به نام خدا

جزوه ریاضیات پایه نهم

فصل اول: مجموعه ها

فصل دوم: عددهای حقیقی

فصل سوم: استدلال و اثبات در هندسه

فصل چهارم: توان و ریشه

فصل پنجم: عبارت های جبری

فصل ششم: خط و معادله های خطی

فصل هفتم: عبارت های گویا

فصل هشتم: حجم و مساحت

تهیه و تنظیم: مهندس رسول دلیار

کارشناسی ارشد دانشگاه شهید بهشتی تهران

دبیر ریاضیات مدارس استان قم و مدرس کنکور

۰۹۰۱۰۸۲۵۲۵۸ : شماره تماس دارای واتساپ و تلگرام

Telegram:@Rasouldelyar

تهیه و تنظیم : دلیار

فصل ششم : خط و معادله های خطی / درس اول : معادلهٔ خط

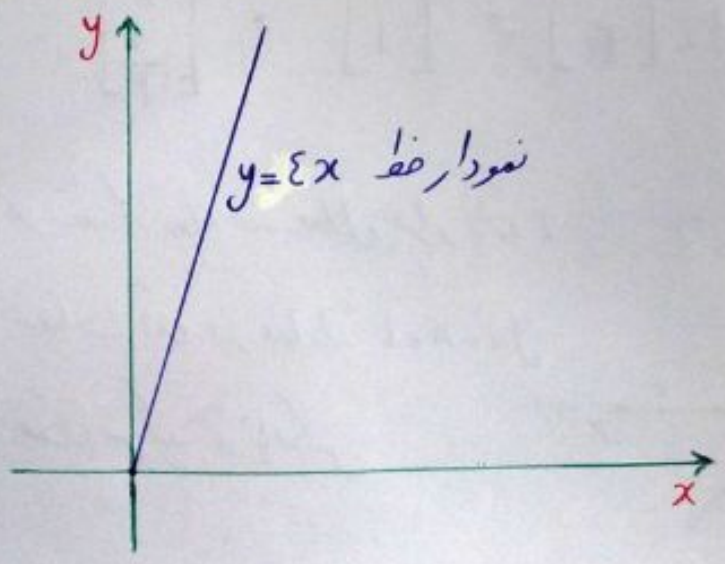
اگر طول ضلع یک مربع را با x و محیط آن را با y نشان دهیم، آنگاه خواهیم داشت :

$$y = 4x$$

همانطور که مشخص است، $y = 4x$ معادله ای با دو متغیر است و به ازای هر مقدار x (ضلع مربع)، یک مقدار برای y (محیط مربع) بدست می آید. بنابراین معادلهٔ $y = 4x$ بی شمار جواب دارد.

ضلع مربع (x)	1	2	3	4	5	6	....	x
محیط مربع (y)	4	8	12	16	20	24	....	$4x$

همانطور که مشاهده می شود با افزایش یک واحدی مقدار x ، مقدار y نیز به میزان ثابت $+4$ تغییر می کند، بنابراین اگر زوج عددهای بدست آمده از جدول فوق را به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان داده و هر نقطه را در دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار حاصل از وصل کردن این نقاط به هم، یک خط خواهد بود.



چون به ازای $x=0$ ، داریم $y=0$ ،

پس این نمودار خطی از مبدأ می گذرد.

09010825258

مثال: معادلهٔ $x+y=1$ را در نظر بگیرید:

الف) این معادله چند پاسخ دارد؟ بی‌شمار پاسخ دارد، چون یک معادله با دو متغیر x و y است.

ب) با اختصاص مقادیر دلخواه به متغیر x، مقادیر y را به ازای هر x بدست آورید.

با بازنویسی معادله به صورت $y=-x+1$ داریم:

اگر $x=-1 \rightarrow y=-(-1)+1=1+1=2$

اگر $x=-2 \rightarrow y=-(-2)+1=2+1=3$

اگر $x=\frac{1}{2} \rightarrow y=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

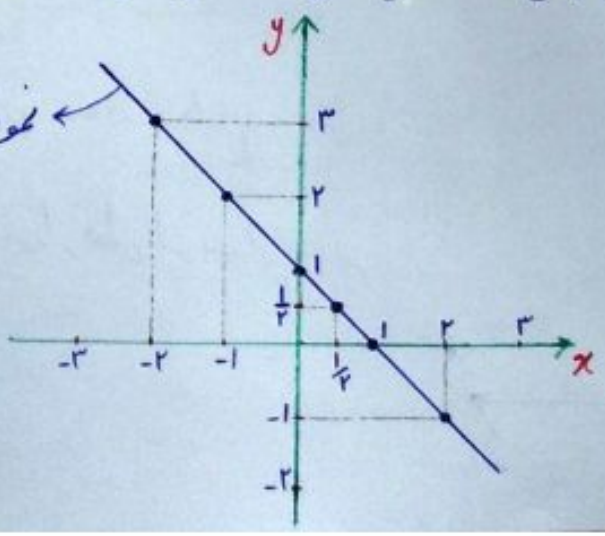
اگر $x=1 \rightarrow y=-1+1=0$

اگر $x=2 \rightarrow y=-2+1=-1$

اگر $x=0 \rightarrow y=0+1=1$

اکنون اگر زوج عددهای بدست آمده از معادلات فوق را به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان داده و این نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کنیم. از وصل کردن این نقاط به یکدیگر، یک نمودار خطی حاصل می‌شود. مختصات این ۶ نقطه به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



هر نقطه که روی خط مقابل قرار دارد، مختصات آن در معادلهٔ $y=-x+1$ صدق می‌کند و بالعکس.

09010825258

مثال: معادلهٔ $3x-4y=12$ را در نظر بگیرید:

الف) پنج پاسخ برای آن بنویسید.

$x=1 \rightarrow 3(1)-4y=12 \longrightarrow 3-4y=12 \longrightarrow -4y=9 \longrightarrow y=-\frac{9}{4}=-2,25$

$x=-1 \rightarrow 3(-1)-4y=12 \longrightarrow -3-4y=12 \longrightarrow -4y=15 \rightarrow y=-\frac{15}{4}=-3,75$

$x=0 \longrightarrow 3(0)-4y=12 \longrightarrow 0-4y=12 \longrightarrow -4y=12 \longrightarrow y=-\frac{12}{4}=-3$

$x=\frac{-1}{3} \rightarrow 3\left(\frac{-1}{3}\right)-4y=12 \longrightarrow -1-4y=12 \longrightarrow -4y=13 \longrightarrow y=-\frac{13}{4}=-3,25$

$y=0 \longrightarrow 3x-4(0)=12 \longrightarrow 3x-0=12 \longrightarrow 3x=12 \longrightarrow x=\frac{12}{3}=4$

ب) آیا تساوی $3x-4y=12$ به ازای $x=2$ و $y=-2$ برقرار است؟

خیر - زیرا با جایگذاری مقادیر داده شده، داریم:

$3(2)-4(-2)=6+8=14 \neq 12$

پ) تساوی $3x-4y=12$ را به صورت رابطه‌ای از y برحسب x بنویسید.

$3x-4y=12 \longrightarrow 4y=3x-12 \xrightarrow{\div 4} \frac{4y}{4}=\frac{3x-12}{4}$

$\Rightarrow y=\frac{3x}{4}-\frac{12}{4} \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-3$

تهیه و تنظیم: دلیار

DELYAR RASOUL

نکته: معادلاتی مانند $y=4x$ ، $x+y=1$ ، $y=2x-1$ ، $3x-4y=12$ و ... اگرچه بی‌شمار جواب دارند ولی اتحاد نیستند، چون به ازای تمامی مقادیر متغیرها، برقرار نیستند.

تعریف: هر معادله به صورت کلی $y=ax+b$ که در آن a و b اعدادی حقیقی هستند، معادلهٔ یک خط است، زیرا اگر تمام پاسخ‌های این معادله را به صورت نقطه روی دستگاه مختصات نشان دهیم، شکل یک خط بدست می‌آید. به همین دلیل می‌گوییم x و y با هم رابطهٔ خطی دارند. معادلهٔ فوق بی‌شمار جواب دارد ولی اتحاد نیست.

