طول برد، دو برابر طول اوج است.

$$\text{برد } R = \frac{2V_{0x}V_{0y}}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

بین ارتفاع اوج و برد یک پرتابه رابطه روبرو برقرار است.

$$tg\alpha = \frac{4h}{R}$$

نکته: ۱- به ازاء $\alpha = 45$ برد پرتابه به بیشینه مقدار خود می‌رسد.

۲- اگر دو گلوله تحت زوایای α و β با سرعت‌های یکسان پرتاب شود در صورتی که $\alpha + \beta = 90^\circ$ باشد، برد دو پرتابه برابر می‌شود.

گلوله‌ای را در شرایط خلاء به بالا پرتاب می‌کنیم. بعد از ۲ ثانیه با سرعت $20\frac{m}{s}$ از نقطه‌ی اوج می‌گذرد. V_0 و α بدست آورید؟

حل:

$$t_{\text{اوج}} = \frac{V_0 \sin\alpha}{g} = 2 \Rightarrow V_0 \sin\alpha = 20\frac{m}{s}$$

$$\text{سرعت اوج} = V_x = V_0 \cos\alpha = 20\frac{m}{s}$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}} \quad tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

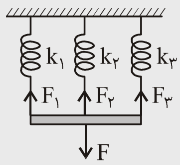
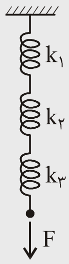
$$V_0 \sin 45 = 20 \Rightarrow V_0 = 20\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

دینامیک

۱- نیروی فنر: نیروی فنر از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید

$$\text{نیروی فنر (N)} \leftarrow \boxed{F = -k.x} \rightarrow \text{(m) تغییر طول فنر} = \Delta L$$

k: ضریب سختی (ثابت) فنر $\frac{N}{m}$

اتصال موازی	اتصال متوالی (سری)
 $F = F_1 + F_2 + F_3$ $x = x_1 = x_2 = x_3$ $k_e = k_1 + k_2 + k_3$ اگر فنری به ثابت k به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، ضریب سختی هر قسمت $k' = nk$ می‌شود.	 $F = F_1 = F_2 = F_3 = \ldots$ $x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ $\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots$ در صورت اتصال دو فنر به طور متوالی $ke = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

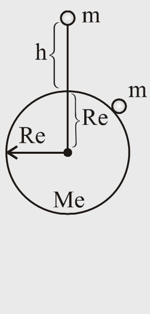
۲- نیروی گرانش: دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 که فاصله‌ی مراکزشان r است نیروی جاذبه‌ای بر هم وارد می‌کنند که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$N \leftarrow \boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}} \begin{matrix}\rightarrow kg \\ \rightarrow m^2\end{matrix} \quad ; \quad G = 6/67\times10^{-11}\frac{N-m^2}{kg^2}$$

شدت میدان جاذبه‌ی جرم m در فاصله‌ی r از آن، نیرویی است که به واحد جرم در آن فاصله وارد می‌شود.

$$\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2} \leftarrow \boxed{g = G\frac{m}{r^2}} ; G = 6/67\times10^{-11}\frac{N-m^2}{kg^2}$$

نیروی وزن: نیرویی است که از طرف کره‌ی زمین به جسم وارد می‌شود. نیروی وزن یک جسم در سطح زمین و در فاصله h از سطح زمین و همین طور شدت میدان جاذبه در آن دو نقطه از روابط زیر بدست می‌آید.



وزن جسم در سطح زمین $W_0 = G\frac{M_e.m}{R_e^2}$

شدت جاذبه در سطح زمین $g_0 = \frac{GM_e}{R_e^2}$

$$\Rightarrow \boxed{W_0 = mg_0}$$

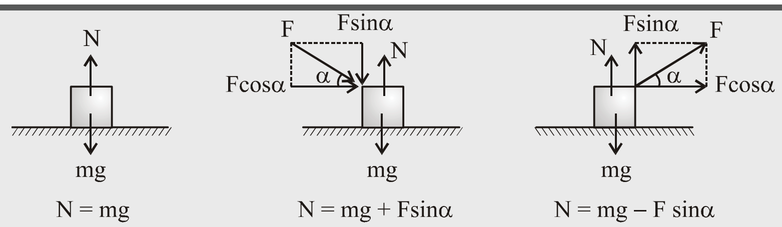
وزن جسم در h متری از سطح زمین $W_h = G\frac{M_e m}{(R_e + h)^2}$

شدت جاذبه در h متری از سطح زمین $g_h = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2}$

$$\Rightarrow \boxed{W_h = mg_h}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{W_0}{W_h} = \frac{g_0}{g_h} = \left(\frac{R_e + h}{R_e}\right)^2}$$

نیروی عمودی سطح: نیرویی است که از طرف سطح به طور عمود بر جسم وارد می‌شود.



