

## احتمال

## بخش اول: احتمال مقدماتی

پدیده ها در جهان هستی دو دسته هستند،

(۱) پدیده های قطعی: پدیده هایی هستند که نتیجه ی آنها قبل از آزمایش مشخص و قطعی است.

مثال: اگر توپي را از بلندی، رها کنیم به طور حتم به زمین می خورد.

(۲) پدیده های تصادفی: پدیده هایی هستند که نتیجه آن ها قبل از آزمایش مشخص نیست و با هر بار آزمایش نتیجه ی آن ممکن است تغییر کند. مثال: پرتاب تاس شش وجهی - پرتاب سکه - تولد نوزاد-برد و باخت در بازی فوتبال و...

## پدیده های تصادفی:

(۱) فضای نمونه ای: همه حالات ممکن که در یک پدیده تصادفی رخ می دهد را فضای نمونه ای آن پدیده تصادفی می گویند. فضای نمونه ای را با  $\Omega$  نمایش می دهند.

تمرین) در هر یک از حالات زیر فضای نمونه ای را مشخص کنید؟

الف) پرتاب یک تاس و یک سکه با هم

$$S = \{(پ, ۱), (پ, ۲), \dots, (پ, ۶), (ر, ۱), (ر, ۲), \dots, (ر, ۶)\}$$

ب) تولد سه نوزاد

$$S = \{(bbb), (bbg), (bgb), (gbb), (ggb), (gbg), (bgg), (ggg)\}$$

(۲) پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از یک فضای نمونه یک تجربه تصادفی را پیشامد تصادفی می گویند. پیشامدها را با حروف بزرگ لاتین نمایش می دهند. ( $A \subseteq S$ )

نکته) به پیشامد تهی، پیشامد نشدنی یا ناممکن و به پیشامد  $\Omega$  پیشامد حتمی یا شدنی می گویند.

مثال) در پرتاب دو تاس پیشامد آنکه مجموع دو تاس کمتر از ۴ باشد را بنویسید؟

$$A = \{(۱, ۱), (۱, ۲), (۲, ۱)\}$$

تمرین) خانواده ای دارای سه فرزند است مطلوبست:

الف) فضای نمونه ای این تجربه تصادفی      ب) پیشامد اینکه حداقل یک فرزند پسر باشد؟

ج) پیشامد اینکه فقط دو فرزند دارای یک جنسیت باشند؟

الف)  $S = \{(bbb), (bbg), (bgb), (gbb), (ggb), (gbg), (bgg), (ggg)\}$

ب)  $A = \{(bbb), (bbg), (bgb), (gbb), (ggb), (gbg), (bgg)\}$

ج)  $B = \{(bbg), (bgb), (gbb), (ggb), (gbg), (bgg)\}$

اعمال جبری روی پیشامدها :

اجتماع دو پیشامد : پیشامد  $A \cup B$  زمانی رخ می دهد که  $A$  یا  $B$  یا هر دو رخ دهند. (حداقل یکی رخ دهد)

اشتراک دو پیشامد: پیشامد  $A \cap B$  زمانی رخ می دهد که هر دو باهم رخ دهند.

تفاضل دو پیشامد: پیشامد  $A - B$  زمانی رخ می دهد که  $A$  رخ دهد ولی  $B$  رخ ندهد.

متمم یک پیشامد: پیشامد  $A'$  زمانی رخ می دهد که  $A$  رخ ندهد.  $A' = S - A$

دو پیشامد ناسازگار : دو پیشامد  $A$  و  $B$  را ناسازگار می گوئیم هرگاه  $A \cap B = \emptyset$  باشد، در غیر این صورت این دو پیشامد را سازگار می گوئیم.

مثال) پیشامدهای  $A'$  و  $A$  ناسازگارند.

۳) احتمال یا شانس:

اگر  $A$  پیشامدی از فضای نمونه ای  $S$  باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد  $A$  را که با  $P(A)$  نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت های ممکن}}$$

نکته) اصول کلموگروف :

$$P(S) = 1, P(\emptyset) = 0 \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad (۲)$$

۳) قانون جمع احتمالات :  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

نکته) اگر پیشامدهای  $A_1, A_2, \dots, A_n$  دوجه دو ناسازگار باشند، داریم :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

نکته) چند فرمول مهم و پرکاربرد در مسایل احتمال:

$$۱) P(A') + P(A) = ۱$$

$$۲) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$۳) P(A' \cap B') = ۱ - P(A \cup B)$$

تمرین) تاسی را سه بار می اندازیم. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه :

الف) هر سه عدد رو شده مثل هم باشند؟

ب) دقیقا در دو پرتاب عدد ۴ ظاهر شود؟

$$\text{حل) } n(S) = ۶ \times ۶ \times ۶ = ۲۱۶$$

$$\text{الف) } A = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3), \dots, (6,6,6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{۶}{۲۱۶} = \frac{۱}{۳۶}$$

$$\text{ب) } (4,4, \dots), (4, \dots, 4), (\dots, 4, 4) \Rightarrow P(B) = \frac{۵ + ۵ + ۵}{۲۱۶} = \frac{۱۵}{۲۱۶}$$

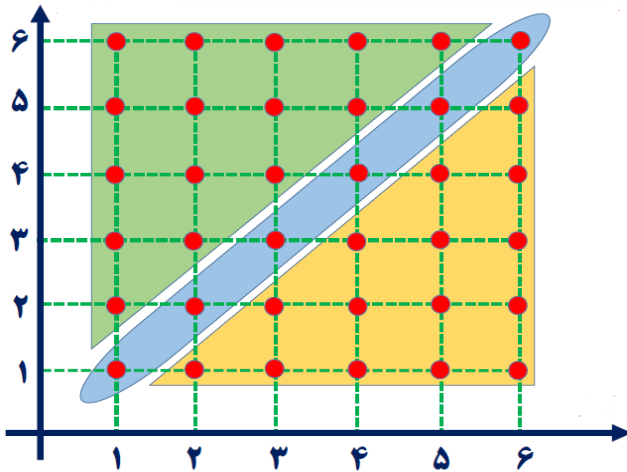
تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس سالم، احتمال آنکه :

الف) عدد تاس اول و دوم با هم برابر باشند؟

ب) عدد تاس اول از عدد تاس دوم بیشتر باشد؟

ج) عدد تاس اول بزرگتر یا مساوی عدد تاس دوم باشد؟

د) حداقل یکی از برآمدها عدد ۵ باشد؟



نکته ( مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس به صورت جدول زیر است.

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

تمرین در پرتاب همزمان دو تاس سالم، احتمال اینکه،

الف) مجموع اعداد رو شده برابر با ۴ باشد؟

ب) مجموع اعداد رو شده بزرگتر یا مساوی ۱۱ باشد؟

ج) مجموع اعداد رو شده کوچکتر از ۷ باشد؟

د) مجموع اعداد رو شده بزرگتر یا مساوی ۷ باشد؟

(حل)

$$\text{الف) } P(A) = \frac{3}{36}, \quad \text{ب) } P(B) = \frac{3}{36}, \quad \text{ج) } P(C) = \frac{15}{36}, \quad \text{د) } P(D) = \frac{21}{36}$$

تمرین در پرتاب همزمان دو تاس سالم، احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳ باشد؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

حل) کافی است مضرب ۶

باشند.