بعنوان مثال $y=-x+2$ معادلهٔ یک خط است که در آن $a=-1$ و $b=2$ فرض شده است

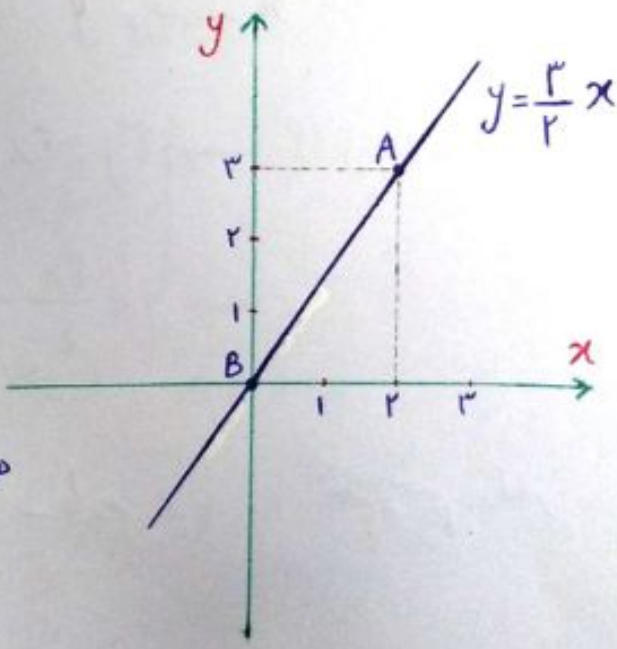
نکته: با تعیین دو نقطهٔ دلخواه از هر معادلهٔ خط، می‌توان نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد:

مثال: نمودار خط‌های با معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $y=\frac{3}{2}x$ دو نقطه (دو پاسخ) دلخواه از آن را در صفحهٔ مختصاتی مشخص کرده و با وصل کردن این دو نقطه و امتداد آن، نمودار این معادلهٔ خطی را رسم می‌کنیم.

$$x=2 \longrightarrow y=\frac{3}{2}(2)=3 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$x=0 \longrightarrow y=\frac{3}{2}(0)=0 \Rightarrow B=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

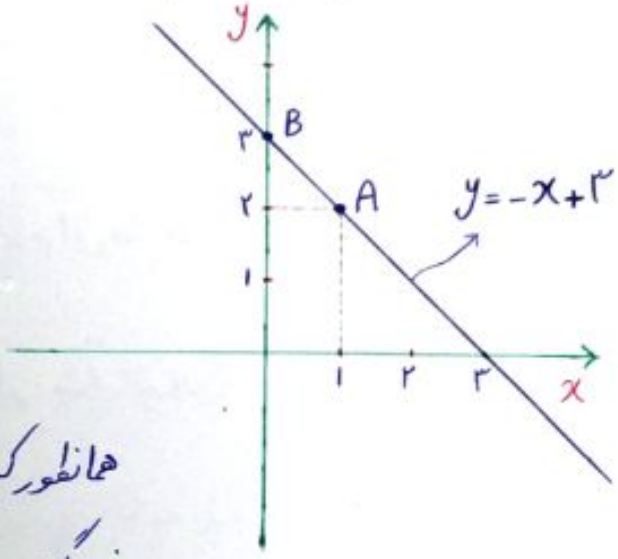


همانطور که مشاهده می‌شود نمودار خط $y=\frac{3}{2}x$ از مبدأ می‌گذرد.

ب) $y=-x+3$ دو نقطه (دو پاسخ) دلخواه از آن را در صفحهٔ مختصاتی مشخص کرده، سپس این دو نقطه را به هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم:

$x=1 \longrightarrow y=-1+3=2 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

$x=0 \longrightarrow y=0+3=3 \Rightarrow B=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$



همانطور که مشاهده می‌شود نمودار خط $y=-x+3$ از مبدأ مختصات نمی‌گذرد، چون مختصات $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ در معادلهٔ این خط صدق نمی‌کند.

تذکر: برای تعیین محل برخورد نمودار هر خط با محورهای مختصات، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

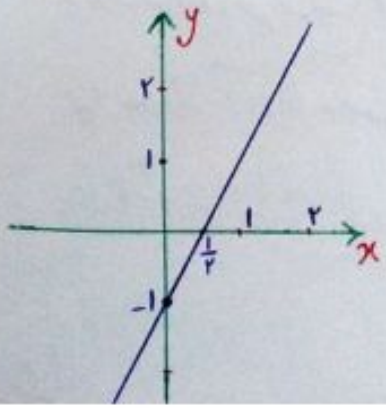
۱) برای تعیین محل برخورد نمودار خط با محور xها، قرار می‌دهیم $y=0$ و مقدار x را می‌یابیم.

۲) برای تعیین محل برخورد نمودار خط با محور yها، قرار می‌دهیم $x=0$ و مقدار y را بدست می‌آوریم.

مثلاً در معادلهٔ $y=2x-1$:

$x=0 \Rightarrow y=2(0)-1=-1 \rightarrow \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$y=0 \Rightarrow 0=2x-1 \rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$



پس نمودار خط به معادلهٔ $y=2x-1$، محور xها را در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{2}$ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع می‌کند.

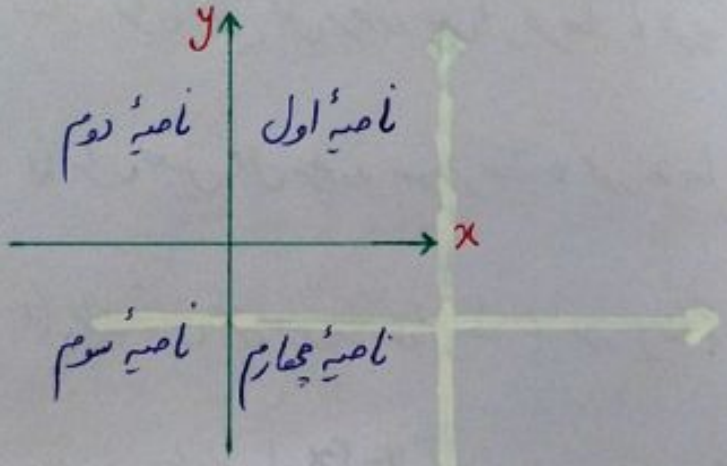
در نتیجه اگر مختصات $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ در معادلهٔ یک خط صدق کند، نمودار آن خط از مبدأ مختصات می‌گذرد.

تعریف: $y=ax$ صورت کلی معادله خط هایی است که از مبدأ مختصات می‌گذرند.

بنابراین بی‌شمار معادله خط مانند $y=2x$ ، $y=-x$ ، $y=3x$ ، $y=\frac{1}{2}x$ و ... وجود دارند که نمودار آن‌ها از مبدأ مختصات می‌گذرد که به آن‌ها خط مبدأ گذر نیز گفته می‌شود.

نکته: معادله خط هایی به صورت کلی $y=ax$ که از مبدأ مختصات می‌گذرند، نمودار آن‌ها از دو ناحیهٔ مختصاتی عبور می‌کند.

در حالیکه معادله خط هایی با صورت کلی $y=ax+b$ که از مبدأ مختصات نمی‌گذرند، نمودار آن‌ها از سه ناحیهٔ مختصاتی عبور می‌کند.



مثال: در هر مورد، دو نقطه از یک خط داده شده است، معادلهٔ خط را حدس بزنید.

الف) $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $\longrightarrow y=2x$

ب) $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ $\longrightarrow y=-x$

پ) $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ $\longrightarrow y=\frac{1}{3}x$

با توجه به اینکه هر سه خط از مبدأ می‌گذرند، لذا معادلهٔ آن‌ها به صورت کلی $y=ax$ می‌باشد.

تهیه و تنظیم: دلیار
09010825258

کار در کلاس صـ ۱۰۰ :

۱- مختصات نقطه‌ای به طول ۲ را روی خط $y=2x-1$ بنویسید.

کافی است در معادلهٔ خط، به جای x مقدار ۲ را قرار داده و y متناظر با آن را بیابیم:

$$x=2 \longrightarrow y=2(2)-1=4-1=3 \Rightarrow \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

۲- مختصات نقطه‌ای به عرض ۳- را روی خط $y=-\frac{1}{2}x+2$ پیدا کنید.

کافی است در معادلهٔ خط به جای y مقدار ۳- را قرار داده و x متناظر با آن را بیابیم:

$$-3=-\frac{1}{2}x+2 \Rightarrow \frac{1}{2}x=2+3 \Rightarrow \frac{1}{2}x=5 \xrightarrow{\times 2} x=10 \Rightarrow \begin{bmatrix}10\\-3\end{bmatrix}$$

۳- مختصات محل برخورد خط $y=5x+1$ با محورهای مختصات را پیدا کنید.

محل برخورد با محور yها: $x=0 \longrightarrow y=5(0)+1=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

محل برخورد با محور xها: $y=0 \longrightarrow 0=5x+1 \Rightarrow 5x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{5} \Rightarrow \begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\\0\end{bmatrix}$

مثال: مختصات نقطه‌ای به عرض ۳ را در خط $y=3x-1$ بدست آورید.

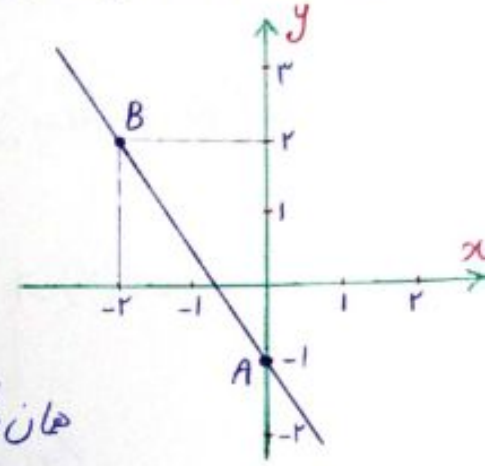
$$y=3 \longrightarrow 3=3x-1 \longrightarrow 3x=3+1 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow \begin{bmatrix}\frac{4}{3}\\3\end{bmatrix}$$

مثال: خط به معادلهٔ $y=-\frac{3}{2}x-1$ را رسم کنید. نمودار آن از کدام ناحیهٔ مختصاتی نمی‌گذرد؟

مختصات دو نقطه از خط را مشخص کرده و آن را رسم می‌کنیم:

$$x=0 \longrightarrow y=-\frac{3}{2}(0)-1=0-1=-1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

$$x=-2 \longrightarrow y=-\frac{3}{2}(-2)-1=+3-1=2 \Rightarrow B=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$



همان طور که مشاهده می‌شود، نمودار این خط فقط از ناحیهٔ اول مختصاتی نمی‌گذرد.

