« احتمال »

دوستان ارجمندم , سلام . در این جزوه آموزشی , خلاصه ای از آن چه که برای پاسخگویی به سوالات احتمال در کنکور نیاز است, گردآوری شده است. برای این کار تمام سوالات احتمال کنکور داخل و خارج از کشور را در سالهای ۹۳ ,۹۴،۹۵ باهم آنالیز می کنیم :

■ بخش یکم : احتمال در فضاهای گسسته هم شانس

این بخش شامل ۵ سوال است. می توان گفت به طور متوسط تقریبا در هر کنکور , با یک سوال از این تیپ سوالات مواجه می شویم.

می دانیم مجموعه تمام حالات ممکن در یک آزمایش تصادفی , فضای نمونه ای نام دارد , که با S نمایش داده می شود. هر زیرمجموعه از فضای نمونه ای هم یک پیشامد نام دارد. تعداد اعضای فضای نمونه ای با n(S) و تعداد اعضای پیشامد دلخواه A با n(A) نمایش داده می شود.حال اگر احتمال رخ دادن هر یک از عضوهای فضای نمونه ای با دیگری برابر باشد , احتمال وقوع پیشامد A به طریق مقابل محاسبه می شود : $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

به موارد زیر توجه کنید :

۱) دو تاس را باهم می ریزیم. با کدام احتمال , جمع دو عدد رو شده , یک عدد اول است؟ (سراسری ۹۳ داخل کشور)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۷}{۱۲}$

پاسخ :

$$n(S)=٦\times٦=٣٦$$

برای محاسبه تعداد حالات مطلوب می بایست تمام حالاتی که مجموع دو تاس برابر با هر یك از اعداد ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷ یا ۱۱ می شود را بنویسیم.

$$A=\{(١,١)(١,٢)(٢,١)(١,٤)(٤,١)(٢,٣)(٣,٢)(١,٦)(٦,١)(٢,٥)(٥,٢)(٣,٤)(٤,٣)(٥,٦)(٦,٥)\}$$

$$n(A)=١٥ \qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{١٥}{٣٦}=\frac{٥}{١٢}$$

توجه : تعداد حالاتی که در پرتاب دو تاس ، مجموع اعداد رو شده برابر با X شود به صورت $|X - ۷| - ۶$ است. به خاطر سپردن این نکته می تواند سرعت محاسبات را در این مورد افزایش دهد. مثلا تعداد حالات رخ دادن مجموع دو تاس ۵ برابر است با $|۵ - ۷| - ۶$ که برابر با ٤ خواهد بود. حال به کمك این نکته مساله را یك بار دیگر حل کنید.

سوال بعدی :

۲) در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه , و در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده همرنگ هستند؟ (سراسری ۹۳ داخل کشور)

۱) ۰/۱۲ ‏ ‏ ‏ ۲) ۰/۱۵ ‏ ‏ ‏ ۳) ۰/۱۸ ‏ ‏ ‏ ۴) ۰/۲۴

پاسخ :

به $\binom{۸}{۲}$ طریق دو مهره از ظرف اول «و» به $\binom{۶}{۲}$ طریق دو مهره از ظرف دوم خارج می کنیم. پس :

$$n(S) = \binom{۸}{۲} \times \binom{۶}{۲} = ۲۸ \times ۱۵$$

برای محاسبه تعداد حالات مطلوب می بایست از ظرف اول ۲ مهره سفید و از ظرف دوم هم ۲ مهره سفید خارج شود ، «یا» از ظرف اول ۲ مهره سیاه و از ظرف دوم هم ۲ مهره سیاه خارج شود . پس :

$$n(A) = \binom{۵}{۲}\binom{٤}{۲} + \binom{۳}{۲}\binom{۲}{۲} = ۶۰ + ۳ = ۶۳$$

$$P(A) = \frac{۶۳}{۲۸\times۱۵} = ۰/۱۵$$

حالا به سوال بعدی توجه کنید :