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

تمرین) در پرتاب دو تاس احتمال آنکه مجموع اعداد رو ده بزرگتر از ۳ و کوچکتر از ۸ باشد؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{18}{36}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده بین ۲ و ۷ باشند، چند برابر احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده بین ۷ و ۱۲ باشند؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P_1 = \frac{14}{36}, \quad P_2 = \frac{14}{36} \Rightarrow \text{برابر ۱}$$

تمرین) در پرتاب دو تاس احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده مربع یک عدد طبیعی باشد؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{7}{36}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس سالم، احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده اول باشد؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{15}{36}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس سالم، احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده بزرگتر از ۱۰ نباشد؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{33}{36}$$

نکته) در مورد اعداد زوج و فرد این نکات را بخاطر بسپارید:

۱- برای اینکه حاصل ضرب دو عدد فرد باشد، باید هر دو عدد فرد باشند.

۲- برای اینکه حاصل جمع دو عدد فرد شود، باید اولی فرد و دومی زوج یا اولی زوج و دومی فرد باشد.

۳- برای اینکه حاصل ضرب دو عدد زوج باشد، باید هر دو عدد زوج یا اولی زوج و دومی فرد یا اولی فرد و دومی زوج باشد.

۴- برای اینکه حاصل جمع دو عدد زوج باشد، باید هر دو عدد زوج یا هر دو عدد فرد باشند.

نکته ( در پرتاب دو تاس

$$\left\{ \begin{array}{l} 9 \Rightarrow \text{هر دو زوج} \\ 9 \Rightarrow \text{هر دو فرد} \\ 9 \Rightarrow \text{دومی فرد - اولی زوج} \\ 9 \Rightarrow \text{دومی زوج - اولی فرد} \end{array} \right. \Rightarrow \text{حالت } 36$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس مطلوبست احتمال آنکه حاصل ضرب هر دو عدد رو شده زوج باشند؟

$$P(A) = \frac{9 + 9 + 9}{36} = \frac{27}{36}$$

تمرین) در پرتاب همزمان دو تاس احتمال آنکه حاصل جمع اعداد رو شده فرد باشند، چقدر است؟

$$P(A) = \frac{9 + 9}{36} = \frac{18}{36}$$

تمرین) خانواده ای دارای سه فرزند است، مطلوبست احتمال آنکه :

الف) حداکثر یکی از فرزندان پسر باشد. ب) دو فرزند آخر پسر باشد. ج) حداقل دو فرزند دختر باشد.

$$\text{الف) } P(A) = \frac{4}{8}, \quad \text{ب) } P(B) = \frac{2}{8}, \quad \text{ج) } P(C) = \frac{4}{8}$$

نکته) یادآوری از ترکیبیات :

الف) انتخاب بدون ترتیب (ترکیب) : در این نوع انتخاب ترتیب مهم نیست. ترکیب  $r$  شی از  $n$  شی متمایز را با نماد  $\binom{n}{r}$  نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

۲) انتخاب با ترتیب (جایگشت-ترتیب): در این نوع انتخاب ترتیب چیدن اشیا مهم است، جایگشت  $r$  شی از  $n$  شی متمایز را با نماد  $P(n, r)$  نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می شود.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تمرین) از جعبه ای که شامل ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه است، ۳ مهره به تصادف انتخاب می کنیم، مطلوبست احتمال اینکه:

الف) حداقل دو مهره سفید باشند. ب) دقیقا یک مهره سفید باشد. ج) سه مهره هم رنگ باشند؟

حل الف) حداقل دو مهره سفید، یعنی دو مهره سفید یا سه مهره سفید باشند.

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1} + \binom{5}{3}\binom{4}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{50}{84}$$

ب) دقیقا یک سفید یعنی یک سفید و ۲ سیاه

$$P(B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{30}{84}$$

ج) سه مهره هم رنگ یعنی سه تا سفید یا سه تا سیاه

$$P(C) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{14}{84}$$

تمرین) از جعبه ای که شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد می باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم، مطلوبست احتمال آنکه :

الف) هر ۳ مهره سبز باشند؟ ب) فقط یک مهره سبز باشند؟ ج) دقیقا ۲ مهره آبی باشند؟

د) یک مهره سبز و حداقل یک مهره آبی باشد؟ ه) هر سه مهره هم رنگ باشند؟

$$n(S) = \binom{11}{3} = 165 \quad \text{(حل)}$$

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\binom{5}{3}}{165} = \frac{10}{165}, \quad \text{ب) } P(B) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{165} = \frac{30}{165}, \quad \text{ج) } P(C) = \frac{\binom{4}{2}\binom{7}{1}}{165} = \frac{42}{165}$$

$$\text{د) } P(D) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{2}}{165} = \frac{60}{165}, \quad \text{ه) } P(E) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3}}{165} = \frac{14}{165}$$

تمرین) در جعبه ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز قرار دارد، به تصادف ۳ مهره از آن خارج می کنیم، با چه احتمالی فقط یکی از مهره ها سفید است؟

$$\text{حل) } P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$$

تمرین) در کیسه ای ۵ سفید و ۴ سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد، ۳ مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم، با کدام احتمال رنگ مهره های خارج شده متفاوت است؟

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{11}$$

تمرین) در جعبه ای ۵ مهره آبی، ۳ مهره سبز و ۲ مهره قرمز وجود دارد، اگر سه مهره به تصادف از آن خارج کنیم، با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده، هم رنگ هستند؟

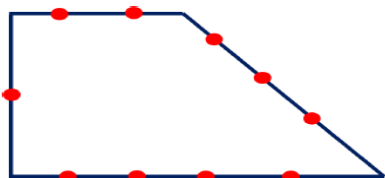
$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1} + \binom{3}{2}\binom{7}{1} + \binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{79}{120}$$

تمرین) در ظرفی ۵ مهره به شماره های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می آوریم، با کدام احتمال مجموع شماره های این دو مهره یک عدد زوج است؟

حل) مجموع زوج باشد یعنی هر دو زوج یا هر دو فرد باشند.

$$P(A) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

تمرین) از میان ده نقطه شکل زیر، ۴ نقطه به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال آنکه با این چهار نقطه بتوان یک چهار ضلعی ساخت بطوریکه روی هر خط فقط یک راس آن قرار بگیرد، چقدر است؟



$$P(A) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{4}{35}$$

تمرین) در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می آوریم، با کدام احتمال هر دو مهره سفید هستند؟

حل) ابتدا جعبه را انتخاب نموده سپس سفید بودن مهره خارج شده از جعبه ها را بدست می آوریم.



$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{31}{168}$$

تمرین) در جعبه ای ۳ مهره قرمز و ۵ مهره سیاه وجود دارد، به طور تصادفی و بدون جایگذاری ۲ مهره از داخل ظرف بیرون می آوریم، احتمال آنکه مهره اول سیاه و مهره دوم قرمز باشد، کدام است؟

$$\text{حل) } \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

تمرین) در جعبه ای ۳ مهره قرمز و ۵ مهره سیاه وجود دارد، به طور تصادفی و با جایگذاری ۲ مهره از داخل ظرف بیرون می آوریم، احتمال آنکه مهره اول سیاه و مهره دوم قرمز باشد، کدام است؟

$$\text{حل) } \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}$$

تمرین) در جعبه ای ۳ مهره سبز و ۴ آبی و ۲ قرمز موجود است، به طور تصادفی و بدون جایگذاری ۳ مهره از داخل ظرف بیرون می آوریم، احتمال آنکه مهره اول آبی و مهره دوم سبز و مهره سوم آبی باشد، کدام است؟

$$\text{حل) } \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{126}$$

تمرین) در جعبه ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره قرمز و ۷ مهره سیاه وجود دارد، به طور تصادفی و بدون جایگذاری ۴ مهره از داخل ظرف بیرون می آوریم، احتمال آنکه مهره اول سفید و مهره چهارم قرمز باشد، را بیابید؟

$$\text{حل) } \frac{3}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{14}$$

