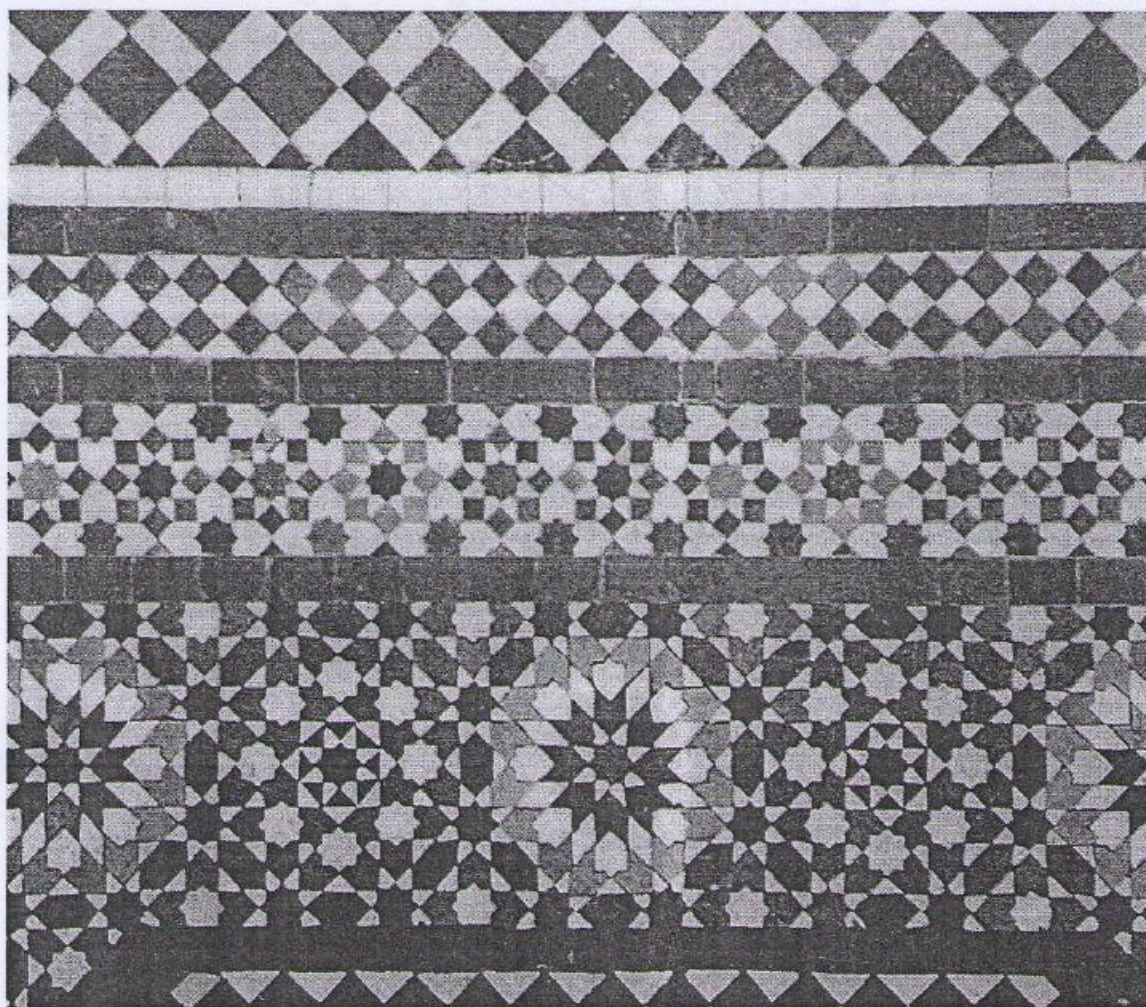


تبدیل هندسی - تقارن محوری - انتقال ، دوران مرکزی

۳

فصل

چند ضلعی ها



در معماری سنتی، اسلامی کشور ما انواع نقش های هندسی و ترکیب چند ضلعی های مختلف در منبت کاری، شیشه کاری، آینه کاری، کاشی کاری و سایر صنایع دستی و نقوش معماری دیده می شود. در کاشی کاری ها انواع چند ضلعی ها را می توان دید و هم نهشتی آنها را با تبدیل های هندسی (انتقال، تقارن، دوران) بررسی کرد.

ی‌خ‌م ساد‌ی ب‌س‌ت‌ه اس‌ت ک‌ه ا‌ز ا‌ج‌م‌اع ح‌د ا‌قل س‌ه پ‌ار‌ه خ‌ط ت‌ش‌ح‌یل ش‌ده باش‌د **چ‌ند ض‌لع‌ی:**

چندضلعی‌ها و تقارن

تعریف چندضلعی

فعالیت



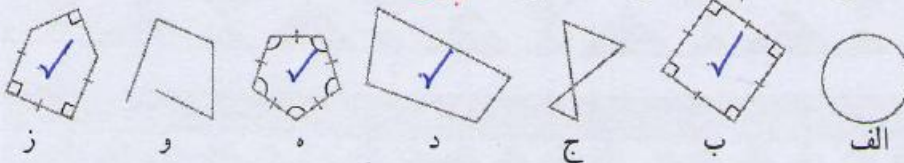
۱- در هندسه به هر خط شکسته بسته، چندضلعی گفته می‌شود به شرط آنکه ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند؛ مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند. **شکل‌های «ب»، «د»، «ه» و «ز» چندضلعی**

می‌باشند.

شکل «ج» چندضلعی نیست؛ چون ضلع‌های آن یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شکل «و» چندضلعی نیست. چرا؟ **چون خط بسته نیست**

شکل «الف» هم چندضلعی نیست. چرا؟ **چون خط شکسته نیست**



۲- اگر در یک چندضلعی همه ضلع‌ها با هم و همه زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چندضلعی منتظم است.

تعریف چندضلعی منتظم

از میان شکل‌های بالا، کدام شکل‌ها چندضلعی منتظم اند؟ «ب» و «ه»

۳- یکی از شکل‌های بالا را انتخاب کنید. سپس، درباره تعداد ضلع‌ها، زاویه‌ها، تساوی آنها

و... توضیح دهید تا دوستان شما را که انتخاب کرده‌اید، پیدا کند. **خط شکسته بسته ولی چندضلعی نیست**. سپس به توضیحات دوستان گوش کنید و شکلی را که او انتخاب کرده است، پیدا کنید.

جواب: شکل «ج»

کار در کلاس

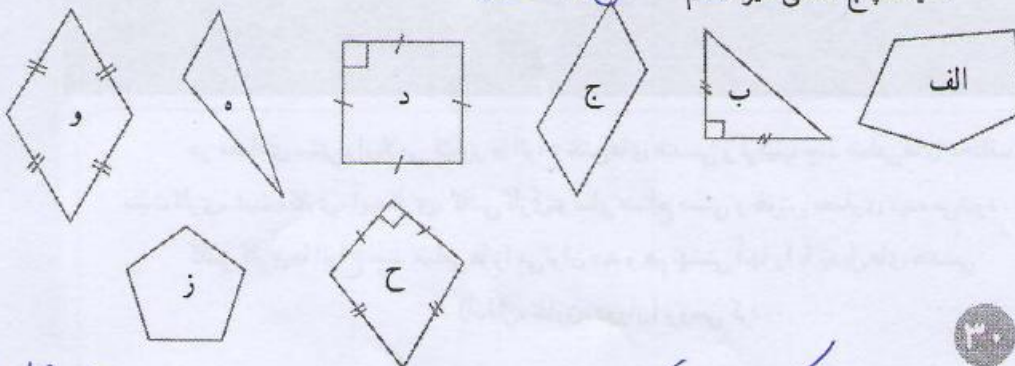


۱- هر یک از عبارت‌های زیر مربوط به کدام چندضلعی است؟

• یک لوزی با زاویه قائمه **شکل «د»**

• یک مثلث با زاویه باز **شکل «ه»**

• یک پنج ضلعی غیر منتظم **شکل «الف»**



جواب سؤال سه: (۲) خط شکسته بسته که ۵ ضلع برابر و ۵ زاویه برابر دارد و چندضلعی است «ه»

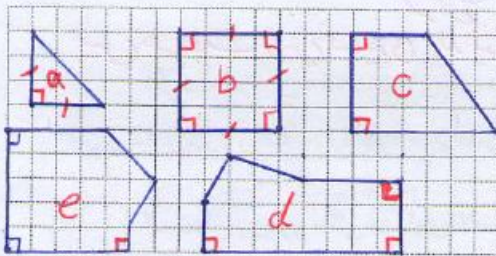
(۳) خط شکسته‌ی باز که ۴ ضلع دارد «و»

(۴) شکلی که چندضلعی نیست ولی بسته است «الف و ج»

شباهت‌ها: اندازه‌ی اضلاع برابر است (۲) چند ضلعی هستند (۳) خط تقارن دارند

تفاوت‌ها: (۱) شکل الف منتظم ولی ب و ج منتظم نمی باشد (۲) الف مرکز تقارن دارد ولی ب و ج مرکز تقارن ندارند (۳) شکل الف ۴ محور تقارن دارد ولی شکل‌های ب و ج فقط یک محور تقارن دارند (۴) الف محدب ولی ب و ج مقعر است

۲- چند ضلعی‌های زیر را در صفحه شطرنجی رسم کنید.



