



عبارت‌های جبری

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

	a	b	c
a	a^2	ab	ac
b	ab	b^2	bc
c	ac	bc	c^2

استفاده از شکل‌های هندسی برای اثبات تساوی‌های جبری سابقه‌ای دیرینه دارد. ریاضی‌دانان دوره اسلامی - ایرانی از پیشگامان این کار بوده‌اند.

فعالیت

هر عبارت را، که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان‌های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، یک جمله‌ای می‌نامیم.
عبارت‌های زیر همگی یک جمله‌ای هستند.

$$7, x, 5x^{10}, -\sqrt{3}a^3x^2z, \frac{1}{5}xy, \pi x^2, 4z, -\frac{2}{7}$$

و عبارت‌های زیر یک جمله‌ای نیستند.

$$\frac{1}{x}, 3^x, 2\sqrt{x}, |x|, 2x^2+2x, \sqrt[3]{y}, 1+x$$

هرگاه یک جمله‌ای‌ها دارای عبارت‌های حرفی یکسان باشند، به آنها یک جمله‌ای‌های متشابه گفته می‌شود؛ به عنوان مثال یک جمله‌ای‌های $4x^2y$ و $\frac{7}{2}x^2y$ و $-3x^2y$ متشابه‌اند اما یک جمله‌ای‌های $3x^2$ و $3x$ متشابه نیستند.

۱- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید:

$$1) 2(-4x \times 7x^2) = 2(-28x^3) = -56x^3$$

$$2) \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$$

$$3) (-3x^3)^2 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^3 = 9x^6 \times \frac{1}{27}x^6 = \frac{1}{3}x^{12}$$

$$4) \left(\frac{1}{2}a^2b\right)(ab)\left(\frac{-2}{5}a^2c^5\right) = -\frac{1}{5}a^5b^2c^5$$

$$5) 2(5xy^2)^2(-2x^5y^2) = (2 \times 25 \times x^2 \times y^4)(-2x^5y^2) = -100x^7y^6$$

$$6) (2x^2y)(3x^2y^2) + xy^2(-5x^2y) = 6x^4y^3 - 5x^3y^3 = x^3y^3$$

در یک جمله‌ای $5a^2x^2y$ ، توان متغیر a برابر با ۲ است؛ بنابراین درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر a ، برابر با ۲ است؛ به همین ترتیب درجه نسبت به x ، ۲ و درجه نسبت به y ، ۱ است. درجه نسبت به دو متغیر x و y را برابر با $2+2=4$ تعریف می‌کنیم.

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

یک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y
$\sqrt{3}a^2x^2y^4$	a, x, y	۲	۴	$۲+۴=۶$
$5x^2y^2z^2$	x, y, z	۲	۲	$۲+۲=۴$
$-12x^2u$	x, u	۲	۰	$۲+۰=۲$
$\frac{2}{5}$	—	۰	۰	۰

یک جمله‌ای‌های $3x^2y^2$ و $-5x^2y^2$ را که متشابه نیستند، یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه می‌گوییم. چنانچه تعدادی یک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است. چند جمله‌ای می‌تواند یک جمله‌ای یا جمع جبری چند یک جمله‌ای غیرمتشابه باشد؛ مانند:

$$2x^2 - 4x + 1, \quad x^2 - 2x, \quad \frac{2}{3}ax^2y - \frac{3}{4}axy^2 - axy, \quad 3x^2$$

در هر چند جمله‌ای، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می‌کنیم؛ برای مثال در چند جمله‌ای $-2xy^2 + x^2y - 1$ ، درجه نسبت به x برابر با ۲ و درجه نسبت به y برابر با ۲ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ‌ترین درجه یک جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می‌کنیم. در این مثال درجه نسبت به x و y برابر با ۴ است. معمولاً در چند جمله‌ای‌ها، جملات را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می‌کنند.

۳- چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید:

الف) $3x^2 + 5 - 2x + 2x^2 = 2x^2 + 3x^2 - 2x + 5$

ب) $-3bxy^2 + ax^2y - 4bx^2y^2$

ج) $\frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^2 + 3x^2y - 4 = 3x^2y + \frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^2 - 4$