- آیا نقطهٔ $\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ مختصات این نقطه را در معادلهٔ خط، امتحان می‌کنیم:

$$3=-\frac{3}{2}(-4)-1=+6-1=5 \longrightarrow 3=5 \longrightarrow$$

این تساوی غیرممکن است، پس این نقطه روی خط واقع نیست.

- مختصات نقطه‌ای به عرض -4 را بدست آورید.

$$y=-4 \longrightarrow -4=-\frac{3}{2}x-1 \longrightarrow \frac{3}{2}x=4-1=3 \longrightarrow \frac{3}{2}x=3$$

$$\xrightarrow{\times\frac{2}{3}} x=\frac{2}{3}\times 3=2 \Rightarrow x=2 \rightarrow \begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$$

- محل تلاقی (برخورد) نمودار با محورهای مختصات را بدست آورید.

$$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

$$y=0 \Rightarrow 0=-\frac{3}{2}x-1 \Rightarrow \frac{3}{2}x=-1 \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} x=\frac{-2}{3} \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{-2}{3}\\0\end{bmatrix}$$

تهیه و تنظیم: دلیار
09010825258

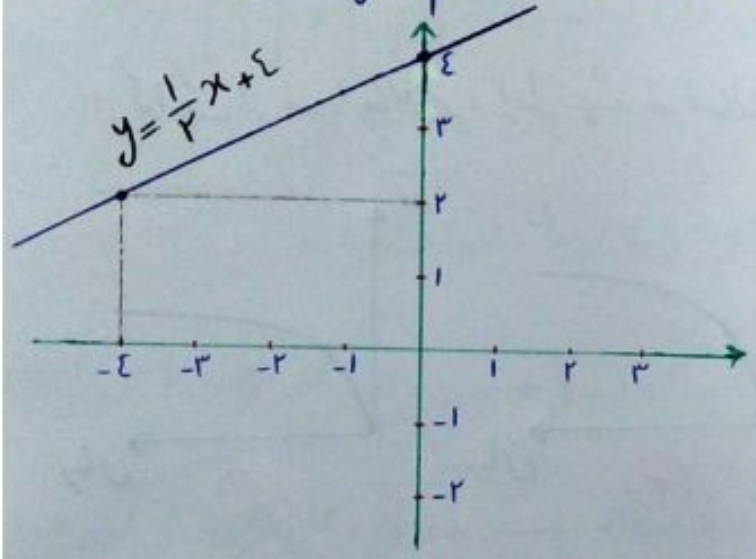
تمرینات صفحه‌ی ۱۰۰ و ۱۰۱:

۱- خط به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}x+4$ را رسم کنید.

دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم:

$x=0 \rightarrow y=\frac{1}{2}(0)+4=4 \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$

$x=-4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}(-4)+4=-2+4=2 \rightarrow \begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix}$



نمودار خط به معادله‌ی $y=\frac{1}{2}x+4$ از ناحیه‌های اول، دوم و سوم مختصاتی عبور می‌کند و فقط از ناحیه‌ی چهارم عبور نمی‌کند.

الف) آیا نقطه‌ی $\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ روی این خط است؟ باید مختصات این نقطه در معادله‌ی خط صدق کند:

این نقطه روی خط قرار ندارد $\Rightarrow$ غیرممکن $\rightarrow 5=-1 \Rightarrow -1=\frac{1}{2}(2)+4=1+4=5$

ب) مختصات نقطه‌های برخورد خط با محورهای مختصات را پیدا کنید.

محل برخورد با محور yها: $x=0 \rightarrow y=\frac{1}{2}(0)+4=4 \rightarrow \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$

محل برخورد با محور xها: $y=0 \rightarrow 0=\frac{1}{2}x+4 \rightarrow \frac{1}{2}x=-4 \xrightarrow{\times 2} x=-8 \Rightarrow \begin{bmatrix}-8\\0\end{bmatrix}$

پ) نقطه‌ای از خط به طول -1 را پیدا کنید.

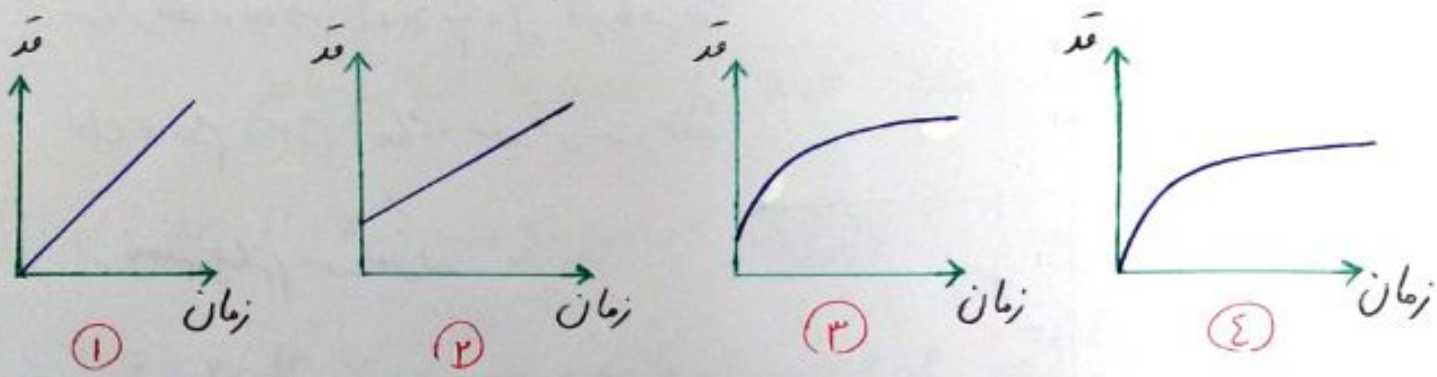
$x=-1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}(-1)+4=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}=3/5 \Rightarrow \begin{bmatrix}-1\\3/5\end{bmatrix}$

۲- طول یک فنر ۱۰ سانتی‌متر است. وقتی وزنه‌ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطهٔ $y = 0/8x + 10$ پیدا می‌شود. اگر وزنه‌ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می‌شود؟

کافی است به جای x، عدد ۵ را قرار دهیم:

$x = 5 \longrightarrow y = 0/8(5) + 10 = 4 + 10 = 14$ ⟹ طول فنر ۱۴ سانتی‌متر می‌شود

۳- کدامیک از نمودارهای زیر، رابطهٔ رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می‌دهد؟



نمودار (۳) - چون اولاً طول قد انسان در هنگام تولد برابر صفر نیست، پس شروع نمودار از مبدأ نخواهد بود. ثانیاً تغییرات طول قد در دوره‌های مختلف زندگی انسان متفاوت است و این تغییرات به صورت خطی نیست، مثلاً تا دورهٔ نوجوانی، معمولاً رشد قد انسان سریع‌تر است و به همین دلیل، شیب نمودار باید تندتر باشد ولی در دورهٔ جوانی، این سرعت رشد کاهش یافته تا سرانجام رشد قد متوقف شده و قد انسان ثابت می‌ماند.

۴- دو نقطه از یک خط داده شده است، معادلهٔ خط را حدس بزنید.

الف) $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ ⟵ از مبدأ مختصات می‌گذرد ⟵ $y=3x$

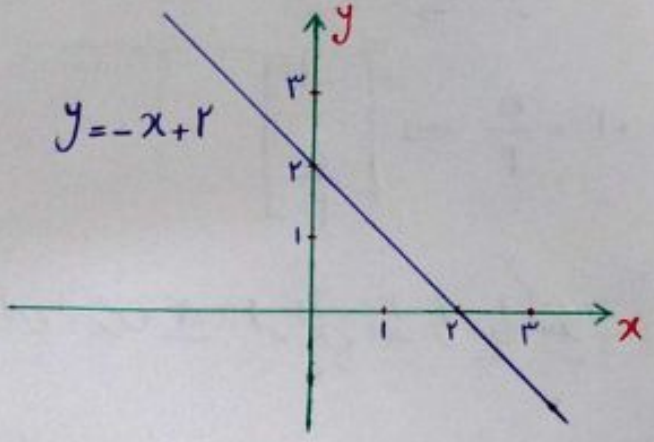
ب) $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $y=2x-1$

پ) $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $y=3x+1$ ⟵ محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند

۵- مختصات محل برخورد خط به معادلهٔ $y=-x+2$ را با محورهای مختصات بیابید.

محل برخورد با محور yها: $x=0 \longrightarrow y=0+2=2 \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

محل برخورد با محور xها: $y=0 \longrightarrow 0=-x+2 \longrightarrow x=2 \Rightarrow \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$



همانطور که مشاهده می‌شود، نمودار خط به معادلهٔ $y=-x+2$ فقط از ناحیهٔ سوم مختصاتی نمی‌گذرد.

۶- خط $y=-\frac{3}{5}x+4$ را در نظر بگیرید، مختصات نقطه‌ای از خط را بیابید که طول آن ۵ باشد.