۳) در جعبه ای ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه موجود است. ۲ مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می کنیم.سپس از بین باقی مانده مهره ها به تصادف یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ۹۳ خارج از کشور)

۱) $\frac{۵}{۱۴}$ ‏ ‏ ‏ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ‏ ‏ ‏ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ‏ ‏ ‏ ۴) $\frac{۹}{۱۴}$

پاسخ :

در این گونه موارد که نتیجه یك یا چند بخش اول یك آزمایش تصادفی برایمان اهمیتی ندارد، می توانیم تصور کنیم آن بخش ها اصلا انجام نشده ، یعنی این مساله معادل حالتی است که می خواهیم یك مهره به تصادف خارج کنیم و احتمال سفید بودن این مهره مدنظر است. که به راحتی محاسبه می شود:

$$P\left(\text{سفید}\right) = \frac{\text{تعداد سفید}}{\text{تعداد کل}} = \frac{۳}{۷}$$

و اما مساله بعدی :

۴) هر یک از اعداد ۱،۲،۳،۴،۵،۶ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور تصادف و متوالی هم یک گوی از جعبه خارج می کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می شوند؟ (سراسری ۹۴ داخل کشور)

۱) ۰/۱　　۲) ۰/۱۲　　۳) ۰/۱۵　　۴) ۰/۲

پاسخ :

برای اولین مهره خارج شده ٦ حالت مختلف قابل تصور است. برای مهره دوم ٥ حالت مختلف باقی می ماند و ... در نهایت برای مهره ششم یك حالت وجود خواهد داشت ، پس :

$$n(S) = ٦ \times ٥ \times \ldots \times ١ = ٦!$$

برای محاسبه تعداد حالات مطلوب دو حالت مختلف قابل تصور است :

حالت اول اینکه ابتدا یك مهره زوج خارج شود و سپس فرد و سپس زوج و همین طور الی آخر :

$$٣ \times ٣ \times ٢ \times ٢ \times ١ \times ١ = ٣٦$$

در حالت دوم ابتدا یك مهره فرد خارج می شود ، سپس زوج و همین طور الی آخر ، که این مورد هم به ٣٦ حالت مختلف امکان پذیر است ، بنابراین :

$$P(A) = \frac{٧٢}{٦!} = ٠/١$$

به مساله بعدی که در کنکور ۹۵ مطرح شده دقت کنید :

۵) در کیسه ای ۵ مهره سفید , ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز موجود است . اگر ۳ مهره از کیسه خارج کنیم , با کدام احتمال , حداکثر ۲ مهره از مهره های خارج شده همرنگ هستند ؟(سراسری ۹۵ داخل کشور)

۱) $\frac{۱۷}{۲۲}$　　۲) $\frac{۹}{۲۲}$　　۳) $\frac{۳۹}{۴۴}$　　۴) $\frac{۴۱}{۴۴}$

پاسخ :

فضای نمونه ای برابر است با تعداد حالات انتخاب ۳ مهره از مجموع ۱۲ مهره ، یعنی :

$$n(S) = \binom{١٢}{٣} = ٢٢٠$$

اما حالات مطلوب : مهره ها از سه رنگ مختلف باشند یا اینکه دو مهره از یك رنگ و یك مهره از رنگ دیگر باشد. البته تعداد حالات اخیر خیلی زیاد نیست ، اما بهتر است اینجا از احتمال متمم کمك بگیریم ; متمم پیشامد مورد نظر ، عبارت است از حالاتی که هر ۳ مهره همرنگ باشند ، یعنی هر سه مهره سفید «یا» هر سه مهره سیاه «یا» هر سه مهره قرمز باشند. بنابراین :

$$P(A) = ١ - P(A') = ١ - \frac{\binom{٥}{٣}+\binom{٤}{٣}+\binom{٣}{٣}}{٢٢٠} = ١ - \frac{١٥}{٢٢٠} = \frac{٢٠٥}{٢٢٠} = \frac{٤١}{٤٤}$$

■بخش دوم : قوانین احتمال

قوانین ساده ای برای محاسبات احتمال وجود دارد. گرچه در برخی منابع فرمول های متعددی در این بحث مطرح شده , اما یادگیری روابط زیر برای حل مسائل کنکور کافی هستند :

الف) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

می دانیم که $P(A \cup B)$ احتمال وقوع پیشامد A یا B یا هر دو (بعبارت دیگر احتمال وقوع لااقل یکی از این دو پیشامد) است, و $P(A \cap B)$ احتمال وقوع هر دو پیشامد A و B .

