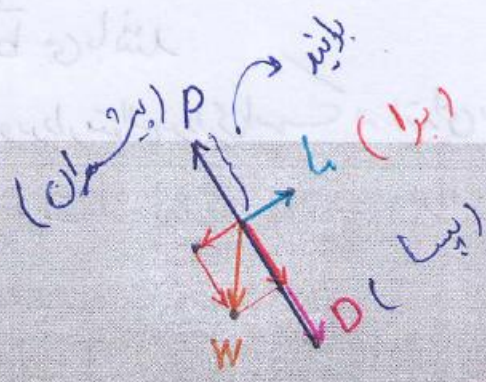


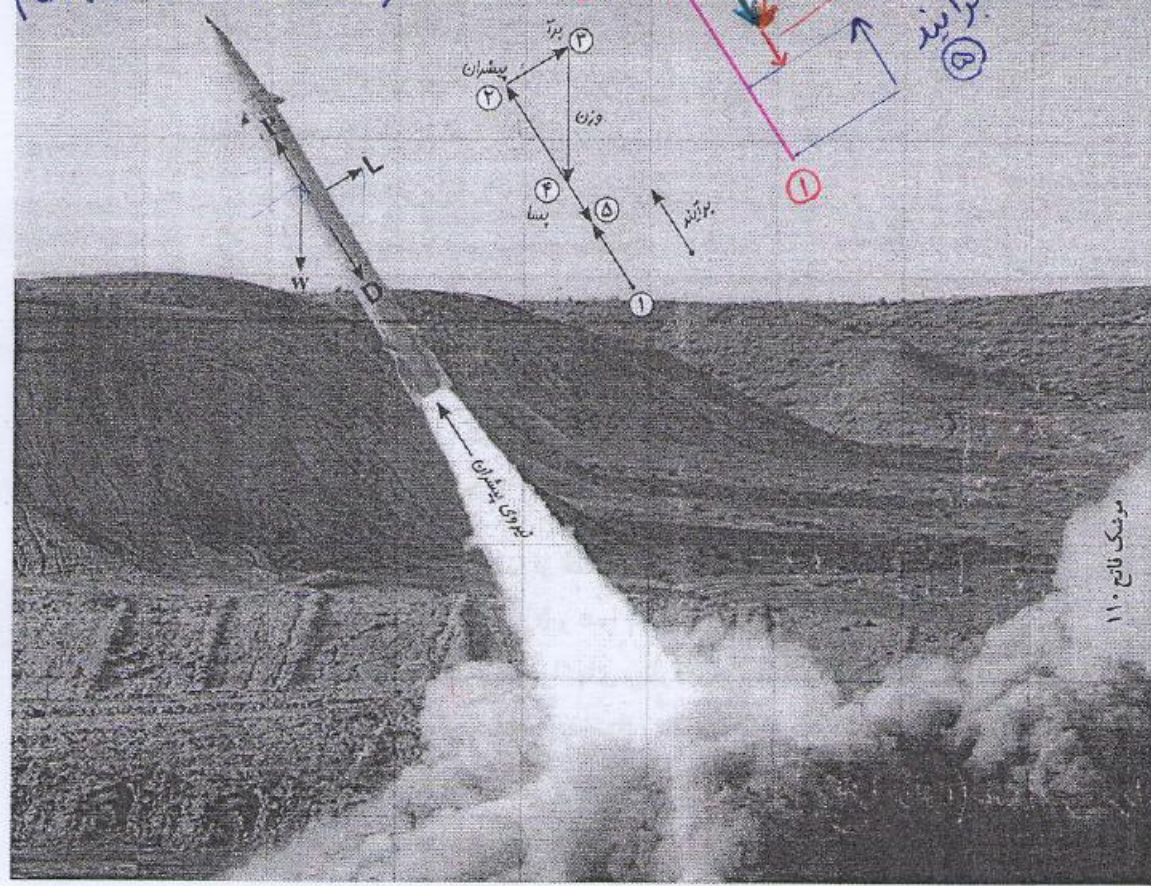
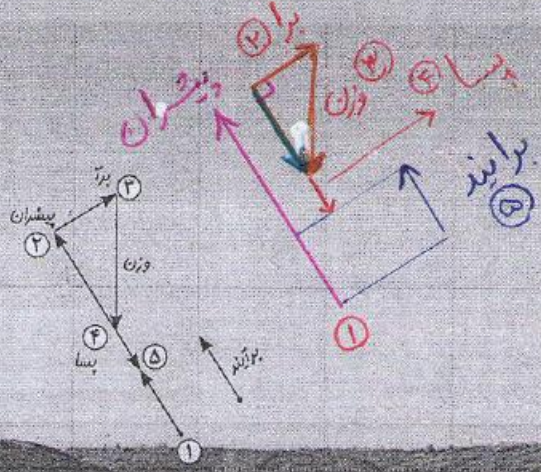
(weight = نیروی وزن)  
 (Thrust = نیروی رانش)  
 در این کتاب از  $P$  استفاده شده



## فصل ۵

## بردار و مختصات

(Drag = نیروی پس)  
 (Lift = نیروی برا)



موشک ناتج ۱۱۰

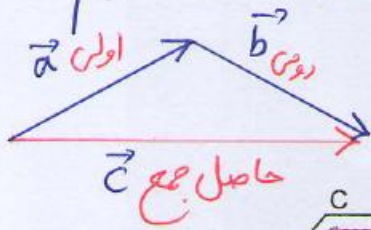
شتاب حرکت یک جسم در هر لحظه همواره در جهت بردار برآیند نیروهای وارد بر آن است. برای مثال وقتی یک موشک شلیک می‌شود، نیروهای وارد بر آن عبارتند از، نیروی وزن، نیروی پیشران، نیروی مقاوم هوا در راستای حرکت موشک (پس) و نیروی برآ (عمود بر راستای حرکت)؛ به طوری که برآیند این نیروها باعث حرکت موشک است.



