

# فهرست مطالب

۳	فصل اول مجموعه ، الگو و دنباله	
	درس	
۳	مجموعه های منتهای و نامنتهای	۱
	درس	
۱۰	متمم یک مجموعه	۲
	درس	
۱۸	الگو و دنباله	۳
	درس	
۲۸	دنباله های حسابی و هندسی	۴
	فصل دوم مثلثات	
۳۷	درس	
۳۷	نسبت های مثلثاتی	۱
	درس	
۴۳	دایره مثلثاتی	۲
	درس	
۵۱	روابط بین نسبت های مثلثاتی	۳
	فصل سوم توان های گویا و عبارت های جبری	
۵۶	درس	
۵۶	ریشه و توان	۱
	درس	
۶۱	ریشه <sup>m</sup> ام	۲
	درس	
۶۶	توان های گویا	۳
	درس	
۶۹	عبارت های جبری	۴

۷۷	فصل چهار معادله‌ها و نامعادله‌ها	
	درس	
۷۷	۱ معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن	
	درس	
۸۴	۲ سهمی	
	درس	
۹۰	۳ تعیین علامت	
۱۰۳	فصل پنجم تابع	
	درس	
۱۰۳	۱ مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن	
	درس	
۱۰۷	۲ دامنه و برد توابع	
	درس	
۱۱۷	۳ انواع توابع	
۱۲۹	فصل ششم شمارش، بدون شمردن	
	درس	
۱۲۹	۱ شمارش	
	درس	
۱۳۴	۲ جایگشت	
	درس	
۱۳۷	۳ ترکیب	
۱۴۵	فصل هفتم آمار و احتمال	
	درس	
۱۴۵	۱ احتمال یا اندازه‌گیری شانس	
	درس	
۱۵۳	۲ مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه	
	درس	
۱۵۷	۳ متغیر و انواع آن	

# فصل اول

## مجموعه ، الگو و دنباله

### درس ۱ مجموعه های متناهی و نامتناهی

#### مجموعه های اعداد

انسان در طول تاریخ بر حسب نیاز خود از مجموعه های مختلف اعداد استفاده کرده است . برخی از این مجموعه ها که در سال های قبل با آنها آشنا شدیم ، به شرح زیرند :

مجموعه اعداد طبیعی:  $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$

مجموعه اعداد حسابی:  $\mathbb{W} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$

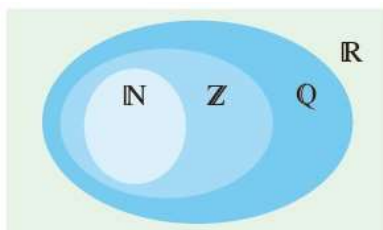
مجموعه اعداد صحیح:  $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

مجموعه اعداد گویا:  $\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \}$

مجموعه اعدادی که بتوان آنها را به صورت  $\mathbb{Q}' =$  نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

مجموعه اعداد حقیقی:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

همان طور که ملاحظه می شود رابطه زیر مجموعه بودن بین این اعداد به شکل  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  برقرار است . به عبارت دیگر تمام مجموعه های اعدادی که تاکنون با آن ها آشنا شده ایم ، زیر مجموعه هایی از اعداد حقیقی اند . در نتیجه ، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم ، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان دهنده یک عدد حقیقی مشخص است .



مثال ۱. الف) مجموعه  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$  چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیه هاشور خورده بنویسید .  
ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آن ها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید .

پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید

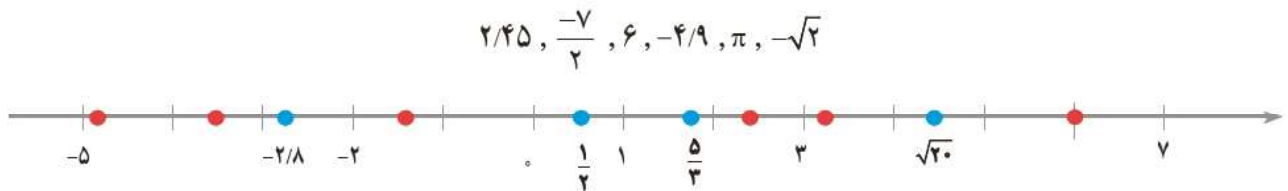
$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{4}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید.

$$\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{ \quad \quad \quad \}$$

ث) مجموعه  $\mathbb{W} - \mathbb{N}$  چند عضو دارد؟

مثال ۲. هر یک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ اند؟ زیر آن‌ها خط بکشید.

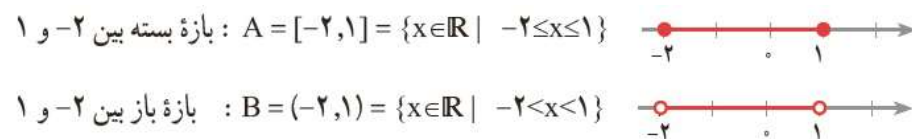


بازه ها :

در اینجا گونه دیگری از زیر مجموعه‌های  $\mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $A$  مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین  $-2$  و  $1$  به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ . اعضای  $A$  را روی محور زیر، مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای  $A$  را فهرست کرد؟ آیا می‌توان اولین عدد حقیقی بعد از  $-2$  را مشخص کرد؟

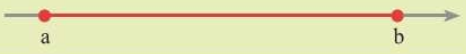



چنین زیر مجموعه‌هایی از  $\mathbb{R}$  که مشخص کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. بازه‌ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند. و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی به دفعات با آنها سر و کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. بازه‌هایی مثل  $A$  که شامل هر دو نقطه انتهایی خود می‌باشد را بازه بسته از  $-2$  تا  $1$  می‌نامیم و آن را با نماد  $[-2, 1]$  نشان می‌دهیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی  $-2$  و  $1$  را از  $A$  حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌ای مانند  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$  به دست می‌آید که آن را بازه باز بین  $-2$  و  $1$  می‌نامیم و با نماد  $(-2, 1)$  نشان می‌دهیم به طور خلاصه:



همچنین بازه‌هایی مثل  $(2, 7) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 7\}$  که تنها شامل یکی از نقاط انتهایی خود می‌باشد را بازه‌های نیم باز می‌نامیم.

فعالیت ۱. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند ، به طوری که  $a < b$  آنگاه جدول زیر را کامل کنید



نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته			
نیم باز	$[a, b)$		
نیم باز	$(a, b]$		
		$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
			

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ تر از ۲ مورد نظر است . به عنوان مثال ، می دانیم که مجموعه جواب نامعادله  $2x > 4$  به صورت  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$  است . اعضای  $C$  را روی محور زیر نشان دهید .