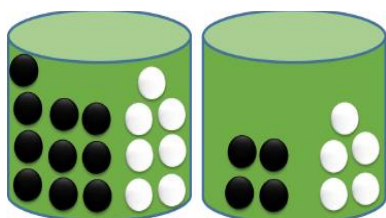
تمرین) در کیسه ای ۳ مهره سفید و ۷ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز وجود دارد، چهار مهره متوالی و بدون جایگذاری از این کیسه خارج می کنیم. بدون توجه به اولین و دومین و سومین مهره با کدام احتمال مهره چهارم سفید است؟

$$\text{حل) } P(A) = \frac{3}{15}$$

تمرین) در جعبه ای سه ظرف مشابه داریم، ظرف اول شامل یک مهره سفید و یک مهره سیاه، ظرف دوم شامل یک مهره سفید و ۲ مهره سیاه و در ظرف سوم شامل ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه است. در برداشتن یک مهره از این جعبه احتمال آنکه مهره خارج شده سیاه باشد، را بیابید؟

$$\text{حل) } P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{47}{90}$$

تمرین) دو ظرف داریم، در ظرف اول ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در ظرف دوم ۷ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه است، از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون روئت در ظرف دوم قرار می دهیم. آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟



$$P(A) = \frac{5}{9} \times \frac{8}{18} + \frac{4}{9} \times \frac{7}{18} = \frac{34}{81}$$

حل مسائل احتمال به کمک جایگشت :

تمرین) اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار گرفتن اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ به وجود آید، با کدام احتمال عدد به وجود آمده زوج است؟

$$\text{کل حالات} = 4 \times 4 \times 3 = 48$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \times 3 \times 1 = 12 \\ 3 \times 3 \times 2 = 18 \end{array} \right. \Rightarrow 12 + 18 = 30 \Rightarrow P(A) = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$$

تمرین) تاس سالمی را ۳ بار می اندازیم، با کدام احتمال هیچ دو عدد رو شده مثل هم نمی باشند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216 \\ n(A) = 6 \times 5 \times 4 = 120 \end{array} \right. \Rightarrow P(A) = \frac{5}{9}$$

تمرین) حروف کلمه ی *ATAXIA* را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم، با کدام احتمال هر سه حرف شبیه به هم کنار هم قرار می گیرند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} n(S) = \frac{6!}{3!} = 120 \\ n(A) = 4! \times 1 = 4! \quad AAATXI \end{array} \right. \Rightarrow P(A) = \frac{4!}{120} = \frac{1}{5}$$

تمرین) حروف کلمه ی *LAGRANGE* را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم، با کدام احتمال حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} AAGGLRNE \Rightarrow n(A) = 6! \times 1 \times 1 = 6! \\ n(S) = \frac{8!}{2! \times 2!} \end{array} \right. \Rightarrow P(A) = \frac{1}{14}$$

تمرین) خانواده دارای ۴ فرزند است، مطلوبست احتمال اینکه :

الف) دارای ۲ فرزند پسر و ۲ فرزند دختر باشد. (ب) دارای ۳ فرزند پسر و ۱ دختر باشد.

ج) دارای ۲ فرزند پسر یا ۳ فرزند دختر باشد. (د) تعداد پسرها از تعداد دخترها بیشتر باشد.

$$n(S) = 16$$

تعداد پسر ( دختر)	۴	۳	۲	۱	۰
تعداد حالات	۱	۴	۶	۴	۱

حل مسائل احتمال به کمک اصل متمم :

تمرین) جعبه ای شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ۲ مهره زرد می باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم، مطلوبست احتمال اینکه :

الف) حداقل یک مهره آبی باشد. (ب) حداکثر دو مهره سبز باشد. (ج) هر ۳ مهره هم‌رنگ نباشد.

$$n(S) = \binom{11}{3} = 165$$

الف) متمم حداقل یک مهره آبی باشد، هیچ مهره آبی نباشد.

$$P(A') = \frac{\binom{7}{3}}{165} = \frac{35}{165} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{35}{165} = \frac{130}{165}$$

(ب) متمم حداکثر دو مهره سبز باشد، یعنی هر سه مهره سبز باشند.

$$P(A') = \frac{\binom{5}{3}}{165} = \frac{10}{165} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{10}{165} = \frac{155}{165}$$

(ج) متمم اینکه هر ۳ مهره هم‌رنگ نباشند یعنی هر ۳ هم‌رنگ باشند.

$$P(A') = \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3}}{165} = \frac{14}{165} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{14}{165} = \frac{151}{165}$$

تمرین) از بین ۴ دانش آموز سال دهم و ۵ دانش آموز سال یازدهم، چهار نفر را به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال آنکه از هر دو گروه انتخاب شوند را بیابید؟

حل) متمم اینکه از هر دو گروه انتخاب شوند برابر با همه از یک گروه هستند.

$$n(S) = \binom{9}{4} = 126 \Rightarrow P(A') = \frac{\binom{4}{4} + \binom{5}{4}}{126} = \frac{6}{126} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{6}{126} = \frac{120}{126}$$

تمرین ( در پرتاب همزمان دو تاس با کدام احتمال لااقل یکی از اعداد رو شده در این دو تاس مضرب ۳ است؟

حل) متمم مضرب ۳ باشد برابر با مضرب ۳ نباشد.

$$P(A') = \frac{16}{36} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{16}{36} = \frac{20}{36}$$

تمرین) از بین اعداد ۳ رقمی به تصادف یک عدد برداشته ایم، با کدام احتمال لااقل یک بار رقم ۲ در این عدد ظاهر شده است؟

حل) متمم لااقل یک بار عدد ۲ ظاهر شود برابر با رقم ۲ اصلا ظاهر نشود.

$$\begin{cases} n(S) = 9 \times 10 \times 10 = 900 \\ n(A') = 8 \times 9 \times 9 \end{cases} \Rightarrow P(A') = \frac{72}{100} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{72}{100} = \frac{28}{100}$$

تمرین) در یک خانواده ی ۵ فرزندی با کدام احتمال حداقل ۲ فرزند پسر داریم؟

حل) متمم حداقل دو فرزند پسر برابر با هیچ فرزند پسری نداشته باشیم یا ۴ دختر (۱ پسر) داشته باشیم.

$$\begin{cases} n(S) = 32 \\ P(A') = \frac{6}{32} \end{cases} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{6}{32} = \frac{13}{16}$$

تمرین) حروف کلمه ی  $ABADN$  را بریده و به طور تصادفی در کنار هم قرار می دهیم، با کدام احتمال دو حرف  $A$  کنار هم قرار نمی گیرند؟

حل) متمم اینکه دو حرف کنار هم قرار نگیرند برابر با اینکه دو حرف کنار هم باشند.

$$\begin{cases} n(S) = \frac{5!}{2!} = 60 \\ P(A') = \frac{1 \times 4!}{60} = \frac{24}{60} \end{cases} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{24}{60} = \frac{3}{5}$$

### قانون جمع احتمالات:

تمرین) اگر داشته باشیم  $P(A) = \frac{1}{4}$  و  $P(B') = \frac{1}{2}$  و  $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$  مقدار  $P(A \cup B)$  را بیابید؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{10} + \frac{6}{10} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

تمرین) اگر  $P(A) = \frac{2}{3}$  و  $P(B) = \frac{1}{3}$  و  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$  باشند، حاصل  $\frac{P(A-B)}{P(A' \cap B')}$  را بیابید؟

$$\text{حل) } \frac{P(A - B)}{P(A' \cap B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(A \cup B)} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{1 - \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right]} = \frac{3}{1} = 3$$

تمرین) از بین اعداد مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$  عددی را به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال اینکه :