$x=5 \longrightarrow y=-\frac{3}{5}(5)+4=-3+4=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$

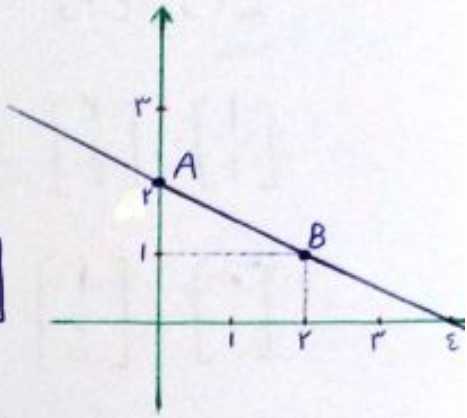
تهیه و تنظیم: دلیار
09010825258

۷- خط $y=-\frac{1}{2}x+2$ را رسم کنید.

دو نقطه دلخواه از خط را مشخص کرده و آن را رسم می‌کنیم:

$x=0 \longrightarrow y=-\frac{1}{2}(0)+2=2 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

$x=2 \longrightarrow y=-\frac{1}{2}(2)+2=-1+2=1 \Rightarrow B=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$



- آیا نقطه $\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ باید مختصات این نقطه در معادله خط صدق کند:

این نقطه روی خط واقع است $\longrightarrow 3=3 \longrightarrow 3=-\frac{1}{2}(-2)+2=+1+2=3$

- نقطه‌ای به طول ۱- از این خط را پیدا کنید.

$x=-1 \longrightarrow y=-\frac{1}{2}(-1)+2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}$

- نقطه‌ای به عرض ۲- از این خط را پیدا کنید.

$y=-2 \longrightarrow -2=-\frac{1}{2}x+2 \longrightarrow \frac{1}{2}x=2+2=4 \xrightarrow{\times 2} x=8 \Rightarrow \begin{bmatrix}8\\-2\end{bmatrix}$

- محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

$y=0 \Rightarrow 0=-\frac{1}{2}x+2 \Rightarrow \frac{1}{2}x=2 \xrightarrow{\times 2} x=4 \Rightarrow \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$

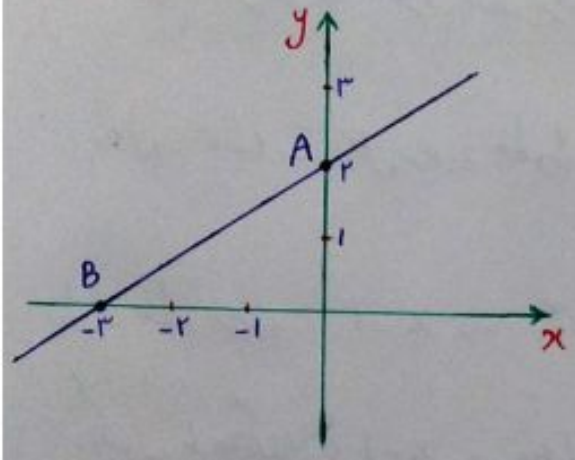
نکته: برای رسم معادلات خطی به صورت $ax+by=c$، یکبار به جای y و یکبار به جای x، صفر قرار داده و دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم. این دو نقطه، محل برخورد نمودار این خط با محورهای مختصات نیز می‌باشند.

مثال: معادلهٔ خط $2x-3y=-6$ را در نظر بگیرید:

نمودار آن را رسم کنید و بگویید این نمودار از کدام ناحیهٔ مختصاتی نمی‌گذرد؟

$$x=0 \longrightarrow 2(0)-3y=-6 \Rightarrow -3y=-6 \Rightarrow y=2 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$

$$y=0 \longrightarrow 2x-3(0)=-6 \Rightarrow 2x=-6 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow B=\begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix}$$



نمودار این خط فقط از ناحیهٔ چهارم مختصاتی نمی‌گذرد.

مثال: مقدار a را طوری بیابید که نقطهٔ $\begin{bmatrix}-5\\2\end{bmatrix}$ روی خط $ax-4y=7$ قرار داشته باشد.

باید مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق کند، پس داریم:

$$a(-5)-4(2)=7 \longrightarrow -5a-8=7 \longrightarrow -5a=8+7 \Rightarrow -5a=15$$

$$\Rightarrow a=-3$$

مثال: اگر نقطهٔ $\begin{bmatrix} a \\ 5 \end{bmatrix}$ روی خط به معادلهٔ $y=3x+4$ باشد، مقدار a را بیابید.

با جایگذاری مختصات نقطه در معادلهٔ خط، داریم:

$$5=3a+4 \Rightarrow 5-4=3a \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

* تعیین مختصات محل برخورد دو خط:

ابتدا معادلهٔ دو خط را به شکل استاندارد $y=ax+b$ نوشته، با مساوی قرار دادنِ آن‌ها و حل معادلهٔ جدید، طول نقطهٔ برخورد بدست می‌آید، سپس با جایگذاری طولِ بدست آمده در معادلهٔ هریک از دو خط، عرض نقطهٔ برخورد بدست می‌آید. (رسمِ دو خط نیز روش دیگری برای تعیین محلِ برخورد آن‌هاست)

مثال: مختصات محل برخورد خطوط $y=3x+2$ و $y=-x+6$ را بیابید.

طول نقطهٔ برخورد $3x+2=-x+6 \Rightarrow 3x+x=-2+6 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$

اکنون با جایگذاری $x=1$ در معادلهٔ هریک از دو خط، عرض نقطهٔ برخورد بدست می‌آید:

$x=1 \longrightarrow y=3(1)+2=5 \Rightarrow$ مختصات نقطهٔ برخورد: $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

تذکر: دو خط نسبت به هم، ۳ وضعیت متفاوت می‌توانند داشته باشند:

الف) دو خط متقاطع باشند ← یک نقطهٔ برخورد (تلاقی) دارند.

ب) دو خط موازی باشند ← هیچ نقطهٔ برخوردی ندارند.

ج) دو خط بر هم منطبق باشند (حالت خاصِ موازی بودن) ← بی‌شمار نقطهٔ مشترک دارند.

تهیه و تنظیم: دلیار
09010825258

درس دوم: شیب خط و عرض از مبدأ

در معادله خط $y=ax+b$ ، عدد a شیب خط نامیده می‌شود. با تغییر a ، زاویهٔ خط با جهت مثبت محور طول‌ها (محور x) تغییر می‌کند.

همچنین عدد b نشان دهندهٔ محل برخورد خط با محور عرض‌ها (محور y) است، به همین دلیل به آن عرض از مبدأ می‌گویند.

در واقع اگر در معادلهٔ خط به جای x ، مقدار صفر قرار دهیم، عرض از مبدأ بدست می‌آید.

تذکر: شکل مرسوم دیگر معادلهٔ خط به صورت $y=mx+h$ است که در آن m برابر شیب خط و h همان عرض از مبدأ خواهد بود.

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را بدست آورید.

الف) $y=2x-4$ ، شیب $=2$ ، عرض از مبدأ $=-4$

ب) $y=-3x+\frac{1}{2}$ ، شیب $=-3$ ، عرض از مبدأ $=\frac{1}{2}$

پ) $y=-\frac{2}{3}x$ ، شیب $=-\frac{2}{3}$ ، عرض از مبدأ $=0$ ⟵ خط مبدأ گذر

ت) $y=-x+1$ ، شیب $=-1$ ، عرض از مبدأ $=+1$

ت) $y=-2$ ، شیب $=0$ ، عرض از مبدأ $=-2$

تذکر: برای بدست آوردن شیب و عرض از مبدأ، معادلهٔ هر خط را به شکل استاندارد $y=ax+b$ تبدیل می‌کنیم.

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط به معادلهٔ $3x-2y=6$ را تعیین کنید.

$$3x-2y=6 \longrightarrow 3x-6=2y \xrightarrow{\div 2} \frac{3x-6}{2}=\frac{2y}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}x-3=y$$

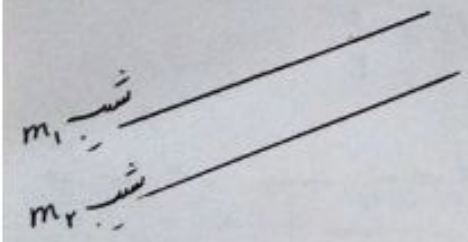
$$\Rightarrow y=\frac{3}{2}x-3 \longrightarrow \text{شیب}=\frac{3}{2} \qquad \text{عرض از مبدأ}=-3$$

نکته: اگر شیب خط، عددی مثبت باشد، نمودار آن در حالت کلی به شکل / می‌باشد.

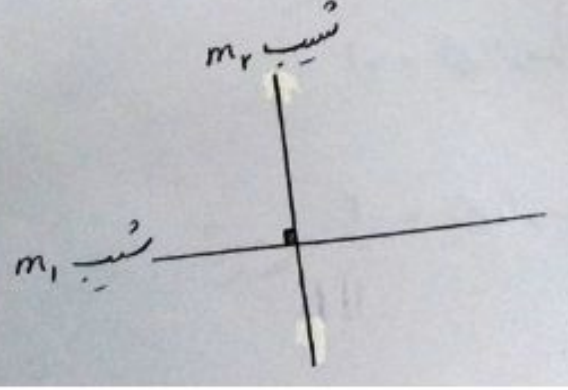
اگر شیب خط، عددی منفی باشد، نمودار آن در حالت کلی به شکل \ می‌باشد.