الف) یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین « α »

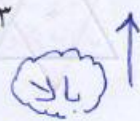
ب) مستطیلی با ضلع‌های مساوی « b »

ج) یک دوزنقه قائم الزاویه « c »

د) یک شش ضلعی با دقیقاً سه زاویه قائمه

« d, e »

۳- به شکل‌های زیر نگاه کنید و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را بنویسید. کلاسی ← پاسخ‌های متفاوت



۴- به چند ضلعی‌ای که زاویه‌های آن کوچک‌تر از 180° درجه باشد، چند ضلعی محدب (کوز) و به

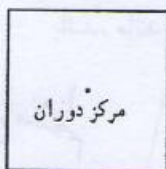
چند ضلعی‌ای که دست کم یک زاویه آن بزرگ‌تر از 180°

درجه باشد، چند ضلعی مقعر (کاو) گفته می‌شود.

با توجه به شکل‌های سؤال بالا

جدول رویه‌رو را کامل کنید.

شکل	منتظم	غیر منتظم	محدب	مقعر
الف	✓	✗	✓	✗
ب	✗	✓	✗	✓
ج	✗	✓	✗	✓

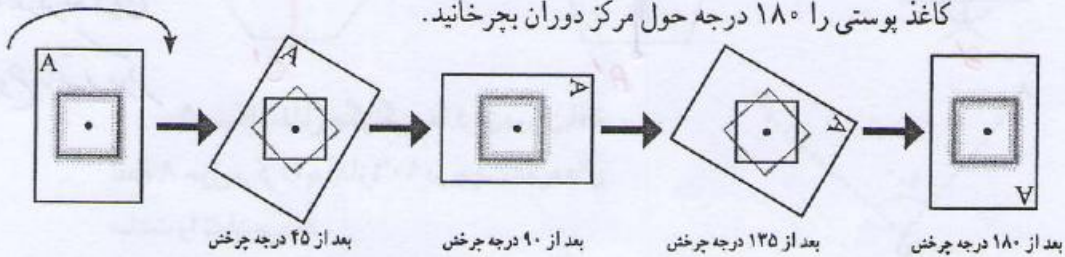


۱- یک ورق کاغذ پوستی روی مربع رویه‌رو قرار دهید

و تصویر مربع را روی آن رسم کنید.

نوک مدادتان را روی مرکز دوران بگذارید و مانند شکل‌های زیر،

کاغذ پوستی را 180° درجه حول مرکز دوران بچرخانید.



آیا تصویر روی شکل منطبق می‌شود؟ پله ۲ در دوران‌های 90° درجه

و 180° شکل دوران یافته روی شکل اول منطبق می‌شود

توضیح سؤال ۳: یک پنج ضلعی منتظم با دوران هابی که مضرب ۷۲ باشد روی شکل اول منطبق می شود و می دانیم $2 \times 72 = 144$ و $3 \times 72 = 216$ یا $180 \div 72 = 2,5$ لذا با دوران ۱۸۰ شکل روی شکل اول منطبق نمی شود پس مرکز تقارن ندارد

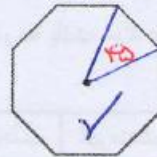
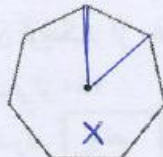
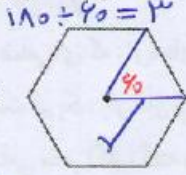
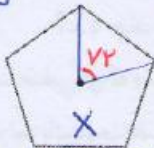
نکته: اگر تعداد رئوس فرد باشد آنگاه شکل مرکز تقارن ندارد زیرا هر رأس یک رأس دیگر خواهد بود پس هر جفت رأس قرین می یابد پس تعداد رئوس باید زوج باشد اگر نتیجه دوران ۱۸۰ درجه ای یک شکل حول یک نقطه روی آن منطبق شود، می گوئیم شکل مرکز تقارن دارد و نقطه مورد نظر، مرکز تقارن شکل است.



۲- شکل روبه رو مثلثی متساوی الاضلاع است. یک ورق کاغذ پوستی روی آن قرار دهید و مراحل فعالیت (۱) را تکرار کنید. نشان دهید که نقطه مشخص شده مرکز تقارن شکل نیست. دوران یافته ی شکل روی آن منطبق نمی شود (دوران ۱۸۰ درجه)

۳- در کدام یک از چندضلعی های منتظم زیر، نقطه مشخص شده مرکز تقارن است؟

$$180 \div 72 = 2,5$$



$$\frac{180}{45} = 4$$

بالا

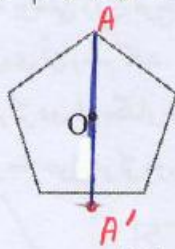
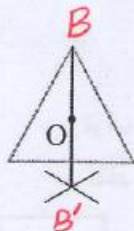
$$360 \div 9 = 40 \text{ و } 180 \div 45 = 4$$

به نظر شما نه ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد؟ خیر

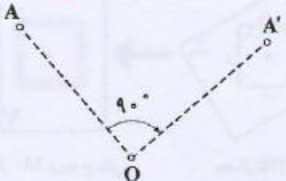
ده ضلعی منتظم چگونه؟ از این فعالیت چه نتیجه ای می گیرید؟ بله، اگر تعداد اضلاع زوج باشد مرکز تقارن دارد (در چند ضلعی های منتظم)

$$360 \div 10 = 36 \text{ و } 180 \div 36 = 5$$

۴- یکی از راه های تشخیص اینکه نقطه O در مثلث متساوی الاضلاع مرکز تقارن نیست، این است که می توان روی شکل نقطه ای پیدا کرد که قرینه آن نسبت به نقطه O روی خود شکل قرار نگرفته باشد. مانند نمونه، نشان دهید که نقطه O در دو شکل دیگر هم، مرکز تقارن نیست.



نکته: هر n ضلعی منتظم
① n فرد باشد، مرکز تقارن ندارد
② n زوج باشد مرکز تقارن دارد



۵- شکل مقابل چگونگی پیدا کردن دوران یافته

نقطه A حول مرکز O به اندازه ۹۰ درجه عقربه های ساعت را نشان می دهد.

کدام یک از شکل های فعالیت (۳) با دوران ۹۰ حول نقطه مشخص شده، در جهت عقربه های

ساعت روی خودش می افتد؟ هشت ضلعی منتظم

$$90 \div 45 = 2$$

۳۳

هشت ضلعی منتظم با دوران هابی که مضرب ۴۵ باشد روی خودش می افتد

۱۲۰ نشن ضلعی با دوران های مضرب ۶۰ - مثلث متساوی الاضلاع با دوران های مضرب

نه ضلعی منتظم با دوران های مضرب ۴۰ درم - ده ضلعی منتظم با دوران های مضرب ۳۶ درم

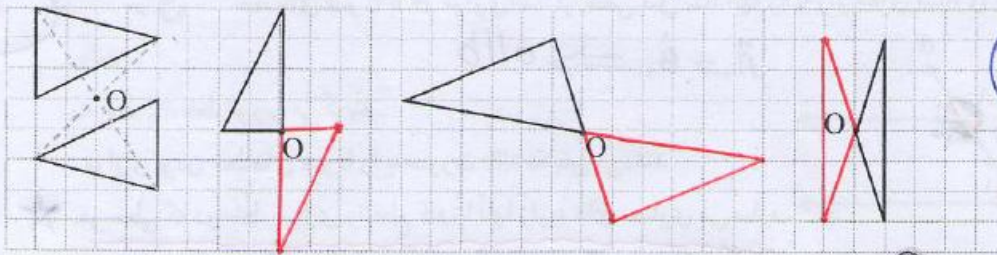
تمرین ۱) هر n ضلعی منتظم n خط تقارن دارد

اگر n فرد باشد خط‌های تقارن از راس به وسط ضلع مقابل عمود می‌شوند
اگر n زوج باشد قطرهای و خط‌های که وسط اضلاع مقابل را بهم وصل می‌کنند خط‌های تقارن می‌باشند

کار در کلاس



مانند نمونه هر شکل را طوری کامل کنید که نقطه O مرکز تقارن باشد.



ارتباط تبدیلی

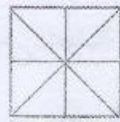
تمرین



۱- الف) تعداد خط‌های تقارن هریک از چند ضلعی‌های منتظم زیر را پیدا کنید.



۳ خط تقارن



۴ خط تقارن



۵ خط تقارن



۶ خط تقارن



۷ خط تقارن

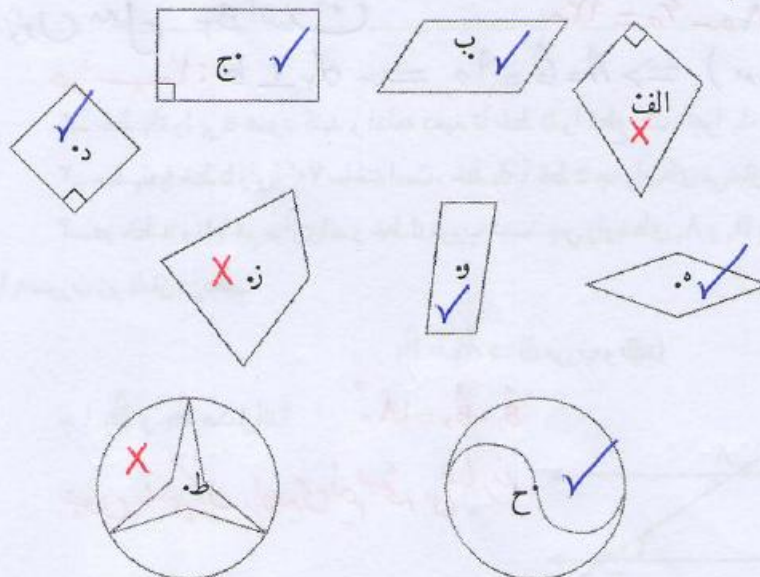


۸ خط تقارن

بالا ↑

ب) به نظر شما نه ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ ده ضلعی منتظم چگونه؟
۹ محور تقارن - ۱۰ محور تقارن

۲- در هر شکل، بررسی کنید که نقطه مشخص شده مرکز تقارن شکل هست یا نه.