برایند: چون بردار  $\vec{c}$  کار دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را با هم انجام می دهد پس بردار  $\vec{c}$  برایند دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  می باشد

حاصل جمع دو بردار متوالی:

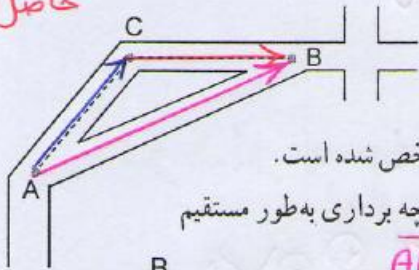
حاصل جمع دو بردار متوالی برداری است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می کند (جهت از بردار اول به سمت بردار دوم)



جمع بردارها



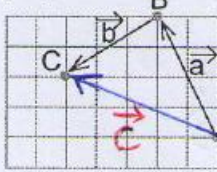
۱- شخصی در نقطه A ایستاده است.



مسیر حرکت او برای رسیدن به نقطه B در شکل مشخص شده است.

این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به طور مستقیم

به نقطه B می رسد؟ آن را رسم کنید. بردار  $\vec{AB}$



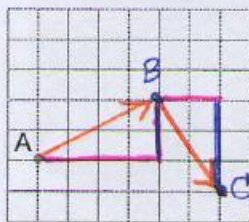
۲- نقطه A ابتدا با بردار انتقال a به نقطه B و سپس با بردار انتقال b به نقطه C منتقل شده است. نقطه A با چه برداری به طور مستقیم به نقطه C منتقل می شود؟  $\vec{AC}$

نام آن را بردار c بگذارید. آیا می توانیم بگوییم بردار c کار دو بردار

انتقال a و b را انجام می دهد؟ بله  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

به بردار c بردار برآیند یا حاصل جمع می گویند.

۳- رویاتی فقط به صورت افقی یا عمودی حرکت می کند. بازی رگبلاس



این روبات اکنون روی نقطه A است. با فرمان  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$  ابتدا ۴ واحد به

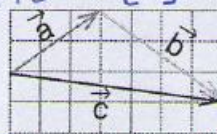
سمت راست (افقی) و سپس ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می کند.

نقطه جدید را B نام گذاری کنید.

روبات ما با فرمان  $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$  از B به نقطه C می رسد.

با چه فرمانی به طور مستقیم از نقطه A به C می رسد؟ فرمان  $\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$



۴- مختصات بردارهای a, b و c را بنویسید. آیا بردار c با جمع

دو بردار a و b برابر است؟ به ابتدا و انتهای بردارهای a و b توجه کنید.

در چه صورت برداری که از ابتدای  $\vec{a}$  به انتهای  $\vec{b}$  رسم می شود، بردار c،

حاصل جمع بردارهای a و b است؟ توضیح دهید. بردار حاصل جمع (برداری) ابتدایش بردار  $\vec{a}$  و انتهایش بردار  $\vec{b}$  است

در فعالیت ۲ مشاهده کردید که نتیجه جمع دو بردار a و b، بردار c است. بنابراین، می توان یک

تساوی برداری به صورت  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  را نوشت.

با توجه به تساوی  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  می توان مختصات بردار c را از تساوی مختصاتی زیر به دست

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+t \end{bmatrix}$$

آورد:

نتیجه: بردار  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  برداری است که مختصاتی برابر

مجموع مختصات  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  است



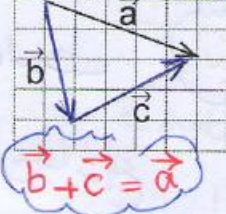
## کار در کلاس



در فعالیت قبل دیدید که اگر دو بردار  $a$  و  $b$  به صورتی باشند که ابتدای  $b$  در انتهای  $a$  قرار گیرد، برای رسم حاصل جمع یا برآیند این دو بردار می‌توانیم برداری از ابتدای بردار  $a$  به انتهای بردار  $b$  رسم کنیم.

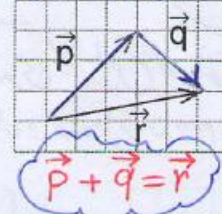
ابتدا مشخص کنید کدام بردار، حاصل جمع دو بردار دیگر است. سپس برای هر شکل، یک

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$



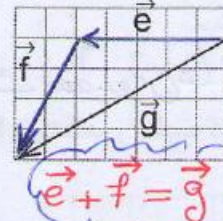
$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



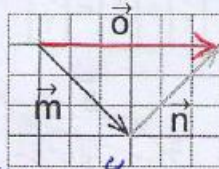
$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

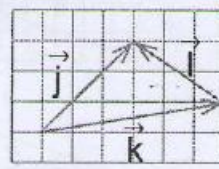


$$\vec{e} + \vec{f} = \vec{g}$$

$$\vec{m} + \vec{n} = \vec{0}$$



$$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\vec{k} + \vec{i} = \vec{j}$$

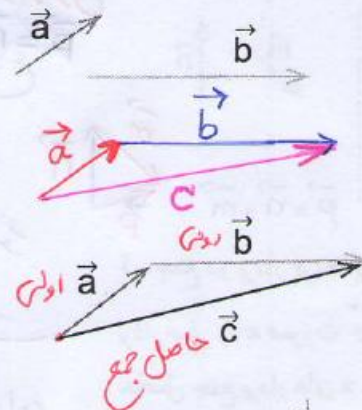
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$



۱- چهار بردار مساوی بردار  $a$  رسم کنید و مختصات همه بردارها را بنویسید.

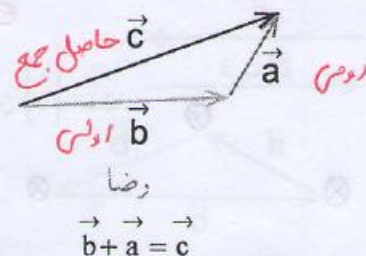
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۲- با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می‌توان از نقطه‌های شروع مختلف رسم کرد، می‌خواهیم حاصل جمع بردارهای  $a$  و  $b$  را رسم کنیم. راه‌حل‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید.



۷۱

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$



$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$$

امیر ابتدا از یک دایره برداری مساوی بردار  $\vec{a}$  رسم کرده و سپس از انتهای آن برداری مساوی بردار  $\vec{b}$  رسم کرده، ولی رضا ابتدا بردار  $\vec{b}$  را رسم کرده و از انتهای آن برداری مساوی بردار  $\vec{a}$  رسم کرده. حاصل جمع دو بردار خاصیت جابجایی دارد.