قانون اول نیوتن: هرگاه برآیند نیروهای وارد بر جسمی صفر باشد. اگر جسم ساکن است ساکن می‌ماند و اگر حرکت دارد به حرکت مستقیم‌الخط یکنواخت خود ادامه می‌دهد.

قانون دوم نیوتن: برآیند نیروهای وارد بر جسم به آن شتابی هم راستا و هم‌جهت و متناسب با آن می‌دهد بطوری که شتاب با جرم جسم نسبت معکوس دارد.

$$\text{N) برآیند نیروها}\leftarrow \boxed{\sum F = ma} \rightarrow (\frac{m}{s^2})\ \text{شتاب جسم}$$
$$\text{جرم جسم (kg)}$$

قانون سوم نیوتن: هر عمل یک عکس‌العمل دارد مساوی خود و در خلاف جهت آن. نیروهای عمل و عکس‌العمل به دو جسم وارد می‌شوند در نتیجه نمی‌توان برآیندی برای آن‌ها در نظر گرفت.

تکانه: کمیتی برداری است. حاصل‌ضرب جرم در سرعت جسم می‌باشد. آن را با P نشان می‌دهیم.

$$kg\frac{m}{s} \leftarrow \boxed{P = mV} \rightarrow \frac{m}{s}$$
$$\text{جرم جسم (kg)}$$

- تکانه همواره بر مسیر حرکت مماس می‌باشد. تکانه هم راستا و هم جهت با سرعت است.
- نمودار $P-t$ شبیه به نمودار $V-t$ می‌باشد.
- اگر تغییر تکانه‌ی جسمی در مدت Δt، $\overrightarrow{\Delta P}$ باشد نیروی متوسطی که در این مدت بر جسم وارد می‌شود برابر است با: $\boxed{\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}}$
- نیروی وارد برجسم در هر لحظه برابر با مشتق معادله‌ی تکانه نسبت به زمان است. $\boxed{F_{\text{لحظه‌ای}} = \frac{dP}{dt}}$
- هرگاه برآیند نیروهای وارد برجسمی صفر باشد، تکانه‌ی آن ثابت می‌ماند.
- سطح زیر نمودار $F-t$ برابر با تغییر تکانه‌ی جسم است.
- **رابطه‌ی تکانه با انرژی جنبشی:** $\boxed{K = \frac{P^2}{2m}}$
- هرگاه به دو جسم در زمان‌های مساوی نیروهای یکسانی وارد شود، تغییر تکانه‌ی آن‌ها نیز یکسان می‌شود و در صورتی که در ابتدا تکانه‌ی دو جسم برابر باشد (مثلاً دو جسم ساکن باشند) در هر لحظه، تکانه‌ی دو جسم برابر می‌شود. در این صورت می‌توان نوشت:

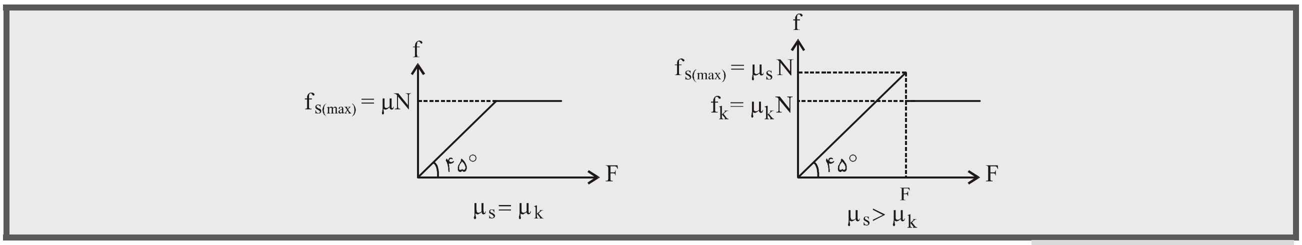
$$\left.\begin{array}{l} m_1V_1 = m_2V_2 \\ m_1x_1 = m_2x_2 \\ m_1a_1 = m_2a_2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{m_1}{m_2}}$$

