رسم نمودار توابع

در مبحث رسم نمودار تابع تقریباً از همه مباحث قبلی (حد ، پیوستگی ، مجانبها ، یکنوایی تابع ، اکسترمم های نسبی ، جهت تقعر و نقطه عطف قائم و نقاط مشتق ناپذیر) استفاده می شود . در واقع با استفاده از این مفاهیم رفتار تابع را به صورت تقریبی حدس می زنیم و سپس آن را رسم می کنیم .

تذکر: با توجه به هر شرایطی که نمودار f دارد ، شرایط خاصی برای f' رقم می خورد . این شرایط از حالات زیر خارج نیست:

الف)f صعودی (نزولی) باشد $\Longleftrightarrow$ f' بالای (پایین) محور x ها قرار می گیرد .

ب)نقطه $x=a$ مینیمم (ماکسیمم) نسبی f باشد $\Longleftrightarrow$ f' از پایین (بالای) محورx ها به بالای (پایین) آن می رود و در نقطه ی $x=a$ محور x ها را قطع می کند .

پ)جهت تقعر تابع f به سمت بالا (پایین) باشد $\Longleftrightarrow$ f'صعودی (نزولی) اکید خواهد بود .

ت)نقطه ی $x=a$ اگر نقطه ی عطف افقی یا مایل تابع f باشد $\Longleftrightarrow$ f' در نقطه $x=a$ دارای اکسترمم نسبی است .

ث)اگر خط مماس در نقطه عطف تابع f به صورت ╲ باشد $\Longleftrightarrow$ نقطه اکسترمم در f' زیر محور x ها است .

ج) اگر خط مماس در نقطه عطف تابع f به صورت ╱ باشد $\Longleftrightarrow$ نقطه اکسترمم در f' بالای محور x ها است .

چ) اگر خط مماس در نقطه عطف تابع f به صورت ــــ باشد $\Longleftrightarrow$ نقطه اکسترمم در f' روی محور x ها است .

ح) اگر $x=a$ نقطه عطف قائم تابع f باشد $\Longleftrightarrow$ $x=a$ مجانب قائم با انفصال مضاعف f' است .

خ) اگر $x=a$ نقطه بازگشت تابع f باشد $\Longleftrightarrow$ $x=a$ مجانب قائم با انفصال ساده f' است .

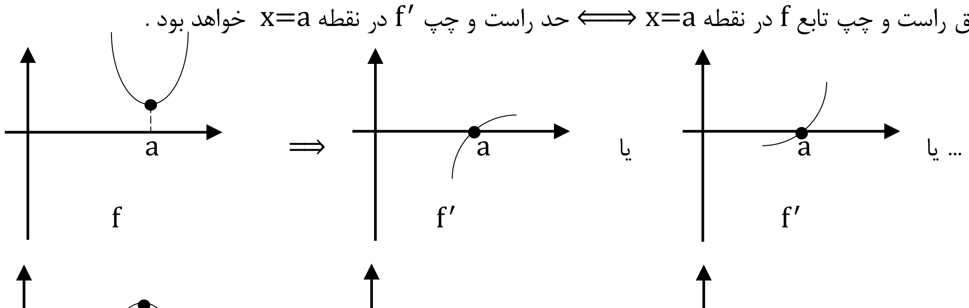
د)اگر $x=a$ نقطه گوشه تابع f باشد $\Longleftrightarrow$ f' در $x=a$ تعریف نخواهد شد و حد راست و چپ f' در $x=a$ هر دو موجود و نابرابر خواهند بود .

ذ)اگر خط $y=ax+b$ مجانب مایل تابع f باشد $\Longleftrightarrow$ خط $y=a$ مجانب افقی f' خواهد بود .

