جزوه گسسته

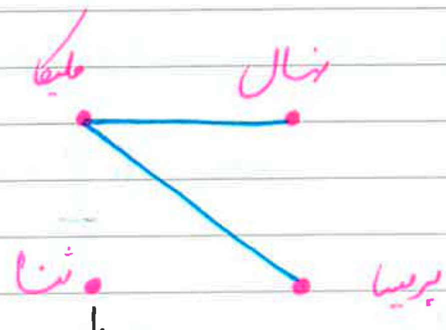
بحث گراف

«بسم ا... الرحمن الرحیم»

Subject: (1)

گراف: گراف نظریه‌ای است استوار بر دو تعریف رأس و یال که اگر رأسی نباشد اصلاً گرافی تعریف نمی‌شود ولی اگر رأس باشد و یال نباشد آن گراف را تهی می‌نامیم.
و هر زیرمجموعه‌ی دو عضوی از مجموعه‌ی رئوس (V) یک عضو از مجموعه‌ی یال‌ها (E) را می‌سازد.

گراف ساده: گرافی است که بین هر دو رأس متمایز آن حداکثر یک یال وجود داشته باشد. (یا یک یال یا هیچ یال)



رأس تنها یا ایزوله یا منفرد (هیچ دوستی ندارد)

مجموعه‌ی رئوس = V = { ثنا ، پریسا ، نهال ، ملیکا }

تذکر: تعداد اعضای مجموعه‌ی رئوس (مجموعه‌ی V) را تعداد رأس‌های گراف یا مرتبه‌ی گراف می‌نامند و با P نمایش می‌دهند.

Subject: (2)

$$n(V) = P \in N \Rightarrow P \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مرتبه‌ی گراف

* در گراف صفحه‌ی قبل، مرتبه‌ی گراف که همان P است برابر 4 است. ($P = 4$)

$E = \{ \{$برزیلیا ، ملبکا$\}$ و $\{$نهال ، ملبکا$\} \}$ = مجموعه‌ یال‌ها

تذکر: تعداد اعضای مجموعه‌ی یال‌ها (مجموعه‌ی E) را تعداد یال‌های گراف یا اندازه‌ی گراف می‌نامند و با q نمایش می‌دهند.

$$n(E) = q \in W \Rightarrow q \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

اندازه‌ی گراف

* در گراف صفحه‌ی قبل، اندازه‌ی گراف که همان q است برابر 2 است. ($q = 2$)

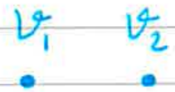
مرتبه‌ی گراف = P = تعداد رأس‌ها

اندازه‌ی گراف = q = تعداد یال‌ها

درجه‌ی یک رأس: به تعداد یال‌هایی که از یک رأس خارج می‌شود، درجه‌ی آن رأس می‌گویند.

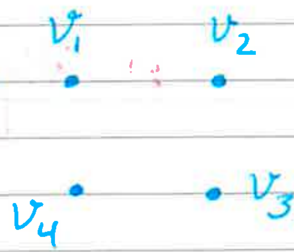
تهی مرتبه یک $\overline{K_1}$ =

تهی مرتبه دو $\overline{K_2}$ =



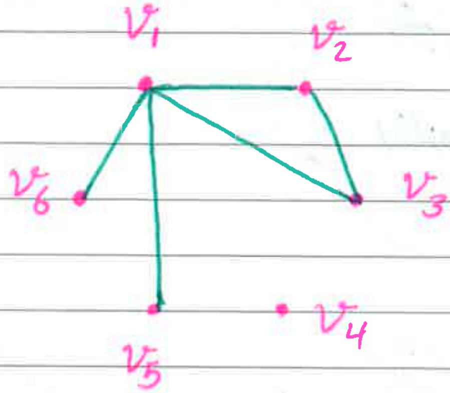
تهی مرتبه سه $\overline{K_3}$ =

تهی مرتبه چهار $\overline{K_4}$ =



Subject: (4)

* به گراف زیر توجه کنید:



$P = 6$

$q = 5$

$\deg(v_1) = 4$

$+$ $\deg(v_2) = 2$

$+$ $\deg(v_3) = 2$

$+$ $\deg(v_4) = 0$

$+$ $\deg(v_5) = 1$

$+$ $\deg(v_6) = 1$

$$\sum_{i=1}^{6} \deg(v_i) = 10 = 2 \times \underbrace{5}_{q}$$

→ با مقایسه $\sum \deg$ و تعداد یالها $\Rightarrow$ $\sum \deg = 2q$

$$\underbrace{\sum \deg}_{10} = \underbrace{2q}_{2\times 5}$$

* یک رابطه بسیار مهم در گراف:

$$\sum_{i=1}^{p} \deg = 2q$$

اثبات یک نکته‌ی بسیار مهم:

$$\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) = 2q$$

جمع درجه فردها + جمع درجه زوجها

زوج

همواره زوج است.

?

باید زوج باشد

باید تعداد آنها (یعنی تعداد درجه فردها) زوج باشد.

نتیجه و نکته‌ی بسیار مهم: "تعداد رئوس با درجه‌ی فرد در هر گراف ساده قطعاً عددی زوج است."

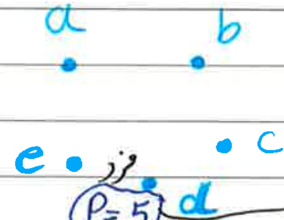
پس تعداد رئوس با درجه زوج وابسته به مرتبه است یعنی اگر مرتبه زوج باشد آنها نیز زوج و اگر مرتبه فرد باشد آنها نیز فرد هستند.