نیروی اصطکاک: نیرویی است که از طرف سطح و مماس بر سطح به جسم وارد می‌شود. عکس‌العمل آن نیرویی است مماس بر سطح که از طرف جسم به سطح وارد می‌شود. اگر جسم روی سطح نلغزد، نیروی اصطکاک را **ایستایی** می‌گوییم و آن را با f_s نشان می‌دهیم. در این حالت نیروی اصطکاک از رابطه‌ی کلی $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ محاسبه می‌شود. وقتی جسم در آستانه‌ی لغزش قرار می‌گیرد، نیروی اصطکاک به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد که از رابطه $f_{s\,max} = \mu_s N$ به دست می‌آید μ_s ضریب اصطکاک ایستایی است که به جنس سطح تماس و میزان صافی و زبری آن بستگی دارد.

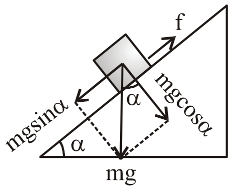
در صورتی که جسم روی سطح بلغزد، نیروی اصطکاک را «**جنبشی**» می‌گوییم و آن را با f_k نشان می‌دهیم مقدار آن از رابطه‌ی $f_k = \mu_k N$ محاسبه می‌شود.

نیروی اصطکاک:
- جسم روی سطح می‌لغزد $\rightarrow \boxed{f_k = \mu_k N}$
- جسم روی سطح نمی‌لغزد $\rightarrow \boxed{0 \le f_s \le f_{s\,max} = \mu_s N} \Rightarrow$ از رابطه‌ی $\sum F = ma$ محاسبه می‌شود

نمودار نیروی اصطکاک برحسب نیروی محرک در امتداد سطح (F) به شکل زیر است.



اصطکاک روی سطح شیب‌دار: جسمی به جرم m را روی سطح شیب‌دار به زاویه‌ی α قرار می‌دهیم نیروی اصطکاک از روابط زیر به دست می‌آید.



۱) جسم ساکن می‌ماند. $\boxed{f_s = mg\sin\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\mu_s > tg\,\alpha}$

۲) جسم در آستانه لغزش قرار می‌گیرد. $\boxed{f_s = \mu_s mg\cos\alpha = mg\sin\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\mu_s = tg\,\alpha}$

۳) جسم به طور یکنواخت به پایین سر می‌خورد. $\boxed{f_k = \mu_k mg\cos\alpha = mg\sin\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\mu_k = tg\,\alpha}$

۴) جسم با شتاب به پایین سر می‌خورد. $\boxed{f_k = \mu_k mg\cos\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\mu_k < tg\,\alpha}$

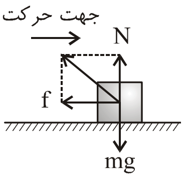
حرکت جسم روی سطح افقی بدون اعمال نیرو: جسمی به جرم m را با سرعت $V_۰$ روی یک سطح افقی پرتاب می‌کنیم. شتاب حرکت جسم، زمانی که در راه است تا توقف کند و طول خط ترمز (مسافتی که طی می‌کند تا بایستد.) از روابط زیر به دست می‌آید.

$$\boxed{a = -\mu_k g} \Rightarrow \boxed{t_{\text{توقف}} = \frac{V_۰}{\mu_k g}} \Rightarrow \boxed{\text{طول خط ترمز } x = \frac{V_۰^۲}{۲\mu_k g}}$$

- شتاب حرکت جسم روی سطح افقی بدون اعمال نیروی خارجی به جرم جسم بستگی ندارد و با ضریب اصطکاک سطح متناسب است.

نیروی عکس‌العمل سطح (واکنش سطح): نیرویی است که از طرف سطح به جسم وارد می‌شود (R) دو مؤلفه دارد. یکی عمود بر سطح (N) و دیگری در امتداد سطح (اصطکاک f) و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\boxed{R = \sqrt{f^۲ + N^۲}}$$



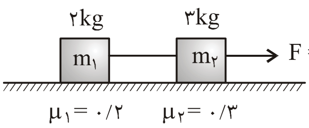
در صورتی که جسم روی سطح در آستانه‌ی لغزش باشد و یا بلغزد نیروی واکنش سطح از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$\boxed{R = \sqrt{f^۲ + N^۲} = N\sqrt{۱ + \mu^۲}}$$

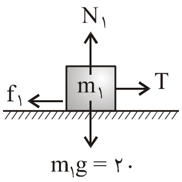
برای حل مسائل دینامیک پس از رسم شکل و نیروهای وارد برجسم، نیروها را به دو مولفه در امتداد حرکت و عمود بر آن تجزیه می‌کنیم و مقادیر مولفه‌ها را به دست می‌آوریم. سپس معادله نیوتن ($\sum F = ma$) در این دو امتداد را می‌نویسیم و آن‌ها را در یک دستگاه حل می‌کنیم.