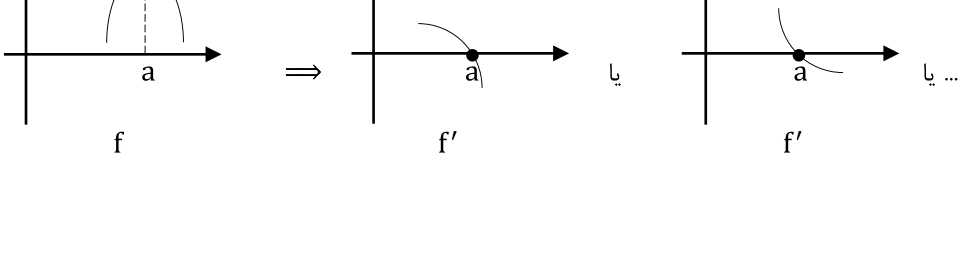
ر) اگر خط $y=c$ مجانب افقی تابع f باشد $\Longleftrightarrow$ خط $y=0$ (محور x ها) مجانب افقی f' خواهد بود .

ز)مشتق راست و چپ تابع f در نقطه $x=a$ $\Longleftrightarrow$ حد راست و چپ f' در نقطه $x=a$ خواهد بود .

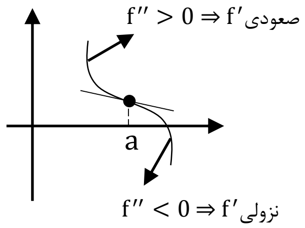
(الف و ب و پ



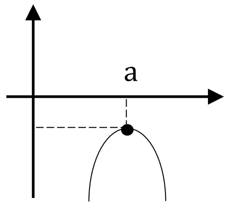
(الف و ب و پ



ت و ث)

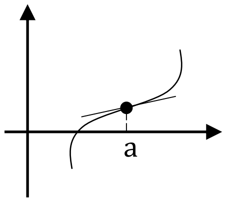


$\Longrightarrow$

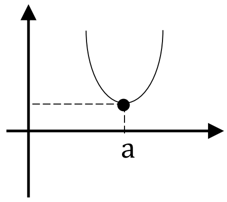


f $\qquad$ f'

ت و چ)

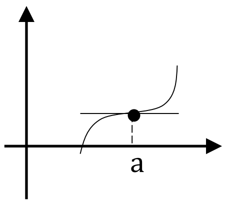


$\Longrightarrow$

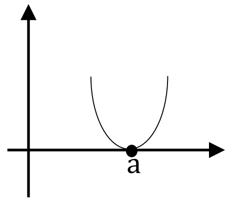


f $\qquad$ f'

ت و چ)

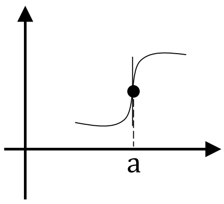


$\Longrightarrow$

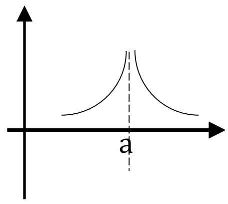


f $\qquad$ f'

ح)

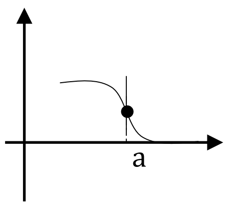


$\Longrightarrow$

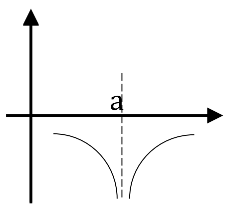


f $\qquad$ f'

ح)

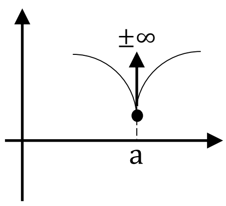


$\Longrightarrow$

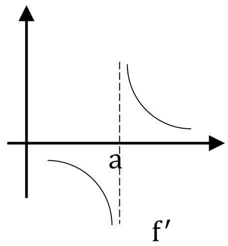


f $\qquad$ f'

خ)