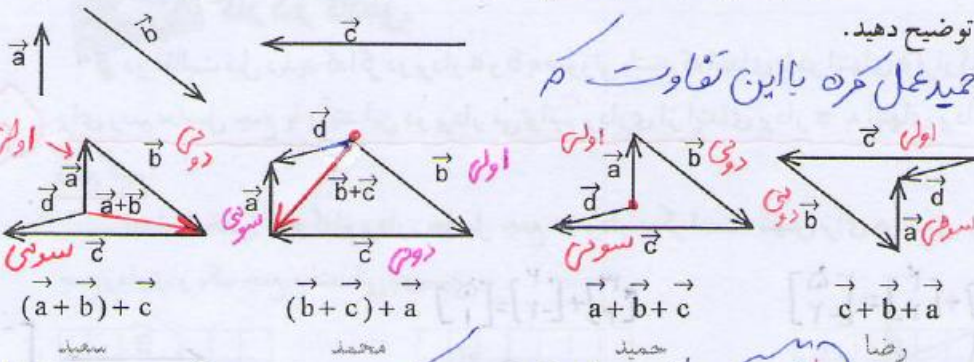


**سعید:** ابتدا حاصل جمع  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را بدست آورده و سپس حاصل آن دو را با بردار  $\vec{c}$  جمع کرده است

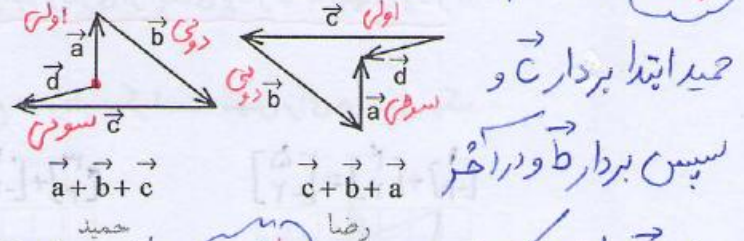
**محمد:** ابتدا مجموع دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را محاسبه کرده و سپس حاصل آن دو را با بردار  $\vec{c}$  جمع کرده است

**حمید:** جمیع سه بردار را به صورت متوالی، ابتدا  $\vec{a}$  و پس از آن  $\vec{b}$  و در انتها  $\vec{c}$  را رسم کرده و برای بدست آوردن مجموع ابتدای اولی را به انتهای سومی وصل کرده است

۳- دانش آموزان برای پیدا کردن جمع سه بردار راه حل های زیر را ارائه کرده اند. هر کدام را

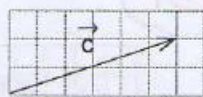
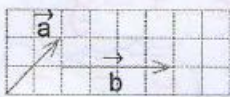


**رضیا:** رضاهم مانند حمید عمل کرده با این تفاوت کم

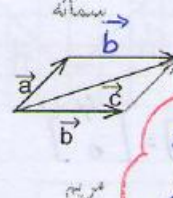


**نتیجه:** نتیجه ی کار این سه نفر یکی است فقط روش ها متفاوت است

۴- راه حل های دانش آموزان برای پیدا کردن جمع دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را مشاهده و مقایسه کنید.



$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

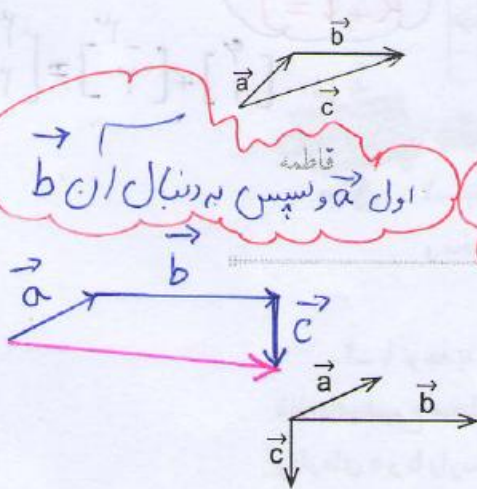


**روش متنازی**  
**الاضلاع**  
رسم هر دو بردار با مبدأ مشترک در رسم قطر متنازی الاضلاع

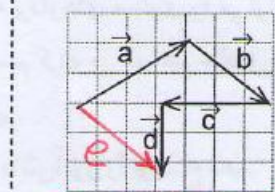
حاصل جمع دو بردار با مبدأ مشترک: روی دو

کار در کلاس

۱- حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

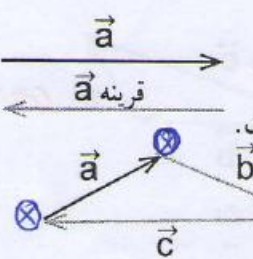


اول  $\vec{a}$  و سپس به دنبال آن  $\vec{b}$  رسم شده است



$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

۲- جمع دو بردار قرینه، برابر بردار صفر است.



بردار صفر را به صورت  $\vec{0}$  نشان می دهیم و مختصات آن  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  است. حاصل جمع بردارهای  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  چیست؟ چرا؟

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

بردار یک متنازی الاضلاع

درستی کنیم قطری م از

راس دو بردار رسم می شود

حاصل جمع دو بردار است

(ابتدای بردار حاصل جمع ابتدای

دو بردار است)

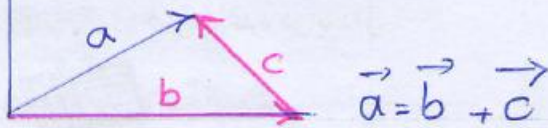
بردار  $\vec{c}$  کار بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را خنثی کرده در واقع بردار  $\vec{c}$  قرینه ی

مجموع دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  می باشد یا به عبارت دیگر جسم در مجموع این سه

انتقال به محل اول خود پریشسته و در توان لغت مجموع این سه انتقال صفر است

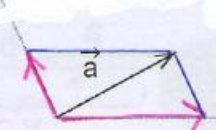
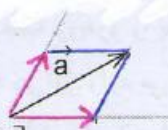
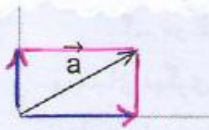