$= -4bx^2y^2 + ax^2y - 3bxy^2$

کاردرکلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $-5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 1ax)] =$

$$-5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - 3a^2 + 1ax] = -5a^2 - 3ax + x^2 - 4a^2 - 6ax$$

$$+ 3a^2 - 1ax = x^2 - 14ax - 4a^2$$

$$5x^5 + 4x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x$$

ب) $(4x+5x^4)(x^2-x+1) = 4x^3 - 4x^2 + 4x + 5x^6 - 5x^5 + 5x^4 =$

ج) $(x+x^2)(x^2+x^3+1) = x^4 + x^5 + x^6 + x^3 + x^2 + x =$

د) $(x^2-2x+1)(x^2+x^3-2) = x^4 - 2x^3 - x^3 - x^2 + 4x - 2 =$

فعالیت

۱- به ازای مقادیر داده شده برای x ، جدول زیر را کامل کنید :

x	x^2	$6x$	x^2+6x+9	$(x+3)^2$
-2	4	-12	$4-12+9=1$	$(-2+3)^2=1$
0	0	0	9	9
5	25	30	$25+30+9$	64
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$4 \times \frac{3}{2} = 6$	$\frac{9}{4} + 6 + 9 = \frac{81}{4}$	$(\frac{3}{2} + 3)^2 = \frac{81}{4}$

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟ برابرند

حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟ دو ستون آخر با هم برابرند.

حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به دست آورید و آن را با عبارت جبری x^2+6x+9 مقایسه کنید.

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشد که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشد، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری $(x+3)^2 = x^2+6x+9$ یک اتحاد است.

برابری $3x-3 = x+1$ را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای $x=2$ ، به دست آورید.

$$3 \times 2 - 3 = 2 + 1$$

آیا این برابری یک اتحاد است؟ برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای x بررسی کنید. نتیجه

همان طور که می‌دانید به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$

$$\text{ب) } (5x+2)^2 = (5x+2)(5x+2) = 25x^2 + 10x + 10x + 4 = 25x^2 + 20x + 4$$

$$\text{ج) } (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

۳- با دقت در برابری $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$ ، که در فعالیت ۲ به دست آمده است به

سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

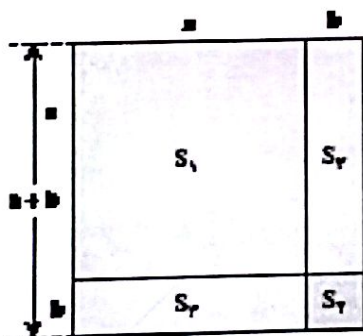
- جمله اول سمت راست برابری یعنی $25x^2$ چه رابطه‌ای با $5x$ دارد؟ مربع $5x$ می‌باشد.
- جمله دوم سمت راست برابری یعنی $20x$ چه رابطه‌ای با $5x$ و 2 دارد؟ در برابر حاصل ضرب $5x$ و 2 است.
- جمله سوم سمت راست برابری یعنی 4 چه رابطه‌ای با 2 دارد؟ مربع 2 .

عبارت جبری $5x+2$ دو جمله‌ای و $(5x+2)^2$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم و برای سرعت بخشیدن به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$(5x+2)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2$$

\swarrow جمله اول \downarrow جمله دوم \swarrow مربع جمله اول \swarrow دو برابر حاصل ضرب دو جمله

برای هر دو عدد مثبت a و b ، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ مقابل را نشان دهید.



$$\begin{aligned} \text{مساحت کل شکل} &= (a+b)^2 = S_1 + 2S_2 + S_4 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2) = 25x^2 - 10x - 10x + 4 = 25x^2 - 20x + 4$

ب) $(3x-5x)^2 = (3x-5x)(3x-5x) = (-2x)(-2x) = 4x^2$

ج) $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ارتباط بین جملات به دست آمده در طرف راست تساوی‌های بالا و جملات عبارت داده شده در سمت چپ آنها را بیان کنید.

اتحاد مربع دو جمله‌ای :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

کار در کلاس

۱- مربع دو جمله‌ای‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف) $(2x+1)^2 = 4x^2 + 2x + 1$

ب) $(4a+3b)^2 = 16a^2 + 24ab + 9b^2$

ج) $(x^2 - \frac{1}{2})^2 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4}$

د) $(2xy - \frac{1}{2}x^2)^2 = 4x^2y^2 - 2x^3y + \frac{1}{4}x^4$

هـ) $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 = 29 + 6\sqrt{6}$

و) $(5 - 2\sqrt{2})^2 = 25 - 20\sqrt{2} + 8 = 33 - 20\sqrt{2}$

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

الف) $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

مربع جمله دوم ← مربع جمله اول
 حاصل ضرب جمله اول ← مربع جمله دوم
 حاصل ضرب جمله اول ← مربع جمله دوم
 جمله‌ها

$2a =$ جمله اول $\Rightarrow (2a)^2 = 4a^2 =$ مربع جمله اول

$12ab^2 = 2(2a)(3b^2) =$ دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها

$(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^2$

در نتیجه داریم :

الف) $(1+b)^2 = 1 + 2b + b^2$

ب) $(xy - \frac{1}{2})^2 = x^2y^2 - xy + \frac{1}{4}$

ج) $(x^2 - \frac{1}{x})^2 = x^4 - 2 + \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$

د) $(2x - y)^2 = 4x^2 - 2xy + y^2$

فعالیت

در سال گذشته خاصیت بخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع را در چند جمله‌ای‌ها مطالعه کرده‌اید.