Subject: (6)

$P=4$

تعداد درجه زوج ها	تعداد درجه فرد ها ⇐ همواره زوج است
4	0
2	2
0	4

زوج



$P=5$

تعداد درجه زوج ها	تعداد درجه فرد ها ⇐ همواره زوج است
5	0
3	2
1	4

فرد

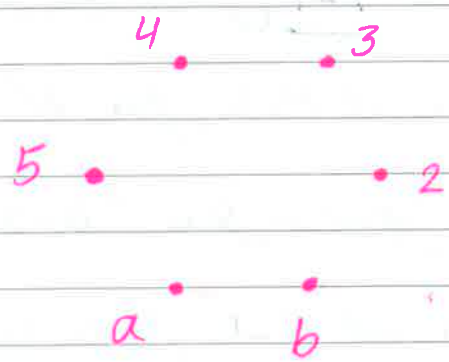
تست: در گرافی از مرتبه‌ی 8 تعداد رئوس با درجه‌ی فرد عددی .... و تعداد رئوس با درجه‌ی زوج عددی .... می‌باشد.

1) فرد - فرد 2) فرد - زوج 3) زوج - فرد 4) زوج - زوج ✓

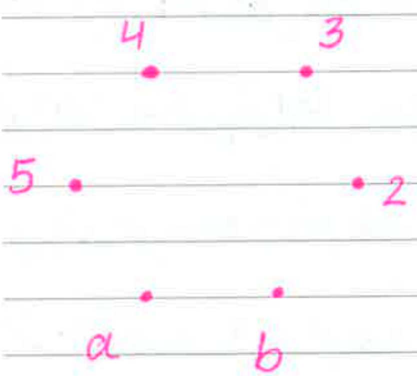
* تعداد رئوس درجه فرد که همواره زوج است (بدون هیچ شرطی و همیشه) اما تعداد رئوس با درجه‌ی زوج وابسته به مرتبه است چون مرتبه زوج بوده پس آنها نیز زوج هستند.

مثال: اگر اعداد زیر نشان دهنده درجات رئوس یک گراف ساده باشند در این صورت $min(a+b)$ چند است؟

$a, b, 5, 4, 3, 2$

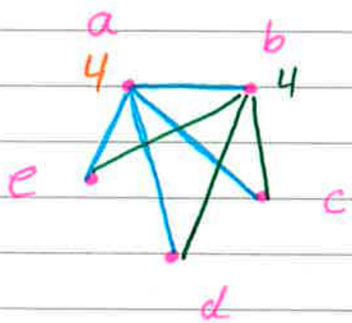


مثال: در مثال قبل $max(a+b)$ چند است؟



Subject: (8)

رأس فول درجه: در هر گراف به رأسی که به تمام رأس های دیگر یال داده است (با همه دوست است) رأس فول درجه می گوییم. که در یک گراف از مرتبهٔ P ، رأس فول درجه، درجه اش $P-1$ است.



در گراف مقابل $P=5$ است. و دو رأس a و b هر دو فول درجه هستند چون با همه دوست هستند و درجه شان هم "$5-1$" است.

$5 \downarrow P$

نکته مهم: اگر در گرافی K نفر (رأس) فول درجه باشند (با همه دوست باشند) آنگاه در آن گراف هر فردی غیر از فول درجه ها اگر درجه اش را نگوید فرض می کنیم که درجهٔ آن حداقل K می باشد. یعنی به عبارت دیگر min درجه در این گراف ...... می باشد.

تست: اگر دنباله ای زیر دنباله درجات رئوس یک گراف ساده باشد، آنگاه x کدام است؟

$8, 8, 8, 8, 7, 6, 6, 6, x$

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6

تذکر: هر وقت صحبت از دنباله درجات شد، اعداد را بصورت نزولی بنویسید.

تست: اگر اعداد زیر دنباله درجه‌ی رئوس یک گراف باشند K کدام است؟

1) 3 ✓

2) 2

3) 4

4) 11

فرد فرد فرد فرد فرد

5 , 5 , 5 , 4 , 4 , K , 2 , 2 , 1 , 1

باید فرد باشد

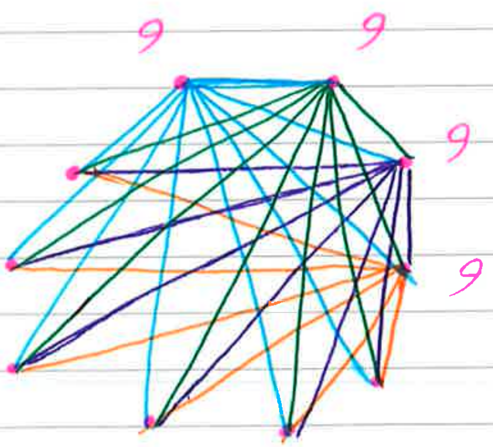
$P = 10 \Rightarrow$ * max درجه در این گراف 1 - 10 یعنی 9 می‌باشد

پس 11 نمیتواند باشد.

* چون تعداد رئوس با درجه‌ی فرد باید زوج باشد بنابراین K باید فرد باشد.