الف) عدد انتخابی زوج یا مضرب ۵ باشد را بدست آورید؟ ب) عدد انتخابی فرد و اول باشد؟

$$\text{حل الف) } P(A) = \frac{12}{20} \quad \text{ب) } P(B) = \frac{7}{20}$$

تمرین) فرض کنید در جامعه ای درصد گروه های خونی به صورت جدول زیر باشد، فردی به تصادف از این جامعه انتخاب می شود، احتمال آنکه :

گروه خونی	A	O	AB	B
درصد	۳۸٪	۱۲٪	۲۷٪	۲۳٪

الف) این فرد دارای گروه خونی A یا O باشد؟

ب) این فرد دارای گروه خونی AB نباشد؟

تمرین) احتمال آنکه حمید در شرکت استخدام شود برابر با  $\frac{6}{100}$  و در شرکت استخدام شود برابر با  $\frac{75}{100}$  است. اگر

احتمال استخدام در هر دو شرکت  $\frac{55}{100}$  باشد، با کدام احتمال فقط در یکی از شرکت ها استخدام می شود؟

$$\text{حل) } P(A - B) + P(B - A) = \frac{6}{100} + \frac{75}{100} - 2 \times \frac{55}{100} = \frac{25}{100}$$

تمرین) دو تاس را با هم می اندازیم، با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده دو تاس برابر با ۸ یا اعداد رو شده هر دو تاس زوج است؟

$$\text{حل) } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{36} + \frac{9}{36} - \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$$

## تست های بخش (۱)

۱- اعداد ۱ تا ۹ را روی ۹ کارت یکسان نوشته ایم، دو کارت به تصادف از بین آنها بیرون می آوریم، با چه احتمالی مجموع اعداد رو شده برابر با ۱۱ می باشد؟ ریاضی ۹۱

$$\frac{1}{8}(۱) \quad \frac{1}{۱۲}(۲) \quad \frac{1}{۹}(۳) \quad \frac{1}{۶}(۴)$$

حل) گزینه ۳-

$$A = \{(۶, ۵), (۷, ۴), (۸, ۳), (۹, ۲)\} \Rightarrow P(A) = \frac{۴}{\binom{۹}{۲}} = \frac{1}{۹}$$

۲- هریک از ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را روی پنج کارت یکسان نوشته و به تصادف ۳ کارت از بین آنها را کنار هم قرار می دهیم، با کدام احتمال عدد سه رقمی حاصل مضرب ۳ است؟ سراسری تجربی ۹۵

$$۰/۳(۱) \quad ۰/۴(۲) \quad ۰/۵(۳) \quad ۰/۶(۴)$$

حل) گزینه ۲-

$$\{۱, ۲, ۳\}, \{۲, ۳, ۴\}, \{۳, ۴, ۵\}, \{۱, ۳, ۵\} \Rightarrow P(B) = \frac{۳! + ۳! + ۳! + ۳!}{\binom{۵}{۳}} = ۰/۴$$

۳- در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است، به تصادف از هر

ظرف دو مهره بیرون می آوریم، با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده هم رنگ هستند؟ سراسری ریاضی ۹۳

$$۰/۱۲(۱) \quad ۰/۱۵(۲) \quad ۰/۱۸(۳) \quad ۰/۲۴(۴)$$

حل) گزینه ۲-

$$P_{\text{هم رنگ}} = P_{\text{سفید}} + P_{\text{سیاه}} \Rightarrow \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۲}}{\binom{۸}{۲}\binom{۶}{۲}} + \frac{\binom{۳}{۲}\binom{۲}{۲}}{\binom{۸}{۲}\binom{۶}{۲}} = ۰/۱۵$$

۴- در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز موجود است، سه مهره به تصادف از این کیسه خارج می کنیم، با چه احتمالی حداکثر دو مهره خارج شده هم رنگ هستند؟ سراسری ریاضی ۹۵

$$\frac{17}{22} (1) \quad \frac{19}{22} (2) \quad \frac{39}{44} (3) \quad \frac{41}{44} (4)$$

حل) گزینه ۴ - از اصل متمم کمک می گیریم،

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{41}{44}$$

۵- در جعبه ای ۷ مهره سفید، ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد، ۴ مهره به تصادف از این جعبه بیرون می آوریم، چقدر احتمال دارد که یک مهره قرمز و حداقل دو مهره سفید باشد؟ سراسری تجربی خارج از کشور ۹۴

$$\frac{30}{91} (1) \quad \frac{25}{77} (2) \quad \frac{40}{143} (3) \quad \frac{50}{143} (4)$$

حل) گزینه ۳ - حداقل دو سفید یعنی دو تا سفید یا سه تا سفید

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1} [\binom{7}{2} \binom{5}{1} + \binom{7}{3}]}{\binom{14}{4}} = \frac{40}{143}$$

۶- دو تاس را باهم پرتاب می کنیم، با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟ تجربی ۹۲

$$\frac{2}{9} (1) \quad \frac{5}{18} (2) \quad \frac{1}{4} (3) \quad \frac{5}{12} (4)$$

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

حل) گزینه ۳

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

۷- دو تاس را باهم پرتاب می کنیم، احتمال آنکه دو عدد رو شده متوالی باشند، کدام است؟

تجربی خارج از کشور ۹۵

$$\frac{2}{9} (1) \quad \frac{5}{18} (2) \quad \frac{7}{18} (3) \quad \frac{4}{9} (4)$$

حل) گزینه ۲

$$A = \{(1,2)(2,1)(2,3)(3,2)(3,4)(4,3)(4,5)(5,4)(5,6)(6,5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

۸- در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۳ سیاه و ۲ قرمز موجود است، سه مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم، با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده هم رنگ هستند؟ تجربی خارج از کشور ۹۶

$$\frac{۴۱}{۱۲۰} (۱) \quad \frac{۷۹}{۱۲۰} (۲) \quad \frac{۳۷}{۶۰} (۳) \quad \frac{۳۱}{۶۰} (۴)$$

حل) گزینه ۲

$$P(A) = \frac{\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۳}{۲}\binom{۷}{۱} + \binom{۲}{۲}\binom{۸}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۷۹}{۱۲۰}$$

۹- در کیسه ای ۵ سفید و ۴ سیاه و ۳ آبی وجود دارد، ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم با کدام احتمال رنگ مهره های خارج شده متفاوت است؟ سراسری تجربی ۹۶

$$\frac{۳}{۱۱} (۱) \quad \frac{۵}{۲۲} (۲) \quad \frac{۷}{۲۲} (۳) \quad \frac{۴}{۱۱} (۴)$$

حل) گزینه ۱

$$P(A) = \frac{۵ \times ۴ \times ۳}{\binom{۱۲}{۳}} = \frac{۳}{۱۱}$$

۱۰- در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی وجود دارد، اگر دو موش از قفس گریخته باشند، با چه احتمالی فقط یکی از موش های فراری دیابتی است؟ تجربی ۸۱

$$\frac{۱۵}{۵۶} (۱) \quad \frac{۵}{۱۴} (۲) \quad \frac{۳}{۸} (۳) \quad \frac{۱۵}{۲۸} (۴)$$

حل) گزینه ۴

$$P(A) = \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۲}} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

۱۱- در کیسه ای ۵ سفید و ۷ سیاه موجود است، دو مهره به تصادف خارج می کنیم، با چه احتمالی دو مهره هم رنگ نباشند، کدام است؟ ریاضی ۸۴

$$\frac{۶}{۱۱} (۱) \quad \frac{۱۹}{۳۳} (۲) \quad \frac{۳۵}{۶۶} (۳) \quad \frac{۳۷}{۶۶} (۴)$$

حل) گزینه ۳-

$$P(A) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۷}{۱}}{\binom{۱۲}{۲}} = \frac{۳۵}{۶۶}$$