همچنین $y=b$ صورت کلی معادله خط‌هایی است که شیب آن‌ها برابر صفر و نمودارشان به شکل افقی ——— می‌باشد. (خطی موازی محور x ها)

نکته:- دو خط موازی، شیب برابر دارند. $m_1=m_2$



- دو خط عمود بر هم، شیب قرینه و معکوس یکدیگر دارند.



$$m_2=-\frac{1}{m_1} \Rightarrow m_2 \cdot m_1=-1$$

نکته: برای نوشتن معادلهٔ خط، کافی است شیب و عرض از مبدأ آن و یا شیب و یک نقطه از آن خط را داشته باشیم.

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که شیب آن -2 و عرض از مبدأ آن -1 باشد.

$$y = -2x - 1$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که محور عرض ها را در نقطه‌ای به عرض 3 قطع کند و شیب آن $\frac{1}{2}$ باشد.

عرض از مبدأ آن برابر 3 است، پس داریم:

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که با خط $y = 3x - 5$ موازی بوده و از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ بگذرد.

در نتیجه شیب خط برابر 3 و عرض از مبدأ آن -4 می‌باشد، پس داریم:

$$y = 3x - 4$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که بر خط $y = -\frac{3}{4}x + 1$ عمود بوده و از مبدأ مختصات بگذرد.

شیب خط، قرینه و معکوس $-\frac{3}{4}$ است که برابر $\frac{4}{3}$ می‌شود، پس داریم:

$$y = \frac{4}{3}x$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که شیب آن 3 بوده و از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$y = 3x + b \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{مختصات نقطه را در معادله خط}} 2 = 3(1) + b \Rightarrow 2 = 3 + b \Rightarrow \underline{b = -1}$$

$$\Rightarrow \text{معادلهٔ خط}: \underline{y = 3x - 1}$$

تهیه و تنظیم: دلیار

DELYAR RASOUL

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که دو خط $y=6x-3$ و $y=(2m-1)x+1$ با هم موازی باشند. دو خط موازی، شیب برابر دارند. پس داریم:

$$2m-1=6 \longrightarrow 2m=7 \Rightarrow m=\frac{7}{2}$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که محور yها را در $5+$ قطع کند و با خط $x+3y=5$ موازی باشد.

ابتدا معادلهٔ خط $x+3y=5$ را به صورت استاندارد نوشته و شیب آن را تعیین می‌کنیم:

$$x+3y=5 \longrightarrow 3y=-x+5 \xrightarrow{\div 3} y=\frac{-x+5}{3} \longrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$$

پس باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که شیب آن $-\frac{1}{3}$ و عرض از مبدأ آن 5 باشد، بنابراین: $y=-\frac{1}{3}x+5$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که با خط $y=-x-3$ موازی بوده و از نقطهٔ $\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$ عبور کند.

شیب خط برابر -1 خواهد بود، با قرار دادن آن در صورت کلی معادلهٔ خط داریم: $y=-x+b$

اکنون مختصات نقطهٔ $\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$ را در معادلهٔ خط قرار می‌دهیم:

$$2=-(-2)+b \Rightarrow b=0$$

در نتیجه معادلهٔ این خط به صورت $y=-x$ می‌باشد که خطی مبدأ گذر است.

تعریف: طول از مبدأ: نقطه‌ای که خط، محور طول‌ها (محور x) را قطع می‌کند. پس اگر در معادلهٔ خط به جای y، مقدار صفر قرار دهیم، طول از مبدأ بدست می‌آید.

بعنوان مثال، طول از مبدأ خط $y=3x+1$ برابر $-\frac{1}{3}$ است، زیرا:

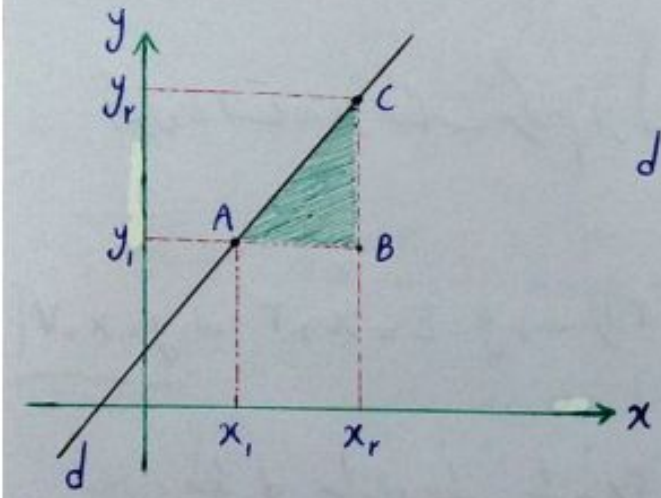
$$y=0 \Rightarrow 3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

تهیه و تنظیم: دلیار

محاسبه شیب خط گذرنده از دو نقطه:

شیب خطی که از دو نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ می‌گذرد، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} \rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{یا} \quad a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$



$$\text{شیب خط } d = \text{شیب پاره‌خط } AC = \frac{BC}{AB}$$

با انتخاب هر دو نقطه دلخواه روی یک خط، می‌توان شیب خط را بدست آورد.

مثال: شیب خطی که از دو نقطه $A=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ می‌گذرد را بدست آورید.

$$\text{شیب خط}: a = \frac{4-1}{1-(-2)} = \frac{3}{1+2} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ را بنویسید.

$$\text{شیب خط}: a = \frac{-2-0}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2 \longrightarrow \text{معادله خط}: y = -2x + b$$

اکنون با قرار دادن یکی از نقاط در معادله خط فوق، داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ در معادله خط} \longrightarrow 0 = -2(2) + b \Rightarrow \boxed{b=4} \Rightarrow \text{معادله خط}: \boxed{y = -2x + 4}$$

نکته مهم: معادله خط گذرا از نقطه $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ که شیب آن a باشد، از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

مثال: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A=\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

شیب خط: $a = \frac{4-2}{-3-(-5)} = \frac{2}{-3+5} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow a = 1$

اکنون با استفاده از مختصات هرکدام از دو نقطه، معادله خط را می‌توان نوشت، مثلاً با نقطه $B=\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$:

$$y - y_1 = a(x - x_1) \longrightarrow y - 4 = 1(x - (-3)) \Rightarrow y - 4 = x + 3 \Rightarrow y = x + 7$$

مثال: خط d موازی خط $y = -3x + \frac{1}{2}$ است و از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ می‌گذرد، معادله خط d را بیابید.

$$y - y_1 = a(x - x_1) \xrightarrow{a=-3} y - (-1) = -3(x-2) \longrightarrow y + 1 = -3x + 6$$
$$\Rightarrow y = -3x + 5$$

مثال: معادله خط گذرا از نقاط $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ را بنویسید.

شیب خط: $a = \frac{5-3}{-2-(-1)} = \frac{2}{-2+1} = \frac{2}{-1} = -2 \rightarrow a = -2$

معادله خط: $y - y_1 = a(x - x_1) \rightarrow y - 3 = -2(x+1) \Rightarrow y - 3 = -2x - 2$
$$\rightarrow y = -2x + 1$$

09010825258

مثال: شیب خطی که از نقطه $\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$ و مبدأ مختصات می‌گذرد را بیابید.

پس این خط از نقاط $\begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ می‌گذرد:

$$\text{شیب خط}: a = \frac{-1-0}{4-0} = \frac{-1}{4}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ عبور کرده و محور xها را در نقطه‌ای به طول 5 قطع می‌کند؟ پس این خط از نقاط $\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$ عبور می‌کند:

$$\text{شیب خط}: a = \frac{3-0}{-1-5} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

اکنون با استفاده از یکی از نقاط مثلاً $\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$، معادله خط را می‌نویسیم:

$$y-0 = -\frac{1}{2}(x-5) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

مثال: معادله خطی را بنویسید که در نقطه $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ بر خط به معادله $y = -3x + 6$ عمود باشد.

می‌دانیم دو خط عمود بر هم، شیب قرینه و معکوس یکدیگر دارند، بنابراین:

$$\text{شیب خط} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{معادله خط}: y-1 = \frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow y-1 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

خطوط موازی با محورهای مختصات:

۱) خطوط موازی با محور طول ها (محور x):

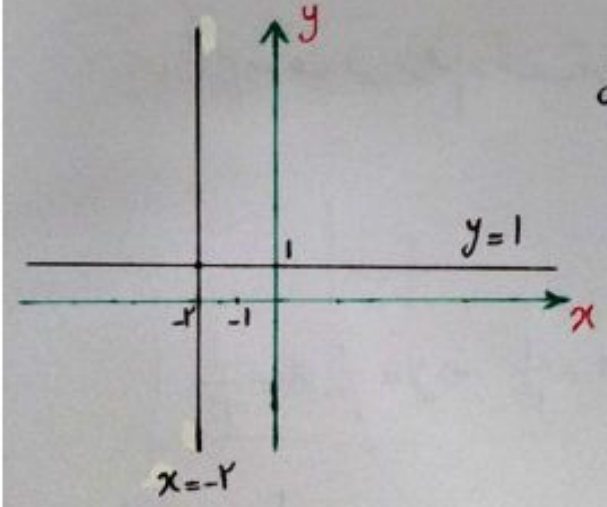
فرم کلی معادلهٔ خطوط موازی با محور x ها به صورت $y=b$ می باشد. این خطوط به شکل افقی بوده و شیب آن ها برابر صفر است. عرض از مبدأ این خطوط نیز برابر همان b می باشد.