آیا می توانید  $C$  را به صورت یک بازه بنویسید؟

فعالیت ۲. اگر  $a$  عدد حقیقی دلخواهی باشد ، جدول زیر را کامل کنید .

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$		
	$(-\infty, a)$		
		$\mathbb{R}$	
		$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$	

مثال ۳. اجتماع و اشتراک دو بازه  $A = (-1, 4]$  و  $B = (2, +\infty)$  را مشخص کنید .

مثال ۴. درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

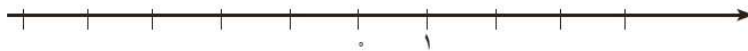
الف)  $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{3}, 2)$     ب)  $-2 \in (-2, 0]$     پ)  $0 \in (-2, 0]$     ت)  $-2 \in \{-2, 0\}$     ث)  $-1 \in \{-2, 0\}$   
 ج)  $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$     ح)  $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2]$     خ)  $\emptyset \subseteq (-17, 0]$     د)  $\sqrt{2} \in (0, 1)$

مثال ۵. هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا بازه های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه های نظیر آن وصل کنید.

-۲	$\sqrt{3}$	-۵۰۰	$\frac{-5}{4}$	$6/0.22 \times 10^{23}$	$0/2$
$[1, 4]$	$(-\infty, -4)$	$[-2, 0)$	$[3, +\infty)$	$(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$	$(-2, 3)$

مثال ۶. نمایش هندسی دو بازه  $A = (-4, 2]$  و  $B = (-1, 3]$  را روی محور رسم کرده و سپس حاصل عبارت های زیر را

بنویسید.



الف)  $A \cap B =$

ب)  $A \cup B =$

پ)  $A - B =$

ت)  $B - A =$

مثال ۷. مجموعه  $[3, 10) \cup [1, 4]$  را به شکل بازه بنویسید.

مثال ۸. مجموعه  $(-1, +\infty) \cap [2, 4)$  را به شکل بازه بنویسید.

مثال ۹. اگر  $A = (-\infty, 3]$  و  $B = (-1, +\infty)$ ، مجموعه های  $A - B$  و  $B - A$  را به شکل بازه بنویسید.

تمرین ۱. مجموعه  $(0, 3) \cap [-3, 6]$  را به شکل بازه بنویسید.

## مجموعه‌های متناهی و نامتناهی :

فعالیت ۳. فرض کنید  $A$  مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و  $B$  مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید .  $A = \{ \quad \quad \quad \}$

ب) درباره تعداد اعضای  $B$  چه می‌توان گفت؟  $B = \{ \quad \quad \quad \}$

## تعریف

مجموعه‌هایی مانند  $A$  را که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های متناهی می‌نامیم.

با توجه به مطلب فوق،  $B$  یک مجموعه متناهی نیست؛ زیرا نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های نامتناهی می‌نامیم.

مثال ۱۰. متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. درباره مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آن‌ها را بنویسید.

تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)	متناهی	نامتناهی	مجموعه
			مجموعه اعداد اول یک رقمی
			مجموعه انسان‌های روی زمین
			مجموعه اعداد طبیعی فرد
			مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
			مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات

مثال ۱۱. دو مجموعه متناهی نام ببرید.

مثال ۱۲. دو مجموعه نامتناهی مثل  $A$  و  $B$  مثال بزنید که  $A \subseteq B$  بوده و  $B - A$  تک عضوی باشد.

## تذکر

تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.

فعالیت ۴. الف)  $\frac{1}{4}$  عددی بین  $0$  و  $1$  است. چهار عدد گویای دیگر از بازه  $(0, 1)$  بنویسید.

ب) آیا می توان بین  $0$  و  $1$  به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟

پ) در مورد منتهای یا نامتنهای بودن اعداد گویای موجود در بازه  $(0, 1)$  چه نتیجه ای می گیرید؟

ت) در مورد منتهای یا نامتنهای بودن  $\mathbb{Q}$  چه می توان گفت؟

ث) اگر  $A$  دارای یک زیر مجموعه نامتنهای باشد، آنگاه  $A$  یک مجموعه ..... خواهد بود.

تمرین ۲. فرض کنید  $U$  مجموعه تمام مضرب های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف)  $U$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب)  $U$  منتهای است یا نامتنهای؟

پ) یک زیر مجموعه منتهای از  $U$  بنویسید.

ت) دو زیر مجموعه نامتنهای مانند  $C$  و  $D$  از  $U$  بنویسید؛ به طوری که  $C \subseteq D$ .

تمرین ۳. منتهای یا نامتنهای بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی.

ب) مجموعه شمارنده های طبیعی عدد ۳۶.

پ) بازه  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

ت)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$ .

ث) مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۱۰۰.

تمرین ۴. دو مجموعه نامتنهای مثال بنویسید که اشتراک آن ها مجموعه ای منتهای باشد.

تمرین ۵. اگر  $A = [-3, 4)$  و  $B = (-\infty, 2)$  باشند، سپس حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

$$A \cap B =$$



$$\text{ب) } A \cup B =$$

$$\text{پ) } A - B =$$

$$\text{ت) } B - A =$$

تمرین ۶. حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازه های آن ها روی محور به دست آورید :

$$\text{الف) } (-3, 0) \cup (-2, 5] =$$

$$\text{ب) } (-\infty, 6] \cap (2, 9) =$$

$$\text{پ) } (3, +\infty) \cap (6, 10] =$$

$$\text{ت) } (-\infty, 10) \cup [1, +\infty) =$$

$$\text{ث) } (3, +\infty) - [2, 4) =$$

$$\text{ج) } [2, 4) - (3, +\infty) =$$

تمرین ۷. مجموعه  $\mathbb{R} - \{3\}$  را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

تمرین ۸. اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه ای متناهی باشد، آن گاه  $A$  متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

تمرین ۹. دو زیر مجموعه نامتناهی از مجموعه اعداد طبیعی که از هم جدا باشند و اجتماع آن ها برابر  $\mathbb{N}$  باشند.