حاصل ضرب
 $a(b+c) = ab+ac$

اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت حاصل ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای $ab+ac$ را به حاصل ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده‌ایم:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ ab+ac=a(b+c) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{ب.م.م. (م.م.م.ب) بزرگ‌ترین مقسوم علیه (عامل) مشترک} \end{array}$$

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:

الف) $8x^2+12x=4x \cdot 2x+4x \cdot 3$
 $=4x(2x+3)$ (ب.م.م.ب) = $4x$

(با توجه به خاصیت پخش‌ی)

$4a^3x^2-4a^3x^3=4a^3(x^2-x^3)$

ج) $7x^3-14x^2+21x=7x^2 \cdot x - 7x^2 \cdot 2 + 7x^2 \cdot 3 = 7x^2(x-2+3)$

د) $5x^2y-10xy^2+15x^2y=5xy(x-2y+3x)$

$5xy \cdot x - 5xy \cdot 2y + 5xy \cdot 3x = 5xy(x-2y+3x)$

کار در کلاس

اگر سه جمله‌ای $a^2+2ab+b^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $(a+b)^2$ بنویسیم در واقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده‌ایم؛ زیرا:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(a+b)(a+b) \end{array}$$

با توجه به نمونه زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

الف) $x^2+6x+9=(x+3)^2=(x+3)(x+3)$
 مربع کامل $2(x)$ (3) مربع کامل

ب) $x^2-4x+4=(x-2)^2=(x-2)(x-2)$

ج) $n^2-10n^2+25=(n^2-5)^2=(n^2-5)(n^2-5)$

د) $14x^2+24axy+14ay^2=2a(4x^2+12xy+9y^2)=2a(2x+3y)^2=2a(2x+3y)(2x+3y)$
 (ب.م.م.ب) = $2a$

سوال ۱

① $2am^2 \times (-1m^3) - \frac{1}{F} m^2 \times (-1m^3) = -200m^5 + 2m^5 = -198m^5$

② $\underline{V} \underline{a^3} - \underline{K} \underline{b^3} + \underline{a} \underline{c^3} - \underline{a^3} + \underline{9b^3} + \underline{11c^3} = 4a^3 + ab^3 + 14c^3$

③ $x^{2m} - 2x^m + 1$

④ $x - [y - x - y + 1] = x + x - 1 = 2x - 1$

$h^2 = 9m^2n^2 - m^2n^2 = 8m^2n^2$

$h = m^2n\sqrt{8}$
ارتفاع ذوزنقه

سوال ۲

① $\underline{e} = 3m^2n + 2m^2n + am^2n + 3m^2n + 3m^2n + 2m^2n = 14m^2n$

حاصل = $3m^2n \times 2m^2n + \frac{m^2n\sqrt{8}(3m^2n + am^2n)}{2} = 6m^4n^2 + 4m^4n^2\sqrt{2}$

② ابتدا با استفاده از رابطه فیثاغورس ضلع مثلث را محاسبه می‌کنیم

$25x^2y^2 = 9x^2y^2 + (\text{ضلع})^2$

$(\text{ضلع مثلث})^2 = 25x^2y^2 - 9x^2y^2 = 16x^2y^2 \rightarrow \text{ضلع مثلث} = 4xy$

$\underline{e} = 3xy + 2xy + 4xy + 3xy + 3xy + 2xy = 17xy$

حاصل = $3xy \times 4xy + 3xy \times 2xy \times \frac{1}{F} = 12x^2y^2 + 4x^2y^2 = 16x^2y^2$

سوال ۳

۱) $25y^2 - 20xy + 9x^2$

۲) $9a^2 + 4d^2 + a^2$

۳) $24x^2 - \frac{17}{3}x + \frac{1}{9}$

۴) $(2, v + 3, c)^2 = 4^2 = 16$

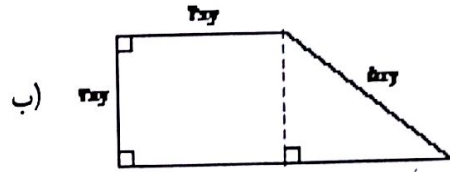
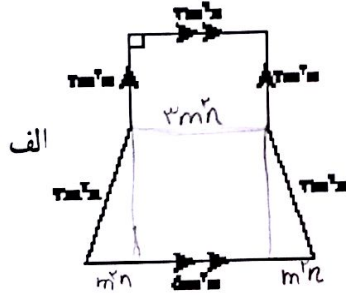
طرف دوم = $x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy$