کشش نخ: نیرویی است که به نخ پاره شده وارد می‌شود تا جسم وضع سابق خود را حفظ کند. در امتداد نخ به جسم وارد می‌شود و نوک پیکان آن به طرف بیرون جسم است. کشش نخ بدون جرم در طرفین قرقره‌ی بدون اصطکاک برابر است.

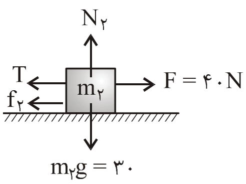
در شکل مقابل، کشش نخ را به دست آورید؟



حل:



$$m_۱ \text{ برای } \begin{cases} \sum F_y = ۰ \Rightarrow N_۱ = ۲۰, f_۱ = \mu_۱ N_۱ = ۰/۲ \times ۲۰ = ۴N \\ \sum F_x = ma \Rightarrow T - ۴ = ۲a \;(A) \end{cases}$$

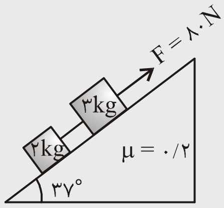
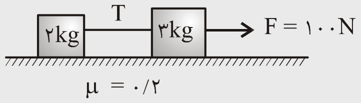


$$m_۲ \text{ برای } \begin{cases} \sum F_y = ۰ \Rightarrow N_۲ = ۳۰, f_۲ = \mu_۲ N_۲ = ۰/۳ \times ۳۰ = ۹N \\ \sum F_x = ma \Rightarrow ۴۰ - T - ۹ = ۳a \;(B) \end{cases}$$

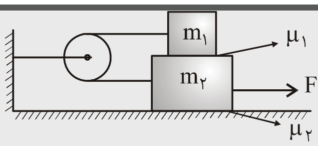
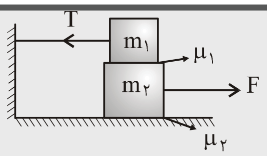
$$\Rightarrow \begin{aligned} &T = ۱۴/۸N \\ &a = ۵/۴ \frac{m}{s^۲} \end{aligned}$$

اگر – نیروی F در امتداد سطح باشد – ضریب اصطکاک کلیه سطوح یکسان باشد – اجسام در حال لغزش و یا در آستانه لغزش باشند می‌توان به کمک تناسب نیروی کشش نخ را به دست آورد.

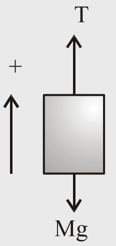
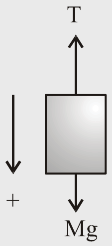
در شکل‌های زیر نیروی کشش نخ چیست؟

 ۵kg　۸۰N kg　$T = 32N$	 kg　۱۰۰N kg　$T = 40N$

روابطی برای محاسبه حداقل F برای کشیدن وزنه‌ی زیری در شکل‌های زیر ارائه شده است:

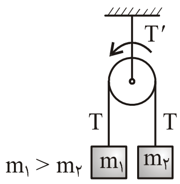
 $\mathbf{T = f_1 = \mu_1 m_1 g}$ $\mathbf{F = 2f_1 + f_2 = 2\mu_1 m_1 g + \mu_2 (m_1 + m_2) g}$	 $\mathbf{T = f_1 = \mu_1 m_1 g}$ $\mathbf{F = f_1 + f_2 = \mu_1 m_1 g + \mu_2 (m_1 + m_2) g}$