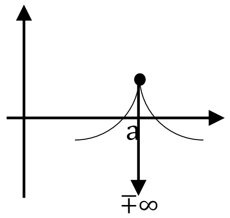


$\Longrightarrow$

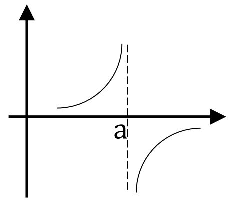


f $\qquad$ f'

خ)

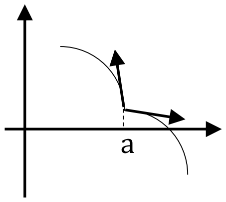


$\Longrightarrow$

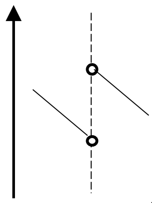


f   f′

د)

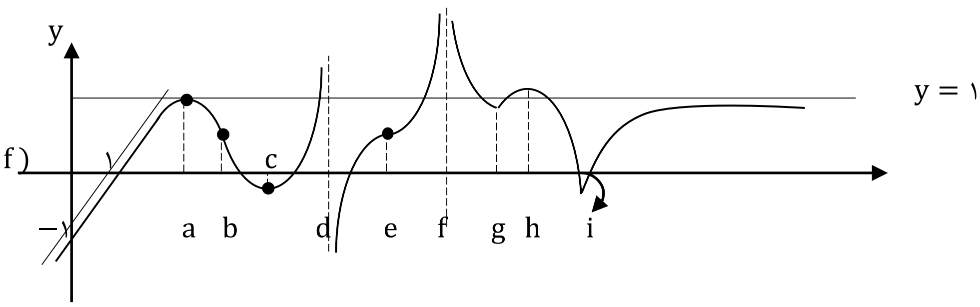


$\Longrightarrow$



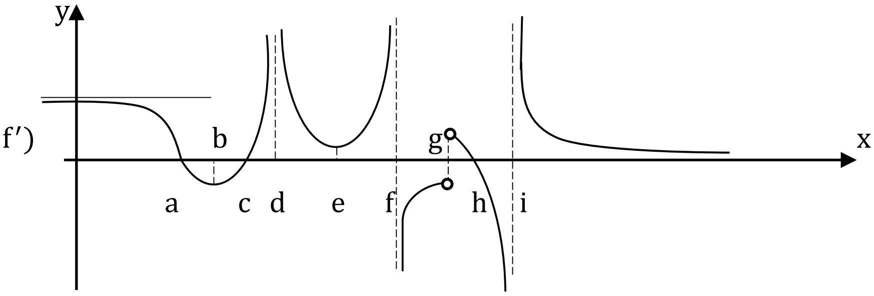
f   a   f′

حالت کلی موارد فوق را می توان در نمودار های f و ′f زیر ملاحظه کرد .

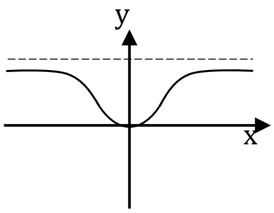


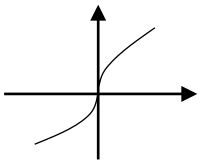
f مجانب مایل $\Rightarrow y - 0 = ۱\left(x - ۱\right) \;\Rightarrow\; y = x - ۱ \;\Rightarrow$ f′ مجانب افقی $\;\Rightarrow\; y = ۱$

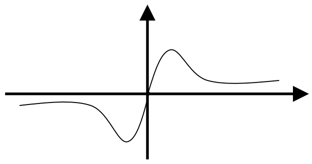
f مجانب افقی $\Rightarrow\; y = ۱ \quad\Rightarrow$ f′ مجانب افقی $\;\Rightarrow\; y = 0$

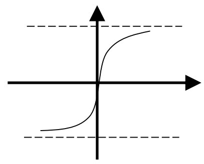


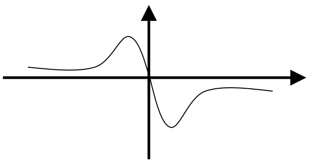
تست) شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ است . نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است ؟ (سراسری ریاضی – خارج – ۹۳)