③ طرف اول = $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$

۱- عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(-5m)^2(-2m)^3 - (\frac{1}{4}m)^2(-2m)^3$ ب) $7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2)$
 ج) $(x^m - 1)(x^m - 1)$ د) $x - [(y-x) - (y-1)]$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



۳- طرف دیگر عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) $(5y - 3x)^2 =$ ب) $(-3a^2 - a)^2 =$
 ج) $(8x - \frac{1}{3})^2 =$ د) $(\frac{2}{7})^2 + 2(\frac{2}{7})(\frac{3}{4}) + (\frac{3}{4})^2 =$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله ای، درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ ب) $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

۵- عبارت های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $2x^2 + 8x^2 + 8x = 2x(x^2 + 2x + 4)$ ب) $3a^2b - 12ab^2 + a^2b^2 = ab(3a^2 - 12b^2 + ab^2)$
 ج) $a(x+1) + b(x+1) = (x+1)(a+b)$ د) $a^2 - 2a^2 + a = a(a^2 - 2a + 1) = a(a-1)^2$
 هـ) $x^2y^2 - 4xy + 4 = (xy - 2)^2$ و) $25x^2 + 30x^2 + 9x^2 = x^2(25 + 30 + 9)$

۶- با تبدیل b به -b در اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$$\frac{(a+(-b))^2}{(a-b)^2} = a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

ارتفاع $= 9m^2n^2 - m^2n^2$
 $= 8m^2n^2$
 ارتفاع $= \sqrt{8} mn$

در صفحه قبل پاسخ داده شده

فعالیت

۱- حاصل عبارت زیر را به دو روش انجام داده‌ایم؛ آنها را کامل کنید.

روش اول در عمیق‌ترین بودیم در این امانت ۵

$$(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

روش دوم:

$$((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

به کمک نتیجه این فعالیت، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac$$

۲- با استفاده از ضرب عبارات‌های جبری، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج

این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید. مربع جمله اول منهای مربع جمله دوم اگر a و b مثبت و $b < a$ باشد به کمک شکل‌های زیر درستی اتحاد $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ را

توجه به نتیجه

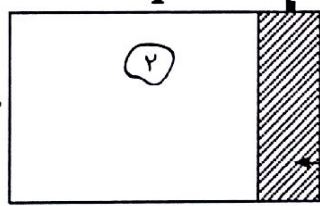
قسمت‌ها شش‌خوره از شکل ۱

۱- رابردا قسمتی است ذات آن

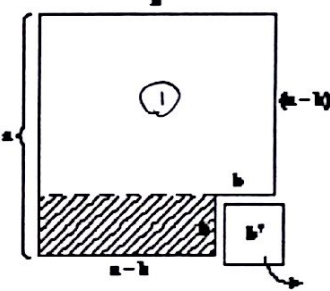
۲- اضافه می‌کنیم تا شکل حاصل شود

۳- مساحت شکل را بدست می‌آوریم.

۴- مساحت هر دو برابر است.



$$s_2 = (a-b)(a+b)$$



$$s_1 = a^2 - b^2$$

کار در کلاس

۱- تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

۱) $(1+a)(1-a) = 1 - a^2$

۳) $(t + \frac{1}{t})(t - \frac{1}{t}) = t^2 - \frac{1}{t^2}$

۲) $(2a+5)(2a-5) = 4a^2 - 25$

۴) $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید.

$$۱) (10-x)(x+10) = (10-x)(10+x) = 100 - x^2$$

$$۲) (-y-2z)(-2z+y) = (-2z-y)(-2z+y) = 4z^2 - y^2$$

$$۳) (-7y+t)(t+7y) = (t-7y)(t+7y) = t^2 - 49y^2$$

$$۴) (-4y-2z)(2z-4y) = (-4y-2z)(-4y+2z) = 16y^2 - 4z^2$$

$$۵) (x-2y+5)(x+2y-5) = [x-(2y-5)][x+(2y-5)] = x^2 - (2y-5)^2 = x^2 - (4y^2 - 20y + 25) =$$

$$x^2 - 4y^2 + 20y - 25$$

فعالیت

اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود.