آسانسور

الف) آسانسور بالا می‌رود $\sum F_y = ma \Rightarrow T - Mg = Ma$ $\boxed{\vec{T} = M(\vec{g} + \vec{a})}$ وزن ظاهری جسمی به جرم m درون آسانسور نیز از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید. $\vec{W'} = m(\vec{g} + \vec{a})$  ۱) اگر آسانسور تندشونده بالابرود، $a > 0$ و $W' > W$ می‌باشد. ۲) اگر آسانسور یکنواخت بالابرود، $a = 0$ و $W' = W$ می‌باشد. ۳) اگر آسانسور کندشونده بالابرود، $a < 0$ و $W' < W$ می‌باشد.	ب) آسانسور پایین می‌رود $\sum F_y = ma \Rightarrow Mg - T = Ma$ $\boxed{\vec{T} = M(\vec{g} - \vec{a})}$ وزن ظاهری جسمی به جرم m درون آسانسور نیز از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید. $\vec{W'} = m(\vec{g} - \vec{a})$  ۱) اگر آسانسور تندشونده پایین برود، $a > 0$ و $W' < W$ می‌باشد ۲) اگر آسانسور یکنواخت پایین برود، $a = 0$ و $W' = W$ می‌باشد. ۳) اگر آسانسور کندشونده پایین برود، $a < 0$ و $W' > W$ می‌باشد.

* بنابراین اگر شتاب آسانسور روبه بالا باشد $W' > W$ و اگر رو به پایین باشد $W' < W$ می‌باشد.

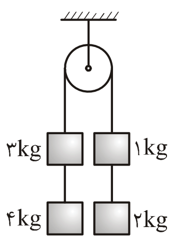
ماشین آتوود: در صورتی که $m_1 > m_2$ و دستگاه از حال سکون به حرکت در آید و از جرم قرقره و اصطکاک‌ها صرف‌نظر شود شتاب، کشش نخ طرفین قرقره و بالای قرقره از روابط زیر به دست می‌آید.



$$\boxed{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g} \quad \boxed{T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g} \quad \boxed{T' = 2T}$$

اگر در هر طرف قرقره دو یا چند جسم داشته باشیم روابط فوق صادق است. در این حالت مجموع جرم یک طرف را m_1 و طرف دیگر را m_2 در نظر می‌گیریم. کشش نخ بدست آمده، کشش نخ طرفین قرقره می‌باشد.

در شکل مقابل شتاب حرکت وزنه‌ها و کشش نخ طرفین قرقره چیست؟

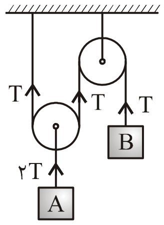


حل:

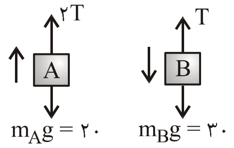
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{(4+3) - (1+2)}{4+3+1+2} \times 10 = 4 \frac{m}{s^2}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2 \times (4+3)(1+2)}{(4+3) + (1+2)} \times 10 = 42N$$

قرقره‌های متحرک: برای حل مسائل مربوط به قرقره‌های متحرک ابتدا جسم متصل به قرقره‌ی متحرک را به اندازه‌ی واحد جابه‌جا می‌کنیم و جابه‌جایی اجسام دیگر را اندازه می‌گیریم. نسبت سرعت و شتاب وزنه‌ها به نسبت جابه‌جایی آن‌ها خواهد بود.



در شکل مقابل $m_B = ۳kg , m_A = ۲kg$ می‌باشد. اگر از جرم نخ و اصطکاک‌ها صرف‌نظر شود، شتاب حرکت وزنه‌ی A چند متر بر مجذور ثانیه است؟

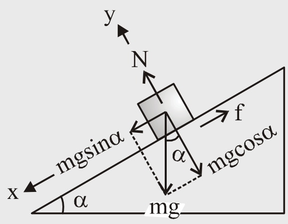


حل: در صورتی که وزنه‌ی A به اندازه واحد بالا برود و باید وزنـه‌ی B، ۲ واحـد جابـه‌جـا شود پس $a_B = ۲a_A$

$$\left.\begin{array}{l} \text{برای A} \ \sum F = ma \Rightarrow ۲T - ۲۰ = ۲a_A \\ \text{برای B} \ \sum F = ma \Rightarrow ۳۰ - T = ۳a_B = ۶a_A \end{array}\right| \Rightarrow a_A = \frac{۲۰}{۷}\frac{m}{s^۲}$$

سطح شیب‌دار: از پایین سطح شیب‌داری به زاویه‌ی α جسمی به جرم m را با سرعت اولیه $V_۰$ به بالا پرتاب می‌کنیم جدول زیـر شـتاب در رفت و برگشـت و همچنین زمان توقف و مسافت طی شده تا توقف در رفت را نشان می‌دهد.