ب) $P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

می دانیم $P(A - B)$ یعنی احتمال اینکه A رخ دهد اما B رخ ندهد.

پ) $P(A' \cap B') = P\big((A \cup B)'\big) = ۱ - P(A \cup B)$

توجه کنید که $P(A' \cap B')$ یعنی احتمال اینکه A رخ ندهد و B هم رخ ندهد.

ت) $P(A' \cup B') = P\big((A \cap B)'\big) = ۱ - P(A \cap B)$

دقت کنید که $P(A' \cup B')$ یعنی احتمال اینکه A رخ ندهد یا B رخ ندهد.

ث) $P(A \,\Delta\, B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B)$

توجه کنید که $P(A \,\Delta\, B)$ یعنی احتمال وقوع دقیقا یکی از دو پیشامد A یا B. (به طور معادل : احتمال اینکه A رخ دهد یا B رخ دهد و نه هر دو) .

روابط $P(A) = ۱ - P(A')$ و $P(A') = ۱ - P(A)$ هم که بسیار ساده هستند.

به مسائل زیر توجه کنید:

۶) از بین مجموعه اعداد متوالی $\{۵۱,۵۲, \ldots ,۳۰۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد بر ۶ یا بر ۷ بخش پذیر است ولی مضرب ۴۲ نیست؟ (سراسری ۹۵ داخل کشور)

۱) ۰/۲۴   ۲) ۰/۲۶   ۳) ۰/۲۸   ۴) ۰/۳۱

پاسخ :

مقدار $n(S)$ به سادگی محاسبه می شود: $n(S) = ۳۰۰ - ۵۱ + ۱ = ۲۵۰$

می دانیم تعداد اعداد طبیعی کوچکتر مساوی N که بر K بخش پذیرند برابر با $\left[\frac{N}{K}\right]$ است. حال اگر A را پیشامد بخش پذیری بر ٦ و B را پیشامد بخش پذیری بر ٧ بنامیم , خواهیم داشت :

$n(A) = \left[\frac{۳۰۰}{٦}\right] - \left[\frac{۵۰}{٦}\right] = ٤۲$

$n(B) = \left[\frac{۳۰۰}{۷}\right] - \left[\frac{۵۰}{۷}\right] = ۳۵$

$n(A \cap B) = \left[\frac{۳۰۰}{٤۲}\right] - \left[\frac{۵۰}{٤۲}\right] = ٦ \longrightarrow$ **اعدادی که هم بر ۷ و هم بر ٦ (یعنی بر ٤۲) بخش پذیرند.**

$P(A\,\Delta\,B) = P(A) + P(B) - ۲P(A \cap B) = \frac{٤۲}{۲۵۰} + \frac{۳۵}{۲۵۰} - \frac{۱۲}{۲۵۰} = \frac{٦۵}{۲۵۰} = ۰/۲٦$

سوال بعدی , نمونه ی ساده تری از این تیپ مسائل است :

۷) از بین مجموعه اعداد متوالی $\{۱۰۱, ۱۰۲, ..., ۲۵۰\}$ عددی به تصادف انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این عدد لااقل بر یکی از اعداد ۴ یا ۵ بخش پذیر است؟ (سراسری ۹۵ خارج از کشور)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۴۲ ۳) ۰/۵۸ ۴) ۰/۶

پاسخ :