۱)


۲)


۳)


۴)


حل) گزینه ۲

گزینه های ۱ و ۳ حذف　$\Rightarrow$　خط $y = 0$　$\Rightarrow$　مجانب افقی f'　$\Rightarrow$　خط $y = a$ مجانب افقی f است

گزینه ۲　$\Rightarrow$　نمودار f' یک اکسترمم نسبی با طول منفی $\Rightarrow$ نمودار f یک نقطه عطف با خط مماس به صورت ╲

در زیر محور x ها دارد　　　　　در x های منفی دارد

لازم به ذکر است که با همین دو مورد جواب مسئله به دست آمد در صورتی که می توانستیم از نقطه مینیمم تابع f در مبدأ مختصات و از نقطه عطف آن در x های مثبت برای اطمینان بیشتر در انتخاب جواب صحیح استفاده کنیم .

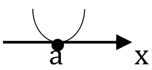
تحلیل نقطه ای : برای آنکه ببینیم نمودار تابع f در همسایگی نقطه $x=a$ چگونه است :

۱) $f'(a)$ را می یابیم و با توجه به علامت آن یکنوایی و یا اکسترمم نسبی بودن نقطه $x=a$ را تشخیص می دهیم .

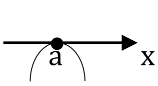
۲) $f''(a)$ را می یابیم و با توجه به علامت آن جهت تقعر و یا نقطه عطف بودن نقطه $x=a$ را تشخیص می دهیم .

نکته: اگر $x=a$ ریشه مکرر مرتبه n اُم تابع f باشد

۱) اگر n زوج باشد نقطه $x = a$ اکسترمم تابع $\frac{f}{g}$ است .

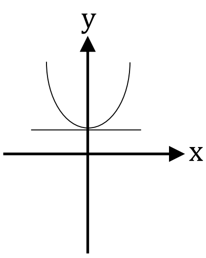


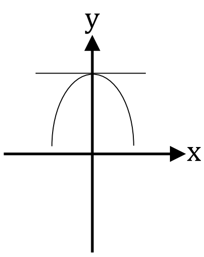
یا

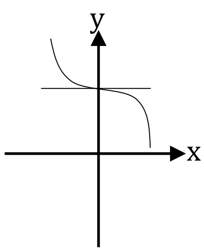


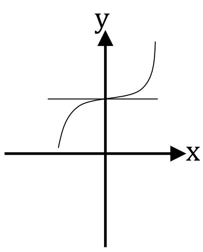
۲) اگر n فرد و $n \geq ۳$ باشد نقطه $x = a$ نقطه عطف افقی تابع $\frac{f}{g}$ است .

تست) نمودار تابع با ضابطه ی $y = \frac{x^۲+۱}{x^۳+۱}$ در نزدیکی نقطه ی $x=0$ چگونه است ؟(سراسری ریاضی – خارج – ۸۴)

۱)


۲)


۳)


۴)


حل) گزینه ۱

$$y' = \frac{۲x\left(x^{۳}+۱\right)-۳x^{۲}(x^{۲}+۱)}{\left(x^{۳}+۱\right)^{۲}} = \frac{-x^{۴}-۳x^{۲}+۲x}{\left(x^{۳}+۱\right)^{۲}} \Rightarrow y'(x=0)=0$$

برای تعیین علامت y' در اطراف $x=0$ کافی است در $x\left(-x^{۳}-۳x+۲\right)$، 0^{+} و 0^{-} قرار دهیم .

x		0	
y′	−	0	+
y	↘	min	↗

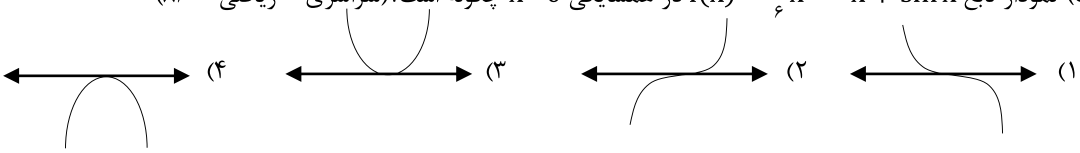
نکته: در توابع به صورت $y=|f(x)|$ اگر x=a ریشه f(x) باشد و بخواهیم نمودار تابع را در این نقطه مورد بررسی قرار دهیم کافی است x=a را یک ریشه مکرر از مرتبه زوج در نظر بگیریم .