۱۲- هر یک از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ را روی شش گوی یکسان نوشته و به طور تصادف و به طور متوالی گوی ها را از جعبه خارج می کنیم، با چه احتمالی گوی ها یک در میان زوج و فرد هستند؟ سراسری ۹۴

(۱) ۰/۱      (۲) ۰/۱۲      (۳) ۰/۱۵      (۴) ۰/۲

حل) گزینه ۱ - دو حالت را بررسی می کنیم، گوی ها با عدد زوج شروع شوند یا گوی ها با عدد فرد شروع شوند.

$$n(S) = 6! = 720$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 36 \\ 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 36 \end{array} \right. \Rightarrow P(A) = \frac{72}{720} = 0/1$$

۱۳- از بین ۱۲ کتاب که ۷ تای آنها ادبیات و ۵ تای آنها تاریخ است، ۵ کتاب به تصادف انتخاب می کنیم، با چه احتمالی ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب تاریخ انتخاب شده است؟ خارج ۹۱

(۱)  $\frac{15}{66}$       (۲)  $\frac{17}{166}$       (۳)  $\frac{35}{132}$       (۴)  $\frac{17}{132}$

حل) گزینه ۳ -

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3} \binom{5}{2}}{\binom{12}{5}} = \frac{35}{132}$$

۱۴- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای باشد  $P(A) = 0/6$  و  $P(B) = 0/7$  و  $P(A \cap B) = 0/2$  باشند، آنگاه  $P(B \cap A')$  کدام است؟ ریاضی ۹۲

(۱) ۰/۱      (۲) ۰/۳      (۳) ۰/۴      (۴) ۰/۵

حل) گزینه ۲ -

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{2}{10} = \frac{6}{10} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{10}$$

$$P(B \cap A') = \frac{7}{10} - \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$$

۱۵- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای باشند، در کدام حالت  $P(B - A) = P(B) - P(A)$  درست است؟ خارج ۹۱

(۱)  $A \subseteq B$       (۳) همواره

(۲)  $A \cap B = \emptyset$       (۴)  $P(A) < P(B)$

حل) گزینه ۱

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \Rightarrow A \subseteq B$$

۱۶- در جعبه ای ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه موجود است، ۲ مهره بدون رویت از جعبه خارج می کنیم، سپس از بین مهره های باقیمانده یک مهره به تصادف انتخاب می کنیم، احتمال اینکه مهره سفید باشد کدام است؟ سراسری خارج از کشور ۹۶

$$\frac{1}{7} (۱) \quad \frac{2}{7} (۲) \quad \frac{3}{7} (۳) \quad \frac{5}{7} (۴)$$

حل) گزینه ۳- حالت ۱) اولی سفید و دومی سفید و سومی سفید  $\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{210}$

حالت ۲) اولی سفید و دومی سیاه و سومی سفید  $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{36}{210}$

حالت ۳) اولی سیاه و دومی سیاه و سومی سفید  $\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{210}$

حالت ۴) اولی سیاه و دومی سفید و سومی سفید  $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{210}$

کل حالات:  $\frac{6}{210} + \frac{36}{210} + \frac{24}{210} + \frac{24}{210} = \frac{3}{7}$

بخش دوم: احتمال شرطی ( کاهش فضای نمونه ای)

گاهی اوقات مسئله یک پیش فرض نیز دارد، یعنی نتیجه آزمایش را دقیقاً نمی دانیم اما می دانیم که یک پیشامد خاص اتفاق افتاده است. به دو مسئله زیر دقت کنید:

الف) تاسی را می اندازیم با چه احتمالی عدد ۴ می آید؟ در این مسئله کل حالات برابر با {۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶} و احتمال برابر با  $\frac{1}{6}$  است.

ب) تاسی را می اندازیم، اگر عدد رو شده زوج باشد با چه احتمالی عدد ۴ می آید؟ در این مسئله کل حالات برابر با  $\{۲, ۴, ۶\}$  است و احتمال برابر با  $\frac{1}{3}$  است.

با توجه به مسائل بالا می بینیم که فضای نمونه در حالت ب محدود شده است که به این احتمال شرطی می گویند.

نکته) در مسائلی که کلمات شرطی مثل اگر، مشروط به اینکه، بطوریکه، ... می آید باید از احتمال شرطی کمک بگیریم.

نکته) منظور از احتمال  $A$  به شرط  $B$  که با نماد  $P(A|B)$  نمایش داده می شود، احتمال وقوع پیشامد  $A$  است به شرطی که بدانیم پیشامد  $B$  رخ داده است که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

البته این فرمول زمانی قابل تعریف است که احتمال وقوع پیشامد  $B$  صفر نباشد.

تمرین) در پرتاب یک تاس اگر بدانیم اعداد رو شده زوج هستند با چه احتمالی عدد رو شده اول می باشد؟

$$B = \{۲, ۴, ۶\}, A = \{۲\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

تمرین) از بین اعداد یک رقمی طبیعی دو عدد به تصادف انتخاب می کنیم، اگر این دو عدد اول باشند با چه احتمالی متوالی هستند؟

$$B = \{(۲,۳), (۲,۵), (۲,۷), (۳,۵), (۳,۷), (۵,۷)\}, A = \{(۲,۳)\} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

تمرین) در پرتاب چهار تاس اعداد رو شده متوالی هستند، با چه احتمالی یکی از تاس ها ۲ رو شده است؟

$$B = \{(۱,۲,۳,۴), (۲,۳,۴,۵), (۳,۴,۵,۶)\}, A = \{(۱,۲,۳,۴), (۲,۳,۴,۵)\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

تمرین) در پرتاب دو تاس اگر حاصل ضرب ارقام رو شده زوج باشد با کدام احتمال مجموع ارقام رو شده ۸ است؟

حل) حاصل ضرب دو عدد زمانی زوج است که هر دو عدد زوج یا اولی زوج و دومی فرد یا اولی فرد یا دومی زوج باشند.

$$n(B) = 9 + 9 + 9 = 27, \quad A = \{(۲,۶), (۶,۲), (۴,۴)\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

تمرین) ۷۵ درصد دانش آموزان یک کلاس در درس ادبیات و ۶۰ درصد در درس عربی و ۴۰ درصد در هر دو درس

قبول شده اند، مطلوبست :

الف) احتمال آنکه دانش آموز قبول شده در درس ادبیات در درس عربی نیز قبول شود، چقدر است؟

ب) احتمال آنکه دانش آموز قبول شده در درس عربی در درس ادبیات نیز قبول شود، چقدر است؟

(حل)

$$\text{الف) } P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{75}{100}} = \frac{40}{75} \quad \text{ب) } P(F|A) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{60}{100}} = \frac{4}{6}$$

نکته ( متمم احتمال شرطی :

$$P(A'|B') = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)}$$

تمرین ۶) اگر  $P(A) = \frac{1}{3}$  و  $P(B) = \frac{1}{4}$  و  $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$  در این صورت  $P(A'|B')$  چند برابر  $P(A|B)$  است؟

$$P(A'|B') = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - \frac{5}{12}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{9}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{P(A'|B')}{P(A|B)} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{6}$$

تمرین ۷) اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند و  $P(A) = 0.4$  و  $P(B) = 0.5$  و

$P(A \cup B) = 0.7$  مقدار  $P(A|B')$  را بیابید؟

$$P(A \cap B) = \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{7}{10} = \frac{2}{10}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{\frac{4}{10} - \frac{2}{10}}{1 - \frac{5}{10}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{2}{5}$$

تمرین) اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند و  $P(A) = 2P(B) = 0.4$  و  $P(A \cup B) = 0.5$  مقدار