نکته: ۱) بی شمار بردار می توان رسم کرد که حاصل جمع آن ها بردار معلوم  $\vec{a}$  باشد  
 ۲) بی شمار برداری الاضلاع می توانیم رسم کنیم  $\vec{a}$  قطران ها باشد



بالا

۱- دو بردار رسم کنید که جمع آنها بردار  $\vec{a}$  باشد. به این کار تجزیه بردار می گویند. چند پاسخ مختلف می توان به دست آورد؟ چرا؟ بی شمار، به خاطر راستاها



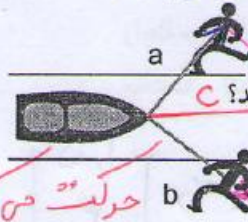
۲- مختصات دو بردار را که حاصل جمعشان بردار  $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$  باشد، بنویسید.

پاسخ خود را با پاسخ های دوستانتان مقایسه کنید. به کمک هم، سه پاسخ مختلف دیگر

بنویسید. فکر می کنید این مسئله چند پاسخ دارد؟ بی شمار جواب دارد، باز پاسخ است

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

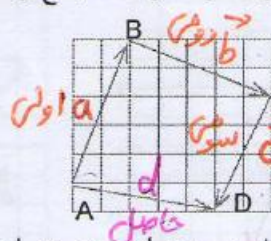
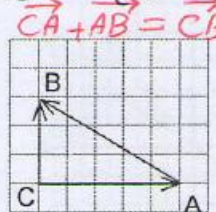
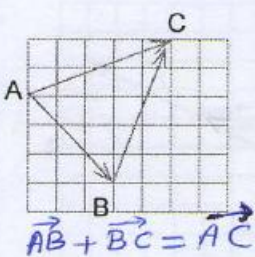
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$



۱- دو نفر در کنار رودخانه با دو طناب قایقی را در خلاف جهت آب می کشند. الف) قایق به کدام سمت حرکت می کند؟ ب) اگر نیروی  $\vec{a}$  بیشتر باشد، قایق به کدام طرف متمایل می شود؟ الف) روی مسیر  $\vec{c}$  که برانید دو نیروی  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  هست حرکت می کند

به سمت بالا حرکت می کند  
 برانید رو نیرو و به سمت بالا است

۲- در هر شکل یکی از بردارها حاصل جمع بردارهای دیگر است. برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۳- در هر تساوی،  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

۷۳

$$x = 2 - 5 = -3$$

$$y = -1 - 6 = -7$$

$$x = 7 - 3 = 4$$

$$y = -4 - 2 = -6$$

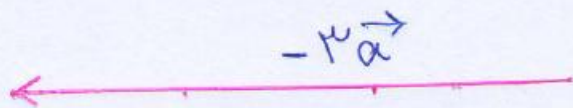
$$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2$$

$$y - 1 = 5 \Rightarrow y = 6$$

نتیجه: حاصل جمع چند بردار متوالی برابر برداری است که ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار وصل می کند



نکته بردار  $k\vec{a}$  برداری است هم راستا با بردار  $\vec{a}$  و اندازه‌ی آن  $k$  برابر اندازه‌ی بردار  $\vec{a}$  است اگر  $k > 0$  باشد دو بردار هم جهت و اگر  $k < 0$  باشد دو بردار مختلف جهت می‌باشند



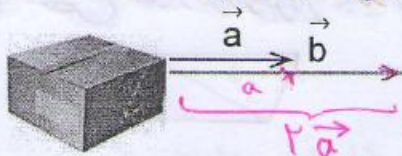
ضرب عدد در بردار



۱- در اینجا بردار حرکت یک خودرو در جاده

رسم شده است. اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کرده باشد،

برداری سه برابر  $\vec{a}$  و در جهت مخالف آن رسم می‌کنیم



۲- دو نفر سعی می‌کنند جعبه روبه‌رو را بکشند

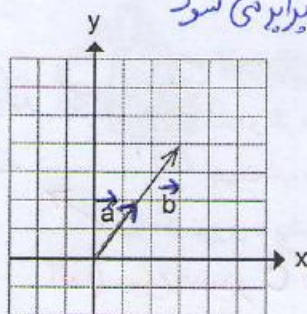
و به جای دیگری ببرند. نیرویی که نفر اول وارد می‌کند با

برداری  $\vec{a}$  و نیروی نفر دوم با بردار  $\vec{b}$  نمایش داده شده است.

با توجه به شکل، نیروی نفر دوم چند برابر نیروی نفر اول است؟ چرا؟ تقریباً دو برابر چون اندازه‌ی آن تقریباً دو برابر  $\vec{a}$  هست و هم جهت می‌باشند

۳- در فعالیت‌های ۱ و ۲، هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازه‌ی آن،

چه نکاتی را رعایت کردید؟ راستاها یکی است در اولی جهت‌ها مخالف هم و در دومی هم جهت می‌باشند، در اولی اندازه‌ی سه برابر و در دومی اندازه‌ی دو برابر می‌شود



۴- در هر شکل مختصات بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را بنویسید.

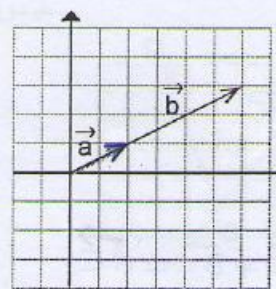
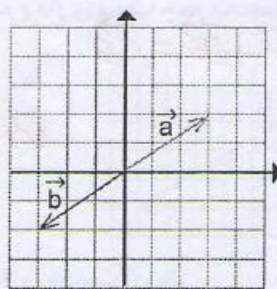
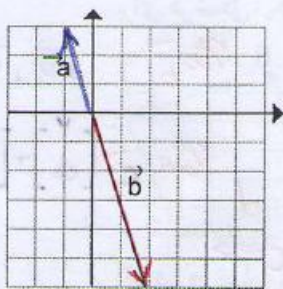
رابطه‌ی دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را با یک تساوی برداری و یک تساوی

مختصاتی نشان دهید.

