

سپس با نوشتن قانون دوم نیوتن، T را برای یکی از اجسام بدست می‌آوریم:

$$F_1 - T = m_1 a \Rightarrow 25 - T = 1 \times 10 \Rightarrow T = 15N$$

(6) در شکل دو جسم به جرم‌های M و 2M به وسیله‌ی ریسمان سبکی به هم متصل و بر روی سطح شیبدار با سرعت ثابت به پایین می‌لغزند. ضریب اصطکاک جرم 2M با سطح μ و نیروی اصطکاک بین جرم M با سطح ناچیز است. μ چقدر است؟



سرعت حرکت ثابت است در نتیجه $a=0$ ، $\Sigma F=0$

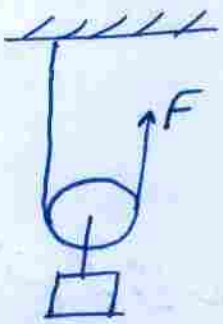
$$Mg\sin30^\circ + 2Mg\sin30^\circ - f_k = 0 \Rightarrow f_k = 3Mg\sin30^\circ = \frac{3}{2}Mg$$

از طرف دیگر:

$$f_k = \mu_k \times 2Mg\cos30^\circ$$

$$\Rightarrow 2Mg\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_k = \frac{3}{2}Mg \Rightarrow \mu_k = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(7) برای نگه‌داری وزنه‌ی 40 نیوتنی شکل مقابل، نیروی F لازم چند نیوتن است؟ (جرم قرقره 600 گرم و $g=10(\frac{m}{s^2})$ است.)



نیروی کشش نخ (T) برابر نیرویی است که با آن نخ را کشیده‌ایم. $F=T$

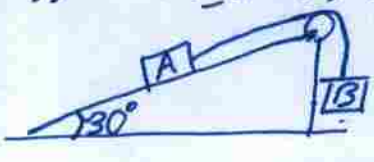
وزنه‌ی 40 نیوتنی می‌خواهد قرقره را پایین بکشد. 6 نیوتن قرقره هم به آن کمک می‌کند. در حالی که نخ با نیروی 2T قرقره را نگه می‌دارد.

وزن قرقره: $mg = 0.6\times10 = 6N$

بنابراین:

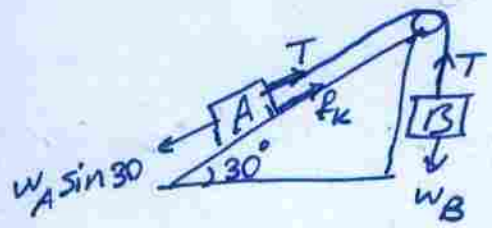
$$2T = 46N \Rightarrow T = 23N \Rightarrow F = 23N$$

(8) در شکل مقابل وزنه B با سرعت ثابت بالا می‌رود. اگر وزنه A برابر 18 نیوتن و ضریب اصطکاک آن با سطح $\frac{\sqrt{3}}{6}$ و جرم نخ و قرقره ناچیز باشد، وزنه B برابر چند نیوتن است.



(30) سرعت حرکت وزنه‌ی B (و در نتیجه وزنه‌ی A) ثابت است. پس شتاب حرکت، صفر است در نتیجه برآیند نیروهای وارد بر وزنه‌ها صفر است.

جسم B بالا رفته پس جسم A پایین می‌آید و f_k به سمت بالا خواهد بود.



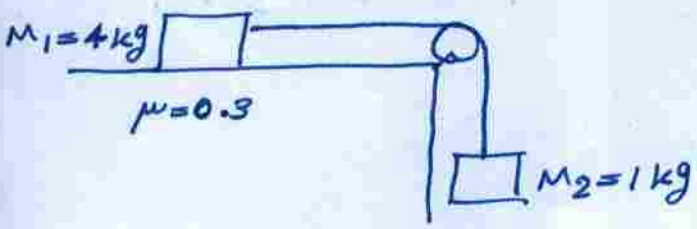
$$\begin{cases} W_B - T = 0 \\ W_A \sin 30^\circ - f_k - T = 0 \end{cases}$$

$$f_k = W_A \cos 30\, \mu_k = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 4.5N$$

$$18 \times \frac{1}{2} - 4.5 - T = 0 \Rightarrow T = 4.5$$

$$\Rightarrow \boxed{W = 4.5}$$

(9) با توجه به شکل مقابل نیروی اصطکاک وارد بر وزنه‌ی M_1 و کشش نخ را حساب کنید.