شتاب در برگشت:



$\sum F_y = ۰ \rightarrow N = mg\cos\alpha$

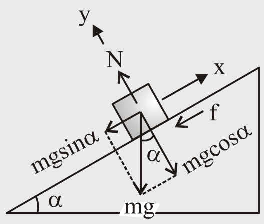
$f = \mu mg\cos\alpha$

$\sum F = ma \rightarrow mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$

$\boxed{a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$

اندازه‌ی شتاب در رفت بیش‌تر از برگشت و زمان رفت کـم‌تـر از زمـان برگشـت می‌باشد.

شتاب در رفت:



$\sum F_y = ۰ \rightarrow N = mg\cos\alpha$

$f = \mu mg\cos\alpha$

$\sum F_x = ma \rightarrow -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$

$\boxed{a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$

زمان توقف $t_s = \dfrac{V_۰}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$

طول خط ترمز $x_s = \dfrac{V_۰^۲}{۲g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$

از پایین سطح شیب‌داری به زاویه‌ی ۴۵° گلوله‌ای که ضریب اصطکاک با سطح $\mu = ۱/۴$ است را با سرعت $۱۲\frac{m}{s}$ بـه طـرف بـالا پرتـاب می‌کنیم گلوله چه مسافتی برحسب متر روی سطح بالا می‌رود و با چه شتابی برحسب $\frac{m}{s^۲}$ به پایین برمی‌گردد؟

حل:

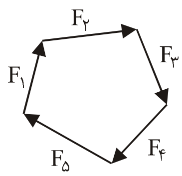
$$x = \frac{V_۰^۲}{۲g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = \frac{۱۲^۲}{۲\times۱۰(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱/۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})} = ۳\sqrt{۲}m$$

چون $\mu = ۱/۴ > tg۴۵ = ۱$ می‌باشد پس جسم به پایین برنمی‌گردد و شتاب در برگشت صفر می‌شود.

تعادل: جسمی در حال تعادل است که برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد. در این صورت نیروها تشکیل یک کثیرالاضلاع می‌دهند. برآیند یک دسته از نیروهـا قرینه‌ی برآیند دسته باقی‌مانده می‌شود.

در این صورت اگر یک دسته از نیروها حذف شود، اندازه‌ی برآینـد دسـته باقیمانـده انـدازه‌ای برابر با اندازه‌ی برآیند نیروهای حذف شده دارد.

$$\vec{F_۱} + \vec{F_۲} + \vec{F_۳} + \vec{F_۴} + \vec{F_۵} = ۰$$
$$(\vec{F_۱} + \vec{F_۲} + \vec{F_۳}) = -(\vec{F_۴} + \vec{F_۵})$$



جسمی به جرم ۲kg تحت اثر نیروهایی با اندازه‌های ۱۰N و ۲۰N و ۳۰N و ۴۰N در حال تعادل است. اگر نیروی ۳۰ نیوتنی حـذف شـود جسم با چه شتابی حرکت می‌کند؟

حل: با حذف نیروی ۳۰ نیوتنی، اندازه‌ی برآیند نیروهای باقیمانده ۳۰N می‌شود

$$\sum F = ma \Rightarrow ۳۰ = ۲a \rightarrow a = ۱۵\frac{m}{s^۲}$$

* در صورتی که به جسم در حال تعادل سه نیرو وارد شده باشد، آن سه نیرو تشکیل یک مثلث می‌دهند. در این حالت اندازه‌ی هر نیرو از جمع انـدازه‌ی نیروهـای دیگر کوچک‌تر یا مساوی و از تفاضل اندازه‌ی نیروهای دیگر بزرگ‌تر یا مساوی می‌باشد.

برآیند کدام دسته از نیروهای با اندازه‌های زیر می‌تواند صفر باشد؟

۱) ۲ و ۴ و ۷   ۲) ۳ و ۴ و ۸   ✓) ۵ و ۶ و ۹   ۴) ۲ و ۵ و ۸

حرکت دایره‌ای: حرکتی است که متحرک بر مسیر دایره انجام می‌دهد.