تمرین ۱۰. عبارت های زیر را در صورت امکان ساده کنید.

$$\text{الف) } [-3, 1] \cap (-4, 0] =$$

$$\text{ب) } [-5, 5] \cap (-5, 6) =$$

$$\text{پ) } (-5, +\infty) \cap (-\infty, 3] =$$

$$\text{ت) } (-3, 1] \cup [1, 10) =$$

$$\text{ث) } [-3, 1] \cup (-\infty, -4) =$$

## درس ۲ متمم یک مجموعه

### مجموعه مرجع

فرض کنیم  $U$  نشان دهنده مجموعه تمام کتاب های آیت... العظمی مرعشی نجفی (ره) و  $A$  مجموعه کتاب های خطی آن باشد. اگر مجموعه ای را که شامل کتاب های چاپی این کتابخانه است، با  $A'$  نشان دهیم، آنگاه می توانیم نمودار مقابل را درباره کتاب های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال  $U$  را که شامل تمام کتاب های کتابخانه می باشد، مجموعه مرجع و  $A'$  را متمم مجموعه  $A$  می نامیم.

$U$ : مجموعه تمام کتاب های کتابخانه

$A$ : کتاب های خطی

$A'$ : کتاب های چاپی

### تعریف

در هر مبحث، مجموعه ای را که همه مجموعه های مورد بحث، زیر مجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می نامیم و آن را با  $U$  نشان می دهیم.

### تعریف

هر گاه  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آن گاه مجموعه  $U - A$  را متمم  $A$  می نامیم و آن را با نماد  $A'$  نشان می دهیم. به عبارت دیگر  $A'$  شامل عضوهایی از  $U$  است که در  $A$  نیستند.

فعالیت ۵. الف) دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$


$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$$


ب)  $A$  را با نمایش اعضا و  $B$  را به صورت یک بازه بنویسید .

$$A = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$B =$$

پ) در مورد  $A$  ، اگر مجموع مرجع را  $\mathbb{Z}$  در نظر بگیریم ،  $A'$  را مشخص کنید .

ت) در مورد  $B$  با فرض این که  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد ،  $B'$  را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید .



مثال ۱۳ . فرض کنید  $U$  مجموعه تمام اتومبیل های پلاک گذاری شده کشور و  $B$  مجموعه اتومبیل های با پلاک فرد باشد . در این صورت  $B'$  چه مجموعه ای خواهد بود؟

مثال ۱۴ . با فرض آن که  $\mathbb{N}$  مجموعه مرجع باشد ، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید

$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$	$\{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, \dots\}$
$\{3, 6, 9, 12, \dots\}$	$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
$\{1, 2, 3, \dots, 9\}$	$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$	$\{10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$

مثال ۱۵ .  $U$  مجموعه مرجع و  $A$  زیر مجموعه دلخواهی از آن می باشد . طرف دوم تساوی های زیر را بنویسید .

$$\phi' = \quad U' = \quad A \cup A' = \quad (A')' = \quad A \cap A' =$$

مثال ۱۶ . الف) اگر  $\mathbb{Z}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم ، آنگاه  $\mathbb{N}'$  را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید .

ب) اگر  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت  $\mathbb{N}'$  را روی محور نمایش دهید.

مثال ۱۷. فرض کنیم  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{2, 4\}$  ابتدا  $A'$  و  $B'$  را بنویسید و سپس جدول های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه ای می گیرید؟

	$A' = \{ \quad \quad \quad \}$	$B' = \{ \quad \quad \quad \}$	
$(A')'$			$\Rightarrow (A')' = A$
$\{1, 2, 3\}$			
$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$	$\Rightarrow \dots = \dots$
$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	
$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$	$\Rightarrow \dots = \dots$
$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	
$A - B$	$A - (A \cap B)$	$A \cap B'$	$\Rightarrow \dots = \dots = \dots$
$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	$\{ \quad \quad \quad \}$	

تمرین ۱۱.  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه های زیر را روی محور نشان دهید.

الف)  $A = [-2, 3)$

ب)  $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

پ)  $C = (0, \infty)$

ت)  $D = (-\infty, 1]$

تمرین ۱۲.  $\mathbb{N}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه ای نامتناهی مثل  $A$  مثال بزنید که  $A'$  هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه نامتناهی مثل  $B$  مثال بزنید که  $B'$  متناهی باشد.

پ) مجموعه ای نامتناهی مثل  $C$  مثال بزنید و  $C'$  را بدست آورید.  $C'$  متناهی است یا نامتناهی؟

تمرین ۱۳. فرض کنید مجموعه مرجع  $\mathbb{R}$  باشد و  $A = (0, 4]$  ,  $B = (-3, 3]$  مجموعه  $(A \cap B)'$  را مشخص کند.

تمرین ۱۴. فرض کنید مجموعه مرجع  $\mathbb{R}$  باشد و  $A = [-3, 3] \cup [2, 3]$  . بزرگ ترین زیر مجموعه  $\mathbb{R}$  که اشتراکش با  $A$  تهی باشد ، چه مجموعه ای است؟

تمرین ۱۵. فرض کنید  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  مجموعه مرجع باشد.  $A = \{1, 2, 4, 6\}$  و  $B = \{1, 2, 5\}$

$$\text{نشان دهید } (A \cup B)' = A' \cap B'$$

تمرین ۱۶. فرض کنید  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  مجموعه مرجع باشد و  $B = \{2, 4, 5\}$  ,  $A = \{1, 2, 3, 5\}$  نشان دهید که

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

تمرین ۱۷. فرض کنید  $U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{2, 3, 4, 6\}$ ،  $B = \{2, 4, 7, 8, 9\}$  نشان دهید

$$A - B = A \cap B' \quad \text{که}$$

### تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر  $A$  یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان داده تعداد عضوهای آن از علامت  $n(A)$  استفاده می شود. مثلاً اگر  $G = \{2, 3, 5, 7\}$  در این صورت می توانیم بنویسیم  $n(G) = 4$ . در این قسمت می خواهیم رابطه ای برای  $n(A \cup B)$  به دست آوریم.

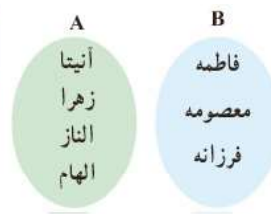
#### تعریف

دو مجموعه جدا از هم: به هر دو مجموعه مثل  $A$  و  $B$  که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می نامند.  
 اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه جدا از هم باشند، آن گاه  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

مثال ۱۸. الف) اعضای  $A \cup B$  را که بیانگر تیم کوه نوردی می باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$$A \cup B =$$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴			



ب) تعداد عضوهای  $A \cup B$  چه رابطه ای با  $n(A)$  و  $n(B)$  دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  برقرار است؟

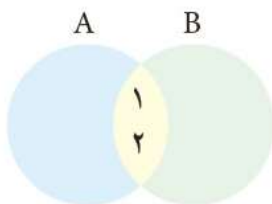
مثال ۱۹. الف) مجموعه شمارنده های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب  $A$  و  $B$  می نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

مجموعه شمارنده های عدد ۲۸ :  $A = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(A) = 6$   
 مجموعه شمارنده های عدد ۳۰ :  $B = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(B) = \dots$   
 شمارنده های مشترک ۲۸ و ۳۰ :  $A \cap B = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(A \cap B) = \dots$   
 $A \cup B = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \} \Rightarrow n(A \cup B) = \dots$

ب) جدول زیر را کامل کنید .