ابتدا باید بررسی کنیم که آیا دستگاه به حرکت درمی‌آید یا خیر؟

نیروی که دستگاه را باید به حرکت درآورد $M_2 g$ است.

$$M_2 g = 10N$$

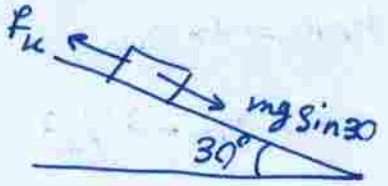
$$f_{s\,max} = \mu_s N = \mu_s M_1 g = 4 \times 10 \times 0.3 = 12$$

در نتیجه دستگاه اصلاً به حرکت درنمی‌آید.

$$\begin{cases} M_2 g - T = M_2 a = 0 \\ T - f_s = M_1 a = 0 \end{cases}$$

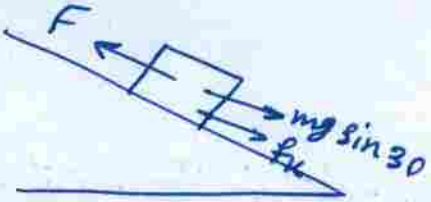
$$\Rightarrow T = f_s = M_2 g = 10N$$

(10) جسمی به وزن 40 نیوتن روی سطح شیبداری که با افق زاویه‌ی 30° می‌سازد، تحت اثر نیروی وزنش با شتاب $g/4$ پایین می‌آید. اگر بخواهیم جسم با همین شتاب روی سطح بالا برود، چند نیوتن نیرو باید موازی سطح به سمت بالا بر آن وارد کنیم؟



$$mg\sin 30 - f_k = ma$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{2} - f_k = mg/4 \Rightarrow f_k = \frac{mg}{4}$$

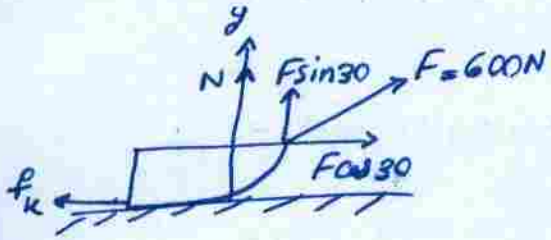


$$F - mg\sin 30 - f_k = ma$$

$$\Rightarrow F - mg/2 - mg/4 = mg/4$$

$$\Rightarrow F = mg/4 + mg/4 + mg/2 = mg = 40\,N$$

(11) سورتمه‌ای به وزن 1200N روی سطح افقی به وسیله طنابی با نیروی کشش 600N با سرعت ثابت کشیده می‌شود. اگر جهت نیروی طناب با راستای افق زاویه‌ی 30° بسازد ضریب اصطکاک جنبشی سورتمه چقدر است؟

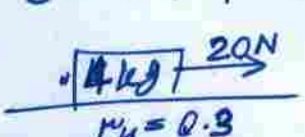


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin 30$$

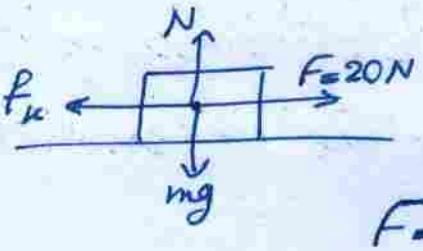
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_x = f_k \Rightarrow F\cos 30 = \mu_k N$$

$$\Rightarrow 600 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \mu_k (1200 - 600 \times \frac{1}{2}) \Rightarrow \mu_k = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(12) در شکل مقابل جسم از حال سکون در مسیر افقی و در لحظه‌ی $t=0$ تحت نیروی ثابت به حرکت درمی‌آید و بعد از 3 ثانیه نخ بسته شده به جسم پاره می‌شود. کل مسافتی که جسم از شروع حرکت تا لحظه ایستادن طی می‌کند، چند متر است؟ $(g=10)$



(32) با توجه به شکل روبرو شتاب حرکت جسم را بدست می آوریم:



$$F = ma \Rightarrow F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k N = ma_{1x}$$

$$F - \mu_k mg = ma_{1x} \Rightarrow 20 - 0.3 \times 4 \times 10 = 4 \times a_{1x}$$

$$\Rightarrow a_{1x} = 2\ m/s^2$$

سرعت جسم در لحظه ی $t=3$ برابر است با:

$$V_{1x} = a_{1x}t + V_{0x} \Rightarrow V_{1x} = 2 \times 3 + 0 = 6\ \frac{m}{s}$$

جابجایی جسم بعد از 3s برابر است با:

$$\Delta x_1 = \frac{V_{0x} + V_{1x}}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{0+6}{2} \times 3 = 9\ m$$

اگر در این لحظه ($t=3s$) نیروی F قطع شود، جسم در اثر نیروی اصطکاک جنبشی بعد از مدتی متوقف می شود که می توان نوشت:

$$F = ma \Rightarrow 0 - f_k = ma_{2x} \Rightarrow -\mu_k mg = ma_{2x} \Rightarrow a_{2x} = -0.3 \times 10 = -3\ m/s^2$$