$n(S) = ۲۵۰ - ۱۰۱ + ۱ = ۱۵۰$

$n(A) = \left[\frac{۲۵۰}{٤}\right] - \left[\frac{۱۰۰}{٤}\right] = ٦۲ - ۲۵ = ۳۷$

$n(B) = \left[\frac{۲۵۰}{۵}\right] - \left[\frac{۱۰۰}{۵}\right] = ۳۰$

$n(A \cap B) = \left[\frac{۲۵۰}{۲۰}\right] - \left[\frac{۱۰۰}{۲۰}\right] = ۷$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳۷}{۱۵۰} + \frac{۳۰}{۱۵۰} - \frac{۷}{۱۵۰} = ۰/٤$

۸) از کیسه ای که محتوی آن ۵ مهره سفید , ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است, به تصادف ۳ مهره خارج می کنیم. با کدام احتمال بین مهره های خارج شده , مهره سفید نیست یا مهره سیاه نیست؟(سراسری ۹۵ خارج از کشور)

۱) $\frac{۷}{۲۲}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴۴}$ ۳) $\frac{۹}{۲۲}$ ۴) $\frac{۱۹}{۴۴}$

$A \longrightarrow$ **پیشامد وجود مهره سفید**

$B \longrightarrow$ **پیشامد وجود مهره سیاه**

$P(A' \cup B') = P\big((A \cap B)'\big) = ۱ - P(A \cap B)$

پیشامد $A \cap B$ یعنی هم مهره سفید و هم مهره سیاه در مهره های خارج شده وجود داشته باشد , بنابراین حالات مطلوب عبارتست از : یکی سفید یکی سیاه یکی قرمز , یا دو تا سفید یکی سیاه , یا دو تا سیاه یکی سفید.

$n(A\cap B)=\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}=۱۳۰$

$n(S)=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$

$P(A'\cup B')=۱-P(A\cap B)=۱-\frac{۱۳۰}{۲۲۰}=\frac{۹۰}{۲۲۰}=\frac{۹}{۲۲}$

■بخش سوم : احتمال در فضای نمونه ای پیوسته :

اگر مساله یک بعدی مدل سازی شود : $P(A)=\frac{l_A}{l_S}$

اگر هم دو بعدی مدل شود : $P(A)=\frac{a_A}{a_S}$

بدون توضیحات اضافه تر سوالات این بخش را بررسی می کنیم:

۹) در معادله $ax^۲+bx=۵$, ضریب a به تصادف عددی در بازه $[۱,۳]$ و ضریب b , به طور تصادفی عددی در بازه $[-۳,۰]$ انتخاب شده است. با کدام احتمال مجموع جوابهای این معادله , بیشتر از $\frac{۲}{۳}$ است ؟ (سراسری ۹۳ داخل کشور)

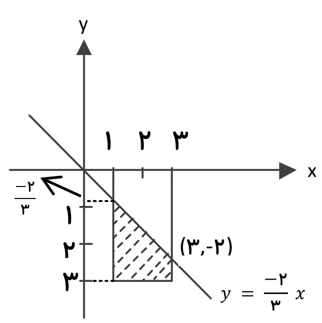
۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ:

در معادله درجه دوم $ax^۲+bx-۵=۰$ چون ضرایب $a\in[۱,۳]$ و $c=-۵$ مختلف العلامه اند , دلتا همواره مثبت است :

$\Delta=b^۲-۴a(-۵)=b^۲+۲۰a>۰$

بنابراین کافیست تنها شرط مجموع دو ریشه معادله بزرگتر از $\frac{۲}{۳}$ را اعمال کنیم. برای راحتی کار a را با متغیر x و نیز b را با متغیر y نمایش می دهیم:



$a_S=۲\times۳=۶$

مجموع دو ریشه $=\frac{-b}{a} \longrightarrow \frac{-y}{x}>\frac{۲}{۳}$

چون $x>۰$ با ضرب دو طرف در x , جهت نامعادله حفظ می شود :

$-y>\frac{۲}{۳}x \xrightarrow{\times(-۱)} y<-\frac{۲}{۳}x \longrightarrow$ **در شکل سایه زده شده است.**