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶			

پ) چرا رابطه ای را که در فعالیت قبل به دست آوردید یعنی  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  در این مثال برقرار نیست؟



ت) با تکمیل نمودار مقابل ، سعی کنید رابطه درست برای  $n(A \cup B)$  را حدس بزنید .

نکته

تعداد عضو های اجتماع دو مجموعه از فرمول زیر بدست می آید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

مثال ۲۰. یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد ، به طوری که ۳ تا از فیلم های پویانمایی با مضمون طنز می باشند . مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که :

الف) پویانمایی یا طنزند .

ب) غیر پویانمایی و غیر طنزند .

مثال ۲۱. در یک کلاس ۲۵ نفری ، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند . اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند ، مشخص کنید چند نفر از آن ها عضو هر دو تیم هستند .

تمرین ۱۸. اگر  $n(A) = ۱۵$ ،  $n(A \cap B) = ۵$  و  $n(A \cup B) = ۳۰$  آن گاه  $n(B)$  را محاسبه کنید.

تمرین ۱۹. فرض کنید  $A$  و  $B$  زیر مجموعه هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند، به طوری که  $n(U) = ۱۰۰$ ،  $n(A) = ۶۰$ ،  $n(B) = ۴۰$  و  $n(A \cap B) = ۲۰$  مطلوب است:

الف)  $n(A \cup B) =$

ب)  $n(A \cap B')$

پ)  $n(A' \cap B) =$

ت)  $n(A' \cap B') =$

تمرین ۲۰. در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آن ها عضو گروه تئاترند اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

الف) تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

تمرین ۲۱. در یک نظر سنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آن ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت  $A$  و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت  $B$  خرید کرده اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:



الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده اند.

ب) فقط از شرکت A خرید کرده اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده اند.

ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده اند.

تمرین ۲۲. در یک کلاس ۳۵ نفری ۱۸ نفر در فوق برنامه های ورزشی و ۲۱ نفر در فوق برنامه های علمی شرکت می کنند. اگر ۲ نفر

در هیچ یک از این دو فوق برنامه ورزشی و علمی شرکت نکنند، آن گاه :

الف) چند نفر در هر دو فوق برنامه شرکت می کنند؟

ب) چند نفر فقط در یک فوق برنامه شرکت می کنند؟

تمرین ۲۳. هر یک از مسافران هواپیمایی که ۳۵۰ نفر مسافر دارد، دست کم به یکی از دو زبان فارسی و عربی صحبت می کند. ۲۷۰

نفر می توانند فارسی صحبت کنند و ۹۰ نفر می توانند عربی صحبت کنند. چند نفر فقط می توانند فارسی صحبت کنند؟

تمرین ۲۴. از ۷۵ نفر ساکنان یک آپارتمان مسکونی ۴۳ نفر چای سبز دوست دارند، ۳۷ نفر قهوه دوست دارند و ۱۰ نفر نه چای سبز

دوست دارند و نه قهوه.

الف) چند نفر هم چای سبز دوست دارند و هم قهوه؟

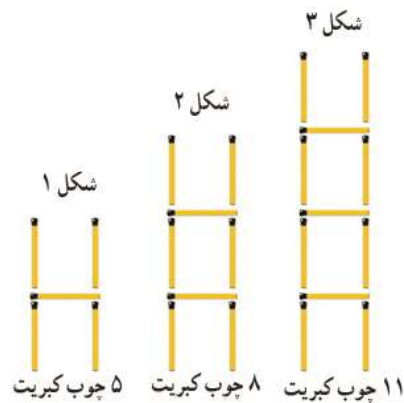
ب) چند نفر فقط قهوه دوست دارند؟

تمرین ۲۵. از ۲۰۰ نفر دانش آموزان پایه ی دهم یک مدرسه، ۱۷۵ نفر علاقه مند به فوتبال و ۱۷۰ نفر علاقه مند به شطرنج هستند. در این پایه چند دانش آموز هم علاقه مند به فوتبال و هم علاقه مند به شطرنج هستند؟

## درس ۳ الگو و دنباله

### الگو

مثال ۲۲. به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



شماره شکل: $n$	۱	۲	۳	۴	...	$n$	...
تعداد چوب کبریت ها: $a_n$	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین $n$ و $a_n$	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	...	...	$a_n=...$	...

الف) با این نماد گذاری،  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $a_3$  و  $a_4$  نشان دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

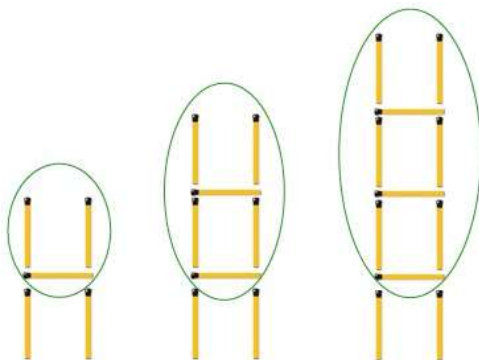
ب)  $a_n$  به چه معناست؟

پ) آیا می توانید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید؟

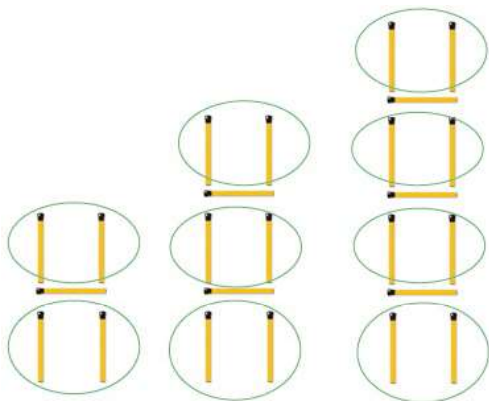
فعالیت ۶. آیدا برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  در مثال بالا، شکل های

الگو را به صورت رو به رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار  $a_1$  و

$a_n$  را به دست آورید.



$$a_1 = 1(2) + 2 \quad a_2 = 2(2) + 2 \quad a_3 = 3(2) + 2 \quad a_4 = 4(2) + 2 \quad \dots \quad a_n = \dots \quad a_n =$$



۲ آیساً روش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و

عمودی در هر شکل را به طور جداگانه قرار داد تا بتواند به مقدار  $a_n$

دست یابد. مقدار حاصل برای  $a_n$  از این روش را در جای

مشخص شده بنویسید.