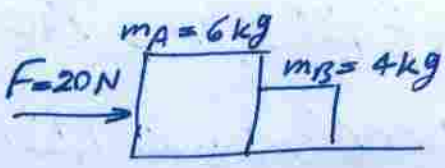
بنابراین جابجایی جسم از لحظه $t=3s$ تا توقف کامل برابر است با:

$$V_{2x}^2 - V_{1x}^2 = 2a_{2x}\Delta x_2 \Rightarrow 0 - (6)^2 = 2(-3) \times \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = 6m$$

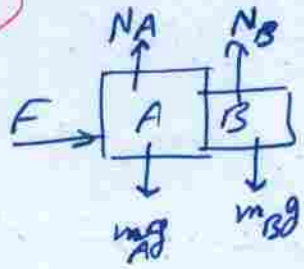
در نتیجه کل جابجایی جسم از شروع حرکت تا توقف کامل برابر است با:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 9 + 6 = \boxed{15}$$

(13) با توجه به شکل، نیروی 20 نیوتنی بر یک طرف A وارد می شود. اگر ضریب اصطکاک هر دو جسم با سطح 0.2 باشد، B چند نیوتن نیرو به A وارد می کند؟



(33) چون شتاب دو جسم یکسان است، مجموعه‌ی دو جسم را یک دستگاه می‌گیریم:



$$\sum F_y = 0 \begin{cases} N_A = m_A g \Rightarrow f_{kA} = \mu_k m_A g \\ N_B = m_B g \Rightarrow f_{kB} = \mu_k m_B g \end{cases}$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow F - (f_{kA} + f_{kB}) = (m_A + m_B)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{F - \mu_k g(m_A + m_B)}{m_A + m_B} = \frac{20 - 0.2 \times 10(6+4)}{6+4} = 0$$

اکنون می‌توانیم جسم A یا جسم B را به عنوان دستگاه در نظر گرفته و نیروی بین دو جسم را محاسبه کنیم.

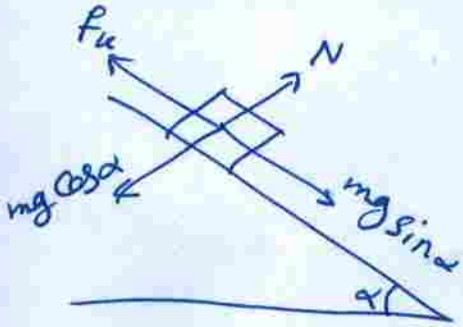
$$\sum F_x = m_A a_x \Rightarrow F - f_{kA} - F_{BA} = m_A \times 0 = 0$$

$$F_{BA} = F - f_{kA} = 20 - 0.2 \times 6 \times 10 = 8N$$

و یا اینکه:

$$\sum F_x = m_B a_x \Rightarrow F_{AB} - f_{kB} = m_B \times 0 \Rightarrow F_{AB} = f_{kB} = 0.2 \times 4 \times 10 = 8N$$

(14) مکعبی به جرم 0.5 kg روی سطح شیبداری که با افق زاویه α می‌سازد، به پایین می‌لغزد. شتاب حرکت جسم چند $\frac{m}{s^2}$ است. در صورتی که $\sin\alpha = 0.6$ و نیروی اصطکاک نصف نیروی عمودی وارد بر سطح از طرف جسم و $g = 10$ باشد؟



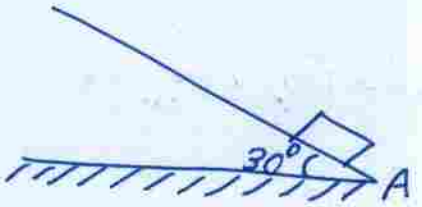
چون جسم در راستای y حرکتی ندارد پس:

$$\sum F_y = ma_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$$

$$f_k = \mu_k N \Rightarrow \frac{N}{2} = \mu_k N \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{2}$$

$$a = g(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha) = 10(0.6 - \frac{1}{2} \times 0.8) = 2 \frac{m}{s^2}$$

(15) در شکل مقابل، جسم از نقطه A ساکن بر سطح شیبدار رو به بالا پرتاب می‌کنیم. جسم به نقطه‌ای رسیده و برمی‌گردد. اگر اندازه‌ی شتاب در سوی رفت 2 برابر اندازه‌ی شتاب در برگشت باشد، ضریب اصطکاک جنبشی سطح چقدر است؟