جواب سؤال ۲ چون با یکی از دو خط موازی زاویه 90° می سازد با دیگری نیز زاویه

90° در هر دو می سازد پس خط d_1 بر خط b عمود است

تعریف قدیم: دو خط که همدیگر را قطع نکنند دو خط موازی نام دارند (در صفحه)

توازی و تعامد

تعریف دو خط موازی

فعالیت



تعریف جدیدی از دو خط موازی

خط های a و b با هم موازی اند، اگر خطی مثل d_1 آنها را با زاویه های مساوی قطع کرده

$$\hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow a \parallel b$$

باشد.

به خط d_1 خط مورب می گویند.

موازی بودن خط های a و b را به صورت $a \parallel b$ نمایش می دهند.

هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها زاویه های مساوی می سازد.

$$(a \parallel b, d_1 \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

۱- اگر $\hat{A}_1 = 60^\circ$ باشد، زاویه های خواسته شده را پیدا کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

$$\hat{A}_2 = 180 - 60 = 120$$

چون مکمل زاویه \hat{A}_1 است.

$$\hat{B}_1 = 90$$

چون a و b موازی اند و d_1 مورب

$$\hat{B}_2 = 90$$

چون با زاویه \hat{B}_1 متقابل به راس است.

$$\hat{B}_2 = 120 \quad 180 - 60 = 120$$

چون مکمل \hat{B}_1 است

$$(a \parallel b, d_2 \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 90 \Rightarrow d_2 \perp b$$

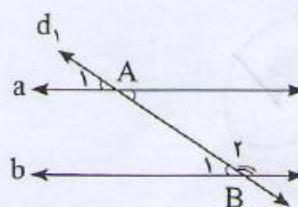
۲- خط d_2 را بر a عمود کنید و ادامه دهید تا خط b را قطع کند. چرا d_2 بر b هم عمود است؟

۳- خط d_2 با خط b زاویه 70° ساخته است. خط d_2 با خط a چه زاویه ای می سازد؟ 70° درجه

۴- دو خط a و b با هم موازی اند و خط d مورب است. پس زاویه های \hat{A}_1 و \hat{B}_1 با هم مساوی اند. این مطلب

را به صورت زیر نشان می دهیم.

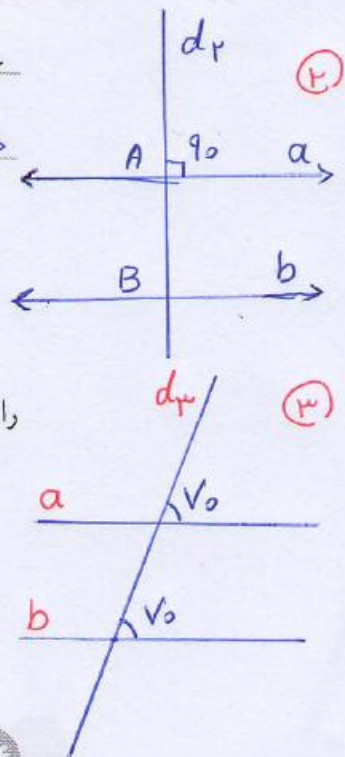
$$(a \parallel b, d) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$



$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$$

چرا \hat{B}_1 و \hat{B}_2 مکمل اند؟

چون با هم یک زاویه نیم صفحه می سازند



$$\left. \begin{aligned} (a \parallel d, d_1 \text{ مورب } d_2) &\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{B}_1 + \hat{B}_2 &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$$

غادر یا غن

استدلال شهری

چرا A_1 و B_2 مکمل اند؟ چون دوزاوی می \hat{A}_1 و \hat{B}_2 مساوی اند، \hat{B}_1 مکمل \hat{B}_2 است

اگر خط a را روی صفحه انتقال دهیم تا روی خط b قرار گیرد و نقطه A روی B بیفتد، زاویه A_1 روی

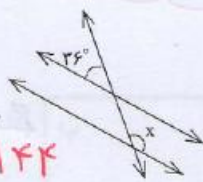
کدام زاویه قرار می گیرد؟ روی زاویه \hat{B}_1 قرار می گیرد پس $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ چگونه از این طریق می توان توجیه کرد که زاویه A_1 و زاویه B_2 مکمل یکدیگرند؟ توضیح دهید. چون \hat{B}_1 مکمل \hat{B}_2 است و $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ پس \hat{A}_1 مکمل \hat{B}_2 می باشد

کار در کلاس * روی \hat{A}_1 قرار گیر و آنگاه با \hat{B}_2 زاویه نیم صفحه می ساز پس مکمل یکدیگرند

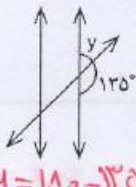
۱- در هر شکل یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کرده است. اندازه زاویه های

مجهول را به دست آورید.

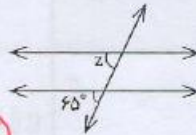
$$Z = 65$$



$$x = 180 - 34 = 146$$

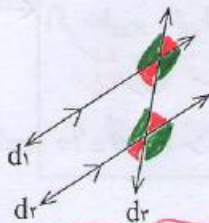


$$y = 180 - 135 = 45$$



$$t = 180 - 60 = 120$$

۲- موازی بودن دو خط را مانند شکل، با علامت گذاری آنها مشخص می کنیم. عبارت «خط



$d_1 \parallel d_2$ را به صورت « $d_1 \parallel d_2$ » می نویسیم.

الف) عبارت های $a \parallel b$ و $a \parallel c$ را بخوانید.

ب) زاویه های مساوی را در شکل ها با علامت گذاری مشخص کنید.

(خط a و b موازی هستند) $a \parallel b \rightarrow$

(خط a و c متقاطع هستند) $a \nparallel c \rightarrow$

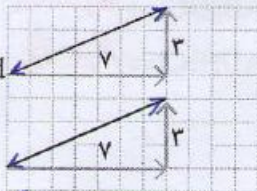
فعالیت



۱- می خواهیم در صفحه شطرنجی خطی موازی خط d رسم کنیم. راه حل سه

دانش آموز را مشاهده کنید و توضیح دهید هر کدام از آنها چگونه خط موازی را رسم کرده است.

مفهوم شیب

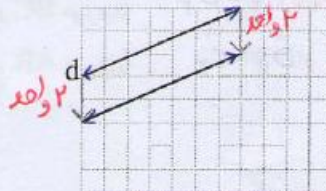


«نقطه از خط را در نظر گرفته

و حرکت افقی و قائم بین

این دو نقطه را، از نقطه ای دیگر

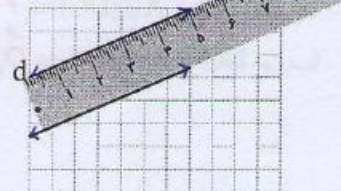
شبیه سازی کرده



«نقطه از آن را بکشد

اندازه انتقال داده است

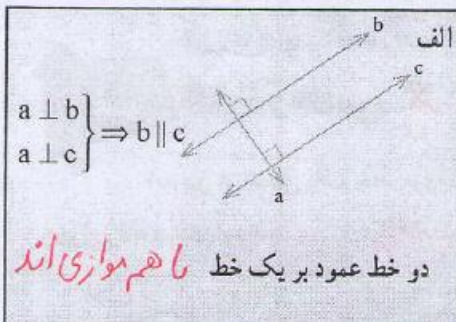
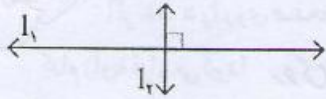
مفهوم انتقال



از لبه های موازی خط کش

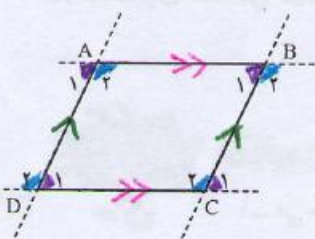
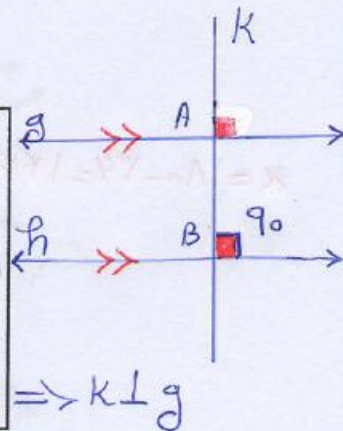
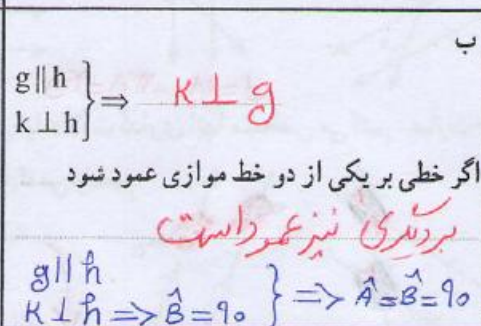
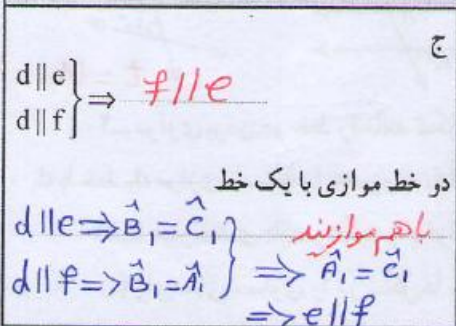
استفاده کرده است

۲- عمود بودن دو خط را با علامت گذاری آنها مشخص می‌کنیم و عبارت «خط l_1 بر خط l_2 عمود است» را به صورت $l_1 \perp l_2$ می‌نویسیم.