$$\vec{b} = 2\vec{a} \quad \text{یا} \quad \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$



تساوی برداری

$$\vec{b} = -2\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

تساوی مختصاتی

$$\vec{b} = -\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = 3\vec{a}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



نتیجه گیری

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می شود.  
بنابراین، می توانیم بنویسیم:

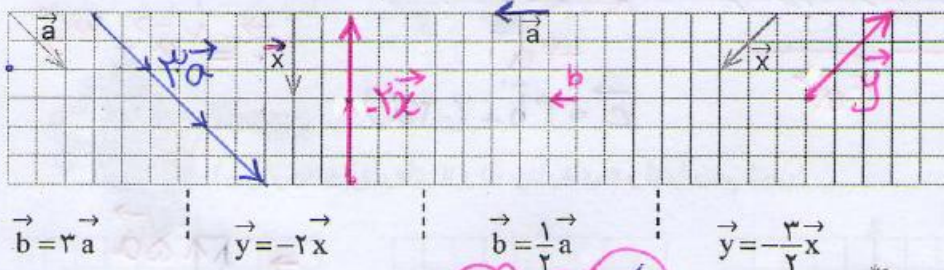
$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

اگر بردار  $b$  قرینه بردار  $a$  باشد، می نویسیم:  $\vec{b} = -\vec{a}$  یا  $\vec{b} = (-1)\vec{a}$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = -\vec{a} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

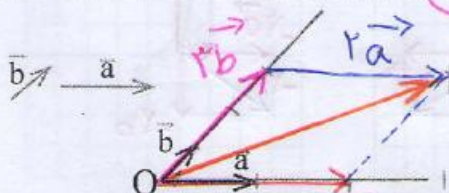
### کار در کلاس

با توجه به بردارهای داده شده، بردار مورد نظر را رسم کنید.



### تربید حفظ

فعالیت



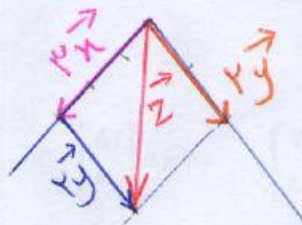
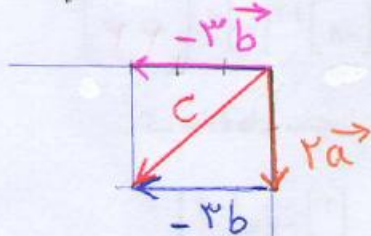
۱- بردارهای  $a$  و  $b$  مفروض اند.  
بردار  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  را رسم کنید.

از نقطه دلخواه  $O$  بردارهای  $2a$  و  $3b$  را رسم کنید. سپس بردار حاصل جمع را پیدا کنید.

۲- بردارهای خواسته شده را رسم کنید.

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\vec{a} + (-3\vec{b})$$

$$\vec{z} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$$



برای رسم بردار  $(\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b})$  ابتدا از یک نقطه دلخواه بردار  $k\vec{a}$  را رسم می کنیم، سپس از انتهای آن بردار  $l\vec{b}$  را رسم می کنیم. بردار  $\vec{c}$  را به روش متوازی الاضلاع یا به روش مثلث متساوی الساقین رسم می کنیم.

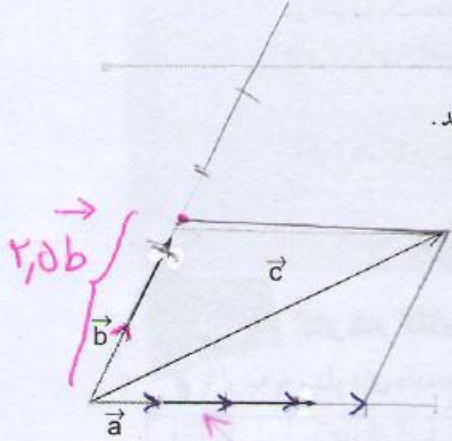
نکته



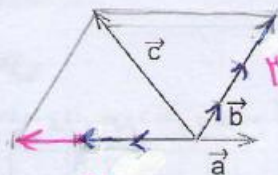
# اصلاح فرد

## کار در کلاس

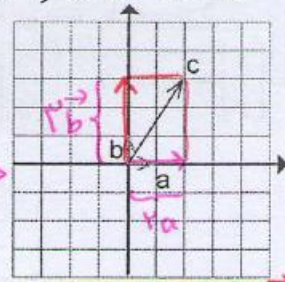
در هر شکل، بردار c را بر حسب بردارهای a و b بنویسید.



$$\vec{c} = 2\vec{a} + 1.5\vec{b}$$



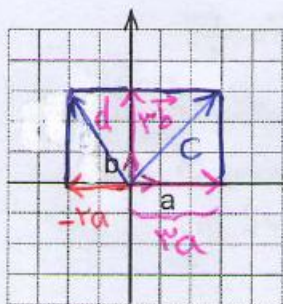
$$\vec{c} = 3\vec{b} + (-2\vec{a})$$



$$\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

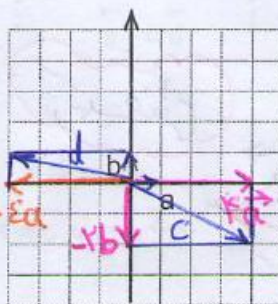


۱- با توجه به بردارهای a و b، بردارهای c و d را رسم کنید.



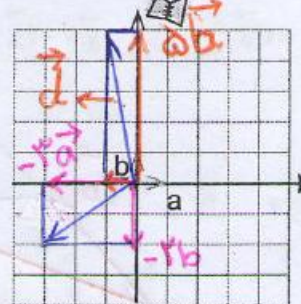
$$\vec{c} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{d} = (-2)\vec{a} + 3\vec{b}$$



$$\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = -4\vec{a} + \vec{b}$$



$$\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\vec{d} = -\vec{a} + 5\vec{b}$$

۲- حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 20 \end{pmatrix}$$

۳- معادلههای مختصات زیر را حل کنید.

$$4x = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$-3x = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

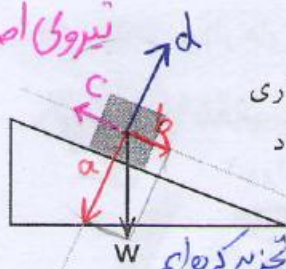
$$x = \begin{pmatrix} -6 \\ +1 \end{pmatrix}$$



نکته: اگر نیروی  $\vec{a}$  از عکس العمل زمین بیشتر باشد جسم داخل سطح شیب دار فرو می رود.  
 اگر نیروی عکس العمل زمین از نیروی  $\vec{a}$  بیش تر باشد جسم به سمت هوا پرتاب می شود.  
 طبق قانون دوم نیوتن این دو نیرو یکدیگر را خنثی می کنند.