بزرگی شتاب به هنگام بالا رفتن جسم : $|a_1| = g(\sin\alpha + \mu_k \cos\alpha)$

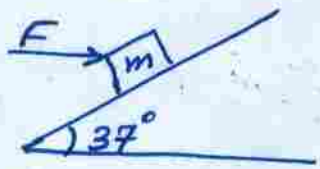
" " " پایین آمدن " : $|a_2| = g(\sin\alpha - \mu_k \cos\alpha)$

$$a_1 = 2a_2 \Rightarrow \sin\alpha + \mu_k \cos\alpha = 2\sin\alpha - 2\mu_k \cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = 3\mu_k \cos\alpha$$

$$\Rightarrow tg\alpha = 3\mu_k \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{3} tg\alpha \Rightarrow \mu_k = \frac{1}{3} tg30 = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

(16) در شکل مقابل، در لحظه‌ای که نیروی افقی 100 نیوتنی به جسم اثر می‌کند و جهت حرکت جسم به سمت بالاست، اندازه‌ی شتاب چند متر بر مجذور ثانیه و جهت شتاب به کدام سمت است؟

$(g = 10\frac{m}{s^2}, \mu_k = 0.2, \sin37^\circ = 0.6, m = 10kg)$



با تجزیه‌ی نیروی F در راستای عمود به هم طرح.

$$\sum F_y = ma, \quad N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha$$

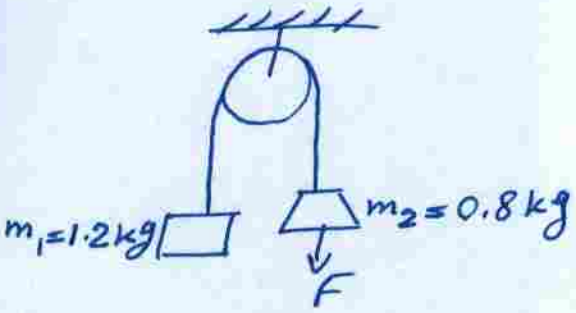
$$F\cos\alpha - (mg\sin\alpha + f_k) = ma_x$$

$$F\cos\alpha - [mg\sin\alpha + \mu_k(mg\cos\alpha + F\sin\alpha)] = ma_x$$

$$100 \times 0.8 - [10 \times 10 \times 0.6 + 0.2(10 \times 10 \times 0.8 + 100 \times 0.6)] = 10 \times a_x$$

$$\Rightarrow a_x = -0.8\frac{m}{s^2}$$

(17) در شکل مقابل جرم نخ و قرقره و اصطکاک ناچیز است. نیروی F چند نیوتن باشد تا اندازه‌ی شتاب حرکت هر یک از وزنه‌ها $\frac{m}{s^2}$ ۱ شود؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$



با توجه به جهت حرکت مجموعه، 2 مقدار برای F به دست می‌آید:

حالت اول: اگر وزنه‌ی 1.2kg به سمت پایین حرکت کند:

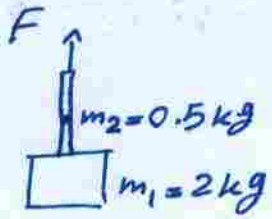
$$m_1g-m_2g-F=(m_1+m_2)a \Rightarrow 1.2\times10-0.8\times10-F=(1.2+0.8)\times1 \Rightarrow \boxed{F=2N}$$

حالت دوم: اگر وزنه‌ی 0.8kg به سمت پایین حرکت کند:

$$F+m_2g-m_1g=(m_1+m_2)a \Rightarrow F+0.8\times10-1.2\times10=(1.2+0.8)\times1$$

$$\Rightarrow \boxed{F=6N}$$

(18) جسمی به جرم 2kg به طناب سبکی به جرم 0.5kg متصل است و با نیروی ثابت F برابر 30 نیوتن با شتاب ثابت بالا می‌رود. نیروی کشش در وسط طناب چند نیوتن است؟



ابتدا شتاب را به دست می‌آوریم و سپس کشش نخ را به دست می‌آوریم:

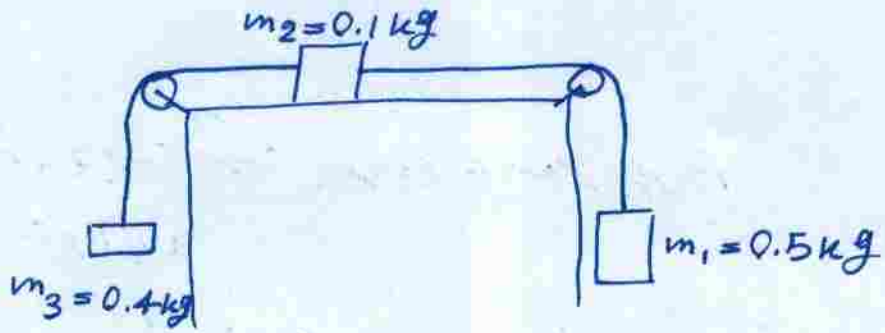
$$F-(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a$$