$a_A=$ **مساحت ذوزنقه** $=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{مجموع دو قاعده}}{۲}=\frac{(\frac{۷}{۳}+۱)\times۲}{۲}=\frac{۱۰}{۳}$

$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{۱۰}{۳}}{۶}=\frac{۵}{۹}$

حالا به مساله بعدی توجه کنید :

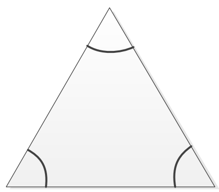
۱۰) یک نقطه به طور تصادفی , درون مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع $\sqrt{۲\pi\sqrt{۳}}$ انتخاب می شود. با کدام احتمال فاصله این نقطه تا هر راس مثلث بیشتر از ۱ واحد است ؟ (سراسری ۹۴ داخل کشور)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ :

می دانیم مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a برابر است با $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{٤}$. بنابراین :

$$a_S = \frac{\left(\sqrt{۲\pi\sqrt{۳}}\right)^۲\sqrt{۳}}{٤} = \frac{۳\pi}{۲}$$



هر کدام از نواحی فوق $\frac{۱}{٦}$ مساحت دایره ای به شعاع ۱ هستند. بنابراین :

$$a_A = \text{مساحت مثلث} - ۳\left(\frac{۱}{٦}\text{مساحت دایره}\right)$$

$$a_A = \frac{۳\pi}{۲} - \frac{۱}{۲}\pi(۱)^۲ = \pi \qquad P(A) = \frac{\pi}{\frac{۳\pi}{۲}} = \frac{۲}{۳}$$

سوال بعدی :

۱۱) در داخل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۸ واحد , نقطه ای به تصادف اختیار می کنیم. با کدام احتمال فاصله این نقطه از هر ضلع مثلث بیشتر از $\sqrt{۳}$ است ؟(سراسری ۹۵ داخل کشور)

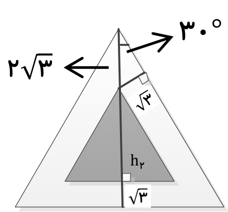
۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

پاسخ :

فضای نمونه ای برابر است با :

$$a_S = \frac{۸^۲\times\sqrt{۳}}{٤} = ۱٦\sqrt{۳}$$

پیشامد مطلوب ناحیه سایه زده است که در واقع مثلثی متشابه با مثلث بزرگ است.



اگر نسبت تشابه را پیدا کنیم , می توانیم از آن برای محاسبه نسبت مساحت ها کمك بگیریم.

ارتفاع مثلث بزرگ را $h_۱$ و ارتفاع مثلث کوچك را $h_۲$ فرض می کنیم , و نسبت تشابه دو مثلث را k در نظر می گیریم :

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = k^۲ = \left(\frac{h_۲}{h_۱}\right)^۲ = \left(\frac{۴\sqrt{۳}-۲\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۳}}\right)^۲ = \frac{۱}{۱۶}$$

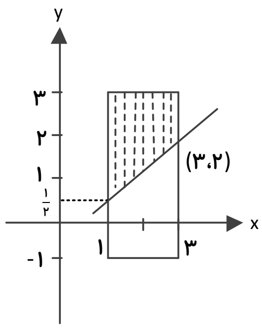
ضمنا ارتفاع مثلث از این نکته که در مثلث متساوی الاضلاع ارتفاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر ضلع است , بدست آمده است.