$P(A|B)$  را بیابید؟

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2}$$

تمرین) در یک کشور ۴۰ درصد سالمندان ناراحتی قلبی و ۳۰ درصد آنها بیماری خونی دارند، اگر سالمندی به عارضه ی خونی مبتلا شود احتمال بروز ناراحتی قلبی ۶۰ درصد است. با کدام احتمال یکی از سالمندان حداقل به یکی از این دو مبتلا می شود؟

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{3}{10}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{18}{100}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} - \frac{18}{100} = \frac{52}{100}$$

تمرین ۸) توزیع درصد لامپ های ۱۰۰ و ۲۰۰ وات از دو کارخانه A و B به صورت جدول زیر است، احتمال اینکه لامپی از کارخانه A، ۱۰۰ وات باشد چقدر است؟

B	A	کارخانه
۴۰	۲۰	۱۰۰ وات
۳۵	۱۵	۲۰۰ وات

حل) پیشامد اینکه لامپ ۱۰۰ وات باشد برابر با S و پیشامد اینکه از کارخانه A باشد را T در نظر می گیریم:

$$P(S|T) = \frac{n(S \cap T)}{n(T)} = \frac{20}{20 + 15} = \frac{20}{45}$$

نکته) برای هر پیشامد ناتهی دلخواه A از فضای نمونه ای S داریم:

$$۱) P(A|A) = ۱ \quad ۲) P(\emptyset|A) = ۰ \quad ۳) P(A|A') = ۰$$

$$۴) P(A|S) = P(A) \quad ۵) P(S|A) = ۱$$

نکته) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار و C یک پیشامد ناتهی از فضای نمونه ای S باشند، نگاه داریم:

$$P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C)$$

تمرین ۹) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه ای S باشند، اگر بدانیم C رخ داده و احتمال A برابر با ۰/۳ است و احتمال اینکه دست کم یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد برابر ۰/۵ باشد، مقدار  $P(B'|C)$  را بیابید؟

$$P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C) \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{3}{10} + P(B|C) \Rightarrow P(B|C) = \frac{2}{10} \Rightarrow$$

$$P(B'|C) = 1 - P(B|C) = 1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$$

تمرین ۱۰) دو تاس را باهم می اندازیم، در حالی که حداقل عدد یک تاس مضرب ۳ نباشد، با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ است؟

حل) فضای پرتاب دو تاس ۳۶ حالت دارد که از این ۳۶ حالت حالت‌های هر دو مضرب سه هستند،

$n(A) = 36 - 4 = 32$  در نتیجه تعداد حالت‌هایی که حداقل یک تاس مضرب سه نباشد برابر با  $\{(3,6)(3,3)(6,3)(6,6)\}$

۳۲ است، اگر  $B$  را پیشامد اینکه جمع دو عدد رو شده مضرب ۳ باشند در نظر بگیریم داریم:

$$A \cap B = \{(1,2)(2,1)(1,5)(5,1)(2,4)(4,2)(4,5)(5,4)\} \Rightarrow P(B|A) = \frac{8}{32}$$

تمرین ۱۱) احتمال زدن گل اول توسط یک تیم برابر با  $0/2$  است، اگر گل اول را بزند با احتمال  $0/6$  بازی را می برد،

احتمال اینکه بازی را نبرد در صورتی که بدانیم گل اول را زده است، چقدر است؟

$$\begin{cases} P(A) = \frac{2}{10} \\ P(B|A) = \frac{6}{10} \end{cases} \Rightarrow P(B'|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$$

تمرین ۱۲) اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند، و  $A \subseteq B$ ،  $P(A) = \frac{1}{3}$ ،  $P(B) = \frac{3}{4}$ ، مطلوبست،  $P(B|A')$ .

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \\ P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

	با سواد	بی سواد
بالای ۶۰ سال	۵۰	۱۰۰
بین ۳۰ تا ۶۰ سال	۱۵۰	۵۰
زیر ۳۰ سال	۲۰۰	۵۰

تمرین ۱۳) ترکیب جمعیتی یک شهر کوچک به صورت جدول زیر

است، اگر احتمال آنکه فرد بالای ۳۰ سال باسواد باشد،  $P_1$  و احتمال

اینکه فرد باسواد بالای ۳۰ سال باشد، را  $P_2$  بگیریم، مقدار  $\frac{P_1}{P_2}$  کدام

است؟

$$P_1 = P(\text{بالای ۳۰ سال} | \text{باسواد}) = \frac{P(\text{بالای ۳۰ سال و باسواد})}{P(\text{بالای ۳۰ سال})} = \frac{50 + 150}{50 + 100 + 150 + 50} = \frac{200}{350}$$

$$P_2 = P(\text{باسواد} | \text{بالای ۳۰ سال}) = \frac{P(\text{بالای ۳۰ سال و باسواد})}{P(\text{باسواد})} = \frac{50 + 150}{400} = \frac{200}{400} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{7}$$

تمرین ۱۴) فرض کنید  $S = \{a, b, c, d, e\}$  فضای نمونه باشد و  $P(\{a\}) = \frac{1}{4}$ ،  $P(\{a, b, c\}) = \frac{1}{4}$  حاصل

$P(\{b, c, d\} | \{a, b, c\})$  را بیابید؟

$$P(\{b, c, d\}|\{a, b, c\}) = \frac{P(\{b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

تمرین ( در پرتاب همزمان دو تاس سالم اگر مجموع اعداد رو شده بزرگتر از ۶ باشد، احتمال آنکه عدد اول باشد را بیابید؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A) = \frac{8}{21}$$

تمرین ( در پرتاب همزمان دو تاس سالم اگر مجموع اعداد رو شده کوچکتر از ۶ باشد، احتمال آنکه شماره ی یکی از تاس ها رو شده ۲ باشد را بیابید؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$B = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)\} \Rightarrow P = \frac{5}{10}$$

تمرین ( تاسی را دو بار پرتاب می کنیم، اگر مجموع اعداد رو شده برابر با ۸ باشد با کدام احتمال هر دو عدد ظاهر شده اول هستند؟

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$B = \{(3,5), (5,3)\}$$

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

تمرین ( در پرتاب دو تاس سالم اگر حداقل یکی از تاس ها عدد ۵ ظاهر شود، با کدام احتمال دو عدد شده متوالی هستند؟

$$B = \{(1,5), (2,5), (3,5), \dots, (6,5), (5,5), (5,1), (5,2), (5,3), \dots, (5,6)\}$$

$$A = \{(4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{11}$$

تمرین ( در یک خانواده ۴ فرزند می دانیم حداقل یکی از فرزندان دختر است، با کدام احتمال این خانواده ۳ فرزند دختر دارد؟

حل ( کل حالات یک خانواده چهار فرزند ۱۶ می باشد که ۱۵ حالت آن حداقل یک فرزند دختر دارد. از این ۱۵ حالت ۴ حالت آن سه فرزند دختر می باشند در این صورت احتمال برابر :

$$P(A) = \frac{4}{15}$$

تمرین) ارقام ۳ و ۵ و ۶ و ۷ را به تصادف کنار هم قرار می دهیم، اگر عدد حاصله زوج باشد، احتمال آنکه دو رقم یکسان کنار هم باشند را بیابید؟

حل) تعداد کل اعداد زوج برابر  $1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$  است و تعداد حالات مطلوب برابر با  $1 \times 1 \times 2 \times 3 = 6$  است.  $P = \frac{6}{24}$  در این صورت احتمال برابر با  $P = \frac{1}{4}$  است.