۲) خطوط موازی با محور عرض ها (محور y):

فرم کلی خطوط موازی با محور y ها به صورت $x=k$ می باشد. این خطوط به شکل قائم بوده و محور x را در نقطه ای به طول k قطع می کنند. شیب خطوط $x=k$ تعریف نشده است و عرض از مبدأ ندارند.

نکته: نقطهٔ برخورد خط $x=k$ و $y=b$ به مختصات $\begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}$ می باشد و زاویهٔ بین این دو خط، همواره 90° است.

مثال: در شکل مقابل خطوط به معادلهٔ $x=-2$ و $y=1$ رسم شده اند. محل برخورد دو خط، نقطهٔ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ می باشد.



نکته: خط به معادلهٔ $y=0$ در واقع همان محور x ها و خط به معادلهٔ $x=0$ در واقع همان محور y ها است.

تهیه و تنظیم: دلیار
09010825258

- خط به معادلهٔ $x=k$ از دو ناصیهٔ مختصاتی می‌گذرد.

- خط به معادلهٔ $y=b$ از دو ناصیهٔ مختصاتی می‌گذرد.

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که موازی محور طول‌ها باشد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$ بگذرد.

$y=-2$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که موازی محور عرض‌ها باشد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ بگذرد.

$x=-1$

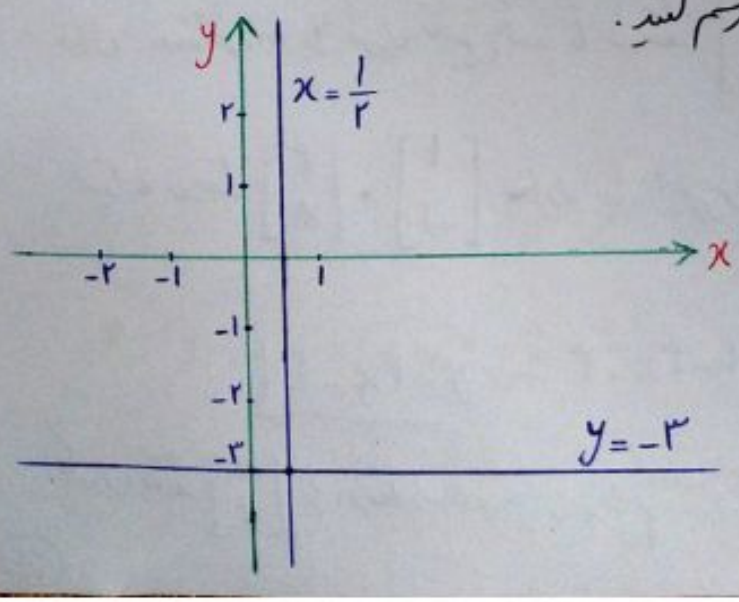
مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

چون عرض نقاط، برابر است، پس این خط موازی محور طول‌ها و معادلهٔ آن به صورت $y=1$ می‌باشد.

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}4\\-4\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

چون طول نقاط، برابر (ثابت) است، پس این خط موازی محور عرض‌ها و معادلهٔ آن $x=4$ می‌باشد.

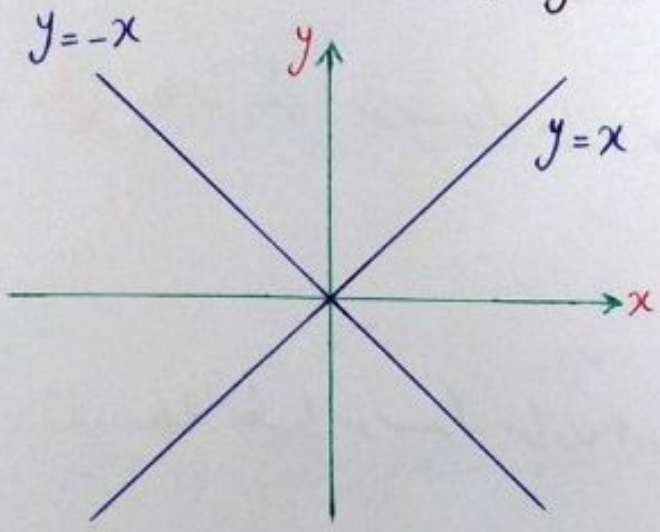
مثال: خطوط $y=-3$ و $x=\frac{1}{2}$ را رسم کنید.



محل تلاقی (برخورد) دو خط، نقطهٔ $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-3\end{bmatrix}$ است.

نکته: معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مختصاتی به صورت $y=x$ و

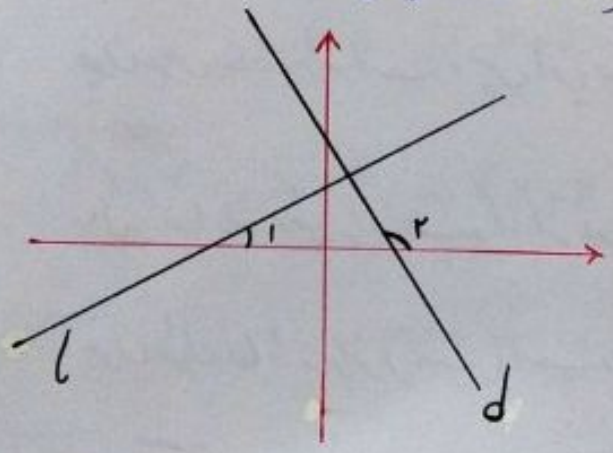
معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم مختصاتی به صورت $y=-x$ می‌باشد.



معادلهٔ محور xها به صورت $y=0$ و

معادلهٔ محور yها به صورت $x=0$ است.

نکته: اگر خطی با جهت مثبت محور x، زاویهٔ کوچکتر از 90° بسازد، شیب آن مثبت و اگر خطی با جهت مثبت محور x، زاویهٔ بزرگتر از 90° بسازد، شیب آن خط منفی می‌باشد.



شیب خط l مثبت است $\longrightarrow \hat{1} < 90^\circ$

شیب خط d منفی است $\longrightarrow \hat{2} > 90^\circ$

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید تا سه نقطهٔ $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}m\\2\end{bmatrix}$ روی یک خط قرار گیرند.

ابتدا با دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ معادلهٔ خط را می‌نویسیم: $\text{شیب خط} = \frac{5-(-1)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$

$\Rightarrow$ معادلهٔ خط: $y-(-1)=3(x-1) \longrightarrow y+1=3x-3 \Rightarrow \underline{y=3x-4}$

اکنون نقطهٔ $\begin{bmatrix}m\\2\end{bmatrix}$ را در معادلهٔ خط قرار می‌دهیم: $2=3m-4 \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow \underline{m=2}$

* صورت کلی معادله‌های خطی به صورت $ax+by=c$ است که a و b و c ضرایب عددی هستند.

تذکر: در صورت کلی $ax+by=c$، مقدار a برابر شیب خط نیست و مقدار b نیز عرض از مبدأ نمی‌باشد، زیرا معادلهٔ خط به شکل استاندارد نیست. پس برای تعیین شیب و عرض از مبدأ، باید معادلهٔ خط را به صورت استاندارد بنویسیم:

$$ax+by=c \longrightarrow by=-ax+c \xrightarrow{\div b} y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$$

در نتیجه داریم:

$$\text{شیب} = -\frac{a}{b} = \frac{\text{قرینهٔ ضریب } x}{\text{ضریب } y}$$

$$\text{عرض از مبدأ} = \frac{c}{b} = \frac{\text{عدد ثابت}}{\text{ضریب } y}$$

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $4x-2y=6$ را بدست آورید.

$$4x-2y=6 \longrightarrow a=4 \ , \ b=-2 \ , \ c=6$$

$$\text{عرض از مبدأ} = \frac{c}{b} = \frac{6}{-2} = -3 \qquad \text{شیب خط} = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-2} = 2$$

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $-x+2y=4$ را تعیین کنید.

فرم استاندارد $y=\frac{1}{2}x+2$ $\Leftarrow$ $2y=x+4 \xrightarrow{\div 2} y=\frac{x+4}{2}$ $\Leftarrow$ $-x+2y=4$

$$\Rightarrow \text{شیب} = \frac{1}{2} \qquad 2 = \text{عرض از مبدأ}$$

09010825258

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که با خط $2y-4x=5$ موازی باشد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ بگذرد.

ابتدا شیب خط $2y-4x=5$ را بدست می‌آوریم:

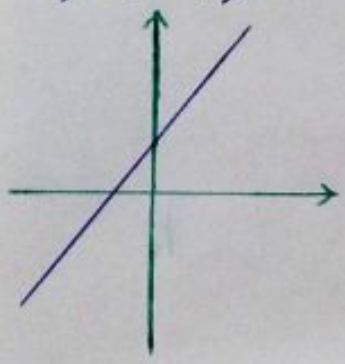
$$\text{شیب خط} = \frac{\text{قرینهٔ ضریب } x}{\text{ضریب } y} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

پس با توجه به اینکه، دو خط موازی، شیب برابر دارند، معادلهٔ خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

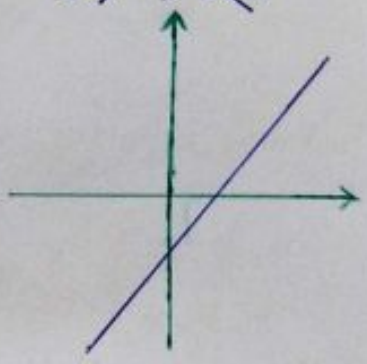
$$y-(-1)=2(x-1) \Rightarrow y+1=2x-2 \Rightarrow y=2x-3$$

مثال: خط $y=ax+b$ را در نظر بگیرید. در هریک از موارد زیر، نمودار مناسب با آن را رسم کنید.