اگر نیروی اصطکاک زیاد باشد آن گاه نیروی  $\vec{a}$  خنثی می شود  
 جسم حرکت نمی کند

مثال کار بردی



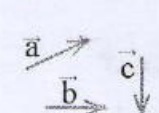
بیش تر باشد مولفه ی نیروی  $\vec{a}$  در شکل روبه رو نیروی وزن جعبه، که روی سطح شیب داری قرار گرفته، نشان داده شده است. این بردار را روی دو امتداد رسم شده تجزیه کنید. بردار وزن  $\vec{W}$  را به دو بردار  $\vec{a}$  عمود بر سطح و  $\vec{b}$  در راستای سطح شیب دار تجزیه کرده ایم. بردار  $\vec{a}$  با عکس العمل سطح خنثی می شود (قانون دوم نیوتن).  
 ۵- با توجه به بردارهای  $a$  و  $b$ ، مختصات بردار  $c$  را به دست آورید.

پایین حرکت می کند

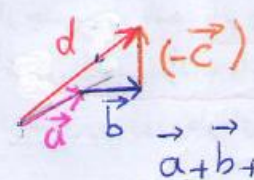
$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} \quad \vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \quad \vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 2+4 \\ 1-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 2+0 \\ 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} -3+0 \\ 0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \quad \vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$$



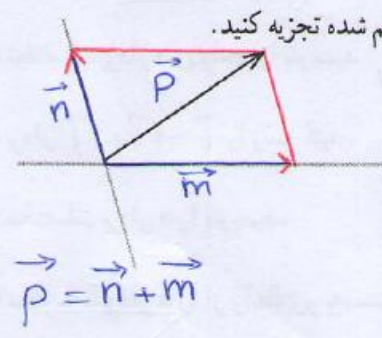
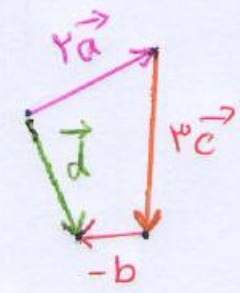
$$\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c}) = \vec{d}$$

$$2\vec{a} + 3\vec{c} = \vec{e} \quad \vec{e} + (-\vec{b}) = \vec{d}$$

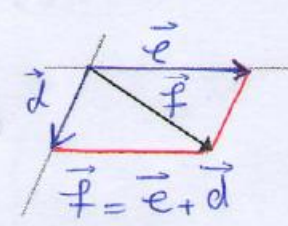


روش اول

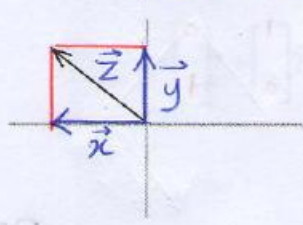
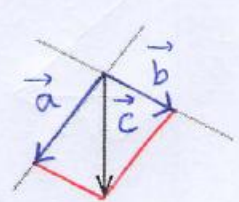
روش دوم (به صورت متوالی)



$$\vec{p} = \vec{n} + \vec{m}$$



$$\vec{f} = \vec{e} + \vec{d}$$



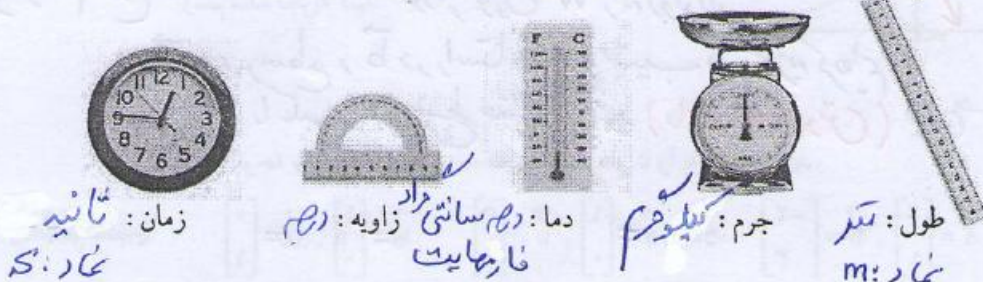


## بردارهای واحد مختصات

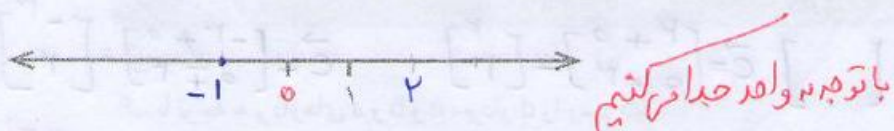
فعالیت



۱- برای اندازه‌گیری هر یک از مقادیرهای زیر از چه واحدی استفاده می‌کنیم؟



۲- در محور زیر، واحد را نشان داده‌ایم. عددهای ۱ و ۲ را روی محور مشخص کنید.



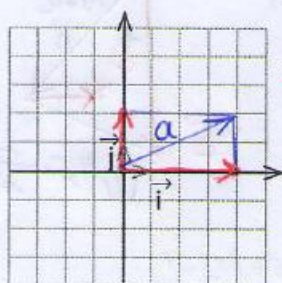
۳- همان‌طور که ملاحظه کردید، برای اندازه‌گیری و نمایش عددها روی محور به واحد نیاز داریم.

برای نمایش بردار نیز به واحد نیازمندیم. این واحد باید

از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه مختصات با دو محور

نمایش داده می‌شود، به واحد روی هر دو محور نیاز داریم.

در شکل روبه‌رو، بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده‌اند.