تمرین) در کیسه ای ۶ مهره آبی و ۴ مهره سفید وجود دارد، از این کیسه دو مهره به تصادف خارج می کنیم، اگر دو مهره خارج شده هم رنگ باشند با کدام احتمال آبی می باشد؟

$$\text{کل حالات} = \binom{6}{2} + \binom{4}{2} = 21$$

$$\text{مطلوب} = \binom{6}{2} = 15 \Rightarrow P = \frac{15}{21}$$

تمرین) ارقام ۱ تا ۹ را روی نه کارت نوشته و به تصادف ۲ کارت را انتخاب می کنیم، اگر مجموع اعداد ظاهر شده زوج باشد، با کدام احتمال هر دو عدد فرد هستند؟

$$\text{کل حالات} = \binom{5}{2} + \binom{4}{2} = 16, \quad \text{مطلوب} = \binom{5}{2} = 10 \Rightarrow P = \frac{10}{16}$$

تمرین) درون جعبه ای ۳ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره آبی وجود دارد. از این جعبه ۳ مهره به تصادف خارج می کنیم، اگر حداکثر یکی از مهره های خارج شده آبی باشد، با کدام احتمال دو مهره سیاه خارج شده است؟

$$\text{کل حالات} = \binom{2}{1} \times \binom{8}{2} + \binom{8}{3} = 112, \quad \text{مطلوب} = \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = 50 \Rightarrow P = \frac{50}{112}$$

پیشامدهای مستقل :

الف) دو پیشامد  $A$  و  $B$  را مستقل می گوئیم هر گاه وقوع یا عدم وقوع یکی بر دیگری تاثیری نداشته باشد.

ب) دو پیشامد  $A$  و  $B$  را مستقل می گوئیم هر گاه داشته باشیم:  $P(A|B) = P(A)$ .

ج) اگر دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقل باشند، داریم:  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

تمرین ۱) اگر  $S = \{a, b, c, d\}$  و  $A = \{a, b\}$  و  $B = \{b, c\}$  باشند، مستقل بودن  $A$  و  $B$  را بررسی کنید؟



$$\begin{cases} P(A) = \frac{2}{4} \\ P(B) = \frac{2}{4} \end{cases} \Rightarrow P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} = P(A \cap B) = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{مستقلند}$$

تمرین) دو تاس سالم را همزمان با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال اینکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، را بیابید؟

$$P = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$

تمرین) تاس سالمی را ۳ بار پرتاب می‌کنیم، احتمال اینکه هر سه عدد رو شده مضرب سه نباشند را بیابید؟

$$P = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$$

تمرین) دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، احتمال اینکه سکه‌ها رو و تاس عدد ۵ بیاید را بیابید؟

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

تمرین) خانواده‌ای دارای دو فرزند پسر است، با کدام احتمال فرزند سوم آن دختر است؟

حل) از آنجاییکه فرزندان در خانواده مستقل از یکدیگر هستند، لذا احتمال همان  $P = \frac{1}{2}$  است.

تمرین) در یک خانواده چهار فرزندی احتمال آنکه فرزند اول و سوم دختر نباشند، را بیابید؟

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

تمرین) احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر با ۰/۹ و برای شخص B برابر با ۰/۸ است، با کدام احتمال

حداقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت آمیز است؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{10} + \frac{8}{10} - \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{98}{100}$$

تمرین) از بین جوانان یک شهر ۶۰ درصد دارای گواهینامه رانندگی و ۵۰ درصد دارای تحصیلات دانشگاهی هستند، اگر

فردی از این گروه انتخاب شود با کدام احتمال این فرد دارای گواهینامه رانندگی یا تحصیلات دانشگاهی است؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{60}{100} + \frac{50}{100} - \frac{60}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{75}{100}$$

تمرین) احتمال تاثیر مثبت یک داروی ساخته شده روی فرد A برابر با ۰/۹ و روی فرد B برابر با ۰/۸ است، احتمال آنکه

این دارو فقط روی یکی از آنها تاثیر مثبت داشته باشد، را بیابید؟

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{9}{10} + \frac{8}{10} - 2 \times \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{17}{10} - \frac{144}{100} = \frac{26}{100}$$

تمرین ۲) احتمال قبولی علی در درس فیزیک ۹۰ درصد و احتمال قبولی علی در درس ریاضی ۷۰ درصد است.

الف) احتمال اینکه در هر دو درس قبول شود چقدر است؟

ب) با چه احتمالی حداقل در یک درس قبول شود چقدر است؟

حل) پیشامد  $A$  را قبولی در درس فیزیک و پیشامد  $B$  را قبولی در درس ریاضی قرار می دهیم، در نتیجه این دو پیشامد مستقلند.

الف)  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{9}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{63}{100}$

ب)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{90}{100} + \frac{70}{100} - \frac{63}{100} = \frac{97}{100}$

نکته) در حالت کلی انتخاب هایی که به صورت با جایگذاری انجام می شوند، مستقل اند. در واقع در مورد مسائل پیشامدهای مستقل از اصل ضرب استفاده می کنیم.

تمرین ۵) ظرفی دارای ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه باشد، دو مهره به صورت پی در پی و با جایگذاری انتخاب شود، مطلوبست احتمال اینکه :

الف) مهره اول سفید و مهره دوم سیاه است.      ب) هر دو مهره سفید باشد.

الف)  $P = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$  ،      ب)  $P = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

نکته) سه پیشامد  $A$  و  $B$  و  $C$  را مستقل می گوئیم هر گاه دو به دو مستقل باشند و داریم :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

نکته) اگر  $A$  و  $B$  مستقل باشند،

الف) پیشامدهای  $A, B'$  نیز مستقل اند.      ب) پیشامدهای  $A', B'$  نیز مستقل اند.

تمرین ( اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل باشند، بطوریکه  $P(A \cap B) = ۰/۱$  و  $P(A \cap B') = ۰/۴$  حاصل  $P(A \cup B')$  را بیابید؟

$$\begin{cases} P(A \cap B) = ۰/۱ \Rightarrow P(A) \times P(B) = \frac{1}{10} \\ P(A \cap B') = ۰/۴ \Rightarrow P(A) \times P(B') = \frac{4}{10} \end{cases} \Rightarrow \frac{P(B')}{P(B)} = 4 \Rightarrow 1 - P(B) = 4P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow P(B') = \frac{4}{5} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B') = \frac{1}{2} + \frac{4}{5} - \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$$

تمرین ( احتمال اینکه رضا در کنکور قبول شود  $۰/۵$  و احتمال اینکه در آزمون رانندگی قبول شود  $۰/۶$  است. مطلوبست :

الف) احتمال اینکه رضا در کنکور قبول شود و در رانندگی قبول نشود، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط در یکی قبول شود چقدر است؟

ج) احتمال اینکه حداقل در یکی قبول شود، چقدر است؟

الف)  $P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = \frac{5}{10} \times \left(1 - \frac{6}{10}\right) = \frac{20}{100}$

ب)  $P(A - B) + P(B - A) = P(A) \times P(B') + P(B) \times P(A') = \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

ج)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{5}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$

تمرین) احتمال اینکه  $A$  و  $B$  و  $C$  بتوانند یک پرتاب را از منطقه سه امتیازی تبدیل به گل کنند، برابر با  $۰/۳$  و  $۰/۲$  و  $۰/۵$

است. با چه احتمالی فقط یکی از آنها پرتاب خود را گل می کند؟

$$P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C)$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{470}{1000} = ۰/۴۷$$

تست های بخش (۲)

۱- اگر  $P(A) = ۰/۴$  و  $P(B) = ۰/۵$  باشند، مقدار  $P(A|B)$  کدام است؟

۰/۲ (۱)      ۱ (۲)      ۰/۵ (۳)      ۰/۱ (۴)

حل) گزینه ۲-

$$\begin{cases} P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{.5}{1.0} = \frac{P(A \cap B)}{.4} \Rightarrow P(A \cap B) = .2 \\ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{.2}{.2} = 1 \end{cases}$$