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

با توجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

$$۱) x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$۲) 4y^2 - \frac{1}{4}z^2 = \left(y + \frac{1}{2}z\right)\left(y - \frac{1}{2}z\right)$$

$$۳) (2x+1)^2 - y^2 = [(2x+1) - y][(2x+1) + y]$$

$$۴) 1 - (3a+z)^2 = [1 - (3a+z)][1 + (3a+z)] \\ = (1-3a-z)(1+3a+z)$$

$$۵) (2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(2x+1) - (3x+4)][(2x+1) + (3x+4)] \\ = (-x-3)(5x+5)$$

$$۶) x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\ = (x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$$

فکتور کردن

کار در کلاس

۱- محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$$4x^2 - (7-3y)^2$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را به کمک این اتحاد به صورت زیر تجزیه می‌کند.

$$(2x-7+3y)(2x+7-3y)$$

$$A = 2x \quad , \quad B = 7 - 3y \Rightarrow (2x - (7 - 3y))(2x + (7 - 3y))$$

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟
 ۲- استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را به راحتی امکان پذیر کند.

به کمک اتحادها، تساوی های زیر را کامل کنید.

$$98 \times 102 = (100 - 2) \times (100 + 2) = 100^2 - 2^2 = 10000 - 4 = 9996$$

$$497 \times 503 = (500 - 3) \times (500 + 3) = 500^2 - 3^2 = 250000 - 9 = 249991$$

$$(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = 1000^2 + 2 \times 1000 + 1 = 1000000 + 2000 + 1 = 1002001$$

فعالیت

۱- به تساوی های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به دست آمده است. از ضرب دو عبارت بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

الف) $(x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$

حاصل ضرب غیر مشترکها 2×5 ←
 جمع غیر مشترکها $2x + 5x$ ←

ب) $(x+9)(x-4) = x^2 + 9x - 4x - 36 = x^2 + 5x - 36$

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + \underline{a \cdot b}$$

اتحاد به دست آمده را اتحاد جمله مشترک می نامند.

۲- با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن را به

حاصل ضرب دو عبارت تجزیه کنیم، اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

الف) $x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$

ب) $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

ج) $y^2 + y - 6 = (y+3)(y-2)$

د) $y^2 - y - 6 = (y+2)(y-3)$

ه) $y^2 + 5y + 6 = (y+2)(y+3)$

۳- تجزیه عبارت $x^2 + 10x - 24$ را چهار نفر از دانش آموزان به کمک اتحاد جمله مشترک به

چهار صورت زیر انجام داده اند. کدام یک درست و کدام یک نادرست است؛ چرا؟

جواب نفر اول نادرست حاصل جمع 10 منفی 24 است.
 جواب نفر دوم نادرست حاصل ضرب 24 منفی 10 است.

جواب نفر سوم درست $(x+12)(x-2)$

جواب نفر چهارم نادرست $(x-12)(x+2)$ حاصل جمع 10 منفی 24 است.

تمرین

۱- حاصل عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف $(\frac{1}{4} - x)(\frac{1}{4} + x) = \frac{1}{16} - x^2$
 ب $(5x+4)(5x+3) = 25x^2 + 35x + 12$
 ج $(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3}) = z^2 - 3$

د $(3x+y-z)(3x+y+z) = (3x+y)^2 - z^2 = 9x^2 + 6xy + y^2 - z^2$
 ه $(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$

و $(x-2)(x+2)(x^2+3) = (x^2-4)(x^2+3) = x^4 - x^2 - 12$

۲- در قسمت های نقطه چین، با استفاده از اتحادها، عبارت های مناسب بگذارید.

الف $(xy-z)(xy+z) = x^2y^2 - z^2$

ج $(x+a)(x-b) = x^2 - bx + ax - ab$

ب $(\frac{1}{4}y + \sqrt{5})(\frac{1}{4}y - \sqrt{5}) = \frac{1}{16}y^2 - 5$

د $(x^2+1)(x^2-5) = x^4 + 2x^2 - 5$

۳- عبارات زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

الف $a^2 - 8a + 15 = (a-3)(a-5)$

و $x^2 - 13x + 36 = (x-4)(x-9)$

ب $x^2 + x + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{4})^2$

ز $x^2 - 12x + 36 = (x-6)(x-6) = (x-6)^2$

ج $x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$

ح $(x+y)^2 - 9 = (x+y-3)(x+y+3)$

د $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

ط $bx^2 - 5bx - 50b = b(x^2 - 5x - 50) = b(x-10)(x+5)$

ه $4ax^2 - a$

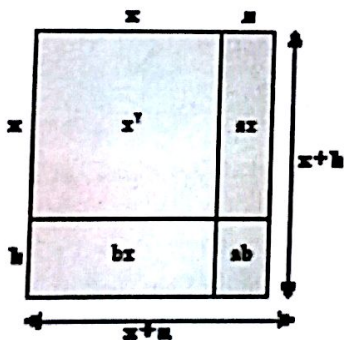
ی $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4) = (x+1)(x-1)(x-2)(x+2)$