سرعت زاویه‌ای متوسط و لحظه‌ای: زاویه‌ای است که متحرک در واحد زمان طی می‌کند.

$$\boxed{\bar{\omega}=\frac{d\theta}{dt}} \qquad \frac{rad}{s}\to\boxed{\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}}\begin{matrix}\to rad\\ \to s\end{matrix}$$

معادله‌ی زاویه‌ی پیموده شده در یک حرکت دایره‌ای به صورت $\theta=t^3+2t+1$ بدست آورید:

۱) سرعت زاویه‌ای متوسط در دو ثانیه‌ی اول   ۲) سرعت زاویه‌ای در $t=2$

حل:

$$1)\ \bar{\omega}=\frac{\theta_2-\theta_1}{2-0}=\frac{(2^3+2\times2+1)-(1)}{2}=6\frac{rad}{s}$$

$$2)\ \omega=\frac{d\theta}{dt}=3t^2+2\xrightarrow{t=2}\omega_2=3\times2^2+2=14\frac{rad}{s}$$

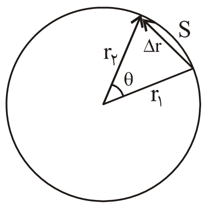
حرکت دایره‌ای یکنواخت: حرکتی است که با سرعت زاویه‌ای ثابت انجام می‌شود در این حرکت سرعت زاویـه‌ای متوسـط و لحظـه‌ای برابرنـد معادلـه‌ی آن بـه صورت مقابل است. $\boxed{\theta=\omega t+\theta_0}$

دوره: مدت زمانی است که متحرک یک دور کامل دایره را طی می‌کند (T واحد آن ثانیه است.

بسامد: تعداد دورها در واحد زمان می‌باشد (f واحد آن هرتز است.

π رادیان T ثانیه	۱ دور T ثانیه
$\omega\Rightarrow\boxed{\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f}$ ۱	$f\Rightarrow\boxed{f=\frac{1}{T}}$ ۱

سرعت خطی در حرکت دایره‌ای: در مدتی که متحرک زاویه‌ی θ را می‌پیماید طول قوس طی شده S می‌باشد.



طول قوس	زاویه‌ی طی شده
$2\pi R$	2π
$s\Rightarrow\boxed{s=R\theta}$	θ

طرفین رابطه را به Δt (زمان جابه‌جایی) تقسیم می‌کنیم. در حد وقتی Δt به سمت صفر میل‌کند طول قوس به سمت جابه‌جایی میل می‌کند.

$$|\bar{V}|=\lim_{\Delta t\to0}\left|\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=R\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\Rightarrow\boxed{V=R\omega}$$

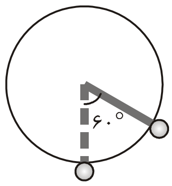
شتاب در حرکت دایره‌ای یکنواخت: سرعت همواره مماس بر مسـیر حرکـت مـی‌باشـد و در ایـن نـوع حرکـت راستای آن تغییر می‌کند. در نتیجه‌ی تغییر بردار سرعت، حرکت شتاب‌دار اسـت ایـن شـتاب در امتـداد شـعاع و بـه طرف مرکز دایره می‌باشد که به آن شتاب مرکزگرا می‌گوییم.

$$\boxed{a=\frac{V^2}{R}=R\omega^2=V\omega}$$

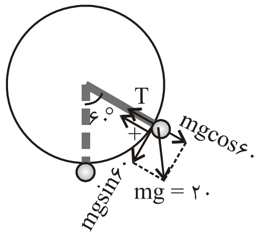
نیروی مرکزگرا: عامل دوران یک جسم روی مسیر دایره، نیرویی در امتداد شعاع و به طرف مرکز دایره است کـه به آن نیروی مرکزگرا می‌گوییم:

$$\boxed{F=m\frac{V^2}{R}=mR\omega^2=mV\omega}$$

- متحرکی به جرم m که با سرعت V بر روی دایره حرکت می‌کند. طی مدتی که زاویه‌ی α را طی می‌کند تغییـر سـرعتی برابـر $\Delta V=2V\sin\frac{\alpha}{2}$ دارد و تکانه‌اش به اندازه‌ی $\Delta P=2P\sin\frac{\alpha}{2}$ تغییر می‌کند.
- برای حل مسئله‌ی دینامیک در حرکت دورانی پس از رسم شکل و نیروهای وارد برجسم، نیروها را به دو مولفه در امتداد شعاع و عمـود بـه آن تجزیـه می‌کنیم. سپس جهت مثبت در امتداد شعاع را به طرف مرکز دایره در نظر می‌گیریم و برآیند نیروهـای مرکزگـرا را محاسـبه کـرده آن‌هـا را برحسـب شرایط برابر $\frac{mV^2}{R}$ یا $mR\omega^2$ قرار می‌دهیم.