$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_n = 1 + (1 + 1)2 \quad \dots \quad a_n =$$

جوب های عمودی      جوب های افقی

۳ به کمک رابطه  $a_n = 3n + 2$  تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیابید.

۴ با استفاده از رابطه  $a_n = 3n + 2$  مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

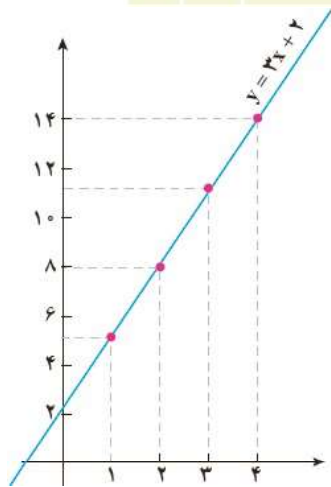
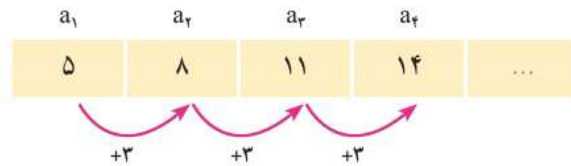
### تذکر

در مثال بالا دیدیم که  $a_n$  بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل  $n$  ام است.  $a_n = 3n + 2$  را جمله عمومی الگو می نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگوست.

## الگوی خطی

n	$a_n$	$(n, a_n)$
۱	۵	(۱, ۵)
۲	۸	(۲, ۸)
۳	۱۱	(۳, ۱۱)
۴	۱۴	(۴, ۱۴)
...	...	...
...	...	...
...	...	...

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.



چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای پی بردن به دلیل این نامگذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط  $y = 3x + 2$  قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند.

شباهت بین معادله خط یعنی  $y = 3x + 2$  و جمله عمومی الگو یعنی  $a_n = 3n + 2$  اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.

## تعریف

الگوهای خطی: به طور کلی الگوهایی را که جمله ی عمومی آن‌ها به صورت  $t_n = an + b$  است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر  $a$  بود. به عبارت دیگر، اختلاف

هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب  $n$  است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n = -4n + 15$

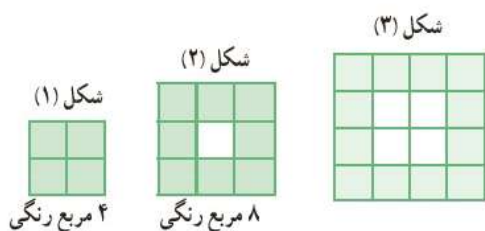
، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

۱۱, ۷, ۳, -۱, -۵, -۹, ...

مثال ۲۳. در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

تمرین ۲۶. در الگوی خطی، جمله های سوم و دوازدهم به ترتیب ۱۱ و ۴۷ هستند. جمله ی عمومی این الگو را پیدا کنید.

مثال ۲۴. ۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید .



شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد مربع های رنگی : $b_n$	۴	۸	...	...	...
رابطه بین n و $b_n$	$b_1 = 4$	$b_2 =$	...	...	...

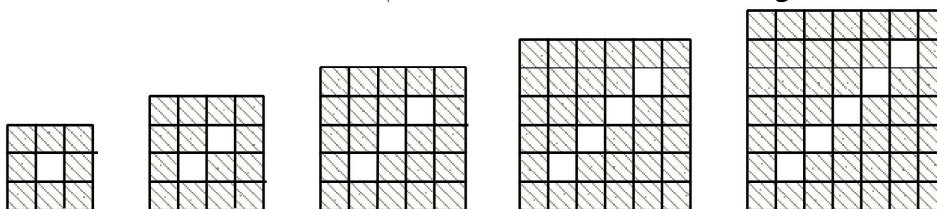
۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می شود.

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو ، مقدار a در رابطه  $b_n = an + h$  را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h ، حاصل  $b_n$  را به دست آورید .

۴ شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

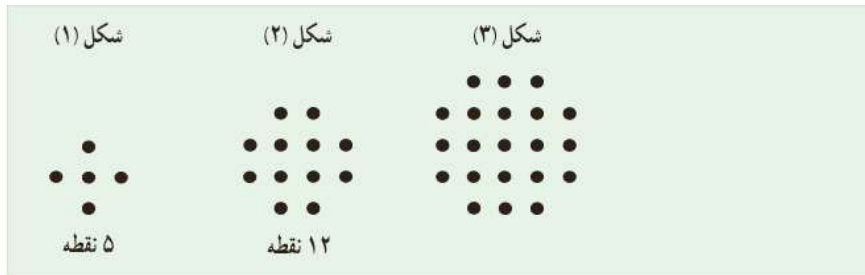
۵ در چه مرحله ای از الگوی بالا ، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

تمرین ۲۷. تعداد مربع های کوچک هاشورخورده در شکل n ام الگوی زیر چند تا است؟



## الگوهای غیر خطی

فعالیت ۷. ۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل کنید.

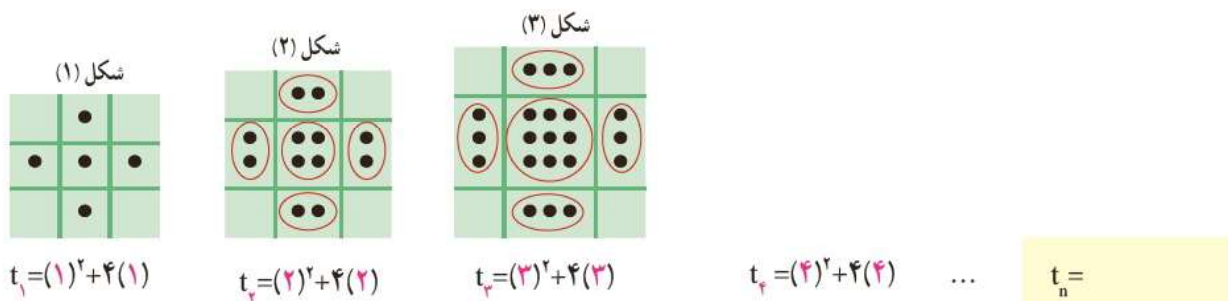


n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
$t_n$ : تعداد نقطه‌ها	۵	۱۲	...	...	...
رابطه بین n و $t_n$	$t_1=5$	$t_2=$	...	...	...

۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

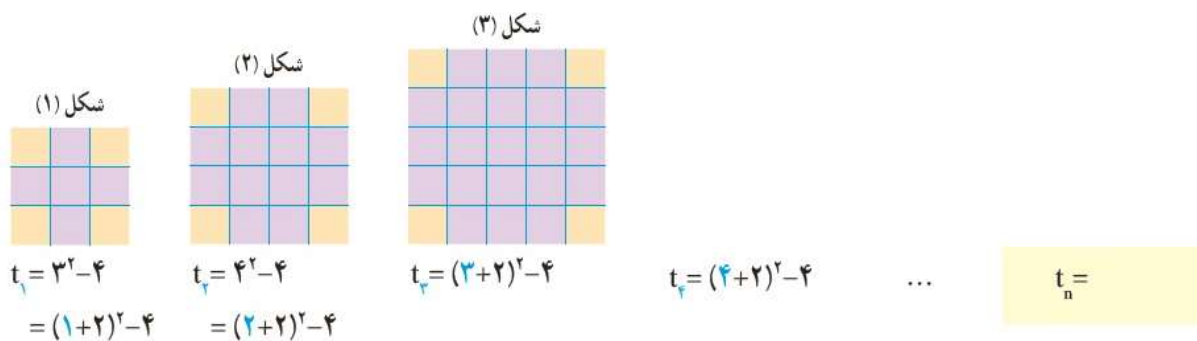
۳ امیر رضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته بندی کرد. از شکل های امیر رضا

کمک بگیرید و مقدار  $t_n$  را بیابید.



۴ امیر محمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این

شکل ها مقدار  $t_n$  را بنویسید.



۵ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای  $t_n$  در دو قسمت قبلی، برابرند.

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن  $t_n$  می شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

### دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظیر کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل های متوالی الگو به صورت زیر بود:  $5, 12, 21, 32, 45, \dots$  این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

#### تعریف

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می گیرند، یک دنباله می نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می شوند.

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جملات اول این دنباله را با  $t_1$ ، جمله دوم را با  $t_2$  و به همین ترتیب جمله  $n$  ام یا جمله عمومی آن را با  $t_n$  نمایش می دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله درجه ۲ نامیده می شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله ای درجه دوم است.

مثال ۲۵. جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف)  $a_n = n^2 - 1 : 0, 3, \dots, 15, 24$

ب)  $b_n = -n + 4 : 3, 2, 1, 0, \dots, -2$

پ)  $c_n = -13 + 2n : -11, \dots, -7, \dots, -3$

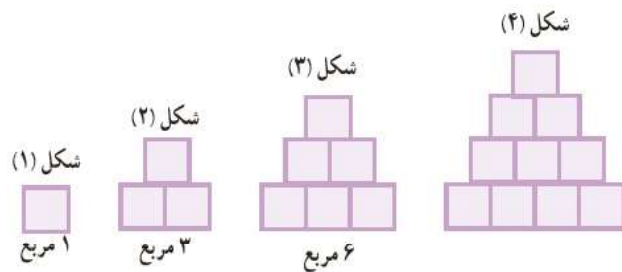
مثال ۲۶. در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی

کنید یک جمله عمومی برای دنباله نیز حدس بزنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	...	$t_n$	...
-۱	-۲	-۳	-۴				...	-n	...
۱	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$				...		...
۱	۴	۹	۱۶				...		...
۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱				...		...
-۱	۸	-۲۷	۶۴				...		...
۵	۱۸	۳۱	۴۴				...		...
-۲	۱	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$				...		...
۱	۲	۴	۷				...		...
۳	۱	۴	۱	۵			...		...
۱	۱	۲	۳	۵			...		...
۲	۳	۵	۷				...		...

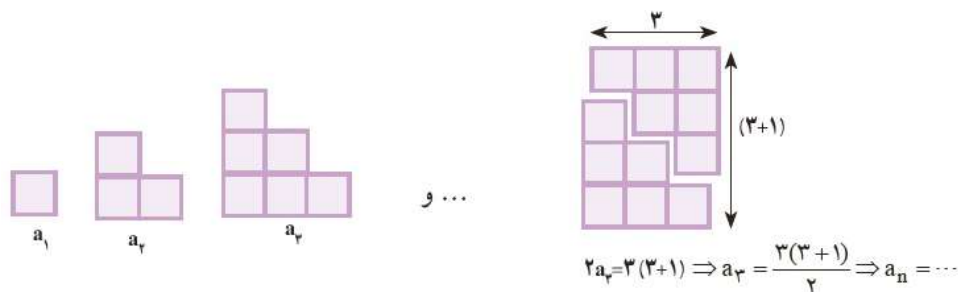
مثال ۲۷. الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.



ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

پ) شکل‌های الگوی قبل را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم. با دقت در تصویر زیر سعی کنید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید.

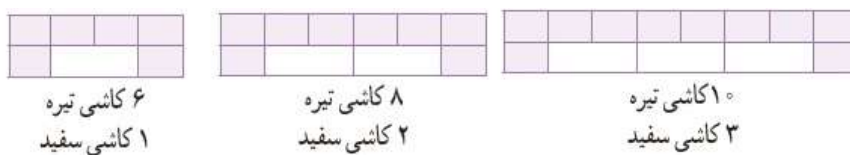


ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n =$$

تمرین ۲۸. به الگوی زیر توجه کنید.





الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های هاشور خورده را مشخص کنید.

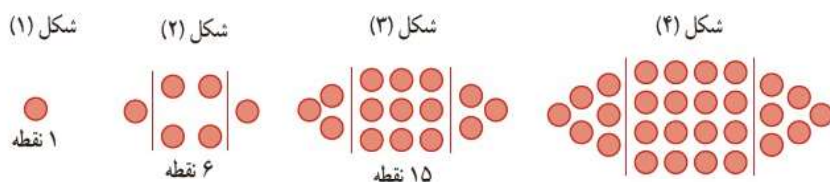
ب) تعداد کاشی های هاشور خورده در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.