مثلاً تابع $f(x)=x|x^{۲}-x|$ در نقطه x=0 :

$f(x)=x\left|x\left(x-۱\right)\right| \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ برای داخل قدر مطلق مرتبه زوج} \\ \text{محسوب شده و برای بیرون قدر مطلق مرتبه فرد} \end{cases} \Rightarrow$ نقطه عطف افقی است $\Leftarrow x=0$ برای $f(x)$ مرتبه فرد است

نکته: در تحلیل نقطه ای از هم ارزی هایی که در فصل حد داشتیم می توان استفاده کرد .

تست) نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۶}x^{۳}-x+\sin x$ در همسایگی x=0 چگونه است؟(سراسری – ریاضی – ۸۶)



حل) گزینه ۲

$$x\to 0 \xrightarrow{\sin x\sim x} f(x)=\frac{۱}{۶}x^{۳}-x+x=\frac{۱}{۶}x^{۳} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}\geq 0 \rightarrow \text{تابع صعودی است} \Rightarrow x=0 \text{ عطف افقی}$$

$$f''(x)=x \Rightarrow \begin{cases} x\to 0^{+} \Rightarrow f''>0 \rightarrow \text{تقعر رو به بالا} \\ x\to 0^{-} \Rightarrow f''<0 \rightarrow \text{تقعر رو به پایین} \end{cases}$$

الف) رسم نمودار توابع چند جمله ای

۱)از آنجاییکه دامنه توابع چند جمله ای برابر $\mathbb{R}$ است پس ابتدا حد در $\pm\infty$ این توابع را مشخص می کنیم تا بدانیم نمودار از کجا شروع و به کجا ختم می شود .

۲)ریشه های مکرر از مرتبه زوج نقاط اکسترمم نسبی و ریشه های مکرر از مرتبه فرد نقاط عطف توابع چند جمله ای خواهند بود .

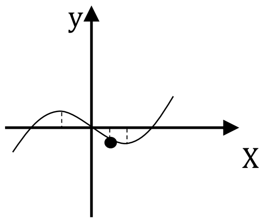
$$f(x) = x^{۲}\left(x-۳\right)^{۳}$$

اکسترمم $\leftarrow x = 0$　　　　$x = ۳$ عطف

نکته: در مواردی که نمودار تابع داده شده و ضابطه آن مد نظر است باید به محل نقاط اکسترمم و عطف تابع توجه شود (این نقاط در x های مثبت قرار دارند یا منفی؟!) باید به خطوط مماسی که در نقاط خاصی بر نمودار رسم شده دقت شود .

نکته: تابعی که دارای n ریشه ساده باشد دارای $(n-۱)$ اکسترمم نسبی است .

تست) شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{۲}{۳}x^{۳} + ax^{۲} + bx$ است . زوج مرتب (a,b) به کدام صورت می تواند باشد؟(سراسری تجربی – خارج – ۸۸)



۱)(−۴ و −۱)　　۲)(۴ و −۱)　　۳)(−۴ و ۱)　　۴)(۴ و ۱)

حل) گزینه ۱

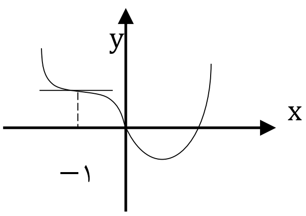
$$y' = ۲x^{۲} + ۲ax \Rightarrow y'' = ۴x + ۲a = 0 \Rightarrow x = \frac{-۲a}{۴} = \frac{-a}{۲}$$