مساله بعدی :

۱۲) مقدار عدد a به طور تصادفی بین ۱ و ۳ و مقدار عدد b به طور تصادفی بین ۱− و ۳ انتخاب شده است. احتمال اینکه حاصل $۳a - ۴b$ کمتر از ۱ باشد , کدام است ؟(سراسری ۹۳ خارج از کشور)

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۷}{۱۶}$ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

پاسخ :



برای راحتی a را با متغیر x و نیز b را با متغیر y نمایش می دهیم :

$$a_S = ۲ \times ٤ = ۸$$

پیشامد مطلوب آنست که $۳x - ٤y < ۱$.

$$a_A = \text{مساحت ذوزنقه سایه زده} = \frac{(\frac{۵}{۲}+۱)\times ۲}{۲} = \frac{۷}{۲} \qquad P(A) = \frac{\frac{۷}{۲}}{۸} = \frac{۷}{۱٦}$$

۱۳) قطار شهری با اولین عبور در ساعت ۶ , به فاصله زمانی هر ده دقیقه از یک دستگاه عبور می کند. اگر شخصی بین ساعت ۷ تا ۷:۲۰ به این دستگاه رسیده باشد , با کدام احتمال بیشتر از ۴ دقیقه و کمتر از ۶ دقیقه منتظر می ماند ؟(سراسری ۹۴ خارج از کشور)

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۲ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴

پاسخ :

فضای نمونه ای بازه زمانی $[۰,۲۰]$ است. (بر حسب دقیقه و با شروع از ساعت ۷) بنابراین : $l_{(S)} = ۲۰$

و اما پیشامد مطلوب بازه های زمانی $[٤,٦]$ و نیز $[١٤,١٦]$ است , بنابراین :

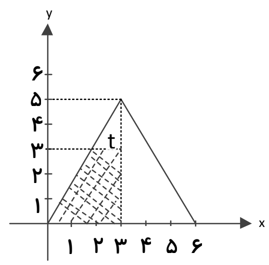
$$l_A = ۲ + ۲ = ٤ \qquad P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{٤}{۲۰} = ۰/۲$$

و آخرین سوال از این تیپ :

۱۴) یک نقطه $M(x,y)$ به طور تصادفی در داخل مثلثی با راس های $(۰,۰)$و$(۶,۰)$و$(۳,۵)$ انتخاب می کنیم.با کدام احتمال , طول و عرض این نقطه کمتر از ۳ می باشد ؟ (سراسری ۹۵ خارج از کشور)

۱) ۰/۴۲ ۲) ۰/۴۵ ۳) ۰/۵۵ ۴) ۰/۵۸

پاسخ :



ابتدا مثلث فضای نمونه ای را رسم می کنیم .

$$a_S = \frac{٥\times٦}{٢} = ١٥$$

پیشامد مطلوب , ذوزنقه سایه زده است. قاعده پایینی این ذوزنقه ۳ و ارتفاع آن هم ۳ است.

برای محاسبه طول قاعده بالایی از تالس کمک می گیریم :

$$\frac{t}{٣} = \frac{٢}{٥} \Longrightarrow t = \frac{٦}{٥}$$

بنابراین : $a_A = \frac{\left(\frac{٦}{٥}+٣\right)\times٣}{٢} = \frac{٦٣}{١٠}$ $\qquad P(A) = \frac{\frac{٦٣}{١٠}}{١٥} = ٠/٤٢$

■بخش چهارم : احتمال شرطی و قاعده ضرب احتمال ها :

در بعضی از مسائل احتمال می خواهیم احتمال وقوع پیشامدی مانند A را محاسبه کنیم , در شرایطی که می دانیم B رخ داده است (یا فرض می کنیم B رخ می دهد.) در این صورت با یک مساله احتمال شرطی مواجه هستیم و آنرا با نماد $P(A\,|\,B)$ نمایش می دهیم.

خواهیم داشت : $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

البته حتی الامکان سعی می کنیم خودمان را درگیر فرمول فوق نکنیم , بلکه با روشی ساده تر این مسائل را حل می کنیم :

فضای نمونه ای را محدود به شرط مساله می کنیم و سپس احتمال پیشامد A را با توجه به این فضای نمونه ای جدید محاسبه می کنیم. بعنوان مثال : در پرتاب یک تاس می دانیم عدد رو شده زوج است. با کدام احتمال عدد رو شده اول است؟

$S = \{۲,۴,۶\} \qquad A = \{۲\} \qquad P(A) = \frac{۱}{۳}$

در برخی از مسائل هم می خواهیم احتمال وقوع چند اتفاق متوالی را محاسبه کنیم. در این صورت از قاعده ضرب احتمال ها کمک می گیریم.