مثال: در گرافی از مرتبه‌ی 10 و اندازه‌ی 31 حداکثر چند رأس ماکزیمم درجه یافت می‌شود؟

1) 5 2) 6 3) 7 4) 4



مثال: در گرافی از مرتبه‌ی 8 و اندازه‌ی 15 حداکثر چند رأس فول درجه میتوان ساخت؟

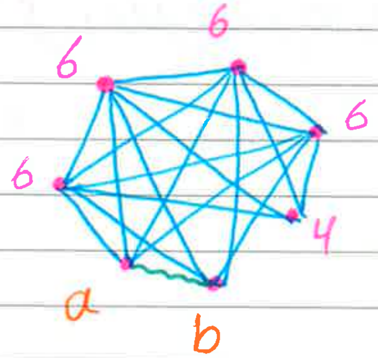
$P = 8 \Rightarrow$ درجه‌ی رأس فول درجه برابر 7 است

$q = 15$

$\underbrace{7+6}_{13} + \cancel{5 + \ldots} \Rightarrow$ حداکثر 2 رأس فول درجه داریم.

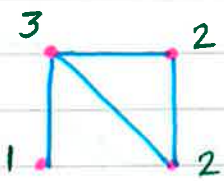
مثال: اگر دنباله‌ی زیر دنباله درجات رئوس یک گراف ساده باشد آنگاه حداکثر اندازه‌ی گراف را بیابید.

$6, 6, 6, 6, a, b, 4$

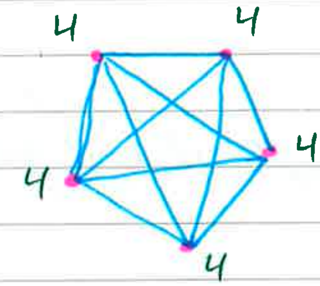


درجه min و درجه max (Δ , δ) :

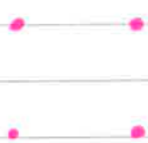
به کمترین درجه‌ای که در یک گراف می‌بینیم درجه min می‌گوییم و آن‌را با δ نمایش میدهیم و به بیشترین درجه‌ای که در یک گراف می‌بینیم درجه max می‌گوییم و آن‌را با Δ نمایش میدهیم.



$\Delta = 3 \ , \ \delta = 1$



$\Delta = 4 \ , \ \delta = 4$



$\Delta = 0 \ , \ \delta = 0$

در هر گراف :

فول درجه $\leftarrow \quad 0 \leqslant \min deg(v_i) \leqslant P-1 \quad \rightarrow$ ایزوله یا منزوی

$$0 \leqslant \max deg(v_i) \leqslant P-1$$

گراف کامل:

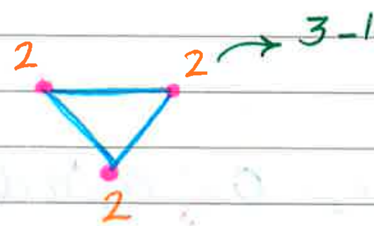
به گرافی گفته می‌شود که تمام رئوسش فول درجه باشند یعنی تمام یال‌های امکان پذیر وجود داشته باشند یا به عبارتی تمام رئوس باهم مجاور باشند (به هم یال داشته باشند). آنها را با نماد K_p نشان میدهند.

تذکر: گراف کامل هر مرتبه، بیشترین تعداد یال ممکن را دارد. (همه‌ی یال‌های امکان پذیر).

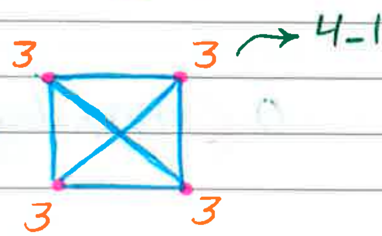
کامل مرتبه 1 : K_1 →

کامل مرتبه 2 : K_2 →

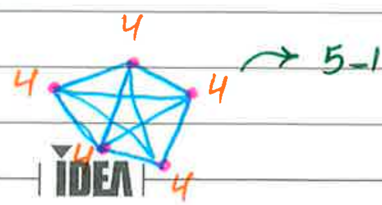
3 " " : K_3 →



4 " " : K_4 →



5 " " : K_5 →



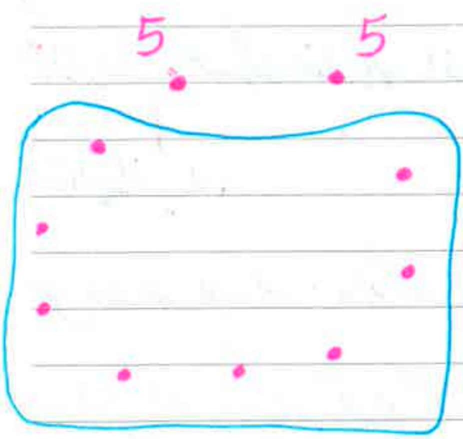
$$\Sigma deg = 2q \xrightarrow{\text{در گراف کامل}} P(P-1) = 2q$$

$$\rightarrow q = \frac{P(P-1)}{2} = \binom{P}{2}$$ → بسیار مهم

تعداد یالهای گراف کامل

کنکور 87: در گرافی از مرتبه 10 دو رأس از درجه 5 می باشند. حداکثر اندازه ی این گراف را بیابید.

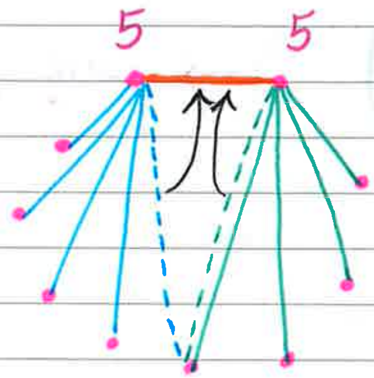
1) 35 2) 36 3) 37 4) 38



Subject: (14)

مثال: در مثال قبل، حداقل اندازه‌ی این گراف را بیابید.