• مختصات بردارهای واحد را بنویسید.  $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  ,  $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

• بردار  $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$  را رسم کنید.

• مختصات بردار  $\vec{a}$  را بنویسید.  $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

• مختصات بردار  $\vec{a}$  را از رابطه زیر به دست آورید.

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

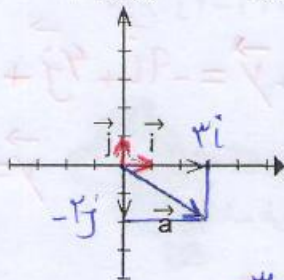
$$\vec{a} = p\vec{i} + q\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$



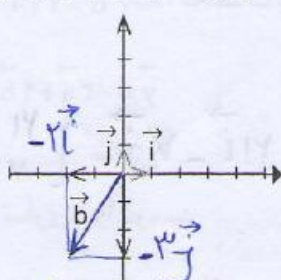
## کار در کلاس



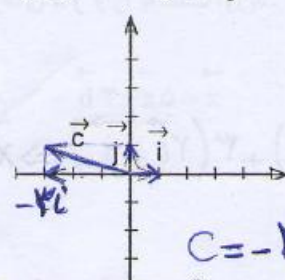
در هر قسمت، بردار داده شده را بر حسب  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.



$$\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$



$$\vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$



$$\vec{c} = -3\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



۱- طرف دیگر هر تساوی را مانند نمونه کامل کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$3\vec{i} + 0\vec{j} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{i} + \vec{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{i} - 3\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{i} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۲- دو دانش آموز معادله برداری زیر را حل کرده اند. مراحل راه حل آنها را با هم مقایسه کنید.

حمید بردار  $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$  را بر حسب بردارهای واحد مختصات نوشت و سپس شروع به انجام عمل کرد.

راه حل حمید

$$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j}$$

$$2\vec{x} = -5\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{i} - \vec{j}$$

$$2\vec{x} = -8\vec{i}$$

$$\vec{x} = -4\vec{i}$$

راه حل سعید

$$3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

سعید بردار  $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$  را بر حسب مختصات نوشت و سپس حل را ادامه داده است.

۳- معادله های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

$$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{x} = -6\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\Rightarrow 3\vec{x} = -8\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = -\frac{8}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

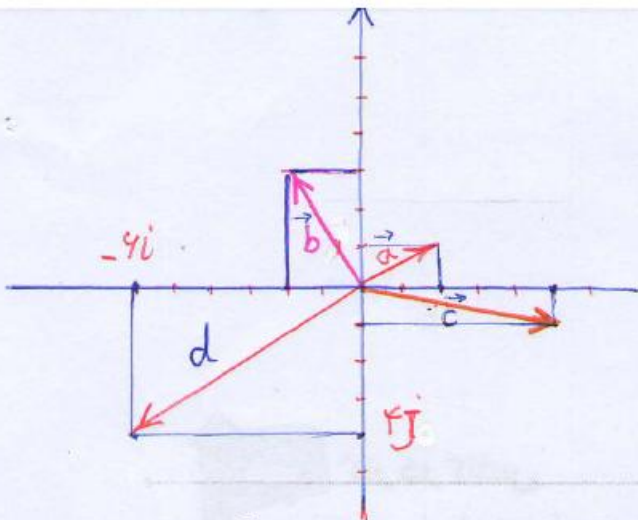
$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -2\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \frac{\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}}{-2}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$





### کار در کلاس

اگر  $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$  و  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$  باشد، مختصات بردارهای  $x$  و  $y$  را به دست آورید.

$$\vec{x} = 5(\vec{a}) + 3(\vec{b}) \Rightarrow \vec{x} = 5(3\vec{i} - 2\vec{j}) + 3(2\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow \vec{x} = 15\vec{i} - 10\vec{j} + 6\vec{i} + 3\vec{j} = 21\vec{i} - 7\vec{j} = \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = -3\vec{a} + 4\vec{b} \Rightarrow \vec{y} = -3(3\vec{i} - 2\vec{j}) + 4(2\vec{i} + \vec{j}) = -9\vec{i} + 6\vec{j} + 8\vec{i} + 4\vec{j} = -\vec{i} + 10\vec{j} = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

۱- طرف دیگر تساوی ها را بنویسید.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = -5\vec{i}$$

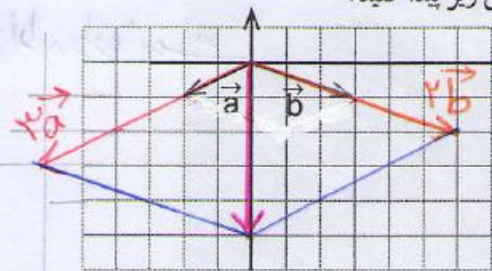
$$\vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\vec{j}$$

۲- دو محور عمود برهم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. آنگاه بردارهای زیر را روی آن دستگاه مختصات رسم کنید و هر بردار را برحسب بردارهای واحد  $i$  و  $j$  بنویسید.

بالا ↑

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -2\vec{i} + 3\vec{j} \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 5\vec{i} - \vec{j} \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} = -6\vec{i} - 4\vec{j}$$

۳- با توجه به شکل زیر، مختصات بردار  $c$  را با دو روش زیر پیدا کنید.



الف) رسم شکل و نوشتن مختصات  $\vec{c}$  از روی شکل

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

ب) پیدا کردن مختصات  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و قرار دادن آنها در

روش هندسی

روش چپری

$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

در روش هندسی می توان ویژگی های هر روش را بیان کنید.