مثال) در جعبه ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه وجود دارد. متوالی هم و بدون جاگذاری ۳ مهره خارج می کنیم. با کدام احتمال اولی و دومی سفید و سومی سیاه است؟ $P(A)=\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}\times\frac{۳}{۵}$

حال به مسائل زیر توجه کنید:

۱۵) در جعبه ای ۸ لامپ موجود است که دوتای آن معیوب می باشد. به تصادف متوالیا این لامپ ها را آزمایش کرده و لامپ سالم را کنار می گذاریم تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمال در آزمایش سوم اولین لامپ معیوب پیدا می شود؟ (سراسری ۹۵ داخل کشور)

۱) $\frac{۵}{۲۸}$ ۲) $\frac{۴}{۲۱}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲۱}$

پاسخ :

می بایست اولین لامپ خارج شده سالم ، دومی هم سالم و سومی معیوب باشد ، بنابراین : $P=\frac{٦}{٨}\times\frac{٥}{٧}\times\frac{٢}{٦}=\frac{٥}{٢٨}$

و مساله بعد :

۱۶) دو تاس را باهم می ریزیم . در حالیکه عدد یک تاس مضرب ۳ نباشد با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ است؟ (سراسری ۹۳ خارج از کشور)

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

پاسخ :

فضای نمونه ای را محدود به شرط مساله می کنیم. یعنی از ٣٦ حالت در پرتاب دو تاس حالاتی که هر دو تاس عددی مضرب ٣ باشند را حذف می کنیم. بنابراین : $n(S)=٣٦-٤=٣٢$

چهار عضو حذف شده ، در واقع همان $(٣,٦)$, $(٦,٣)$, $(٣,٣)$و$(٦,٦)$ هستند.

از طرفی در پرتاب دو تاس ، با توجه به نکته مطرح شده در پاسخ سوال ۱ ، تعداد حالات رخ دادن مجموع "مضرب ۳ "

برابر است با : $٢+٥+٤+١=١٢$

که از این ۱۲ حالت ، چهار حالت $(٣,٦)$, $(٦,٣)$, $(٣,٣)$و$(٦,٦)$ که مجموعشان مضربی از ۳ است، در فضای نمونه ای ما وجود ندارند، پس : $n(A)=٨$ $P(A)=\frac{٨}{١٢}=\frac{١}{٤}$

که متاسفانه پاسخ درست در گزینه ها وجود ندارد.

۱۷) یک سکه را پرتاب می کنیم. اگر "رو" بیاید آن گاه تاس می ریزیم. اگر "پشت" بیاید دوباره سکه را پرتاب میکنیم. این عمل را آنقدر ادامه می دهیم تا مجاز به پرتاب تاس باشیم. با کدام احتمال حداکثر بعد ار پرتاب سوم سکه , عدد تاس مضرب ۳ می باشد ؟(سراسری ۹۴ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

پاسخ :

برای رسیدن به این منظور می بایست :

یا سکه اول "رو" و "تاس مضرب ۳" باشد , یعنی : $\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۶}$

یا سکه اول "پشت" و سکه دوم "رو" و تاس مضرب ۳ باشد , یعنی : $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۱۲}$

یا سکه های اول و دوم "پشت" , سوم "رو" و تاس مضرب ۳ باشد, یعنی : $\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۲۴}$

$$P=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۴}=\frac{۷}{۲۴}$$

۱۸) یک تاس را آنقدر پرتاب می کنیم تا برای اولین بار عدد مضرب ۳ ظاهر شود. با کدام احتمال حداکثر در پرتاب سوم این نتیجه حاصل می شود ؟ (سراسری ۹۵ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲۷}$

پاسخ :

مشابه مساله قبل خواهیم داشت :