1) 5   2) 9 ✓   3) 10   4) 14



* اگر یک یال بین این دو رأس بگذاریم، تعداد یال‌ها حداقل‌تر می‌شود.

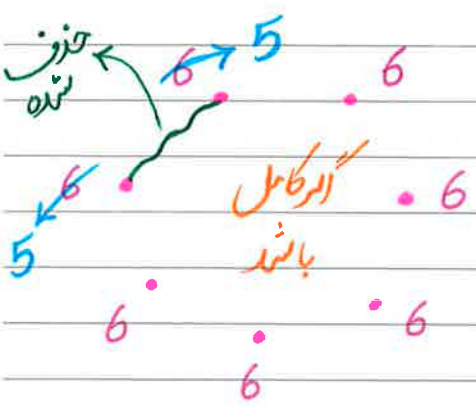
مثال: در گرافی از مرتبه‌ی 7 و اندازه‌ی 20 چند رأس با max درجه یافت می‌شود؟

1) 3   2) 4   3) 5 ✓   4) 6

تذکر مهم: هرگاه تعداد یال‌ها زیاد بود، به جای رسم گراف، آنرا با گراف کامل هم مرتبه‌اش مقایسه کنید.

$P=7$ و $q=20$

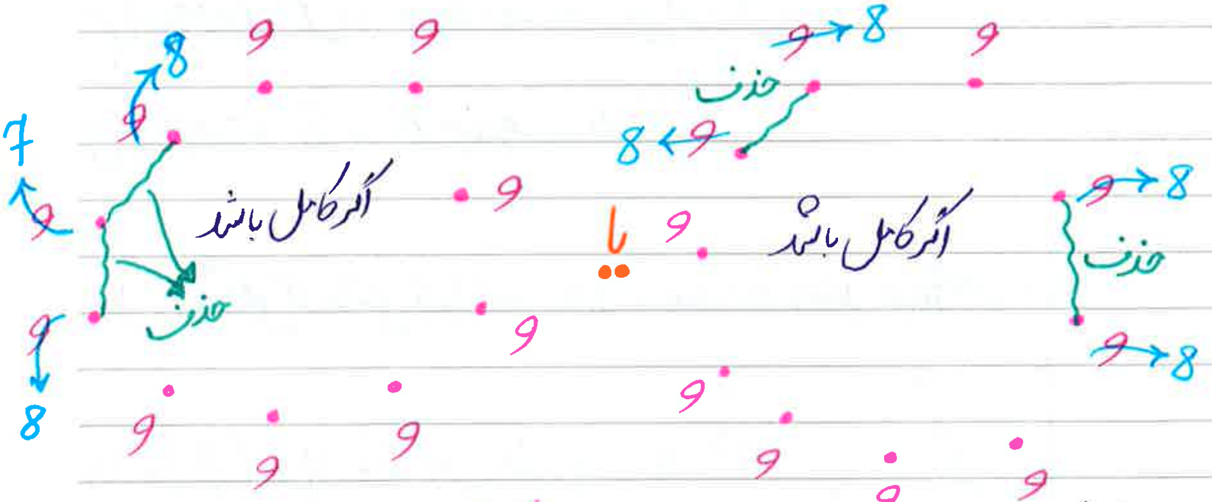
چون تعداد یال‌ها زیاد است، از گراف کامل هم مرتبه‌اش استفاده می‌کنیم. اگر این گراف کامل باشد، $\binom{7}{2}=21$ یال دارد و همه رئوس درجه 6 هستند. اما چون گراف سؤال 20 تا یال دارد ما یک یال را حذف می‌کنیم.



$P=7 \xrightarrow{\text{اگر کامل باشد}} q=\binom{7}{2}=21 \rightarrow$ باید یک یال حذف کنیم.

$\Rightarrow$ حداکثر 5 رأس با درجه max (درجه 6) داریم.

*سؤال مهم: گرافی از مرتبه‌ی 10 و اندازه‌ی 43 مفروض است. به سؤالات زیر پاسخ دهید:



$P=10 \xrightarrow{\text{اگر کامل باشد}} q=\binom{10}{2}=45 \rightarrow$ باید 2 یال حذف کنیم.

الف) min درجه حداکثر چه عددی است؟

ب) min درجه حداقل چه عددی است؟

ج) max درجه حداکثر چه عددی است؟

د) max درجه، حداقل چه عددی است؟

هـ) حداقل چند رأس با min درجه یافت می‌شود؟

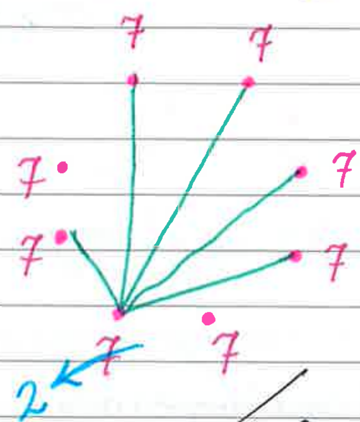
و) حداکثر چند رأس با min درجه یافت می‌شود؟

ز) حداقل چند رأس با max درجه یافت می‌شود؟

ح) حداکثر چند رأس با max درجه یافت می‌شود؟

ی) عبارت $\delta - \Delta$ چند جواب دارد؟

مثال: در گرافی از مرتبه‌ی 8 و اندازه‌ی 23 ، min درجه، حداقل چه عددی است؟



$P=8 \Longrightarrow$ اگر کامل باشد: $q=\binom{8}{2}=28$

$\Longrightarrow$ باید 5 یال حذف کنیم.