پ) اگر  $n$  تعداد کاشی های سفید و  $t_n$  تعداد کاشی های هاشور خورده باشد، مقدار  $t_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی هاشور خورده لازم است؟

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی هاشور خورده باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی های سفید آن چند تا است؟

تمرین ۲۹. الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

تمرین ۳۰. جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف)  $a_n = 4n$

ب)  $b_n = 3n + 1$

پ)  $c_n = n^2 + 2$

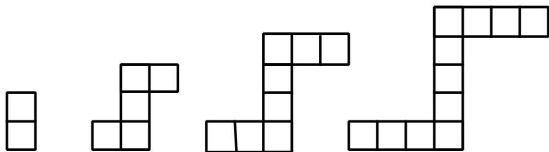
ت)  $d_n = n^2 + n$

تمرین ۳۱. برای هر یک از دنباله های درجه دو زیر جمله عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف)  $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

ب)  $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

تمرین ۳۲. در الگوی زیر، شکل  $n$ ام از چند مربع کوچک درست شده است؟ شکل چندم از ۹۵ مربع کوچک درست شده است؟



تمرین ۳۳. در هر قسمت جمله ی عمومی یک دنباله داده شده است. چهار جمله ی اول دنباله های زیر را مشخص کنید.

الف)  $a_n = n^2 + 1$

ب)  $b_n = \frac{2n}{n+2}$

پ)  $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$

ت)  $d_n = (-1)^{n+1}(2n+1)$

ث)  $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$

تمرین ۳۴. چندمین جمله ی دنباله با جمله عمومی  $a_n = \frac{3n-1}{n+5}$  برابر  $\frac{13}{7}$  می باشد؟

تمرین ۳۵. یک جمله عمومی برای هر یک از دنباله های زیر بنویسید.

الف)  $3, 4, 5, 6, 7, \dots$   $a_n =$

ب)  $3, -3, 3, -3, \dots$   $a_n =$

پ)  $-5, -3, -1, 1, \dots$   $a_n =$

ت)  $0/1, 0/01, 0/001, 0/0001, \dots$   $a_n =$

ث)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$   $a_n =$

## درس ۴ دنباله های حسابی و هندسی

در صفحات قبل، مثال هایی از الگو های خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگو های عددی، دنباله های حسابی است. به عبارت دیگر:

## تعریف

دنباله حسابی: دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله ی قبیل از خودش به دست می آید، یک دنباله حسابی نامیده می شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گویند.

فعالیت ۸. ۱ سال های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی اند.

۲۰۰۰, ۲۰۰۴, ۲۰۰۸, ۲۰۱۲, ۲۰۱۶, ۲۰۲۰, ...

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟

پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	...	$t_n$	...
۲۰۰۰	$۲۰۰۰+۱(۴)$	$۲۰۰۰+۲(۴)$	$۲۰۰۰+۳(۴)$	...	$۲۰۰۰+(...)(۴)$	...

۲) با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 + 1d$	$t_1 + 2d$	$t_1 + 3d$			...	$t_1 + (... )d$	...

همان طور که مشاهده شد،

## نکته

جمله  $n$  ام یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدر نسبت  $d$  به صورت  $t_n = t_1 + (n - 1)d$  است.

مثال ۲۸. در دنباله های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

الف)  $5, 10, 15, 20, \dots, \dots, \dots, d = \quad, a_n =$

ب)  $1, 3, 5, 7, \dots, \dots, \dots, d = \quad, b_n =$

پ)  $5, 9, 13, 17, \dots, \dots, \dots, d = \quad, c_n =$

ت)  $13, 7, 1, -5, \dots, \dots, \dots, d = \quad, d_n =$

مثال ۲۹. در دنباله حسابی زیر جمله شانزدهم را به دست آورید.

۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵, ...

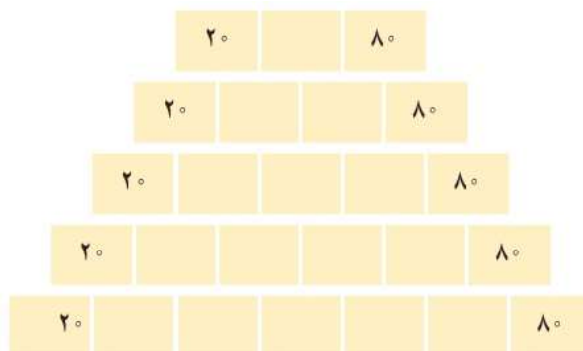
مثال ۳۰. الف) یک دنباله حسابی با قدر نسبت مثبت مثال بزنید که جمله چهارم آن  $10^\circ$  باشد.

ب) یک دنباله حسابی با قدر نسبت منفی مثال بزنید که جمله چهارم آن  $10^\circ$  باشد.

پ) دنباله ای حسابی مثال بزنید که تنها سه جمله مثبت داشته باشد و سایر جملات آن منفی باشند.

مثال ۳۱. الف) بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند.

ب) بین  $2^\circ$  و  $8^\circ$  به تعداد مشخص شده در هر مورد واسطه حسابی درج کنید.



تمرین ۳۶. از بین دنباله های زیر، دنباله های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آن ها با تعیین قدر نسبت، جمله بیست و یکم

را بیابید.

الف)  $۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, \dots$ ب)  $۱, ۲, ۴, ۸, \dots$ پ)  $\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۳\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, \dots$ ت)  $۱۰, ۷, ۴, ۱, \dots$ ث)  $\frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۵}, \frac{۴}{۵}, ۱, \dots$ ج)  $۲, ۲, ۲, ۲, ۲, \dots$ 

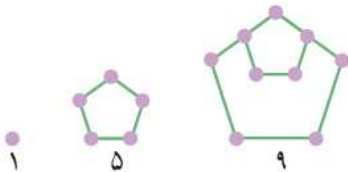
تمرین ۳۷. در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب  $۲۰$  و  $۵۶$  است. دنباله را مشخص کنید با بدست آوردن جمله اول و قدر نسبت جملات دنباله را بنویسید.