مانند نمونه، برای هر کدام شکل بکشید و جاهای خالی را پر کنید.

استدلال رسمی



در هر متوازی الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو باهم موازی‌اند. چهارضلعی ABCD یک متوازی الاضلاع است. الف) ضلع‌های موازی را با علامت گذاری مشخص کنید. ب) در رابطه‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید.

(مورب AD و AB \parallel DC) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1, \hat{A}_2 = \hat{D}_2$
(مورب DC و AD \parallel BC) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1, \hat{D}_2 = \hat{C}_2$

(مورب BC و AB \parallel DC) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1, \hat{B}_2 = \hat{C}_2$
(مورب AB و AD \parallel BC) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1, \hat{A}_2 = \hat{B}_2$

خط تقارن است $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2$ ①

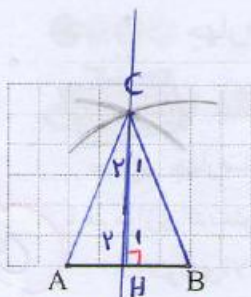
خط تقارن است $\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$
 $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180$ } $\Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90$ ②

خط تقارن است $\Rightarrow \overline{AH} = \overline{BH}$ ③

در این مجموعه زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰ درجه است $\Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$ ①, ②

خط عمود منصف AB است \Rightarrow ②, ③

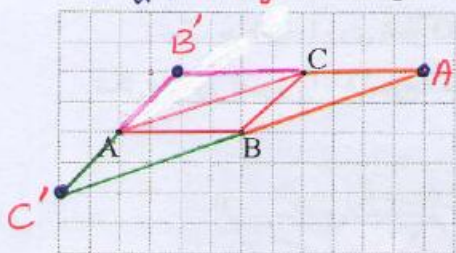
کار در کلاس



۱- الف یک مثلث متساوی الساقین بکشید؛ طوری که پاره خط AB قاعده آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.
 ب) خط تقارن مثلث را رسم کنید.

ج) آیا دو زاویه مجاور قاعده با هم برابرند؟ **بله**

د) آیا خط تقارن، عمود منصف قاعده و نیمساز زاویه مقابل آن است؟ **بله**

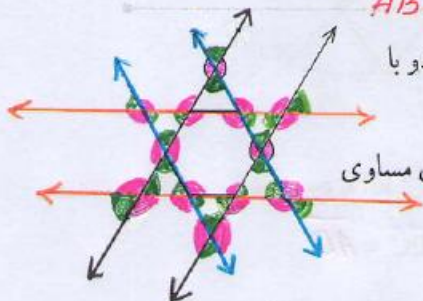


۲- متوازی الاضلاعی رسم کنید که نقاط A, B, C و سه تا از رأس‌های آن باشند.

پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید.

برای این سؤال چند پاسخ مختلف می‌توانید پیدا کنید؟

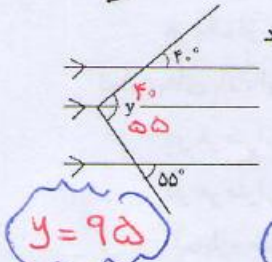
سه تا جواب دارد
 $ABA'C, ABCB', ACBC'$



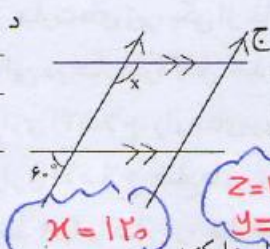
۱- در شش ضلعی منتظم، ضلع‌های روبه‌رو دو به دو با هم موازی‌اند.

مانند نمونه، ضلع‌های موازی دیگر را امتداد دهید و زاویه‌های مساوی را مشخص کنید.

۲- در هر قسمت، اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.



$y = 95$



$x = 120$

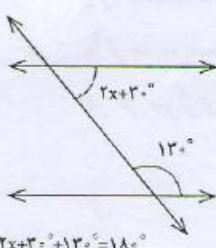


$z = 125, y = 125$

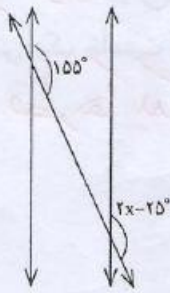


$x = 180 - 22$
 $x = 158$

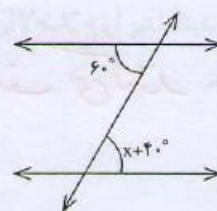
۳- مانند نمونه، با تشکیل معادله، مقدار x را پیدا کنید.



$2x + 30 + 130 = 180$
 $\Rightarrow 2x + 160 = 180$
 $\Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$



$2x - 25 = 155$
 $\Rightarrow 2x = 155 + 25$
 $\Rightarrow 2x = 180$
 $\Rightarrow x = 90$



$x + 40 = 60$
 $\Rightarrow x = 60 - 40$
 $\Rightarrow x = 20$

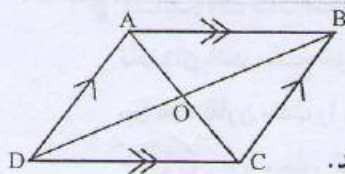
هندسه و جبر

ترکیب تفکر هندسی و تفکر جبری

چهارضلعی ها

تعریف متوازی الاضلاع

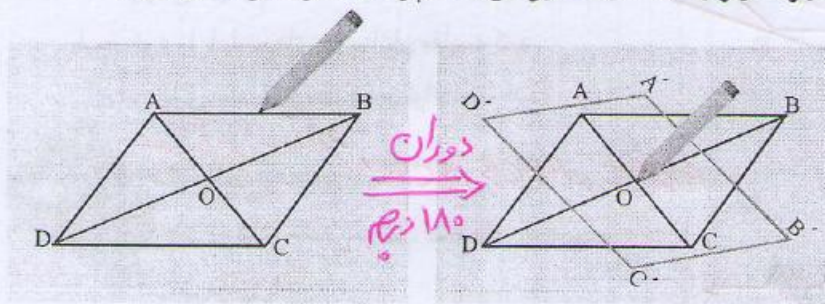
فعالیت



چهارضلعی ای که ضلع های روبه روی آن دو به دو با هم موازی اند، متوازی الاضلاع نام دارد.

دست‌نویسی

- متوازی الاضلاعی را رسم و مانند شکل نام گذاری کنید.
یک ورق کاغذ پوستی روی آن بگذارید و تصویر متوازی الاضلاع را رسم کنید.
نوک مدادتان را روی نقطه O (محل برخورد قطرها و مرکز تقارن شکل) قرار دهید و مانند شکل های زیر تصویر را 180° درجه حول این نقطه بچرخانید تا بر شکل منطبق شود.



- با توجه به انطباق شکل و تصویر، تساوی ها را کامل کنید.

$$\hat{A} = \hat{C} \quad \hat{B} = \hat{D} \quad \overline{AB} = \overline{DC} \quad \overline{BC} = \overline{AD}$$

هر یک از عبارت های زیر، یکی از خاصیت های متوازی الاضلاع را بیان می کند. با توجه به تساوی های بالا، این دو عبارت را کامل کنید.

در هر متوازی الاضلاع، زاویه های رو به رو **با هم مساوی اند**

در هر متوازی الاضلاع، ضلع های رو به رو **با هم مساوی اند**

- پاره خط OA بر کدام پاره خط منطبق شده است؟ **پاره خط OC** پس $\overline{OA} = \overline{OC}$

پاره خط OB چطور؟ **پاره خط OD** پس $\overline{OB} = \overline{OD}$

با توجه به پاسخ این دو پرسش، یک خاصیت دیگر متوازی الاضلاع را پیدا کنید و بنویسید.

- در هر متوازی الاضلاع، **قطرها یکدیگر را نصف می کنند**

۲) کلاسی: **جواب:** چون در متوازی الاضلاع زوایای مقابل مساوی اند و زوایای مجاور مکمل پس تمام زوایای قائمه است

نتیجه سوال ۲ کار در کلاس: مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است

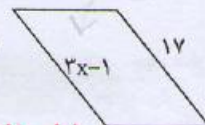
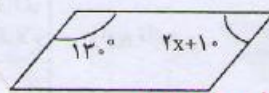
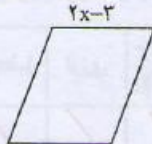
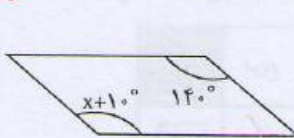
کار در کلاس



۱- شکل های زیر متوازی الاضلاع اند. با تشکیل معادله، مقدار x را به دست آورید.

$$x + 10 = 140$$

$$\Rightarrow x = 130$$



$$3x - 1 = 17$$

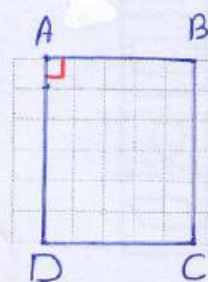
$$\Rightarrow 3x = 18$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$2x + 10 + 130 = 180$$

$$\Rightarrow x = 20$$

$$2x - 3 = 7 \Rightarrow x = 5$$



۲- در صفحه شطرنجی متوازی الاضلاعی رسم کنید

که یکی از زوایای قائمه (۹۰ درجه) باشد.

چرا زوایای دیگر آن هم حتماً قائمه اند؟ توضیح دهید.