در پرتاب اول عدد مضرب ۳ بیاید : $\frac{۱}{۳}$

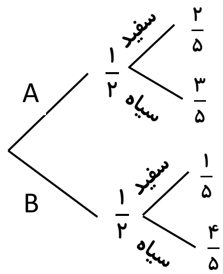
در پرتاب اول نیاید و در پرتاب دوم بیاید : $\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۹}$

در پرتابهای اول و دوم نیاید و در پرتاب سوم بیاید : $\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{٤}{۲۷}$

$$P=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۹}+\frac{٤}{۲۷}=\frac{۱۹}{۲۷}$$

■بخش پنجم : قاعده احتمال کل – قضیه بیز

در بسیاری از موارد , فضای نمونه ای روی چند مجموعه افراز می شود و مقادیر احتمال روی این افراز ها متفاوت است. مثلا فرض کنید در جعبه A , ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه B, ۱ مهره سفید و ۴ مهره سیاه وجود دارد. به تصادف یکی از ظرفها را انتخاب و مهره ای از آن خارج می کنیم. می خواهیم احتمال سفید بودن این مهره را محاسبه کنیم. با توجه به نمودار درختی مقابل خواهیم داشت:



$$P\left(\text{سفید}\right)=\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۵}\right)=\frac{۳}{۱۰}$$

مثال اخیر یک مساله برای قاعده احتمال کل بود. حال اگر در چنین مساله ای نتیجه اعلام شود و بخواهیم احتمال اینکه این نتیجه از یکی از افراز ها رخ داده باشد را حساب کنیم , با یک مساله قاعده بیز مواجه ایم. بعنوان نمونه در همین مثال اخیر , سوالی به این صورت مطرح می کنیم: مهره ای خارج کرده و ملاحظه می شود سفید است. با کدام احتمال این مهره از ظرف A خارج شده است؟

برای حل مسائل بیز از تکنیک مقابل کمک می گیریم : $\frac{P(\text{نتیجه} \cap \text{مبدا})}{P(\text{نتیجه})}$

یعنی برای این مثال خواهیم داشت : $\frac{P(\text{از ظرف A و سفید})}{P(\text{سفید})}=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}}{\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۵}\right)}=\frac{۲}{۳}$

به مسائل زیر توجه کنید :

۱۹) در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول ۶ مهره سفید و در ظرف دوم ۳ مهره سفید است. از اولی ۷ مهره و از دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟ (سراسری ۹۴ داخل کشور)

۱) $\frac{۱۳}{۷۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۴۴}$

پاسخ :

در ظرف سوم ۱۲ مهره موجود است که ۷ تای آن متعلق به ظرف اول و ۵ تای آن متعلق به ظرف دوم است. بنابراین می توان گفت با احتمال $\frac{۷}{۱۲}$ با مهره ای متعلق به ظرف A و با احتمال $\frac{۵}{۱۲}$ با مهره ای متعلق به ظرف B مواجه می شویم. بنابراین :

$$P\left(\text{سفید}\right)=\left(\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۶}{۲۴}\right)+\left(\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۸}\right)=\frac{۳۱}{۱۴۴}$$

۲۰) در یک شرکت تولیدی , ۵۵ درصد کالا محصول دستگاه A با احتمال ۳ درصد معیوب و ۴۵ درصد آن محصول دستگاه B با احتمال ۴ درصد معیوب است. دو دستگاه مستقل از هم هستند. اگر یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کنیم و بدانیم که معیوب است , با کدام احتمال این کالا محصول دستگاه A است ؟(سراسری ۹۴ خارج از کشور)

۱) $\frac{۱۱}{۲۶}$ ۲) $\frac{۶}{۱۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۶}$

پاسخ :

$$P=\frac{P(A \text{ و معیوب})}{P(\text{معیوب})}=\frac{\frac{۵۵}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰۰}}{\left(\frac{۵۵}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰۰}\right)+\left(\frac{۴۵}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}\right)}=\frac{۱۱}{۲۶}$$

تنظیم : علی اکبر علی زاده

a.a.alizade @gmail.com