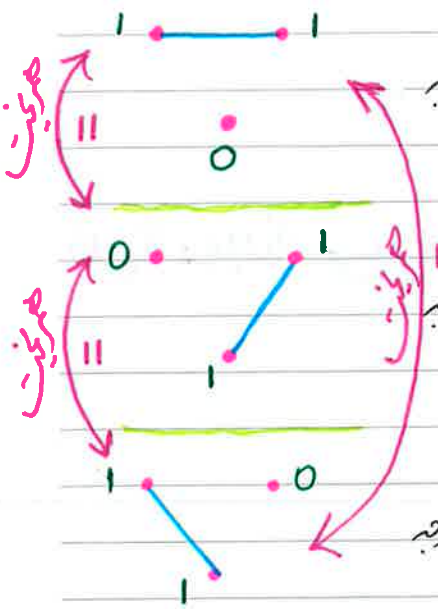
چون می‌خواهیم min درجه، حداقل بشود (کمترین مقدار بشود)

بنابراین 5 تا یال اضافه را از یک رأس می‌گیریم تا درجه یک‌سره افت کند.

مثال: در مثال قبل، حداکثرِ min درجه، چقدر است؟

* تعداد گرافهای متمایز وقتی که رئوس با اسم ندارند (رأسها متمایز نیستند):

مثال 1: با 3 رأس و 1 یال چند نوع گرافی می توان ساخت؟ تا



دنباله درجه: 0 , 1 , 1

مساوی

دنباله درجه: 0 , 1 , 1

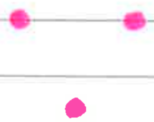
مساوی

دنباله درجه: 0 , 1 , 1

با 3 رأس و یک یال فقط یک نوع گراف می توانیم بسازیم.

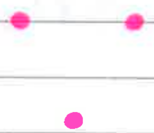
* این یک یال رو هر جا که بگذاریم فقط یک نوع دنباله درجه تولید میکند که آن هم 0 , 1 , 1 است.

مثال 2 : با 3 رأس و 2 یال ، چند نوع گراف می توان ساخت؟ (   ) تا



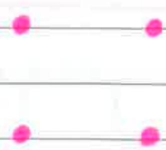
دنباله درجه :

مثال 3 : با 3 رأس و 3 یال ، چند نوع گراف می توان ساخت؟ (   ) تا



دنباله درجه :

مثال 4 : با 4 رأس و 1 یال ، چند نوع گراف می توان ساخت؟ (   ) تا



دنباله درجه :

Subject: (19)

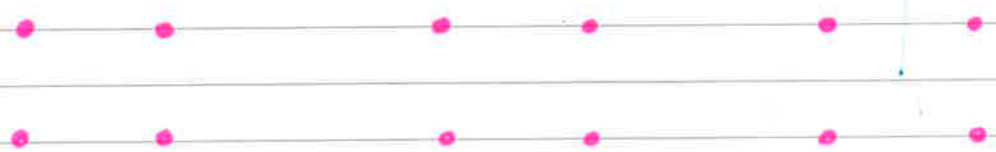
مثال ۵: با ۴ رأس و ۲ یال، چند نوع گراف می‌توان ساخت؟ تا

دنباله درجه:

دنباله درجه:

تذکر: دو یال را یا می‌توانیم .... بگذاریم یا می‌توانیم .... بگذاریم.

مثال ۶: با ۴ رأس و ۳ یال، چند نوع گراف می‌توان ساخت؟ تا

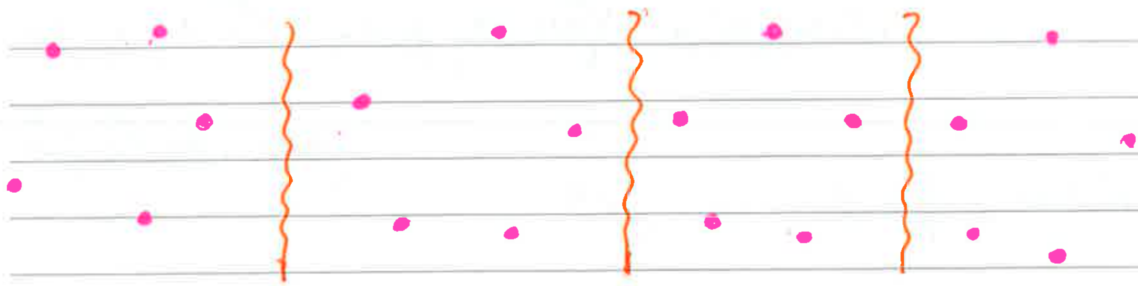


دنباله درجه:

دنباله درجه:

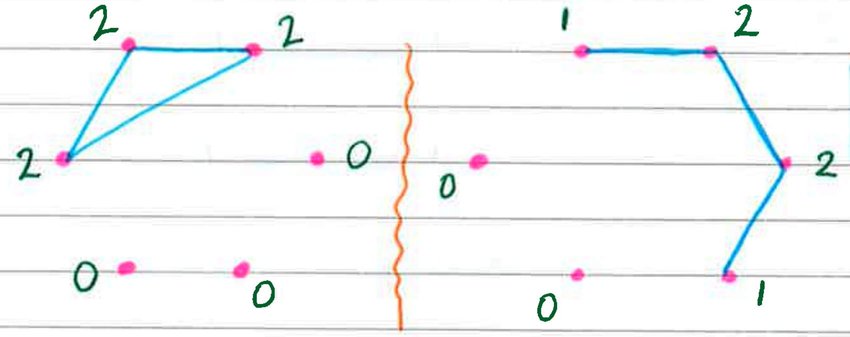
دنباله درجه:

مثال ۷: با ۵ رأس و ۳ یال، چند نوع گراف می‌توان ساخت؟ تا



Subject: (20)

مثال 8: با 6 رأس و 3 یال، چند نوع گراف می‌توان ساخت؟ تا



تذکر مهم: اگر رئوس بدون اسم باشند و مرتبه‌ی گراف بزرگتر یا مساوی 6 باشد ($p \geq 6$)

آنگاه با 3 یال فقط 5 نوع گراف متمایز می‌توانیم بسازیم.