به انتهای میله‌ای به طول ۸۰cm گلوله‌ای به جرم ۲kg می‌بندیم و آن را حول انتهای دیگر میله در سطح قائم دوران می‌دهیم. در لحظه‌ی نشان داده شده سرعت گلوله ۲ $\frac{m}{s}$ است. نیروی کشش میله در این لحظه چند نیوتن است؟

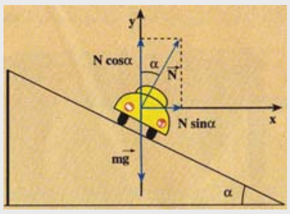


حل:

$$T - mg\cos ۶۰ = \frac{mV^۲}{R} \Rightarrow T = mg\cos ۶۰° + \frac{mV^۲}{R}$$

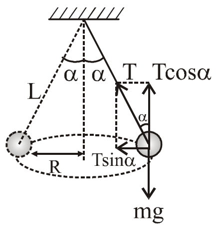
$$T = ۲۰ \times \frac{۱}{۲} + \frac{۲\times ۲^۲}{۰/۸} = ۲۰N$$

شیب عرضی جاده: حداکثر سرعت مجاز در پیچ افقی یک جاده $V = \sqrt{\mu_s Rg}$ می‌باشد. برای افزایش این سرعت و برای دوران در جاده‌ی بدون اصطکاک در عرض به جاده شیب می‌دهیم. تا مولفه‌ی افقی نیروی وارد بر اتومبیل، تأمین کننده‌ی نیروی مرکزگرا شود.



$$\left.\begin{array}{r} N\sin\alpha = \dfrac{mV^۲}{R} \\ N\cos\alpha = mg \end{array}\right| \Rightarrow \tan\alpha = \frac{V^۲}{Rg} = \frac{a}{g}$$

آونگ مخروطی: کشش نخ به دو مولفه یکی در امتداد قائم به مقدار $T\cos\theta$ که با mg خنثی می‌شود و دیگری در امتداد افق به مقدار $T\sin\alpha$ که نیروی مرکزگرا می‌باشد تجزیه می‌شود.



$$\left.\begin{array}{r} T\sin\alpha = mR\omega^۲ \\ T\cos\alpha = mg \end{array}\right| \Rightarrow \tan\alpha = \frac{R\omega^۲}{g} = \frac{a}{g}$$

$$\tan\alpha = \frac{R\omega^۲}{g} \xrightarrow{R = L\sin\alpha} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{L\sin\alpha.\omega^۲}{g} \Rightarrow \frac{۱}{\cos\alpha} = \frac{L\omega^۲}{g}$$

ماهواره: ماهواره فقط تحت اثر نیروی وزنش در حرکت است. حرکت ماهواره سقوط آزاد است. اجسام در ماهواره بی‌وزن هستند.

سرعت ماهواره: سرعت ماهواره از رابطه زیر بدست می‌آید.

$\boxed{V = \sqrt{rg}}$ → شتاب جاذبه در محل ماهواره
(شعاع دوران ماهواره) فاصله از مرکز زمین

سرعت ماهواره از روابط زیر نیز محاسبه می‌گردد.

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} = Re\sqrt{\frac{g_۰}{r}}} \Rightarrow \boxed{V \propto \frac{۱}{\sqrt{r}}}$$

دوره‌ی حرکت ماهواره نیز از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$\boxed{T^۲ = \frac{۴\pi^۲}{GM_e} r^۳} \Rightarrow \boxed{T^۲ \propto r^۳}$$

اگر شعاع دوران یک ماهواره چهار برابر شود، سرعت و دوره آن چند برابر می‌شود؟

حل:

$$\frac{V_۲}{V_۱} = \sqrt{\frac{r_۱}{r_۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۴}} \Rightarrow \frac{V_۲}{V_۱} = \frac{۱}{۲} \quad ; \quad (\frac{T_۲}{T_۱})^۲ = (\frac{r_۲}{r_۱})^۳ = ۴^۳ = ۶۴ \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = ۸$$

حرکت نوسانی

حرکت نوسانی: حرکتی است که یک متحرک روی یک پاره‌خط (AB) حول وسط آن (نقطه‌ی O) چنان انجام می‌دهد که همواره شتابی متناسب با فاصله نوسانگر از مرکز نوسان و به طرف مرکز نوسان داشته باشد.