کدام روش برای رایانه ای شدن مناسب تر است؟ چرا؟ روش چپری، چون محاسباتی هست

و رایانه کارهای محاسباتی را سریع تر انجام می دهد

با رسم شکل و بدون انجام محاسبات حاصل

جمع دو بردار را بدست آوردن اگر صفحه شطرنجی نباشد و یا طول و عرض بردارها بزرگ یا عددی غیر صحیح و یا گشت باشد تقریباً روش اول ناکارآمد است. روش چپری بسیار سریع تر و کارآمدی باشد



مختصات ربات پس حرکت  $n$  ام  
 $\Rightarrow$  مختصات =  $\begin{bmatrix} 1+2+3+\dots+\frac{n}{2} \\ 1+2+3+\dots+\frac{n}{2} \end{bmatrix}$  اگر  $n$  زوج باشد

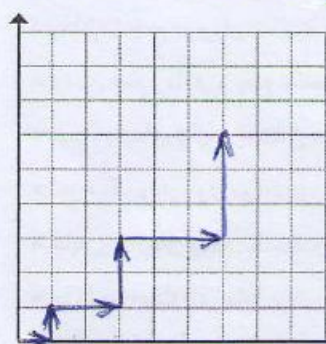
$\Rightarrow$  مختصات =  $\begin{bmatrix} 1+2+3+\dots+\frac{n+1}{2} \\ 1+2+3+\dots+\frac{n-1}{2} \end{bmatrix}$  اگر  $n$  فرد باشد

۴- با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تقریبی آن را مانند نمونه رسم کنید.

طول	+	-	+	-
عرض	+	+	-	-
شکل تقریبی				



۵- اگر  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  و  $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  باشد، بردار  $x$  را از معادله زیر پیدا کنید.  
 $2\vec{x} - \vec{j} = 2\vec{a} - \vec{b} \Rightarrow 2\vec{x} - \vec{j} = 4\vec{i} - 6\vec{j} - (-\vec{i} + 2\vec{j}) \Rightarrow 2\vec{x} = 5\vec{i} - 7\vec{j} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -3.5 \end{bmatrix}$



۶- یک ربات برنامه ریزی شده به صورت زیر از مبدأ

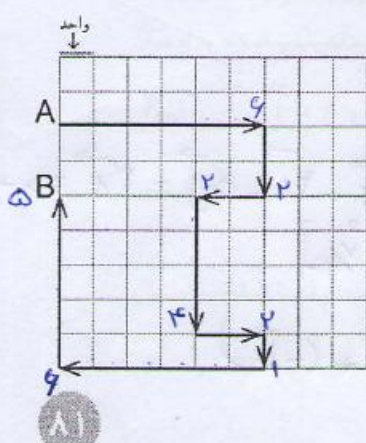
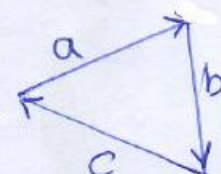
مختصات حرکت می کند.

با مشاهده شش حرکت این ربات، الگوی حرکت آن را کشف کنید و توضیح دهید. ربات پس از حرکت دهم، به

کدام نقطه می رسد؟	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰
مختصات	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21 \\ 21 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 28 \\ 28 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 36 \\ 36 \end{bmatrix}$

۷- حمیده با خود فکر می کرد که اگر چند بردار با هم جمع شوند، بردار حاصل جمع از همه

آنها بزرگ تر است. آیا او درست فکر کرده است؟ با کشیدن شکل توضیح دهید. خیر  
 همن است حاصل چند بردار برابر بردار صفر شود  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$



۸- در صفحه شطرنجی زیر، یک خودرو با نقطه A

مشخص شده است. این خودرو مسیری را طی کرده است تا به نقطه B برسد؛ در کل به اندازه چند واحد حرکت کرده

است؟  $4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 1 + 4 + 5 = 28$

خودرو از نقطه A به B در راستای عمودی چند

واحد جابه جا شده است؟ دو واحد



## مرور فصل ۵

### مفاهیم و عبارات

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود آنها را توصیف کنید و برای هر یک مثالی بزنید.

- جمع (برآیند) بردارها
- تجزیه بردار
- ضرب عدد در بردار
- بردارهای واحد مختصات

در این فصل، روش‌های اصلی زیر معرفی شده‌اند. هر کدام را با یک مثال توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه‌ای از درس را بنویسید.

- پیدا کردن جمع دو بردار.
- پیدا کردن برآیند دو بردار که ابتدای آنها یک نقطه باشد.
- نوشتن جمع برداری و جمع مختصاتی
- ضرب یک عدد در بردار
- رسم بردارهای ترکیبی که شامل حاصل جمع مضرب‌های دو بردارند.
- پیدا کردن مختصات بردارهای ترکیبی
- تجزیه یک بردار روی دو امتداد.
- نوشتن مختصات بردار با بردارهای واحد مختصات.
- نمایش بردارهای واحد مختصات به صورت مختصاتی.
- حل کردن معادله‌های شامل بردار.

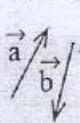
### کاربرد

موضوعات این فصل در درس‌های علوم (فیزیک - مکانیک) شما کاربرد زیادی دارد. ضمن آنکه در شاخه‌ای از ریاضیات به نام «جبر خطی و فضای برداری» نیز مطرح می‌شود و به کمک آن می‌توانید مسائل مختلف ریاضی و فیزیک را حل کنید.

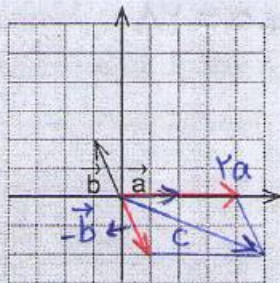
### تمرین‌های ترکیبی

اگر بتوانید تمرین‌های زیر را انجام دهید، می‌توانید مطمئن باشید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

۱- با توجه به بردارهای  $a$  و  $b$  و  $c$ ، بردار  $d$  را رسم کنید.  $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$



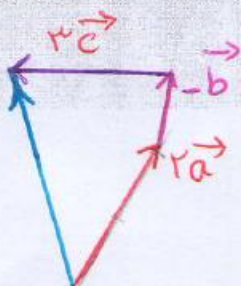
۲- اگر  $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$  و  $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  باشد، مختصات بردار  $x$  را پیدا کنید.



$$2\vec{a} - \vec{b} = 3\vec{x} \Rightarrow 2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{i} - 5\vec{j} = 3\vec{x} \Rightarrow -7\vec{j} = 3\vec{x} \\ \vec{x} = -\frac{7}{3}\vec{j} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

۳- با توجه به شکل، مختصات بردار  $c$  را پیدا کنید.

$$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{a} + (-\vec{b})$$



حل سوال یک