۴- در اتحاد جمله مشترک اگر $a=b$ باشد، چه اتحادی به دست می آید؟ اگر a و b قرینه باشند،

کدام اتحاد به دست می آید؟ در یاد بگیرید.

۵- به کمک مساحت ها در شکل روبه رو، اتحاد

جمله مشترک را به دست آورید.



۱۹

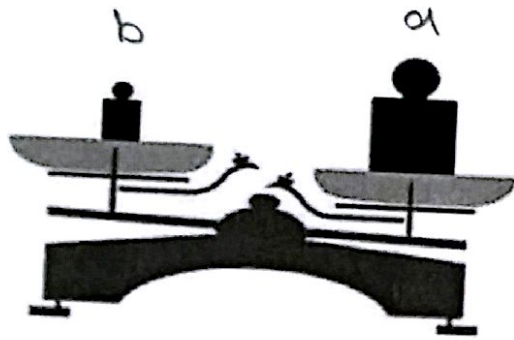
$$S = (x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$$

$$= x^2 + x(a+b) + ab$$

$(n+a)(n+b) \xrightarrow{a=b} (n+a)(n+a) = (n+a)^2$

$(n+a)(n+b) \xrightarrow{a=-b} (n+a)(n-a) = n^2 - a^2$

فعالیت



روی کفه‌های ترازو دو وزنه a و b کیلوگرمی قرار دارد. با توجه به شکل، وزنه a از وزنه b سنگین‌تر است. - با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای $>$ ، $<$ ، $=$ را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه‌های a و b را با هم مقایسه کنید.



$a \neq b$ ، $a \geq b$ ، $b \leq a$
در شکل بالا چنانچه وزنه‌ای p کیلوگرمی باشد به طوری که $a=b+p$ ، در این صورت برای اینکه کفه‌های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟ کفه‌ای که وزنه b در آن قرار دارد.

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد به طوری که $a > b$ ، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p هست به طوری که $a=b+p$.

با توجه به برابری‌های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف) $x=y+4 \Rightarrow x > y$

ج) $a-2=b+3 \Rightarrow a > b$

ب) $m+1=n+3 \Rightarrow m > n$

د) $2m=3n \quad (m, n > 0) \Rightarrow m > n$

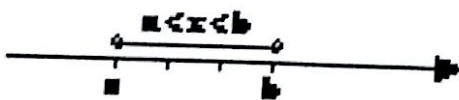
هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد، فقط یکی از حالت‌های « a بزرگ‌تر از b » یا « a کوچک‌تر از b » یا « a برابر با b » را خواهیم داشت. چنانچه عدد حقیقی a منفی نباشد در این صورت $a > 0$ یا $a = 0$ ، در این حالت می‌نویسیم $a \geq 0$ و می‌خوانیم a بزرگ‌تر یا برابر با 0 است؛ مانند $2 \geq 0$ یا $0 \geq 0$ یا $\frac{1}{3} \geq 0$. چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشد به طوری که a از b کمتر نباشد در این صورت $a > b$ یا $a = b$.

در این حالت می‌نویسیم $a \geq b$.

برای سه عدد حقیقی a و b و x به طوری که عدد دلخواه x بین اعداد a و b باشد ($a < b$)،

می‌نویسیم $a < x < b$.

مانند: $1 < 2 < 5$

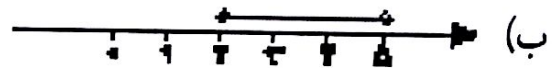


۱- مناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.

$$-3 \leq x \leq 5$$



$$2 \leq x < 5$$



۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $a+b > 0$ آنگاه، a و b هر دو مثبت هستند. \times

ب) اگر $ab > 0$ آنگاه، a و b هم علامت هستند. \checkmark

ج) اگر $\frac{ab}{c} < 0$ آنگاه، a و b و c منفی هستند. \times

د) اگر $a^2b < 0$ آنگاه، b منفی است. \checkmark

۳- عبارات‌های کلامی را به صورت جبری بنویسید.

• ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ تر است. $3x - 1 > 7$

• ۸ از قرینه دو برابر عددی به علاوه ۳ بزرگ تر است. $8 > -(2x + 3)$

فعالیت

۱- به دو طرف نابرابری زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$-3 < 1 \xrightarrow{+3} -3 + 3 < 1 + 3 \rightarrow 0 < 4$$

$$-3 < 1 \xrightarrow{-7} -3 - 7 < 1 - 7 \rightarrow -10 < -6$$

$$-3 < -2 \xrightarrow{-100} -3 - 100 < -2 - 100 \rightarrow -103 < -102$$

خاصیت ۱: اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری

همچنان برقرار است؛ یعنی اگر $a > b$ آنگاه $a + c > b + c$.

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times 3} -21 > -27$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-3)} 21 < 27$$

علامت صحیح است $-7 > -9$

$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-1)}$
 $-7 \times (-1) < -9 \times (-1)$

$-7 < -9 \xrightarrow{\times (-1)}$
 $(-7)(-1) < (-9)(-1)$

خاصیت ۲: اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند c ضرب کنیم، نابرابری همچنان برقرار خواهد بود؛ یعنی اگر $a > b$ و $c > 0$ آنگاه $ac > bc$.

خاصیت ۳: اگر دو طرف نابرابری $a > b$ را در عدد منفی c ($c < 0$) ضرب کنیم، در این صورت داریم $ac < bc$.

۳- نابرابری $2x+1 > 7$ را در نظر بگیرید؛ این نابرابری شامل متغیر x است و درجه نسبت به x با ۱ برابر است؛ در این صورت به این نابرابری، نامعادله یک مجهولی درجه اول می‌گوییم. در جدول زیر اندازه‌های داده شده را به جای x قرار دهید؛ آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

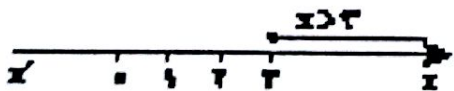
نامعادله	$x=-1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=7$
$2x+1 > 7$	$2(-1)+1 > 7$ ↓ $-1 > 7$ نادرست	$2 \times 2 + 1 > 7$ $5 > 7$ نادرست	$2 \times 3 + 1 > 7$ $7 > 7$ نادرست	$2 \times 4 + 1 > 7$ $9 > 7$ درست	$2 \times 7 + 1 > 7$ $15 > 7$ درست

مجموعه مقادیری که به ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، مجموعه جواب نامعادله است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ جزو مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

۲- دو طرف نامعادله را با -1 جمع کنید.
 $2x+1-1 > 7-1 \rightarrow 2x > 6$

۳- دو طرف نامعادله حاصل را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید. $\frac{2}{2}x > \frac{6}{2} \rightarrow x > 3$

۴- با توجه به نابرابری $x > 3$ متوجه می‌شویم که مجموعه همه عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با D نمایش دهیم، خواهیم داشت $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$ می‌توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور عددهای حقیقی به صورت مقابل نمایش داد.



$2x+1 > 7 \xrightarrow{+(-1)} 2x > 6 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} x > 3$

الف $\frac{ac}{b} < 0$

حالاته $\rightarrow a > 0, c < 0 \rightarrow \frac{ac}{b} < 0$

ب $\rightarrow a < 0, c > 0 \rightarrow \frac{ac}{b} < 0$

ب $\frac{a}{bc} > 0$

حالاته $\rightarrow a > 0, b < 0, c < 0$

ب $\rightarrow a < 0, b < 0, c > 0$

ب $\rightarrow a < 0, b > 0, c < 0$

ب $\rightarrow a > 0, b > 0, c > 0$

ج $ab > 0$

حالاته $\rightarrow a > 0, b > 0$

ب $\rightarrow a < 0, b < 0$

د $\frac{a^2}{bc} > 0$

حالاته $\rightarrow b > 0, c > 0$

ب $\rightarrow b < 0, c < 0$

الف $2x - 9 + 5 < 5 - x \rightarrow 2x - 4 < 5 - x \rightarrow 2x < 9 \rightarrow x < 4.5$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4.5\}$

ب $3 - 2x \geq 15 - 6x \rightarrow -2x + 6x \geq 15 - 3 \rightarrow 4x \geq 12 \rightarrow x \geq \frac{12}{4}$

$\Rightarrow x \geq \frac{3}{1}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{1}\}$

ج $\frac{y-3-4}{4} > \frac{y}{4} \xrightarrow{\times 4} y-7 > y \rightarrow y-2y > 7 \rightarrow -y > 7 \rightarrow y < -7$