تمرین ۳۸. در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله ی اول ۳ و مجموع سه جمله ی بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

تمرین ۳۹. الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است؟



تمرین ۴۰. الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟

(ب) واسطه حسابی بین  $۲۰$  و  $۳۰$  چه عددی است؟

تمرین ۴۱. در هر مورد مشخص کنید دنباله ی داده شده می تواند دنباله ی حسابی باشد یا خیر؟ . اگر پاسخ مثبت است. قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

الف)  $۵, -۱, -۷, -۱۳, \dots$

ب)  $۳, ۳, ۳, ۳, \dots$

پ)  $۱, ۴, ۹, ۱۶, \dots$

تمرین ۴۲. جمله عمومی دنباله های حسابی زیر پیدا کنید

الف)  $۴, ۷, ۱۰, ۱۳, \dots$

ب)  $۹, ۴, -۱, -۶, \dots$

تمرین ۴۳. جمله  $۴۰$ ام دنباله حسابی زیر را پیدا کنید .  $۷, ۲, -۳, -۸, \dots$

تمرین ۴۴. آیا در دنباله حسابی  $۳, ۷, ۱۱, \dots$  جمله ای وجود دارد که برابر  $۲۲۵$  باشد؟

تمرین ۴۵. تعداد جمله های حسابی زیر چند تا است؟  $۹۴, \dots, ۹, ۴, -۱, -۶$

## نکته

تعداد جمله های دنباله ی حسابی متناهی :

$$1 \quad \text{تعداد جمله های دنباله حسابی که جمله اولش } a_1, \text{ جمله آخرش } a_n \text{ و قدر نسبت آن } d \text{ باشد برابر با } 1 + \frac{a_n - a_1}{d}$$

$$2 \quad \text{اگر } a_m \text{ و } a_n \text{ جمله های متمایز از دنباله حسابی باشند، قدر نسبت این دنباله برابر } d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

$$3 \quad \text{اگر } a_s, a_r, a_n, a_m \text{ جمله های دنباله حسابی باشند و } m + n = r + s \text{ آن گاه } a_m + a_n = a_r + a_s$$

تمرین ۴۶. عدد های ۲،  $a$ ، ۱۶ جمله های متوالی دنباله حسابی اند. مقدار  $a$  چقدر است؟

## نکته

درج واسطه حسابی: فرض کنید  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و  $b > a$  که بین دو عدد  $a$  و  $b$  طوری  $k$  عدد بنویسیم که دنباله ی حاصل، دنباله ی حسابی باشد آن گاه قدر نسبت این دنباله از فرمول زیر به دست می آید.

$$d = \frac{b - a}{k + 1}$$

تمرین ۴۷. بین عدد های ۷ و ۳۹ سه واسطه حسابی درج کنید.

تمرین ۴۸. مجموع سه عددی که دنباله حسابی تشکیل می دهند برابر  $3^\circ$  و حاصل ضرب آن ها برابر  $91^\circ$  است. این اعداد را مشخص کنید.

## نکته

دنباله هندسی: دنباله ای است که در آن هر جمله به جز جمله ی اول، از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می آید. این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله می نامیم. جمله اول هم باید غیر صفر باشد.



فعالیت ۹. در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول  $t_1$  و قدر نسبت  $r$  باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول زیر را تکمیل کنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	...	$t_n$	...
$t_1$	$t_1 r$	$t_1 r^2$			...		...

$\times r$        $\times r$        $\times r$        $\times r$

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می شود که :

نکته

دنباله هندسی : جمله  $n$  ام دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است که در آن  $t_1$  جمله اول و  $r$  قدر نسبت می باشد.

$$(t_1, r \neq 0)$$

مثال ۳۲. هفتمین جمله دنباله هندسی  $9, 3, 1, \dots$  را به دست آورید.

مثال ۳۳. در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف)  $2, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$

$\times 3$        $\times 3$

ب)  $5, 10, 20, 40, \boxed{\phantom{00}}, \boxed{\phantom{00}}, \dots, b_n =$

پ)  $6, -60, 600, -6000, \boxed{\phantom{0000}}, \boxed{\phantom{0000}}, \dots, c_n =$

ت)  $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{\phantom{00}}, \boxed{\phantom{00}}, \dots, d_n =$

مثال ۳۴. بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

۳				۴۸
---	--	--	--	----

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

۱۰			۴۰۰۰
۱۰			۸۰۰۰۰
۴			۹۷۲

تمرین ۴۹. از بین موارد زیر، دنباله های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آن ها را بنویسید.

الف)  $۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, \dots$

ب)  $۲\sqrt{۵}, ۴\sqrt{۵}, ۶\sqrt{۵}, ۸\sqrt{۵}, \dots$

پ)  $۱, \frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{-۱}{۸}, \dots$

ت)  $۵, ۵, ۵, ۵, ۵, \dots$

تمرین ۵۰. چند دنباله هندسی با قدر نسبت  $\frac{۴}{۵}$  می توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.

تمرین ۵۱. علی دوچرخه ای ای را به قیمت  $۵۰۰$  هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال  $۲۰$  درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه اش را داشته باشد، به چه قیمتی می تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت  $n$  سال از چه رابطه ای به دست می آید؟

تمرین ۵۲. حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.  $۲, ۴, ۸, \dots$

تمرین ۵۳. جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. این دنباله را مشخص کنید.

تمرین ۵۴. در دنباله های هندسی زیر قدر نسبت، دو جمله بعدی و جمله عمومی را به دست آورید.

الف)  $2, 6, 18, 54, \dots$

ب)  $5, 10, 20, 40, \dots$

پ)  $6, -60, 600, -6000, 60000, \dots$

## نکته

درج واسطه هندسی: فرض کنید  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و  $b > a$  که بین دو عدد  $a$  و  $b$  طوری  $k$  عدد بنویسیم که دنباله ی حاصل، دنباله ی هندسی باشد آن گاه قدر نسبت این دنباله از فرمول زیر به دست می آید.

$$q^{k+1} = \frac{b}{a}$$

تمرین ۵۵. بین دو عدد ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید.

تمرین ۵۶. در یک دنباله هندسی جمله اول ۸ برابر جمله چهارم است، جمله دوازدهم چند برابر جمله دهم است؟ ( $a_2 \neq 0$ )

تمرین ۵۷. بین  $\frac{1}{3}$  و ۲۷ سه عدد مثبت درج کنید که پنج عدد، تشکیل دنباله هندسی دهند.

$18, -12, 8, \dots$

تمرین ۵۸. جمله ی چندم دنباله ی هندسی زیر برابر  $\frac{512}{729}$  است؟

تمرین ۵۹. عدد های ۴،  $a$ ، ۱۶ جمله های متوالی دنباله های هندسی اند. مقدار  $a$  چقدر است؟

تمرین ۶۰. مجموع سه عدد که دنباله هندسی تشکیل می دهند، برابر  $\frac{21}{4}$  و حاصل ضرب آن ها  $\frac{27}{8}$  است. این اعداد را مشخص کنید.

نکته

۱. جمله عمومی دنباله ی هندسی با جمله ی اول  $a_1$  و قدر نسبت  $q$ ، برابر است با  $a_n = a_1 q^{n-1}$

۲. واسطه ی هندسی : فرض کنید  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه جمله ی متوالی دنباله ی هندسی با قدر نسبت  $q$  باشند. در این صورت  $b^2 = ac$  که  $b = \pm\sqrt{ac}$