بالا ↑

$$\hat{A} = \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = 90$$

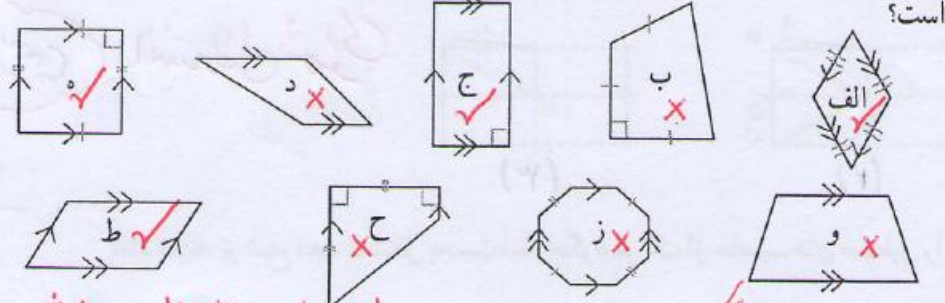
$$\hat{A} = 90$$

در همین ترتیب فعالیت

$$(\hat{A} + \hat{D} = 180, \hat{A} = 90) \Rightarrow \hat{D} = 90$$

$$\hat{B} = 90$$

۱- با توجه به تعریف متوازی الاضلاع، کدام یک از شکل های زیر متوازی الاضلاع



جواب: شکل های الف، ج، هـ و ط متوازی الاضلاع می باشند

۲- در اینجا چند چهارضلعی دیگر هم تعریف شده اند. هر تعریف را بخوانید و از میان

چهارضلعی های فعالیت قبل، مثال هایی برای هر یک پیدا کنید.

مستطیل متوازی الاضلاعی است که زوایای قائمه دارد. **شکل «ج» و «هـ»**

مربع متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زوایای قائمه دارد. **شکل «هـ»**

لوزی متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند. **شکل «الف» و «د»**

۳- می دانیم که «در هر متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می کنند»

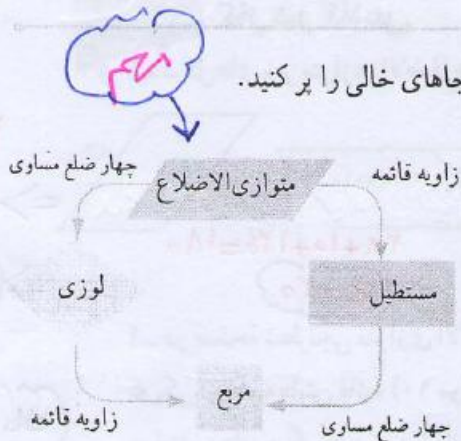
آیا می توانیم نتیجه بگیریم که «در هر لوزی هم قطرها یکدیگر را نصف می کنند»؟ چرا؟

بله؛ چون هر لوزی، متوازی الاضلاع است

کار در کلاس



۱- با توجه به نمودار روبه‌رو، در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

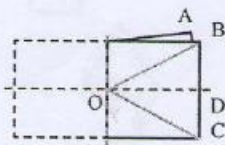
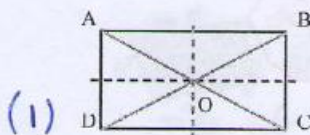


مربع	مستطیل	لوزی	موازی الاضلاع	
✓	✓	✓	✓	
-	✓	-	✓	
-	-	✓	✓	
-	-	-	✓	

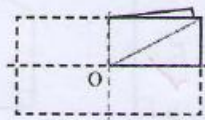
دست‌ورزی

۲- روی یک ورق کاغذ، مستطیلی به دلخواه رسم کنید و دور

آن را ببرید. مستطیل را مانند شکل نام‌گذاری کنید. سپس آن را ابتدا روی یکی از خط‌های تقارن و سپس روی خط تقارن دیگر تا کنید.



(۲)



(۳)

استدلال شهودی

اثبات غیررسمی

این فرمال

مانند نمونه، توضیح دهید که شکل به دست آمده چگونه هر یک از خاصیت‌های مستطیل را نشان

می‌دهد.

• در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ چون OA روی OC و OB روی OD قرار گرفته

است. چون باره‌های OA، OC، OB، و OD روی هم قرار گرفته‌اند

الف) در مستطیل همه زاویه‌ها با هم برابرند؛ چون روی هم قرار گرفته‌اند

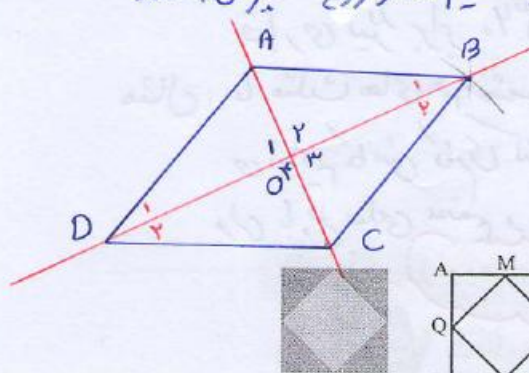
ب) در مستطیل ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند، چون طبق شکل (۲)، BC روی AD منطبق شده است

ج) در مستطیل قطرها با هم برابرند؛ چون نصف هر قطر روی نصف قطر دیگر افتاده است

$$OA = OB = OC = OD \Rightarrow AC = BD$$

اگر شکل را روی خط تقارن دیگر تا کنیم مشاهده می‌کنیم $AB = DC$ است

- ۱) جواب سوال ۲
هر زاویه راس به دو قسمت مساوی تقسیم شده پس قطرهای نیم ساز زاویه ها نیز می باشند
- ۲) $\vec{B}_1 = \vec{B}_2, \vec{D}_1 = \vec{D}_2$ \Rightarrow BD خط تقارن



دست ورزی \leftarrow نقد خلاق

هر زاویه $\vec{D}_1, \vec{D}_2, \vec{B}_1, \vec{B}_2$

۳- در یک طرح کاشی کاری، مربع ABCD دیده می شود. چهار ضلعی MNPQ هم با وصل شدن وسط ضلع های این مربع تشکیل شده است. دو دانش آموز توضیح داده اند که MNPQ چه نوع چهار ضلعی ای است. نظر این دو دانش آموز در اینجا آمده است.

هادی

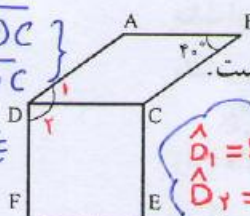
ABCD مربع است. این مربع را روی دو قطر آن، که محور تقارن نیز هستند، تا می کنیم. همه زاویه های چهار ضلعی MNPQ روی هم می افتند. پس با هم برابرند. چون مجموع آنها 360° است، پس هر کدام 90° می شوند. در نتیجه این چهار ضلعی مستطیل است.

مبین

ABCD مربع است. این مربع را روی دو خط تقارنی، که موازی ضلع های آن هستند، تا می کنیم. همه ضلع های چهار ضلعی MNPQ روی هم می افتند. پس، این چهار ضلعی لوزی است.

دلایل هر دو را بخوانید و توضیح دهید که چگونه به کمک این دو نوشته می توانیم نتیجه بگیریم که MNPQ مربع است. چهار ضلعی که ضلع هایش با هم برابر و زاویه هایش برابر 90° درجه باشد

① $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{DC}$
② $\Rightarrow \overline{CE} = \overline{DC}$
 $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{CE}$



۱- چهار ضلعی ABCD لوزی و چهار ضلعی DCEF مربع است. الف) چرا $\overline{AD} = \overline{CE}$ ؟ ب) چرا $AB \parallel EF$ ؟ ج) زاویه ADF چند درجه است؟

۲- روی کاغذ، لوزی دلخواهی رسم کنید و دور آن را ببرید.

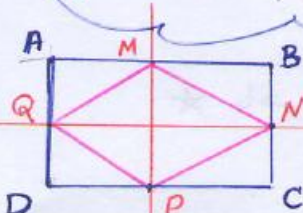
این لوزی کاغذی را روی دو خط تقارنش تا کنید. به کمک شکل به دست آمده چه نتایجی در مورد قطرهای لوزی به دست می آید. **بالا**

۳- وسط ضلع های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل می کنیم. چهار ضلعی به دست آمده چه نوع چهار ضلعی ای است؟ دلیل خود را توضیح دهید. **لوزی**

۴- درستی یا نادرستی هریک از جمله های زیر را بررسی کنید.