چون نقطه عطف نمودار درx های مثبت رخ داده پس $\frac{-a}{۲} > 0$ در نتیجه a<0 پس گزینه های ۳ و ۴ حذف و با توجه به گزینه های ۱ و ۲ پس $a = -۱$ می باشد.　　$y = \frac{۲}{۳}x^{۳} - x^{۲} + bx$

از آنجایی که تابع ۲ اکسترمم نسبی با طولهای مختلف العلامه دارد ، پس $\frac{c}{a}$ در ضابطه y' باید منفی باشد .

$$y' = ۲x^{۲} - ۲x + b \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{b}{۲} < 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow \boxed{b = -۴}$$

تست)شکل روبرو ، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^{۴} - x^{۳} + ax^{۲} + bx$ است ، b کدام است؟(سراسری ریاضی – خارج – ۹۴)



۱) −۱۱　　۲) −۱۰　　۳) −۹　　۴) −۸

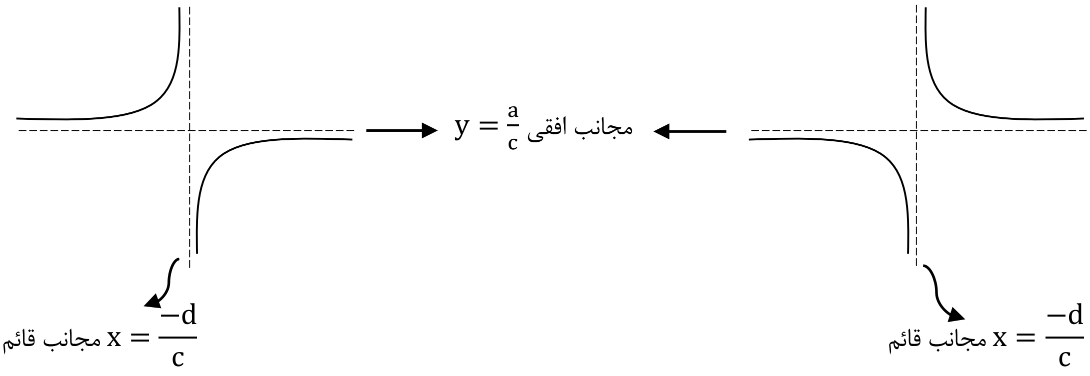
حل)گزینه ۱

با توجه به شکل نقطه $x = -۱$ عطف افقی تابع است پس $f'\left(-۱\right) = f''\left(-۱\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = ۴x^{۳} - ۳x^{۲} + ۲ax + b \Rightarrow f'\left(-۱\right) = -۴ - ۳ - ۲a + b = 0 \Rightarrow b - ۲a = ۷ \\ f''(x) = ۱۲x^{۲} - ۶x + ۲a \Rightarrow f''\left(-۱\right) = ۱۲ + ۶ + ۲a = 0 \Rightarrow a = -۹ \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b = -۱۱}$$

ب)رسم نمودار تابع هموگرافیک:

به هر تابع به صورت $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن $c\neq 0$ و $\frac{b}{d}\neq\frac{a}{c}$ باشد تابع هموگرافیک گفته که در کل دامنه اش غیر یکنواست . دامنه این تابع $\mathbb{R}-\left\{\frac{-d}{c}\right\}$ و برد آن $\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$ است .



تذکر: محل برخورد مجانبها همان مرکز تقارن تابع است به مختصات $(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$

تذکر: معادله محورهای تقارن توابع هموگرافیک به صورت $y\pm x=\frac{a}{c}\mp\frac{d}{c}$ می باشد .