سؤال: با 9 رأس و 3 یال، چند نوع گراف می‌توان ساخت؟

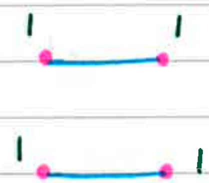
طبق تذکر بالا، 5 نوع.

$p \geq 6 \,,\; q = 3 \Rightarrow$ 5 نوع

گراف منتظم:

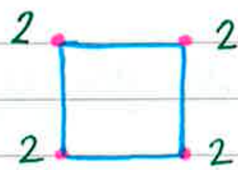
گراف منتظم گرافی است که تمام رئوسش هم درجه‌اند. پس منظور از گراف r ـ منتظم مرتبه‌ی P گرافی است که تمام P رأس آن از درجه‌ی r می‌باشند.

$P > q$



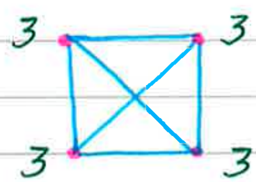
1ـ منتظم مرتبه‌ی 4

$P = q$



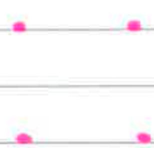
2ـ منتظم مرتبه‌ی 4

$P < q$



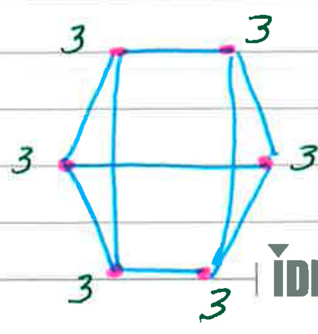
3ـ منتظم مرتبه‌ی 4

$P > q$



صفرـ منتظم مرتبه‌ی 4

$P < q$



3ـ منتظم مرتبه‌ی 6

$$\sum deg = 2q \xrightarrow{\text{در گراف منتظم}} rp = 2q$$

تست: چند نوع گراف 3-منتظم مرتبه 7 یافت می‌شود؟

1) هیچ 2) 1 3) 2 4) بی‌شمار

$rp = 2q \Rightarrow 3\times 7 \neq$ زوج ⟵ چنین گرافی وجود ندارد

تست: اگر x عددی اول باشد چند گراف x-منتظم مرتبه $x+2$ یافت می‌شود؟

1) هیچ 2) 1 3) 2 4) بی‌شمار

Subject: (23)

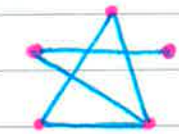
مثال: در چند نوع گراف منتظم، مرتبه از اندازه بزرگتر است؟ $(p>q)$

مثال: در چند نوع گراف منتظم، مرتبه از اندازه کوچکتر است؟ $(p<q)$

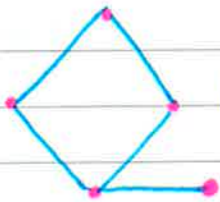
مثال: در چند گراف منتظم، مرتبه با اندازه برابر است؟ $(p=q)$

Subject: (24)

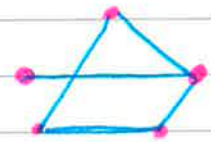
مثال: کدام گراف با بقیه یکریخت نیست؟



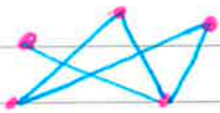
(1



(2



(3



(4

همه‌ی گزینه‌ها دنباله درجه مثل به صورت 1 و 2 و 2 و 2 و 3 است.

و در همه‌ی گزینه‌ها به جز گزینه‌ی 1 ، رأس درجه 3 و درجه 1 با هم مجاور هستند اما در گزینه‌ی 1 این دو رأس مجاور نیستند پس گزینه‌ی 1 با بقیه متفاوت است.

مثال: G گرافی از مرتبه‌ی 18 با 5 رأس درجه‌ی صفر است. حداقل اندازه‌ی G چند است؟

1) 5   2) 6   3) 7   4) 8

مثال: G گرافی ساده با اندازه‌ی 23 و 6 رأس درجه صفر است. حداقل مرتبه‌ی G چند است؟

1) 11　　2) 12　　3) 13　　4) 14

مثال: اگر دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌های یک گراف ساده تشکیل یک دنباله‌ی حسابی دهند و این دنباله 7 عضو داشته باشد، آنگاه Δ چند است؟

1) 4　　2) 3　　3) 7　　4) 5

تذکر:

مثال: دنباله‌ی ترتیبی 2 ، z ، y ، 3 ، 3 مربوط به درجه‌ی رئوس های یک گراف ساده است. (y,z) چند دسته جواب می‌تواند داشته باشد؟

1) هیچ 2) 1 3) 2 4) 3

مثال: اگر در گرافی با اندازه‌ی 14 ، 6 به جز رأس راست کم 5 یال منتهی بشود، ماکسیمم مقدار مرتبه چند است؟

1) 4 2) 5 3) 6 4) چنین گرافی وجود ندارد.