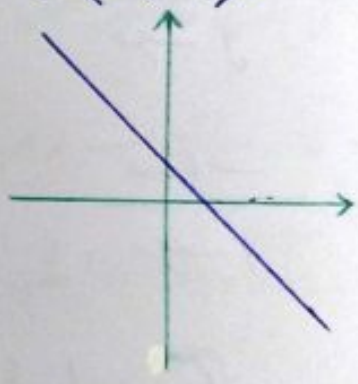
$a>0$, $b>0$



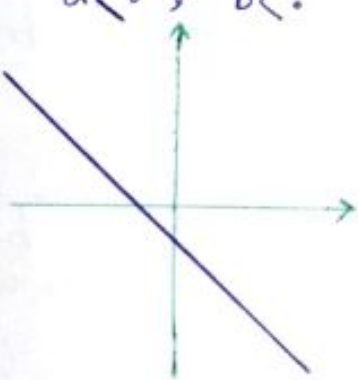
$a>0$, $b<0$



$a<0$, $b>0$



$a<0$, $b<0$



مثال: مقدار m را چنان تعیین کنید که خط $y=-\frac{2}{3}x+\frac{m+3}{4}$ از مبدأ مختصات بگذرد.

خطی که مبدأ گذر است، عرض از مبدأ آن برابر صفر است، پس داریم:

$$\frac{m+3}{4}=0 \Rightarrow m+3=0 \Rightarrow m=-3$$

DELYAR RASOUL

تهیه و تنظیم : دلیار

درس سوم : دستگاه معادله های خطی

دستگاه معادلات خطی از دو معادلهٔ خط تشکیل شده است ، از این رو به آن دو معادله - دو مجهول نیز گفته می شود .

منظور از حل دستگاه معادلات خطی ، در واقع یافتن محل برخورد دو خط است ، به عبارت دیگر می خواهیم مختصات نقطه ای را بیابیم که در هر دو معادله صدق کند . (جواب مشترک دو معادله باشد)

صورت کلی دستگاه معادلات خطی به شکل مقابل است :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

ابتدایی ترین روش برای حل دستگاه معادلات خطی ، روش هندسی است که از طریق رسم دو خط ، انجام می شود .

* روش هندسی یا ترسیمی ، روش متداولی نیست و مورد استفاده قرار نمی گیرد . (چون جواب دقیق ، بدست نمی آید)

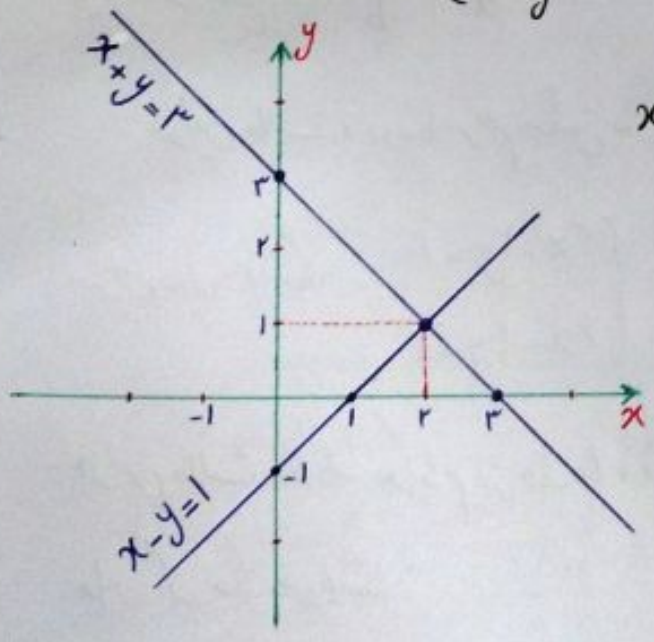
مثال : با رسم دو خط ، دستگاه معادله های خطی $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$ را حل کنید .

$x-y=1 \xrightarrow{\text{تعیین دو نقطه}}$

x	۰	۱
y	-۱	۰

$x+y=3 \xrightarrow{\text{تعیین دو نقطه}}$

x	۰	۳
y	۳	۰



همانطور که مشاهده می شود ، نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ محل برخورد دو خط و جواب دستگاه می باشد .

نکته: در دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$:

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ ، آنگاه دستگاه دارای یک جواب است.

در این حالت، دو خط متقاطع هستند (شیب آن‌ها متفاوت است) و در یک نقطه، یکدیگر را قطع می‌کنند.

بعنوان مثال: دستگاه $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=3 \end{cases}$ دارای یک جواب است، چون $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$

ب) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ، آنگاه دستگاه جواب ندارد.

در این حالت، دو خط موازی هستند (شیب یکسان دارند) و هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

بعنوان مثال: دستگاه $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$ جواب ندارد، چون: $\frac{-1}{2}=\frac{2}{-4} \neq \frac{3}{5}$

پ) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

در این حالت، دو خط بر هم منطبق هستند. (حالت خاص موازی بودن)

بعنوان مثال: دستگاه $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 6x-4y=2 \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد، چون: $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{3}{6}$

در این حالت معادلهٔ هرکدام از خط‌ها، ضربی از معادلهٔ خط دیگر است. در واقع هر دو معادله، برای یک خط می‌باشد.

09010825258

تهیه و تنظیم: دلیار

روش های حل دستگاه معادله های خطی:

۱) روش حذفی: در این روش، یکی از معادله‌ها یا هر دو معادله را در عدد یا اعدادی ضرب می‌کنیم، به طوری که ضرایب یکی از متغیرها در دو معادله، قرینه شوند. اکنون اگر دو معادله را جمع کنیم، یکی از متغیرها حذف می‌شود و معادلهٔ جدید بدست آمده، یک مجهولی خواهد بود. آن را حل می‌کنیم، سپس مجهول بدست آمده را در یکی از معادلات دستگاه قرار داده و مجهول حذف شده را نیز بدست می‌آوریم.

* از آنجا که در این روش با حذف یکی از متغیرهای x یا y به یک معادلهٔ یک مجهولی می‌رسیم، روش حذفی نام دارد. این روش، مرسوم‌ترین روش برای حل دستگاه های دو معادله- دو مجهول می باشد.

مثال: دستگاه های معادلات خطی زیر را به روش حذفی حل کنید.

الف)
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow{+} 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

$$2x - y = 3 \xrightarrow{x=2} 2(2) - y = 3 \rightarrow 4 - y = 3 \Rightarrow y = 1$$

جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ب)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + y = -3 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -10x - 2y = 6 \end{cases} \xrightarrow{+} -7x = 7 \Rightarrow x = -1$$

$$3x + 2y = 1 \xrightarrow{x=-1} 3(-1) + 2y = 1 \rightarrow -3 + 2y = 1 \Rightarrow y = 2$$

جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ب)
$$\begin{cases} 2x-3y=-10 \\ -x+2y=0 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2x-3y=-10 \\ -2x+4y=0 \end{cases} \xrightarrow{+} y=-10$$

$$-x+2y=0 \xrightarrow{y=-10} -x+2(-10)=0 \Rightarrow -x-20=0 \Rightarrow x=-20 \Rightarrow \text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} -20 \\ -10 \end{bmatrix}$$

پ)
$$\begin{cases} 3x+y=-2 \\ -2x+3y=5 \end{cases} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} -9x-3y=6 \\ -2x+3y=5 \end{cases} \xrightarrow{+} -11x=11 \Rightarrow x=-1$$

$$3x+y=-2 \xrightarrow{x=-1} 3(-1)+y=-2 \Rightarrow -3+y=-2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ت)
$$\begin{cases} x+y=4 \\ \frac{x-1}{2}-\frac{y-1}{3}=\frac{1}{6} \end{cases} \xrightarrow{\times 6} 3(x-1)-2(y-1)=1 \Rightarrow 3x-2y=2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 3x-2y=2 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2x+2y=8 \\ 3x-2y=2 \end{cases} \xrightarrow{+} 5x=10 \Rightarrow x=2$$

$$x+y=4 \xrightarrow{x=2} 2+y=4 \Rightarrow y=2 \Rightarrow \text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ج)
$$\begin{cases} 2(x-y)+3y=1 \\ 3x-2(2x-y)=7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x-2y+3y=1 \\ 3x-4x+2y=7 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ -x+2y=7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ -x+2y=7 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -4x-2y=-2 \\ -x+2y=7 \end{cases} \xrightarrow{+} -5x=5 \Rightarrow x=-1$$

$$2x+y=1 \xrightarrow{x=-1} 2(-1)+y=1 \Rightarrow y=3 \Rightarrow \text{جواب دستگاه: } \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۲) روش جایگزینی: در یکی از معادله ها، یکی از متغیرها را برحسب متغیر دیگر بدست آورده و آن را در معادلهٔ دیگر، جایگذاری می کنیم. معادلهٔ جدید، یک مجهولی است، آن را حل می کنیم و سپس مجهول دیگر را نیز می یابیم.

