رابطهٔ بازگشتی:

یک رابطه بازگشتی برای دنباله $\{a_n\}$ یک معادله است که هر جمله a_k را برحسب تعداد متناهی از جمله‌های قبلی بیان می‌کند یعنی a_k را برحسب جمله‌های $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_{k-i}$ که i ثابت است بیان می‌کند شرایط اولیه برای هر رابطه بازگشتی مقادیر $a_1, a_2, \dots, a_n$ که معلوم هستند داده می‌شود.

تعیین همگرائی و واگرائی دنباله‌های بازگشتی:

اگر بدانیم (در مساله فرض شده باشد یا خودمان ثابت کنیم) دنباله بازگشتی همگراست برای تعیین نقطه همگرایی آن (مقدار حد و دنباله) از نکته ساده و مهم زیر استفاده می‌کنیم:

حد دنباله همگرا، $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+k}$ و به طور خاص $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$

☺**مثال۱۱۹:حد دنباله بازگشتی زیر را بدست آورید.**

$$1)\ a_{n+1} = \frac{3(a_n + 2)}{5}, a_1 = 1 \qquad 2)\ a_{n+1} = \frac{a_n}{3 + a_n}\ ,\ a_1 = 2$$

برای بررسی همگرایی یک دنباله وقتی که رابطه ی بازگشتی آن داده شده باشد، به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱ : فرض می کنیم که دنباله به عدد L همگرا است. سپس با جایگزین کردن $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L$ ، یک معادله ، تشکیل می دهیم.

۲ : با تشکیل این معادله ۳ حالت زیر رخ می دهد.

الف : اگر در معادله به یک تناقض رسیده ایم، نتیجه اینکه دنباله واگرا است.

ب : اگر در معادله به یک رابطه ی بدیهی برسیم، نتیجه اینکه دنباله همگرا است،اما مقدار همگرایی آن مشخص نیست.

ج : اگر در معادله مقدار مشخصی برای L به دست آید، به شرط قابل قبول بودن آن، نتیجه می شود، L مقدار همگرایی دنباله است.

تمرین : دنباله ی $\{a_n\}$ به صورت $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ و $a_1 = 1$ تعریف شده است.

الف : ثابت کنید این دنباله همگرا است. ب : حد این دنباله را به دست آورید.

نکته: دنباله نمایی:

$$\lim_{n\to\infty} (۱+\frac{۱}{n})^n = e$$

به طوری کلی می توان نوشت. $\lim_{n\to\infty} (۱+\frac{a}{n})^{bn} = e^{ab}$

دنباله ی $a_n = (۱+\frac{۱}{n})^n$ صعودی و از بالاکراندار است، لذا همگرا می باشد.

قضیه ی فشار در دنباله ها : فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ سه دنباله و $a_n \le c_n \le b_n$ باشد. اگر دنباله های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به L همگرا باشند.آنگاه $\{c_n\}$ نیز به L همگرا است.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

اعمال اصلی روی دنباله ها

مجموع هر دو دنباله ی همگرا، همگرا است.

تفاضل هر دو دنباله ی همگرا، همگرا است.

حاصل ضرب هر دو دنباله ی همگرا، همگرا است.

$$\mathbf{k} \in \mathbb{N} \qquad ۱^k + ۲^k + ۳^k + \cdots + n^k \sim \frac{n^{k+۱}}{k+۱}$$

۱) اگر $|c| < ۱$، آن‌گاه با بزرگ شدن n، $|c|^n$ کوچک و کوچک‌تر شده و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} c^n = ۰$. در این حالت دنباله‌ی $\{c^n\}$ همگرا به صفر است.

۲) اگر $|c| > ۱$، آن‌گاه با بزرگ شدن n، $|c|^n$ نیز بزرگ و بزرگ‌تر شده و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} c^n = \infty$. در این حالت دنباله‌ی $\{c^n\}$ واگراست.

۳) اگر $c = ۱$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{c^n\}$ تبدیل به یک دنباله‌ی ثابت می‌شود و همگرا به ۱ است.

۴) اگر $c = -۱$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{c^n\}$ تبدیل به یک دنباله‌ی واگرای نوسانی می‌شود.

جمع‌بندی: دنباله‌ی $\{c^n\}$ همگراست، اگر و فقط اگر $-۱ < c \le ۱$.

نکته:

در تست‌ها و مسائل مربوط به دنباله‌های بازگشتی، معمولاً ضابطه‌ی دنباله را به صورت بازگشتی به ما می‌دهند و آن‌گاه جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی به‌خصوصی از دنباله را می‌خواهند.

بهترین روش برای حل این‌گونه تست‌ها این است که ابتدا چندجمله‌ی اوّل دنباله را بنویسیم. بعد، مطمئناً از این کار گشایشی حاصل می‌شود.