تست) منحنی به معادله $y=\frac{x+۱}{۱-۲x}$ ، محور های مختصات را در نقاط A و B قطع می کند ، فاصله مرکز تقارن این منحنی از وتر AB کدام است؟(سراسری ریاضی – خارج – ۸۹)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　　۲) $\sqrt{۲}$　　　۳) $\sqrt{۵}$　　　۴) $۲\sqrt{۲}$

حل) گزینه ۲

خط گذرنده از AB　→　$A(-۱,0)$ و $B(0,۱)$ $\Rightarrow$ $y_{AB}-0=۱\left(x-(-۱)\right)$ $\Rightarrow$ $y=x+۱$

مرکز تقارن نمودار هموگرافیک برابر است با : $\left(\frac{-d}{c},\frac{a}{c}\right)=\left(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)$

از هندسه تحلیل می دانیم که فاصله نقطه (x_0,y_0) از خط $ax+by+c=0$ برابر است با :

$$D=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\quad\Longrightarrow\quad D=\frac{\left|۱\times\left(\frac{۱}{۲}\right)-۱\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۱\right|}{\sqrt{(۱)^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

ج)رسم نمودار توابع کسری گویا: برای هر تابعی که صورت و مخرج آن چند جمله ای است به صورت زیر عمل می کنیم :

۱) نقاط برخورد تابع با محورهای مختصات را مشخص می کنیم . یکبار به جای x ، صفر قرار می دهیم و یکبار صورت کسر را برابر صفر قرار می دهیم .

۲) مجانبهای تابع را مشخص کرده و محل برخورد آن را با نمودار و محورهای مختصات تعیین می کنیم .

۳) اگر نمودار تابع در x=a انفصال مضاعف داشته باشد آنگاه x=a ریشه مضاعف مخرج تابع است .

۴) اگر نمودار تابع در x=a انفصال ساده داشته باشد آنگاه x=a ریشه ساده مخرج تابع است .

۵) اگر نمودار تابع بر خط y=k مماس شود ، باید معادله $\frac{f}{g}=k$ ریشه مضاعف داشته باشد . در حالت خاص اگر x=a ریشه مضاعف f باشد ، آنگاه تابع در x=a بر محور x ها مماس است .

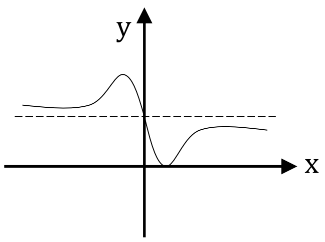
۶) اگر نمودار تابع در x=a توخالی باشد یعنی x=a هم ریشه صورت است و هم ریشه مخرج .

۷) ریشه های مکرر مرتبه زوج صورت نقاط اکسترمم تابع گویا هستند .

۸) ریشه های مکرر مرتبه فرد (بزرگتر از ۱) صورت نقاط عطف تابع گویا هستند .

تست) شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^{۲}+bx+۲}{x^{۲}+۱}$ است . دوتایی مرتب (a,b) کدام است ؟ (سراسری ریاضی – ۹۱)

۱)(۲-و۱)　　　۲)(۴و۲)　　　۳)(۴-و۲)　　　۴)(۲و۱)



حل) گزینه ۳

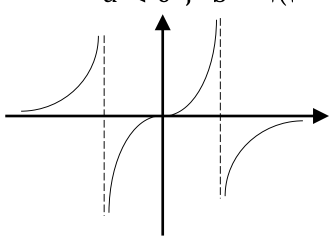
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^{۲}}{x^{۲}}=a \qquad ,f(0)=a \quad \Rightarrow \boxed{a=۲} \qquad \Rightarrow\ f(x)=\frac{۲x^{۲}+bx+۲}{x^{۲}+۱}$$

نمودار در x های مثبت بر محور x ها مماس شده است ؛ پس صورت تابع f ریشه مضاعفی مثبت دارد ← $\left.\begin{matrix} \Delta_{\text{صورت}}=0 \\ \text{ریشه مضاعف}>0\end{matrix}\right\}$

$$\Delta_{\text{صورت}}=b^{۲}-۴\left(۲\right)\left(۲\right)=0 \ \Rightarrow b=\pm ۴ \qquad ,\text{ریشه مضاعف}>0\ \Rightarrow \frac{-b}{۲a}>0 \ \Rightarrow\ b<0\ \Rightarrow \boxed{b=-۴}$$