۲- احتمال اینکه یک عمل جراحی برای شخص موفقیت آمیز باشد برابر با ۰/۹ و برای شخص برابر با ۰/۸ است، با چه احتمالی لاقل برای یکی از دو نفر عمل جراحی موفقیت آمیز است؟ تجربی ۹۵

۰/۹۲ (۱)      ۰/۹۴ (۲)      ۰/۹۶ (۳)      ۰/۹۸ (۴)

حل) گزینه ۴-

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{10} + \frac{8}{10} - \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{98}{100}$$

۳- در جعبه ای ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز وجود دارد، ۲ مهره به تصادف از آن بیرون می آوریم، با چه احتمالی این دو مهره هم رنگ نیستند؟ تجربی ۹۴

$\frac{28}{45}$  (۱)       $\frac{29}{45}$  (۲)       $\frac{31}{45}$  (۳)       $\frac{32}{45}$  (۴)

حل) گزینه ۳

$$P(A) = \frac{3 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 5}{\binom{10}{2}} = \frac{31}{45}$$

۴- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند، و  $P(A|B) = \frac{6}{10}$ ،  $P(B) = \frac{4}{10}$ ،  $P(A) = \frac{3}{10}$  در این صورت مقدار  $P(B|A)$  کدام است؟

$\frac{4}{5}$  (۱)       $\frac{3}{5}$  (۲)       $\frac{2}{3}$  (۳)       $\frac{1}{3}$  (۴)

$$\begin{cases} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{4}{10}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{24}{100} \\ P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{24}{100}}{\frac{3}{10}} = \frac{4}{5} \end{cases}$$

۵- پنج مهره سفید با شماره های ۱ تا ۵ و همچنین ۵ مهره سیاه با شماره های ۱ تا ۵ یکسان را در ظرفی قرار می دهیم. به تصادف ۲ مهره از بین آنها بیرون می آوریم، اگر مجموع شماره های دو مهره ۶ باشد، با کدام احتمال هر دو مهره هم رنگ هستند؟ ریاضی ۹۲

$$\frac{2}{5}(1) \quad \frac{5}{9}(2) \quad \frac{4}{9}(3) \quad \frac{3}{5}(4)$$

$$\{(10, 50)(10, 50)(10, 50)(10, 50)(20, 40)(20, 40)(20, 40)(30, 30)\}$$

$$A = \{(10, 50)(10, 50)(20, 40)(20, 40)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{9}$$

۶- دانشجویان دانشکده ای به صورت جدول زیر توزیع شده اند، احتمال آنکه دانشجوی زنی در مقطع کارشناسی ارشد مشغول به تحصیل باشد کدام است؟

	زن	مرد
ارشد	۱۵	۲۵
دکترا	۵	۱۵

$$\frac{1}{4}(1) \quad \frac{5}{8}(2)$$

$$\frac{3}{4}(3) \quad \frac{3}{8}(4)$$

$$P(\text{زن} | \text{ارشد}) = \frac{P(\text{زن و ارشد})}{P(\text{زن})} = \frac{15}{15+5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

۹- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند، و  $P(B) = \frac{3}{4}$ ،  $P(A) = \frac{1}{3}$ ،  $A \subseteq B$ ، آنگاه مقدار  $P(B|A')$  کدام است؟ خارج از کشور ۹۰

$$\frac{3}{8}(1) \quad \frac{1}{2}(2) \quad \frac{7}{12}(3) \quad \frac{5}{8}(4)$$

$$P(A \cap B) = P(A)$$

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{8}$$

۱۰- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه ای  $S$  باشند و  $P(A) = 0.2$  و  $P(B) = 0.22$  و

$P(A|B) = 0.7$  آنگاه حاصل  $P(B'|A')$  کدام است؟ سراسری ۹۰

$$0.96(1) \quad 0.90(2) \quad 0.92(3) \quad 0.84(4)$$

$$\begin{cases} P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{10} + \frac{22}{100} - \frac{154}{1000}\right)}{1 - \frac{2}{10}} = 0.9 \\ P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{P(A \cap B)}{0.22} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{154}{1000} \end{cases}$$

۱۱- اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل از هم باشند و  $P(B) = \frac{1}{3}$ ،  $P(A) = \frac{1}{2}$ ،  $P(A' \cup B')$  آنگاه  $P(A' \cup B')$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{5}$       (۲)  $\frac{1}{6}$       (۳)  $\frac{4}{5}$       (۴)  $\frac{5}{6}$

حل)  $P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

۱۲- در گروه زنان یک روستا ۶۰ درصد مهارت قالی بافی و ۲۵ درصد مهارت گلدوزی دارند، اگر یک فرد از بین آنها انتخاب شود با چه احتمالی مهارت قالی بافی یا گلدوزی دارد؟

- (۱)  $0.7$       (۲)  $0.75$       (۳)  $0.8$       (۴)  $0.85$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{60}{100} + \frac{25}{100} - \frac{60}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{7}{10}$$

۱۳- اگر  $A$  و  $B$  پیشامدهای مستقل باشند و  $P(A|B) = \frac{1}{2}$  و  $P(B) = \frac{1}{3}$ ، حاصل  $P(A' \cup B')$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{5}$       (۲)  $\frac{1}{6}$       (۳)  $\frac{4}{5}$       (۴)  $\frac{5}{6}$

$$\begin{cases} P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

۱۴- در پرتاب دو سکه و تاس با هم احتمال اینکه حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشند، کدام است؟ خارج از

کشور ۹۱ تجربی

- (۱)  $\frac{1}{12}$       (۲)  $\frac{1}{6}$       (۳)  $\frac{1}{4}$       (۴)  $\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} A = \{(ر, پ), (ر, ر), (پ, ر)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \\ B = \{3, 6\} \end{cases}$$

۱۵- دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم، با کدام احتمال هر دو سکه رو یا تاس عدد ۶ ظاهر شود؟ سراسری

ریاضی ۹۶

- (۱)  $\frac{3}{8}$       (۲)  $\frac{5}{8}$       (۳)  $\frac{5}{12}$       (۴)  $\frac{7}{12}$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

۱۶- یک سکه و دو تاس را پرتاب می کنیم، با کدام احتمال جمع دو تاس بیشتر از ۴ یا سکه رو ظاهر شده است؟ ریاضی خارج از کشور ۹۶

$$\frac{11}{12}(۴) \quad \frac{7}{8}(۳) \quad \frac{5}{8}(۲) \quad \frac{7}{12}(۱)$$

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A \cup B) = \frac{30}{36} + \frac{1}{2} - \frac{30}{36} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

۱۷- در پرتاب دو تاس می دانیم که جمع اعداد رو شده کمتر از ۱۰ است، با چه احتمالی دو عدد رو شده فرد هستند؟ سراسری ریاضی ۸۶

$$\frac{1}{4}(۴) \quad \frac{1}{5}(۳) \quad \frac{2}{9}(۲) \quad \frac{4}{15}(۱)$$

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A|B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$A = \{(1,1)(1,3)(3,1)(1,5)(5,1)(5,3)(3,5)(3,3)\}$$

۱۸- تاس همگنی را با چشم بسته پرتاب می کنیم، و فقط می دانیم برآمد عدد رو شده زوج است، احتمال اینکه عدد ۴ یا ۶ ظاهر شود کدام است؟ ریاضی خارج از کشور ۹۱

$$\frac{3}{4}(۴) \quad \frac{2}{3}(۳) \quad \frac{1}{3}(۲) \quad \frac{1}{2}(۱)$$

$$B = \{۲,۴,۶\}, A = \{۴,۶\} \Rightarrow P(A|B) = \frac{2}{3}$$