- الف) قطرهای هر مستطیل با هم مساوی اند. ☒
- ب) قطرهای هر لوزی با هم مساوی اند. ☒
- ج) قطرهای هر مستطیل بر هم عمودند. ☒
- د) قطرهای هر لوزی بر هم عمودند. ☒

چون اگر مستطیل را روی خط های تقارنش تا کنیم ضلع های این چهار ضلعی بر هم منطبق می شوند



① $\overline{MN} = \overline{MP}, \overline{PQ} = \overline{PN}$ \Rightarrow خط تقارن MP

② $\overline{PQ} = \overline{MN}, \overline{PN} = \overline{MQ}$ \Rightarrow خط تقارن QN

چون ضلع برابرند پس MNPQ لوزی است

نکته: زمانی می توانیم باید نوع کاشی، کاشی کاری کنیم که مجموع زاویه هایی که کنار هم

قرار می گیرند برابر 360° باشد

مثال: با مثلث های هم نهشت، مربع های مساوی و شش ضلعی ها هم نهشت منتظم

می توانیم کاشی کاری کنیم
در با شش ضلعی منتظم و الا ضلعی منتظم همان طور که در فعالیت مشاهده می کنید این کار غیر ممکن است

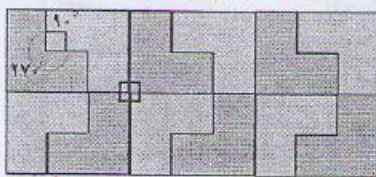
زاویه های داخلی

چون کاشی کاری جزئی از فرهنگ ماست از کاشی کاری استفاده

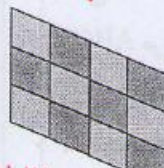
فعالیت



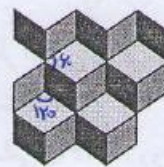
۱- در کاشی کاری، کاشی ها را طوری کنار هم قرار می دهند که روی هم نیفتند و جای خالی هم بین آنها نباشد. در اینجا چند نمونه کاشی کاری را مشاهده می کنید که هر کدام تنها با یک نوع کاشی انجام شده است. ۱- روی هم قرار نگیرند ۲- فضای خالی بین آنها نباشد



کاشی بصورت ال (با)



کاشی ترازوی الاضلاع

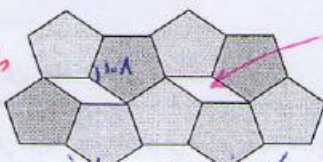


کاشی لوزی

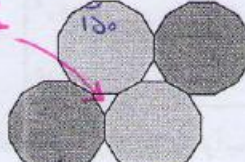
حالا به شکل های زیر توجه کنید. در هر مورد توضیح دهید، چرا کاشی کاری با یک نوع کاشی

$$3 \times 108 = 324 < 360$$

$$4 \times 108 = 432 > 360$$



خالی



انجام نمی شود؟

$$150 \times 2 = 300 < 360$$

$$150 \times 3 = 450 > 360$$

چون در هیچ کدام 360° مضرب یک زاویه این کاشی ها نمی باشد

۲- سطح زیر با مثلث هایی هم نهشت با مثلث ABC کاشی کاری شده است.

مثلث آبی انتقال یافته مثلث ABC است.

مثلث زرد دوران یافته مثلث ABC است.

زاویه های متناظر با هریک از زاویه های مثلث ABC را در این دو مثلث مشخص کنید.

در کاشی کاری بالا، قسمتی را که نشان می دهد $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ پیدا کنید.

کار در کلاس ۱) همان طور که مشاهده می کنید مجموع سه زاویه \hat{A} و \hat{B} و \hat{C} برابر 180° است

در کدام شکل کاشی کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است؟



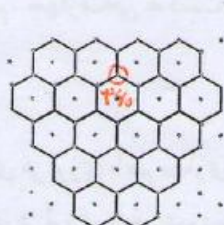
الف



ب



ج



د

در شکل های «الف»، «ب» و «د» همان طور که مشاهده می کنید

کاشی کاری باید نوع کاشی انجام شده است، چون مجموع زاویه های گوشه ها 360° است

★ با هر سه ضلعی هم نهشت یا چهار ضلعی هم نهشت می توان کاشی کاری را انجام داد

سعی کنیم دانش آموزان راهبیت کنیم تا رابطه‌ها را کشف کنند

فعالیت



زاویه‌هایی که درون یک چندضلعی قرار دارند، زاویه‌های داخلی آن چندضلعی نامیده می‌شوند. مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° درجه است.

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶
شکل				
تعداد مثلث‌ها	۱	۲	۳	۴
مجموع زاویه‌های داخلی	$1 \times 180^\circ = 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$3 \times 180^\circ = 540^\circ$	$4 \times 180^\circ = 720^\circ$

جدول بالا نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی با مجموع زاویه‌های داخلی دو تا مثلث برابر است؛ پس مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی 360° می‌شود.

الف) با کامل کردن جدول، مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های دیگر را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ $5 \times 180 = 900$

یک هشت ضلعی چگونه؟ چرا؟ $4 \times 180 = 720$ چون با مجموع زاویه‌های داخلی ۲ تا مثلث برابر است

ج) عبارت جبری زیر را طوری کامل کنید که نشان‌دهنده مجموع زاویه‌های داخلی یک n ضلعی باشد.

$$= (n - 2) \times 180^\circ$$

اکنون با کامل کردن جدول زیر اندازه هر یک از زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های منتظم را پیدا کنید.

تعداد ضلع‌ها	مجموع زاویه‌های داخلی	اندازه هر زاویه
۳	180°	$\frac{180}{3} = 60^\circ$
۴	360°	$360 \div 4 = 90$
۵	540	$540 \div 5 = 108$
۶	720	$\frac{720}{6} = 120^\circ$

یک عبارت جبری بنویسید که نشان‌دهنده اندازه هر یک از زاویه‌های داخلی یک n ضلعی منتظم باشد.

۴۳

$$\text{اندازه هر زاویه داخلی} = \frac{(n-2) \times 180}{n}$$

یک n ضلع منتظم

کار در کلاس



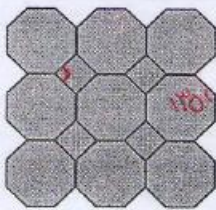
۱- مجموع زاویه‌های هر یک از چندضلعی‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) هفت ضلعی منتظم $7 \times 180 = 1260$ (ب) دوازده ضلعی منتظم $12 \times 180 = 2160$

۲- به کمک جواب قسمت (ب) سؤال قبل، اندازه هر یک از زاویه‌های دوازده ضلعی منتظم

را حساب کنید.

$$2160 \div 12 = 180$$

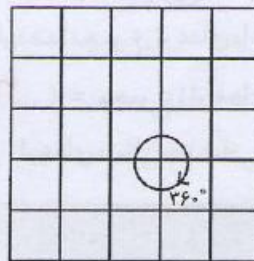
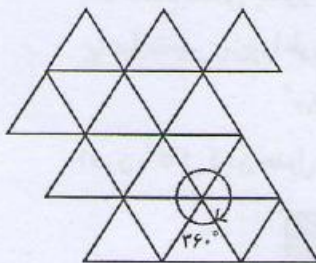


۳- سطح روبه‌رو با دو نوع کاشی منتظم کاشی کاری شده است.

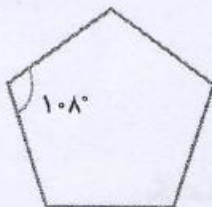
اندازه زاویه‌های هر دو نوع کاشی را محاسبه کنید.

$$\frac{(12-2) \times 180}{12} = 150 \quad \text{و} \quad 120$$

۴- کاشی‌هایی به شکل چندضلعی‌های منتظم داریم و می‌خواهیم سطحی را فقط با یک نوع از آنها کاشی کاری کنیم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که با سه ضلعی و چهارضلعی منتظم (یعنی مثلث متساوی الاضلاع و مربع) می‌توان کاشی کاری کرد.



یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی کاری کرد.



$$360 \div 108 = 3 \quad , \quad 360 \div 120 = 3 \quad , \quad 360 \div 128 \frac{5}{7} = 2 \quad , \quad 360 \div 135 = 2$$

۴۴

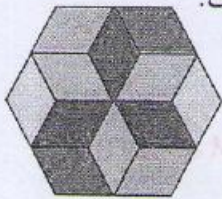
نکته: اگر زاویه n ضلعی منتظم یکی از مضاربهای ۳۶۰ باشد می‌توانیم از آن در کاشی کاری استفاده کنیم از سه و ۴ و ۶ ضلعی منتظم می‌توان در کاشی کاری توسط یک نوع کاشی استفاده کرد



$$\frac{18 \times 9}{(2-1)} = 162$$

۱- اندازه هر یک از زاویه های یک بیست ضلعی منتظم را پیدا کنید.

۲- در کاشی کاری روبه رو تنها یک نوع کاشی به کار رفته است.



الف) این کاشی چه نوع چهارضلعی ای است؟ **لوزی**

ب) اندازه هر یک از زاویه های آن چقدر است؟ **۱۲۰°**



۳- شکل روبه رو قسمتی از یک بشقاب قدیمی است.

حدس می زنید این بشقاب چندضلعی بوده است؟ چرا؟

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} = 135 \Rightarrow n = 8$$

۴- به کاشی کاری زیر توجه کنید. این کاشی با سه نوع کاشی مختلف انجام شده است.

شکل سمت راست قسمتی از این طرح را به صورت بزرگ تر نمایش داده است. اندازه زاویه های

مشخص شده را به دست آورید. $x = 45$ $y = 90$



در مربع قطرهای نیم ساز زاویه های تیرنی باشند



$$x = 45$$

$$y = 90$$

۵- مجموع زاویه های داخلی هر شکل را به دست آورید و با هم مقایسه کنید.