مثال: دستگاه های معادلات خطی زیر را به روش جایگزینی حل کنید.

الف) $\begin{cases} x-3y=7 \longrightarrow x=3y+7 \quad (I) \\ 2x-7y=15 \end{cases}$

$(I) \longrightarrow 2(3y+7)-7y=15 \Rightarrow 6y+14-7y=15$

$\Rightarrow -y=15-14 \Rightarrow -y=1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$

$y=-1$

$(I): x=3y+7 \Longrightarrow x=3(-1)+7=4 \Rightarrow \boxed{x=4} \rightarrow$ جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{cases} -x+y=3 \longrightarrow y=x+3 \quad (I) \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

$\xrightarrow{(I)} 4x+2(x+3)=6 \Rightarrow 4x+2x+6=6 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$\xrightarrow{(I)} y=x+3 \xrightarrow{x=0} y=0+3=3 \Rightarrow \boxed{y=3} \Longrightarrow$ جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

پ) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \quad (*) \end{cases}$

مقدار y را از معادلهٔ دوم، در معادلهٔ اول قرار می دهیم:

$2x-3y=5 \xrightarrow{(*)} 2x-3\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=5 \Rightarrow 2x-x+2=5 \Rightarrow \boxed{x=3}$

$(*): y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \xrightarrow{x=3} y=\frac{1}{3}(3)-\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \Rightarrow$ جواب دستگاه: $\begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

ب)
$$\begin{cases} 3x-y=6 \longrightarrow y=3x-6 \quad (I) \\ 2x+\frac{1}{3}y=8 \end{cases}$$

$$2x+\frac{1}{3}(3x-6)=8 \Rightarrow 2x+x-2=8$$

$$\Rightarrow 3x=10 \Rightarrow \underline{x=\frac{10}{3}}$$

$$(I): y=3x-6 \xrightarrow{x=\frac{10}{3}} y=3\left(\frac{10}{3}\right)-6=10-6=4$$

جواب دستگاه $\longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 4 \end{bmatrix}$: جواب دستگاه

تذکر: جواب دستگاه معادلات خطی، مختصات نقطهٔ محل برخورد دو خط است و در دو معادلهٔ خط، صدق می‌کند.

* برای حلِ دستگاه معادلات خطی، در بیشتر مواقع از روش حذفی استفاده می‌کنیم.

مثال: طول یک مستطیل از دو برابر عرض آن، ۳ سانتی‌متر کمتر است. اگر محیطِ مستطیل ۲۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.

اگر طول مستطیل را x و عرض آن را y در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} x=2y-3 \\ 2x+2y=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x+2y=24 \end{cases} \xrightarrow{+} 3x=21 \Rightarrow \underline{x=7}$$

$$x-2y=-3 \xrightarrow{x=7} 7-2y=-3 \Rightarrow -2y=-10 \Rightarrow \underline{y=5}$$

بنابراین طول و عرض مستطیل به ترتیب برابر ۷ و ۵ سانتی‌متر می‌باشد.

تهیه و تنظیم: دلیار

09010825258
DELYAR RASOUL

مثال: یک جواب برای x و y طوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد:

$$2^{2x-y-2} = 3^{x+y-1}$$

برای آنکه تساوی برقرار باشد، توان‌ها باید صفر باشند:

$$\begin{cases} 2x-y-2=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=1 \end{cases} \xrightarrow{+} 3x=3 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$x+y=1 \xrightarrow{x=1} 1+y=1 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از محل برخورد دو خط $x-y=1$ و $x+y=1$ بگذرد و شیب آن برابر $-\frac{2}{3}$ باشد. ابتدا محل برخورد دو خط داده شده را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=2 \Rightarrow \boxed{x=1} \qquad x+y=1 \xrightarrow{x=1} 1+y=1 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

پس باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که شیب آن $-\frac{2}{3}$ بوده و از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ می‌گذرد:

$$y-0=-\frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$$

مثال: دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 4x-6y=5 \end{cases}$$

$$\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}\neq\frac{7}{5} \Rightarrow$$ دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ برخوردی ندارند

پس این دستگاه جواب ندارد.

$$\xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -4x+6y=-14 \\ 4x-6y=5 \end{cases} \xrightarrow{+} 0=-9$$

دستگاه جواب ندارد ← غیرممکن است

مثال: مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آن‌ها ۲۶ سال است. سن هریک را بدست آورید.

سن علی را y و سن پدرش را x در نظر می‌گیریم، در نتیجه:

$$\begin{cases} x+y=70 \\ x-y=26 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=96 \Rightarrow x=48$$

$$x+y=70 \xrightarrow{x=48} 48+y=70 \Rightarrow y=70-48=22 \Rightarrow y=22$$

پس علی ۲۲ سال و پدرش ۴۸ سال دارد.

مثال: در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آن‌ها ۵۶ عدد است. در این مزرعه چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)

اگر تعداد شترمرغ را x و تعداد گاو را y در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 2x+4y=56 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2x-2y=-40 \\ 2x+4y=56 \end{cases} \xrightarrow{+} 2y=16 \Rightarrow y=8$$

$$x+y=20 \xrightarrow{y=8} x+8=20 \Rightarrow x=12$$

پس ۱۲ شترمرغ و ۸ گاو در این مزرعه وجود دارد.

مثال: در معادلهٔ $y=ax+1$، اگر به جای a مقدارهای مختلفی قرار دهیم، معادلهٔ خط‌های زیادی بدست می‌آید. این خطوط چه ویژگی مشترکی دارند؟ چون عرض از مبدأ همهٔ این خطوط برابر ۱ است، پس همهٔ آن‌ها از نقطهٔ $(1,0)$ می‌گذرند.

09010825258

تمرین: مجموع سن حسین و برادرش ۲۸ است، اگر حسین از برادرش، ۶ سال بزرگتر باشد، سن هریک را بدست آورید. سن حسین را x و سن برادرش را y در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x = y+6 & (I) \\ x+y=28 \end{cases} \xrightarrow{(I)} y+6+y=28 \Rightarrow 2y=22 \Rightarrow y=11 \xrightarrow{(I)} x=11+6=17$$

در نتیجه حسین ۱۷ سال و برادرش ۱۱ سال دارد.

تمرین: مقادیر x و y را از دستگاه زیر بدست آورید.

$$\begin{cases} 5^{x-y+3}=1 \longrightarrow 5^{x-y+3}=5^{0} \longrightarrow x-y+3=0 \longrightarrow x-y=-3 \\ 4^{x+2y}=2^{-16} \longrightarrow (2^2)^{x+2y}=2^{-16} \longrightarrow 2^{2x+4y}=2^{-16} \longrightarrow 2x+4y=-16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=-3 \\ 2x+4y=-16 \end{cases} \xrightarrow{\times 4} \begin{cases} 4x-4y=-12 \\ 2x+4y=-16 \end{cases} \xrightarrow{+} 6x=-28 \Rightarrow x=\frac{-28}{6}=\frac{-14}{3}$$

$$x-y=-3 \xrightarrow{x=\frac{-14}{3}} -\frac{14}{3}-y=-3 \Rightarrow y=3-\frac{14}{3}=\frac{-5}{3} \Rightarrow y=\frac{-5}{3}$$

تمرین: دستگاه معادلات خطی زیر را به روش دلخواه حل کنید.

$$\begin{cases} 2x+3y=-1 \xrightarrow{\times 3} 6x+9y=-3 \\ 3x+2y=-4 \xrightarrow{\times(-2)} -6x-4y=8 \end{cases} \xrightarrow{+} 5y=5 \Rightarrow y=1$$

$$2x+3y=-1 \xrightarrow{y=1} 2x+3(1)=-1 \longrightarrow 2x+3=-1 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$$

تمرین: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ برخورد دو خط $3x-y=2$ و $x-3y=-2$ بگذرد و با خط $y=\frac{1}{2}x-3$ موازی باشد. ابتدا نقطهٔ برخورد این دو خط را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3x-y=2 \\ x-3y=-2 \end{cases} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} -9x+3y=-6 \\ x-3y=-2 \end{cases} \xrightarrow{+} -8x=-8 \Rightarrow x=1$$

$$3x-y=2 \xrightarrow{x=1} 3(1)-y=2 \Rightarrow 3-y=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ مختصات نقطهٔ برخورد

پس باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که شیب آن $\frac{1}{2}$ باشد و از نقطهٔ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ بگذرد:

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y-1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

تست: خطوط به معادلات $2y-4x=8$ ، $y+3x=a$ و $-3y+x=3$ از یک نقطه می‌گذرند. مقدار a کدام است؟

۱) -11 ✓ ۲) -6 ۳) 6 ۴) 11

ابتدا محل برخورد خطوط $2y-4x=8$ و $-3y+x=3$ را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2y-4x=8 \\ -3y+x=3 \xrightarrow{\times 4} \end{cases} \begin{cases} -4x+2y=8 \\ 4x-12y=12 \end{cases} \xrightarrow{+} -10y=20 \Rightarrow y=-2$$

$$-3y+x=3 \xrightarrow{y=-2} -3(-2)+x=3 \Rightarrow 6+x=3 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$ نقطهٔ برخورد

اکنون مختصات نقطهٔ برخورد را در خط $y+3x=a$ قرار می‌دهیم:

$$-2+3(-3)=a \Rightarrow a=-11$$

تهیه و تنظیم: دلیار