Subject: (28)

مثال: با اضافه کردن 10 یال به یک گراف r-منتظم می‌توان آن را به یک گراف کامل تبدیل کرد. چند مقدار برای r وجود دارد؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

مثال: گرافی از مرتبه 9 دارای یک رأس ایزوله است و به یک رأس آن فقط 3 یال متصل است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

1) 31 2) 24 3) 19 4) 21

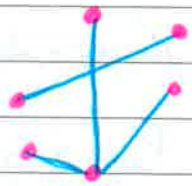
مثال: در گراف ساده‌ی $G(V, E)$ که مرتبه و اندازه آن 10 و 15 می‌باشد، سه رأس منفرد وجود دارد و در بقیه رأس‌ها رابطه‌ی $3 < \deg v_i < 6$ برقرار است. در این گراف چند رأس از درجه‌ی فرد وجود دارد؟

1) هیچ 2) 2 3) 6 4) 4

مثال: در یک گراف ساده با اندازه‌ی $q = 22$، مجموع درجه‌ی رأس‌های زوج برابر با 30 است. اگر $\Delta = 4$، حداکثر تعداد رأس‌های درجه‌ی 3 در گراف چند است؟

1) 8 2) 2 3) 5 4) 4

مثال: چند یال به گراف زیر اضافه کنیم تا بین هر دو راس دلخواه گراف دقیقاً یک یال وجود داشته باشد؟



1) 1　　2) 12

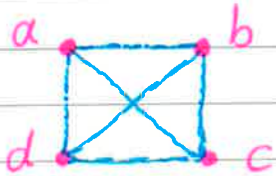
3) 11　　4) 15

مثال: در یک مهمانی 17 نفر حضور دارند. اگر 16 نفر از آنها همگی با 5 نفر فامیل باشند، نفر هفدهم با چند نفر می‌تواند فامیل باشد؟

1) 2　　2) 1　　3) 5　　4) 3

تعداد گرافهای متمایز وقتی که رئوس ها اسم دارند (متمایزند - غیر مشابه اند):

سؤال: با 4 رأس a, b, c, d (رئوس متمایز) چند گراف ساده می توان ساخت؟



$$P=4 \longrightarrow q_{\text{حداکثر}} = \binom{4}{2} = 6$$

$$E = \{\underbrace{\{a,b\}}_{2\ \text{حالت}}, \underbrace{\{a,c\}}_{2}, \underbrace{\{a,d\}}_{2}, \underbrace{\{b,c\}}_{2}, \underbrace{\{b,d\}}_{2}, \underbrace{\{c,d\}}_{2}\} \rightarrow 2^6 \rightarrow$$

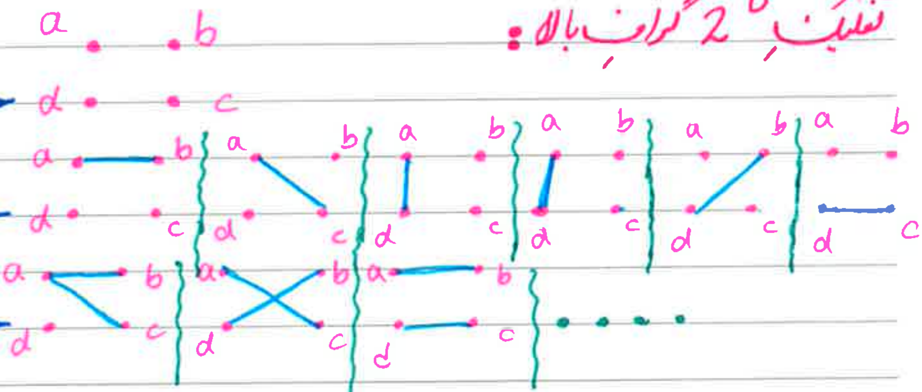
* تعداد گرافهای ساده ای که با 4 رأس متمایز می توان ساخت.

تفکیک 2^6 گراف بالا:

$\binom{6}{0} = 1 \rightarrow$

$+\ \binom{6}{1} = 6 \rightarrow$

$+\ \binom{6}{2} = 15 \rightarrow$ ....



$+\ \binom{6}{3} = 20 \rightarrow$ ....

$+\ \binom{6}{4} = 15 \rightarrow$ ...

$+\ \binom{6}{5} = 6 \rightarrow$ ....

$+\ \binom{6}{6} = 1 \rightarrow$

جمع همه $\rightarrow 2^{\overset{\binom{4}{2}}{6}} = 64$

* مهم: تعداد گرافهای ساده‌ای که با P رأس متمایز می‌توان ساخت:

* مهم: تعداد گرافهای ساده‌ای که با P رأس متمایز و K یال می‌توان ساخت:

مثال: 5 رأس $V=\{a,b,c,d,e\}$ مفروض است. با آن حداکثر چند گراف ساده می‌توان ساخت؟

*مثال مهم: با 5 رأس $V = \{a, b, c, d, e\}$ حداکثر چند گراف ساده می‌توان ساخت بطوریکه:

الف) دو رأس a و b در آنها مجاور باشند. (یعنی باید حتماً یال بینشان باشد).

ب) دو رأس a و b در آنها مجاور نباشند.

ج) رأس a با رئوس b و c مجاور بوده ولی با رأس d مجاور نباشد.