(ب)



(الف)

$$2 \times 180 = 360$$

روشن دوم

$$\left. \begin{aligned} BD \parallel EF \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{F}_1 = 45 \\ (BD \parallel EF, DC \text{ بر } BD) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{F}_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{F}_1 = 45$$

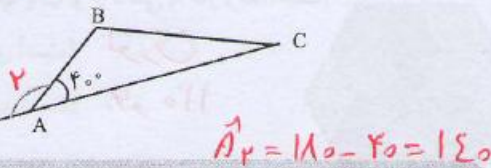
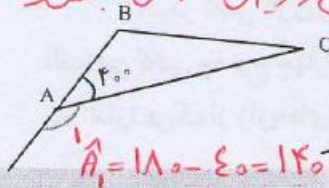
$$\left. \begin{aligned} AC \text{ قطر است} \Rightarrow \hat{C}_1 = 45 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{y} = 90$$

زاویه‌های خارجی

فعالیت



در شکل سمت چپ، زاویه خارجی رأس A از مثلث ABC از امتداد یافتن ضلع AB تشکیل شده است. در شکل سمت راست، زاویه خارجی رأس A از امتداد یافتن ضلع AC تشکیل شده است. چرا این دو زاویه مساوی‌اند؟ **هر دو مکمل زاویه‌ی A می‌باشند**

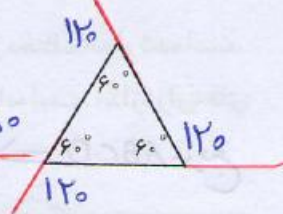
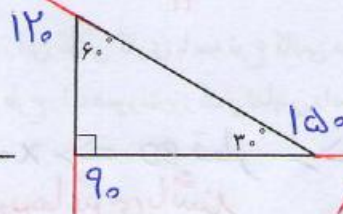
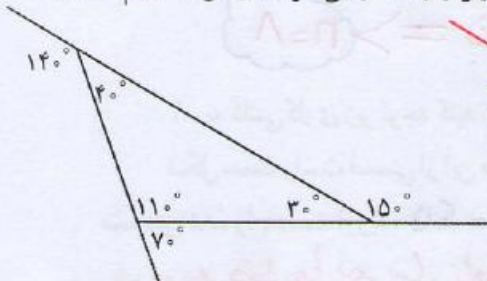


زاویه‌ای که در هر رأس یک چند ضلعی محدب، بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر تشکیل می‌شود، زاویه خارجی آن رأس نامیده می‌شود.

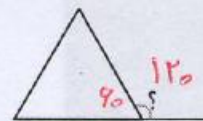
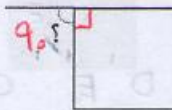
کار در کلاس



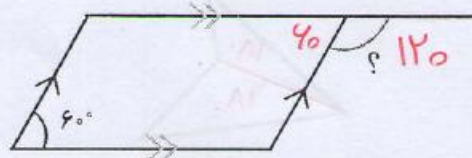
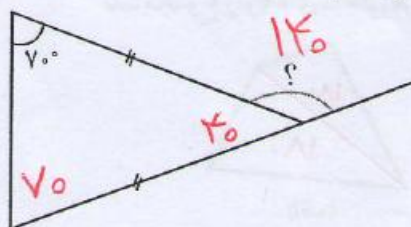
۱- الف) مانند نمونه، در هر یک از مثلث‌های زیر زاویه خارجی هر سه رأس را رسم کنید و اندازه هر کدام را بنویسید.



ب) مجموع زاویه‌های خارجی هریک از مثلث‌ها را پیدا کنید. چه رابطه‌ای میان آنها دیده می‌شود؟ **برابر ۳۶۰ است**
۲- چندضلعی‌های زیر منتظم‌اند. اندازه زاویه‌های خواسته شده را پیدا کنید.



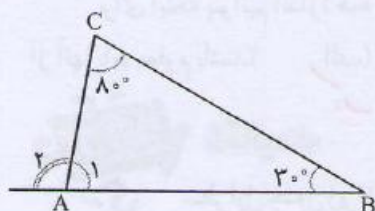
۳- با توجه به شکل، اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.





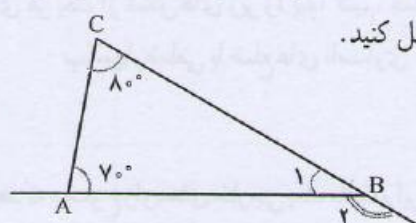
هدی برای یافتن زاویه خارجی یکی از رأس‌های مثلث به ترتیب زیر عمل کرد. راه حل

او را کامل کنید.



$$\hat{A}_1 = 180^\circ - (30^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\hat{A}_2 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$



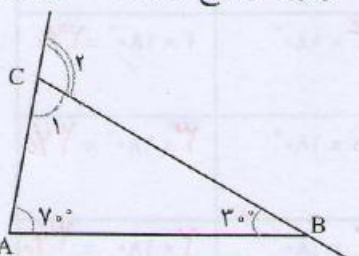
$$\hat{B}_1 = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

$$\hat{B}_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

اثبات استقرایی

او رابطه جالبی را مشاهده کرد. آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای؟
هدی با خودش فکر کرد: «آیا هر زاویه خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویه داخلی دیگر آن

مثلث است؟» با یک مثال دیگر حدس خود را بررسی کرد.

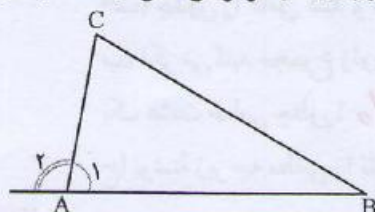


$$\hat{C}_1 = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\hat{C}_2 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

این آزمایش نیز حدس او را تأیید کرد. آیا حدس زدن و آزمایش کردن کافی است؟ چرا؟
یکی از دوستان هدی راه حل او را به صورت کلی و بدون در نظر گرفتن مثال نوشت تا به این ترتیب درستی حدس او را اثبات کند.

اثبات منطقی



$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

بنابراین در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است.

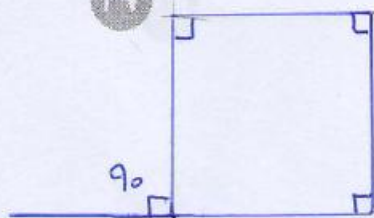
کار در کلاس



۱- مثالی بیاورید که نشان دهد جمله زیر نادرست است.

«هر زاویه خارجی یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه داخلی دیگر آن است.»

۴۷



$$90 + 90 + 90 = 270 \neq 90$$

۲- اندازه دو زاویه یک مثلث را می‌دانیم، پس می‌توانیم اندازه زاویه سوم آن را پیدا کنیم.

(چگونه؟) **مجموع آن دو را از ۱۸۰ کم می‌کنیم**

برای اینکه بتوانیم اندازه همه زاویه‌های هر یک از شکل‌های زیر را پیدا کنیم، دست کم چندتا

از آنها باید معلوم باشند؟ الف) لوزی ب) چهارضلعی با ضلع‌های نامساوی **سه زاویه**

یک زاویه

فعالیت



سطر اول جدول زیر نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث برابر ۳۶۰ است.

مجموع زاویه‌های خارجی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی	مجموع زاویه‌های داخلی	شکل	تعداد ضلع‌ها
$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$3 \times 180^\circ$	$1 \times 180^\circ$		۳
$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$4 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ$		۴
$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$5 \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ$		۵
$2 \times 180^\circ = 360^\circ$	$6 \times 180^\circ$	$4 \times 180^\circ$		۶

الف) جدول را کامل کنید و مجموع زاویه‌های خارجی شکل‌های بعدی را به دست آورید.

ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های خارجی یک هفت ضلعی چند درجه است؟ **۳۶۰**

یک هشت ضلعی چگونه؟ **۳۶۰**

ج) نوشته زیر چه مطلبی را نشان می‌دهد؟ توضیح دهید. **مجموع زاویه‌های خارجی هر چند ضلعی**

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی } n \text{ ضلعی} = n \times 180^\circ = 180^\circ n$$

۳۶۰ درجه است

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی } n \text{ ضلعی} = (n-2) \times 180^\circ = n \times 180^\circ - 2 \times 180^\circ = 180^\circ n - 360^\circ$$

$$\text{مجموع زاویه‌های خارجی } n \text{ ضلعی} = 180^\circ n - (180^\circ n - 360^\circ) = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ$$

نکته: ۱) اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی یک n ضلعی منتظم برابر است با $\frac{360}{n}$

۲) اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی یک n ضلعی منتظم برابر است با

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} \quad \text{یا} \quad 180 - \frac{360}{n} = \text{اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی}$$

اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی

کار در کلاس



۱- مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی‌های زیر را حساب کنید.

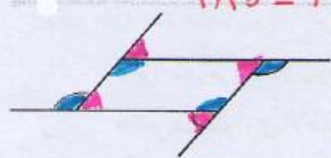
الف) هشت ضلعی 360° درجه (ب) ده ضلعی منتظم 360° درجه

۲- به کمک پاسخ قسمت (ب) سؤال قبل،

الف) اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید. $360 \div 10 = 36$

ب) اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی یک ده ضلعی منتظم را پیدا کنید.

$$180 - 36 = 144$$



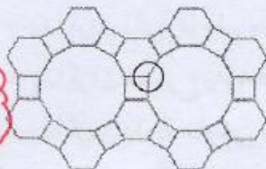
۱- زاویه‌های خارجی یک متوازی الاضلاع

در شکل نشان داده شده‌اند.

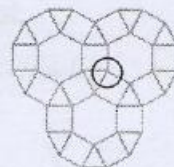
زاویه‌های مساوی را با علامت گذاری مشخص کنید.

۲- هر یک از طرح‌های زیر با استفاده از سه نوع کاشی منتظم طراحی شده است. با محاسبه

زاویه‌های داخلی هر کاشی منتظم، نشان دهید زاویه‌ی مشخص شده در هر شکل 360° درجه است.



$$90 + 120 + 150 = 360$$



$$90 + 90 + 90 + 120 = 360$$

۳- لاک پشتی روی لبه باغچه‌ای حرکت می‌کند. او در هر گوشه می‌چرخد و روی لبه بعدی

قرار می‌گیرد.

زاویه‌ی خارجی



الف) این لاک پشت در هر گوشه به اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی می‌چرخد یا زاویه‌ی خارجی؟

ب) او حرکتش را از نقطه A شروع کرده است.