$$30-2.5\times10=2.5a \Rightarrow a=2\ m/s^2$$

$$T-(m_1+m'_2)g=(m_1+m'_2)a$$

$$T-2.25\times10=2.25\times2 \Rightarrow T=22.5+4.5=27N$$

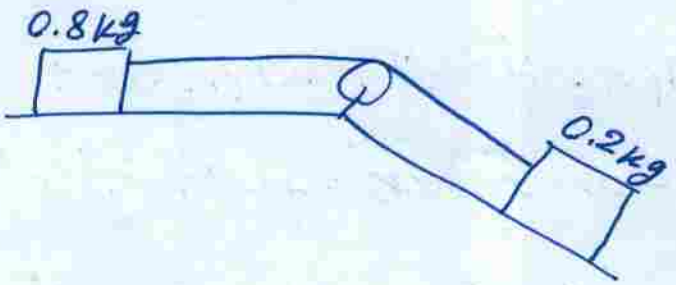
(36) (19) در شکل مقابل جرم نخ و قرقره ناچیز و ضریب اصطکاک بین وزنه m_2 و سطح افقی 0.2 است. شتاب حرکت وزنه‌ها چند m/s^2 است؟ ($g=10$)



$$f_k=\mu_k m_2 g = 0.2\times 0.1\times 10 = 0.2N$$

$$\sum F=ma \Rightarrow a=\frac{m_1 g - f_k - m_3 g}{m_1+m_2+m_3}=\frac{5-0.2-4}{0.4+0.1+0.5}=0.8\ m/s^2$$

(20) در شکل مقابل اگر ضریب اصطکاک بین وزنه‌ها و سطح تماس 0.1 و $\sin\alpha=0.6$ و جرم نخ و قرقره ناچیز باشد و دستگاه از حال سکون به حرکت درآید، سرعت وزنه‌ها پس از 2 ثانیه به چند m/s می‌رسد؟ ($g=10\ N/kg$)



ابتدا بزرگی شتاب را به دست می‌آوریم:

$$\sum F=ma \Rightarrow a=\frac{m_2 g\sin\alpha-(f_{1k}+f_{2k})}{m_1+m_2}$$

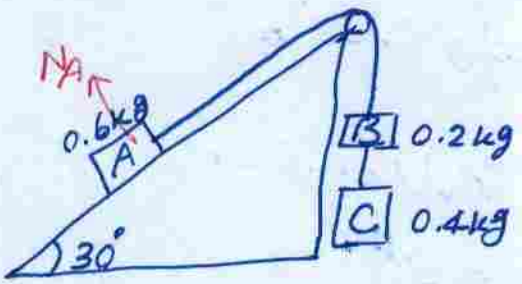
$$\Rightarrow a=\frac{m_2 g\sin\alpha-(\mu_k m_1 g+\mu_k m_2 g\cos\alpha)}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{0.2\times10\times0.6-(0.1\times0.8\times10+0.1\times0.2\times10\times0.8)}{0.8+0.2}=\frac{1.2-0.96}{1}=0.24\ m/s^2$$

بزرگی سرعت وزنه‌ها بعد از 2 ثانیه:

$$V=at+V_0 \Rightarrow V=0.24\times2=0.48\ (m/s)$$

(21) در شکل مقابل جرم نخ و قرقره ناچیز و ضریب اصطکاک بین وزنه A و سطح شیب دار $\frac{\sqrt{3}}{5}$ است. نیروی کشش نخ بین وزنه‌های B و C چند نیوتن است؟



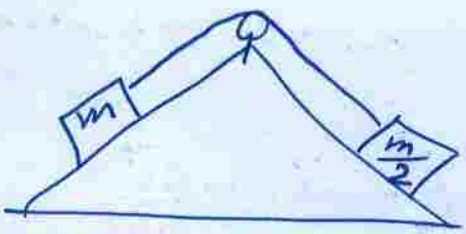
$$N_A = m_A g \cos 30 = 0.6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f_k = \mu_k N = \frac{\sqrt{3}}{5} \times 3\sqrt{3} = \frac{9}{5} = 1.8N$$

$$a = \frac{(m_B + m_C)g - m_A g \sin 30^\circ - f_k}{m_A + m_B + m_C} = \frac{(0.2+0.4)\times 10 - 0.6\times 10 \times \frac{1}{2} - 1.8}{0.6+0.2+0.4} = 1 \frac{m}{s^2}$$

$$m_C g - T = m_C a \Rightarrow T = m_C(g-a) = 0.4(10-1) = 3.6\,N$$

(22) در شکل مقابل اصطکاک بین وزنه‌ی m و سطح ناچیز و ضریب اصطکاک بین وزنه‌ی $\frac{m}{2}$ و سطح $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ است. شتاب حرکت وزنه‌ها چند $\frac{m}{s^2}$ است؟ $(g = 10 \frac{N}{kg})$