تست) شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x}{ax^{۲}+bx+۱}$ است . مقادیر a و b چگونه است ؟(سراسری تجربی – خارج – ۹۴)

۱) $a<0\ ,\ b=0$　　　۲) $a>0\ ,\ b=0$　　　۳) $a>0\ ,\ b=۱$　　　۴) $a<0\ ,\ b=۱$



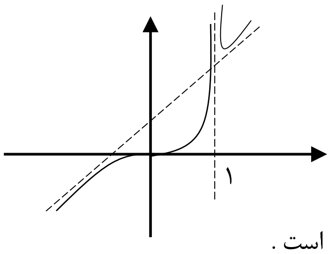
حل) گزینه ۱

با توجه به نمودار ملاحظه می شود این تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است (یعنی تابعی است فرد)

پس مجانبهای قائم این تابع قرینه ی یکدیگرند در نتیجه برای مخرج تابع f داریم $s = 0$ و $p < 0$

$$s = \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \quad \text{و}\quad p = \frac{c}{a} = \frac{۱}{a} < 0 \Rightarrow a < 0$$

تست) شکل روبرو نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^۳+ax^۲}{x^۲+bx+c}$ است . عدد (bc-a) کدام است؟ (سراسری ریاضی – ۸۲ و ۹۲)



۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) ۲

حل) گزینه ۱

نمودار فقط در مبدأ مختصات محور x ها را قطع کرده پس تنها ریشه صورت x=0 است .

$$x^۳ + ax^۲ = 0 \Rightarrow x^۲(x + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^۲ = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x + a = 0 \Rightarrow x = -a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 0}$$

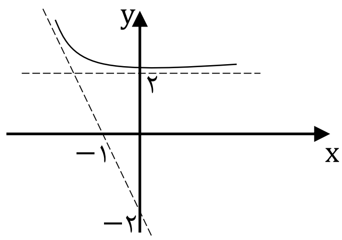
از طرفی خط x=۱ تنها مجانب قائم تابع است پس x=۱ ریشه مضاعف مخرج تابع می باشد ؛ پس:

$$(x-۱)^۲ = x^۲ + bx + c \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = x^۲ + bx + c \begin{cases} b = -۲ \\ c = ۱ \end{cases} \Rightarrow bc - a = \left(-۲\right)\left(۱\right) - 0 = \boxed{-۲}$$

د)رسم توابع رادیکالی : برای رسم این توابع ابتدا دامنه تابع را مشخص می کنیم ؛ سپس با بررسی مجانبهای افقی و مایل و تعیین محل برخورد آنها با محورهای مختصات و نمودار آن را رسم می کنیم .

تذکر: تشخیص نقاط عطف قائم و یا بازگشت در رسم توابع رادیکالی مثمر ثمر خواهد بود .

تست) شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax + \sqrt{x^۲ + bx + ۵}$ است . دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ (سراسری ریاضی – خارج – ۹۰)



۱) $(-۱,-۴)$　　۲) $(-۱,۴)$　　۳) $(۱,-۴)$　　۴) $(۱,۴)$

حل) گزینه ۲

$$\text{مجانب افقی} \Rightarrow y = ۲ = \lim_{x\to+\infty} f(x) = ax + \left|x + \frac{b}{۲}\right| = \left(a + ۱\right)x + \frac{b}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + ۱ = 0 \Rightarrow a = -۱ \\ \frac{b}{۲} = ۲ \Rightarrow b = ۴ \end{cases} \Rightarrow \quad (a\,,b) = (-۱,۴)$$

Telegrame: KiamoghaddasNiak

Email: Km.Niak@gmail.com