تا وقتی دوباره به A برگردد، روی هم چند درجه می‌چرخد؟ 360° درجه

ج) این لاک پشت برای پیمودن محیط هر یک از باغچه‌های منتظم زیر با شروع از نقطه مشخص شده چند

درجه می‌چرخد؟ 360° درجه



د) در پاسخ قسمت قبل چه الگویی را مشاهده می‌کنید؟ توضیح دهید. مجموع زاویه‌های خارجی هر چند ضلعی

برابر 360° درجه است

●●●●● مرور فصل ۳ ●●●●●

مثالیم و مهارت‌ها

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را توصیف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- چندضلعی محدب • چندضلعی مقعر • مرکز تقارن
- چندضلعی منتظم • زاویه داخلی • زاویه خارجی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

- بررسی مرکز تقارن یک شکل • پیدا کردن زاویه‌های مساوی در خط‌های موازی و مورب
- تعریف متوازی الاضلاع • تعریف مستطیل
- تعریف لوزی • تعریف مربع
- رابطه چهارضلعی‌ها • خاصیت‌های چهارضلعی‌ها
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های داخلی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه داخلی یک چندضلعی منتظم
- پیدا کردن مجموع زاویه‌های خارجی یک چندضلعی
- پیدا کردن زاویه خارجی یک رأس مثلث

کاربرد

این درس به شما در درک بهتر شکل‌های هندسی و رابطه بین آنها کمک می‌کند. ما در انواع صنایع دستی و آثار معماری کشور خود شکل‌های مختلف هندسی را می‌توانیم ببینیم.

تمرین‌های ترکیبی

۱- هر خانه جدول زیر را با علامت × یا ✓ کامل کنید.

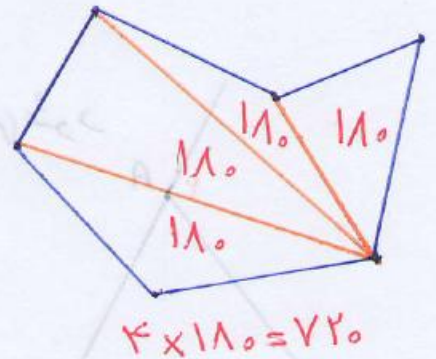
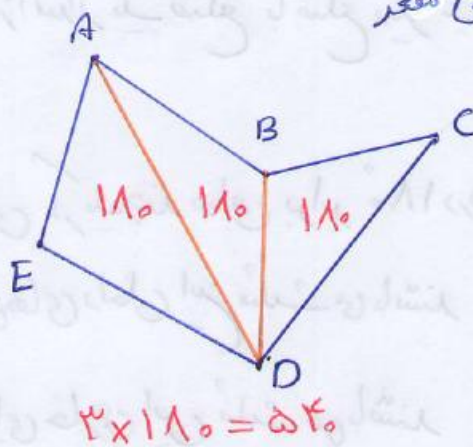
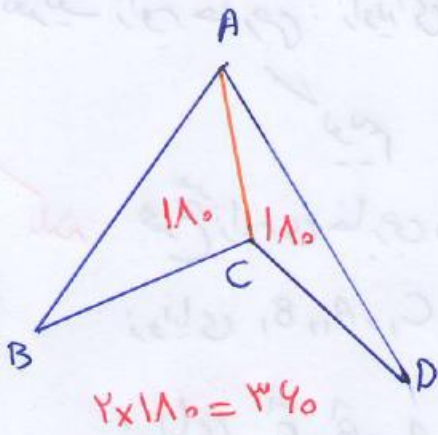
ضلع‌های روبه‌رو برابر	ضلع‌های روبه‌رو موازی	زاویه‌های روبه‌رو برابر	قطرها متصّف	قطرها برابر
✓	✓	✓	✓	×
✓	✓	✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓	×
✓	✓	✓	✓	✓

۲- اندازه زاویه‌های داخلی و خارجی یک هشت ضلعی منتظم را پیدا کنید.

$$\frac{(8-2) \times 180}{8} = 135 \quad \text{و} \quad 180 - 135 = 45$$

هر زاویه خارجی هر زاویه داخلی

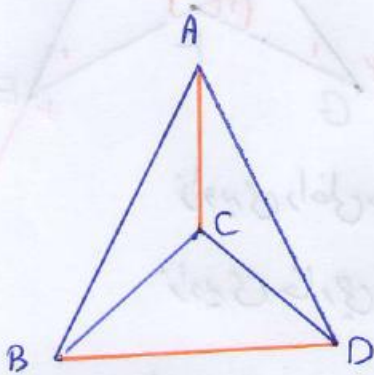
مجموع زوایای داخلی یک چند ضلعی متعین



$$(n-2) \times 180$$

مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی متعین $n \geq 4$ برابر است با

تعداد قطرهای یک چند ضلعی متعین



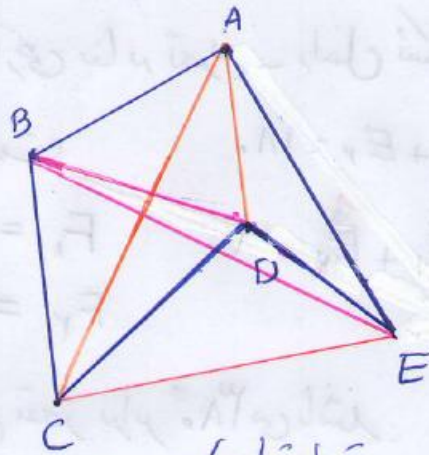
قطرها AC, BD

تعداد قطرها: ۲

تعداد پاره‌خطها: ۵

تعداد اضلاع: ۳

$$5 - 3 = 2$$

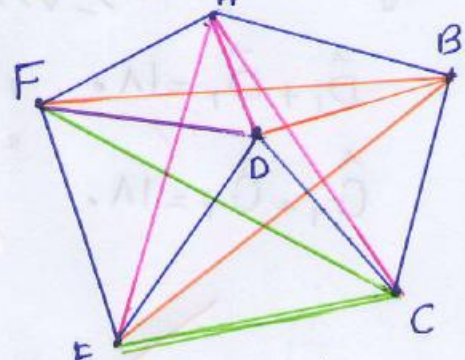


تعداد قطرها = ۲

تعداد پاره‌خطها = ۱۰

تعداد اضلاع = ۴

$$10 - 4 = 6$$



تعداد قطرها = ۵

تعداد پاره‌خطها = ۱۵

تعداد اضلاع = ۵

$$15 - 5 = 10$$

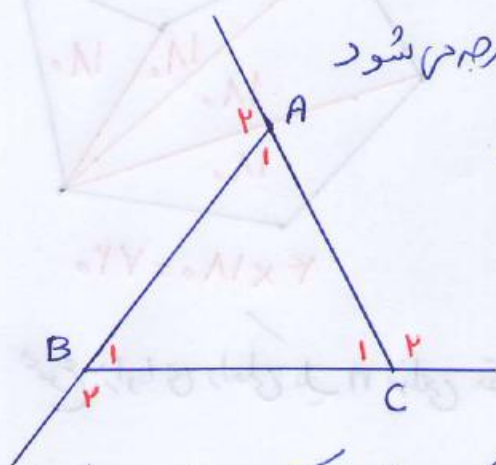
نتیجه: تعداد قطرهای یک چند ضلعی برابر است با اختلاف تعداد پاره‌خطها و تعداد اضلاع

تعداد قطرهای یک n ضلعی برابر است با:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} =$$

$$\frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

تعریف زاویه خارجی: زاویه‌ای که از امتداد یک ضلع با ضلع دیگر یک چند ضلعی بدست می‌آید زاویه خارجی گویند.



نکته: مجموع زاویه‌ی خارجی و داخلی در یک چند ضلعی برابر 180° در هر درجه می‌شود.

زاویه‌ای A_1, B_1, C_1 زاویه‌های داخلی این مثلث می‌باشند

زاویه‌ای A_2, B_2, C_2 زاویه‌های خارجی این مثلث می‌باشند

نکته: در چند ضلعی‌ها مقعر در زاویه‌ای که از 180° بزرگ تر است زاویه‌ی

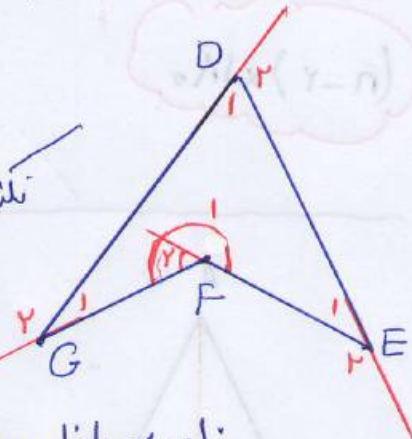
خارجی بنامه تعریف داخل شکل قرار می‌گیرد و اندازه‌ی آن منفی

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \quad \text{و} \quad E_1 + E_2 = 180^\circ$$

$$\hat{G}_1 + \hat{G}_2 = 180^\circ \quad \hat{F}_1 + \hat{F}_2 = 180^\circ$$

است F_1 = زاویه‌ی داخلی می‌باشد

F_2 = زاویه‌ی خارجی است



مجموع زاویه‌ای خارجی چند ضلعی مقعر برابر 360° می‌باشد

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) + \hat{E}_1 + \hat{F}_1 = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$$

نکته: چون مقدار \hat{D}_2 منفی است پس

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ$$

چون زاویه خارجی داخل شکل است پس منفی است
(یعنی مقدار زاویه خارجی منفی است)

$$(A_1 + A_2) + (B_1 + B_2) + (C_1 + C_2) + (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) + (E_1 + E_2) + (F_1 + F_2) = 6 \times 180^\circ = 1080^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 + \hat{E}_2 + \hat{F}_2 = 360^\circ$$