$D = \{y \in \mathbb{R} \mid y < -7\}$

د $\frac{-1-q}{4} < \frac{1+q}{4} \xrightarrow{\times 4} -1-q < 1+q \rightarrow -2q < 2 \rightarrow q > -1$

$-7q \leq 21 \rightarrow q \geq \frac{21}{-7} \rightarrow q \geq -3$

$D = \{q \in \mathbb{R} \mid q \geq -3\}$

$$\frac{2}{3}x + \frac{14}{3} - \frac{x}{3} \leq \frac{x}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{x}{9}$$

$$\frac{5x}{12} + \frac{14}{3} \leq \frac{-2x}{9} + \frac{x}{2} \xrightarrow{-\frac{14}{3} + \frac{2x}{9}} \frac{5x}{12} + \frac{14}{3} - \frac{14}{3} + \frac{2x}{9} \leq \frac{-2x}{9} + \frac{x}{2} - \frac{14}{3} + \frac{2x}{9}$$

$$\frac{9x}{12} \leq \frac{-19}{9} \xrightarrow{\times \frac{12}{9}} \frac{9x}{12} \times \frac{12}{9} \leq \frac{-19}{9} \times \frac{12}{9} \rightarrow x \leq \frac{-38}{9}$$

کار در کلاس

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{-38}{9}\}$$

مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $2x + 7 \geq 15 \xrightarrow{+(-7)} 2x + 7 - 7 \geq 15 - 7 \rightarrow 2x \geq 8 \wedge \frac{x}{2} \rightarrow x \geq 4$
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

ب) $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \xrightarrow{\times 6} 6 \times \frac{x}{3} - 6 \times \frac{1}{2} < 6 \times \frac{x-1}{6}$
 $\rightarrow 2x - 3 < x - 1 \xrightarrow{+(-x)} 2x - 3 + (-x) < x - 1 + (-x)$
 $\rightarrow x - 3 < -1 \xrightarrow{+3} x < 2 \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

$3x - 3 \geq 2x + 1 \xrightarrow{+3-2x} 3(x-1) \geq 2x+1$

$3x - 3 + 3 - 2x \geq 2x + 3 - 2x + 1$
 $x \geq 4$
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

د) $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} \leq \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6}$

تمرین

۱- در جاهای خالی نمادهای < یا > را جایگزین کنید.

الف) $a - b = 1$ در این صورت $a \square b$. ج) اگر $2(p-1) = 2q - 3$ در این صورت $p \square q$. *روشن حل*

ب) اگر $u - v = -2$ در این صورت $u \square v$. د) اگر $\frac{a-b}{2} = -3$ در این صورت $a \square b$.

۲- علامت عددهای حقیقی a, b, c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد:

در صفحه قبلی

الف) $\frac{ac}{b^2} < 0$ ب) $\frac{a}{bc} > 0$ ج) $ab > 0$ د) $\frac{a^2}{bc} > 0$

۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2(x-3) + 5 < 5 - x$ ج) $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$ *در صفحه قبلی*

ب) $3 - 2x \geq 5(3 - 2x)$ د) $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3}$

۴- اگر $a^2 > b^2$ آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت، $a > b$ ؟ نه حذر

۵- اگر $a, b > 0$ و $a^2 > b^2$ نشان دهید $a > b$ (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید). *در صفحه بعد*

۶- عبارتهای کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل ۳۰۰ تومان از دو برابر پولش بیشتر می‌شود.
 ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b ، حداکثر ۶ واحد است.

۹۳ $\frac{a}{2} + 4b \leq 6$

۷- دو نفر با وزن های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند که به منابع غذایی دسترسی ندارند. آنها همراه خود مواد غذایی برده اند که ۴۵۰۰ کیلوکالری دارد. اگر فرض کنیم هر انسان هر روز حداقل به اندازه سه برابر وزن خود کیلوکالری نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

$$۳ \times ۶۵ + ۳ \times ۸۵ = ۴۵۰ \quad \text{مقدار مورد نیاز هر روز}$$

$$۴۵۰x \leq ۴۵۰۰$$

$$x \leq ۱۰$$

a

$$\left\{ \begin{array}{l} a, b > 0 \\ a^2 > b^2 \end{array} \right. \longrightarrow a^2 - b^2 > 0 \longrightarrow (a-b)(a+b) > 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} a-b > 0 \rightarrow a > b \\ a+b > 0 \rightarrow a > -b \end{array} \right.$$

$\implies \left\{ \begin{array}{l} (a-b) > 0, a+b > 0 \\ (a-b) < 0, a+b < 0 \end{array} \right. \rightarrow$ مورد قبول نیست چون $a, b > 0$ هستند