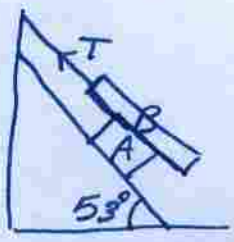


$$N_2 = \frac{m}{2} g \cos 30^\circ$$

$$f_k = \mu_k N = \mu_k \frac{m}{2} g \cos 30^\circ = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{mg}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f_k = \frac{mg}{8}$$

$$a = \frac{mg \sin 30^\circ - \frac{mg}{2} \sin 30^\circ - f_k}{m + \frac{m}{2}} = \frac{\frac{mg}{2} - \frac{mg}{4} - \frac{mg}{8}}{\frac{3m}{2}} = \frac{2g}{24} = \frac{5}{6} \frac{m}{s^2}$$

(23) در شکل مقابل جسم A روی سطح شیبدار با سرعت ثابت v پایین می‌لغزد. اگر جرم جسم A، 2 برابر جرم جسم B باشد و ضریب اصطکاک جنبشی در کلیه سطوح برابر باشد، نیروی کشش نخ T چند برابر وزن جسم A است؟ $(\sin 53^\circ = 0.8)$



(38) با توجه به اینکه جسم A با سرعت ثابت به پایین می لغزد:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow m_A g \sin\alpha - f_{kB} - f_{kA,B} = 0$$

$$mg\sin 53^\circ - \mu_k m_B g \cos 53^\circ - \mu_k (m_A + m_B) g \cos 53^\circ = 0$$

$$0.8 m_A g - \mu_k \left(\frac{1}{2} m_A g\right) \times 0.6 - \mu_k \left(m_A + \frac{1}{2} m_A\right) g \times 0.6 = 0$$

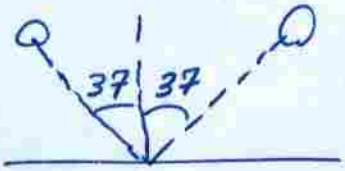
$$0.8 - 0.3\mu_k - 0.9\mu_k = 0 \Rightarrow \mu_k = \frac{0.8}{1.2} = \frac{2}{3}$$

و با توجه به اینکه جسم B حرکت نمی کند، داریم:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T - m_B g \sin\alpha - \mu_k m_B g \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_A g \times 0.8 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} m_A g \times 0.6 = 0.4 m_A g + 0.2 m_A g = 0.6 m_A g$$

(24) توپی به جرم $5kg$ با سرعت $10\ m/s$ تحت زاویه 37° نسبت به خط قائم، با سطح افقی برخورد می کند این توپ با سرعت $8\ m/s$ تحت زاویه 37° نسبت به خط قائم برمی گردد. اگر زمان برخورد 0.01 ثانیه باشد، متوسط نیروی وارد بر توپ در مدت برخورد چند نیوتن است؟



$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{m\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1) \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{V} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos\alpha} = \sqrt{10^2 + 8^2 - 2\times 10 \times 8 \times \cos\alpha}$$

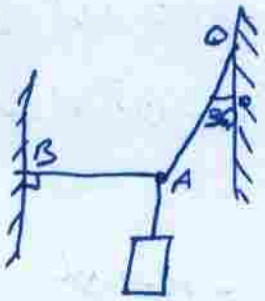
از طرفی می دانیم:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos(2\times 53) = 2\cos^2 53 - 1 = -\frac{7}{25}$$

$$\Delta \vec{V} = \sqrt{164 + 160 \times \frac{7}{25}} = \sqrt{\frac{36\times 145}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{145}\ \frac{m}{s}$$

$$|\vec{F}| = \frac{m|\Delta \vec{V}|}{\Delta t} = \frac{5 \times \frac{6}{5}\sqrt{145}}{0.01} = 600\sqrt{145}\ N$$

(25) در شکل روبرو اگر نخ AB قطع شود، کشش نخ OA پس از رسیدن مجموعه به تعادل چند برابر حالت اول می‌شود؟



اگر در حالت اول کشش نخ را T_1 فرض کنیم، خواهیم داشت:

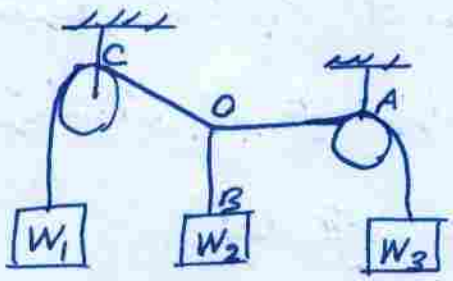
$$T_1 \cos 30^\circ = mg \Rightarrow T_1 = \frac{mg}{\cos 30^\circ} = \frac{mg}{\sqrt{3}/2} = \frac{2mg}{\sqrt{3}}$$

حال اگر نخ افقی پاره شود، نخ OA تا لحظه می‌ماند و کشش در این حالت T_2 می‌شود:

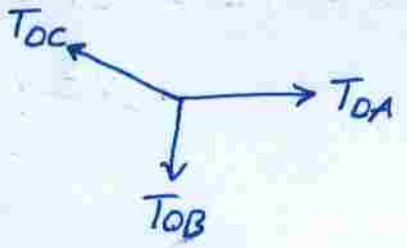
$$T_2 = mg$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{mg}{2mg/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(26) در شکل مقابل، دستگاه در حال تعادل و نخ OA افقی است، اگر $W_1 = 15N$ و $W_3 = 12N$ باشد، W_2 چند نیوتن است؟



نیروی کشش نخ OA برابر W_3، نخ OB برابر W_2 و نخ OC برابر W_1 است. با توجه به برقراری تعادل برآیند نیروهای وارد در نقطه O داریم.



$$T_{OA} + T_{OB} + T_{OC} = 0$$

$$T_{OA} + T_{OB} = -T_{OC}$$

$$|T_{OC}| = |T_{OA} + T_{OB}|$$

بنابراین کشش نخ OC برابر است با برآیند نیروی کشش نخ OA و OB:

$$|T_{OC}| = |T_{OA} + T_{OB}| \Rightarrow W_1 = \sqrt{W_2^2 + W_3^2} \Rightarrow 15 = \sqrt{W_2^2 + (12)^2} \Rightarrow (15)^2 = W_2^2 + (12)^2$$

$$W_2^2 = (15)^2 - (12)^2 \Rightarrow W_2 = 9N$$

(27) مکان زاویه‌ای ذره‌ای که روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند در SI، با رابطه $\theta = 2t^2 + 6t$ بیان شده است. سرعت زاویه‌ای متوسط ذره بین لحظه‌های $t_1 = 1s$ و $t_2 = 3s$ چند برابر سرعت زاویه‌ای آن در لحظه‌ی $t = 2s$ است؟

$t_1 = 1s \Rightarrow \theta_1 = 2\times(1)^2 + 6\times 1 = 8$

$t_2 = 3s \Rightarrow \theta_2 = 2(3)^2 + 6\times 3 = 36$ $\Rightarrow \bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{36-8}{3-1} = 14 \frac{rad}{s}$

$\theta = 2t^2 + 6t \Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} = 4t + 6 \xrightarrow{t=2} \omega = 4\times 2 + 6 = 14 \frac{rad}{s}$

$\Rightarrow \bar{\omega} = \omega \Rightarrow \frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1$

(28) دو قرص به فاصله‌ی نیم متری روی محوری نصب شده و با سرعت 80 دور در دقیقه می‌چرخند. گلوله‌ای از تفنگ در ابتدا موازی با محور به طرف قرص‌ها شلیک می‌شود و دو قرص را سوراخ می‌کند. اگر زاویه‌ی بین قطرهای دو سوراخ 30 درجه باشد، سرعت گلوله چند متر بر ثانیه است؟

متحرک در 60 ثانیه، 80 دور چرخیده و در نتیجه در مدت 1s، $\frac{80}{60}$ یا $\frac{4}{3}$ دور می‌چرخد و فرکانس آن برابر $\frac{4}{3}$ هرتز است.

60s 80 دور

1s $f = \frac{4}{3} Hz$ $\Rightarrow \omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3} \frac{rad}{s}$

زاویه‌ی بین دو سوراخ 30 درجه بوده و در نتیجه مدت زمان لازم برای سوراخ شدن دو قرص عبارت است از:

$\frac{R}{2\pi} = \frac{\theta}{360} \Rightarrow \frac{R}{2\pi} = \frac{30}{360} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6} Rad$

$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{3} \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{16}(s)$

با توجه به این که گلوله با سرعت ثابت V، در طی مدت زمان $\Delta t = \frac{1}{16}s$، فاصله‌ی $\Delta x = 0.5m$ را طی کرده است، سرعت آن عبارت است از:

$\Delta x = V \cdot \Delta t \Rightarrow 0.5 = V \times \frac{1}{16} \Rightarrow V = 8 \frac{m}{s}$

(29) طول عقربه ثانیه شمار یک ساعت 1 cm است. بزرگی شتاب متوسط نوک این عقربه در مدت 90 ثانیه چند سانتی متر بر مجذور ثانیه است؟ (سرعت زاویه ای عقربه ثابت و $\pi=3$ فرض شود)

پاسخ: دور عقربه ی ثانیه شمار برابر 60 ثانیه است و سرعت خطی نوک آن برابر است با:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}\left(\frac{rad}{s}\right)$$

$$V = V\omega = 1 \times \frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{30}\left(\frac{cm}{s}\right)$$

از طرفی تغییر مکان و تغییر سرعت در مدت 90 ثانیه برابر است با:

$$\Delta\theta = \omega \Delta t = \frac{\pi}{30} \times 90 = 3\pi (rad)$$

$$\Delta V = 2V \sin\frac{\Delta\theta}{2} = 2 \times \frac{\pi}{3} \times \sin\frac{3\pi}{2} \Rightarrow |\Delta V| = \frac{\pi}{15}\left(\frac{cm}{s}\right)$$

و اندازه ی شتاب متوسط برابر است با:

$$|\bar{a}| = \frac{|\Delta V|}{\Delta t} = \frac{\pi/15}{90} = \frac{\pi}{15\times 90}\left(\frac{cm}{s^2}\right) \simeq \frac{3}{15\times 90}\left(\frac{cm}{s^2}\right) = \frac{1}{450}\left(\frac{cm}{s^2}\right)$$

(30) به انتهای یک فنر، گلوله ای را بسته و در یک صفحه ی افقی به طور یکنواخت می گردانیم. هرگاه دوره ی حرکت گلوله را نصف کنیم افزایش طول فنر هشت برابر می شود. در این صورت شعاع دوران چند برابر خواهد شد؟

نیروی مرکز گرا برابر با نیروی فنر است و داریم:

$$k\Delta L = mR\omega^2 = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

با توجه به یکسان بودن k و m در دو حالت می توان نوشت:

$$\frac{\Delta L_2}{\Delta L_1} = \frac{R_2}{R_1} \times \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \Rightarrow \Delta L_2 = 8\Delta L_1 \,,\; T_2 = \frac{1}{2}T_1 \,,\; \frac{R_2}{R_1} = ?$$

$$\frac{8\Delta L_1}{\Delta L_1} = \frac{R_2}{R_1} \times \left(\frac{T_1}{\frac{1}{2}T_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = 2$$

(31) در یک آونگ مخروطی زاویه‌ای که نخ با راستای قائم می‌سازد 60 درجه است. طول نخ نیز 80 cm است. اگر $g=10$ باشد پریود (دوره) این آونگ چند ثانیه است؟

$$\cos\theta=\frac{g}{L\omega^2} \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{0.8\times\frac{1}{2}}{10}}=0.4\pi(s)$$

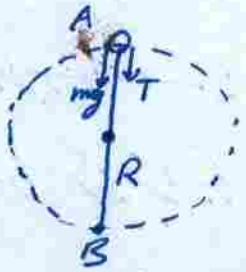
(32) ماهواره‌ای در ارتفاع 1600 کیلومتری بالای زمین، در مدار دایره‌ای شکل می‌چرخد. بزرگی سرعت آن چند کیلومتر بر ثانیه است؟ (شعاع زمین 6400km، $g=10\frac{m}{s^2}$ است)

$$V=R_e\sqrt{\frac{g_0}{r}} \Rightarrow V=R_e\sqrt{\frac{g_0}{R_e+h}}$$

با توجه به درس داریم:

$$V=6400\times10^3\sqrt{\frac{10}{6400000+1600000}}=64\times10^3\sqrt{\frac{1}{80}}\left(\frac{m}{s}\right)$$

(33) گلوله‌ای به جرم 500 گرم به نخی بسته شده و در یک مسیر دایره‌ای در صفحه‌ی قائم آزادانه می‌چرخد. اگر در لحظه‌ای که گلوله از بالاترین نقطه‌ی مسیر می‌گذرد نیروی کشش نخ 50 نیوتن باشد، نیروی کشش نخ در لحظه‌ای عبور گلوله از پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر چند نیوتن است؟ (جرم نخ و مقاومت هوا ناچیز و $g=10\left(\frac{m}{s^2}\right)$ است.)



$$T_A+mg=\frac{mV_A^2}{R} \Rightarrow 50+0.5\times10=\frac{V_A^2\times0.5}{R} \Rightarrow V_A^2=110R$$

$$E_B=E_A \Rightarrow \frac{1}{2}mV_B^2=\frac{1}{2}mV_A^2+mgh_A \quad , \quad h_A=2R$$

$$\Rightarrow V_B^2=V_A^2+2gh=V_A^2+4Rg=110R+40R=150R$$

در پایین‌ترین نقطه (B) داریم:

$$T_B-mg=\frac{mV_B^2}{R} \Rightarrow T_B-5=\frac{0.5(150R)}{R} \Rightarrow T_B-5=75$$

$$\Rightarrow T_B=80\ N.$$