د) با آنها چند گراف 3 یاله می‌توان ساخت؟

هـ) با آنها چند گراف ۳ یالی می توان ساخت به طوریکه a و b در آنها مجاور باشند؟

و) با آنها چند گراف ۳ یالی می توان ساخت بطوریکه رأس a و b مجاور نباشند؟

ز) با آنها چند گراف ۳ یالی می توان ساخت بطوریکه رأس a با رئوس b و c مجاور بوده اما با رأس d مجاور نباشد؟

ح) با آنها چند گراف ۴ یالی می توان ساخت؟

ط) با آنها چند گراف 4 یالی می‌توان ساخت بطوریکه رئوس a و b مجاور باشند؟

ی) 4 یالی‌هایی که a و b مجاور نیستند؟

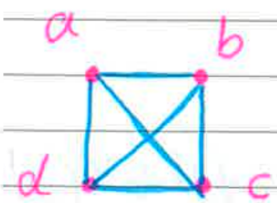
ک) 4 یالی‌هایی که a با b و c مجاور است ولی با d نیست؟

ل) 4 یالی‌هایی که درجه‌ی رأس a در هر یک از آنها 1 باشد؟

م) 4 یالهایی که درجه‌ی رأس a در هر یک از آنها 2 باشد؟

ن) با آنها چند گراف 5 یالی می‌توان ساخت بطوریکه درجه‌ی رأس a در هر یک از آنها 3 باشد؟

مثال: در گراف کامل مرتبه 4 (K_4) چند گراف کامل دیده می‌شود؟



مثال 1: در گرافی از مرتبه‌ی 8، ماکزیمم درجه 3 می باشد در این صورت حداقل اندازه‌ی گراف را بیابید.

۱) صفر   2) 1   3) 3   4) 12

$$\left.\begin{array}{l} P=8 \\ \Delta=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \min(q)=?$$

مثال 2:

$$\left.\begin{array}{l} P=8 \\ \Delta=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \max(q)=?$$

مثال 3:

$$\left.\begin{array}{l} P = 8 \\ \delta = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \min(q) = ?$$

مثال 4:

$$\left.\begin{array}{l} P = 8 \\ \delta = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \max(q) = ?$$

مثال 5 :

$$\left.\begin{array}{l} P = 7 \\ \Delta = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \min(q) = ?$$

مثال 6 :

$$\left.\begin{array}{l} P = 7 \\ \Delta = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \max(q) = ?$$

مثال 7 :

$$\left.\begin{array}{l} P = 7 \\ \delta = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \min(q) = ?$$

مثال 8:

$$\left.\begin{array}{l} P=7 \\ \delta=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \max(q_r)=?$$

مثال 9:

$$\left.\begin{array}{l} P=8 \\ \Delta=6 \\ \delta=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \min(q_r)=?$$

مثال 10:

$$\left.\begin{array}{l} P=8 \\ \Delta=6 \\ \delta=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \max(q_r)=?$$

مثال 11 :

$$\left.\begin{array}{l} P=10 \\ \Delta=8 \\ \delta=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \min(q_r)=?$$

مثال 12 :

$$\left.\begin{array}{l} P=10 \\ \Delta=8 \\ \delta=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \max(q_r)=?$$

الگوریتم هاول حکیمی در تشخیص گرافی بودن یک دنباله درجه :

در تشخیص اینکه آیا دنباله‌ای گرافی هست یا نه ابتدا اعداد را از بزرگ به کوچک از چپ به راست مرتب کنید سپس عدد سمت چپ (بزرگترین عدد) را K نامیده و آنگاه K را حذف کرده و از K عدد بعدی از هر کدام ۱ واحد کم کنید سپس دنباله را مرتب کرده و همین کار را تکرار کنید اگر نهایتاً همه‌ی اعداد باقی مانده صفر شد یعنی دنباله گرافی بوده است.

مثال :

$\cancel{6}, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2$

$1, 1, 1, 1, 1, 1, 2$

مرتب : $\cancel{2}, 1, 1, 1, 1, 1, 1$

$0, 0, 1, 1, 1, 1$

مرتب : $\cancel{1}, 1, 1, 1, 0, 0$

$0, 1, 1$

مرتب : $\cancel{1}, 1, 0$

$0, 0 \Rightarrow$ OK $\rightarrow$ دنباله گرافی است

مثال:

$\cancel{5}, 5, 5, 5, 3, 2$

$\cancel{4}, 4, 4, 2, 1$

$\cancel{3}, 3, 1, 0$

$2, 0, -1$ ✗ $\Rightarrow$ دنباله گرافی نیست

مثال: اگر $1, 2, 2, y, x, 4$ دنباله درجه رأس‌های گراف G باشد، حداقل و حداکثر مقدار xy چقدر است؟

1) $12, 6$ 2) $12, 4$ 3) $6, 3$ 4) $6, 4$

مثال: اگر ۱ و ۲ و ۳ و c و b و a دنباله درجه رأس‌های یک گراف باشند، آنگاه کمترین مقدار اندازه‌ی گراف چند است؟

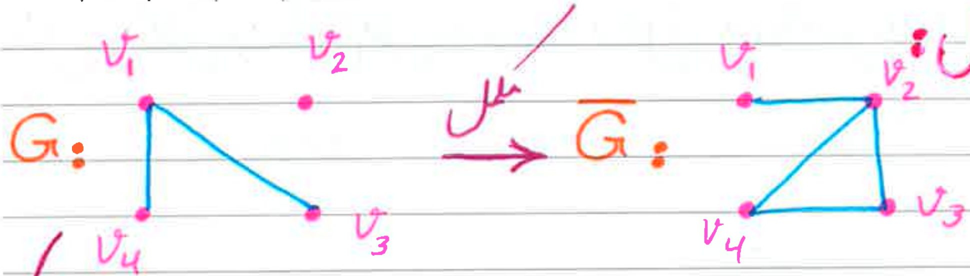
۱) 7 ۲) 8 ۳) 9 ۴) 10

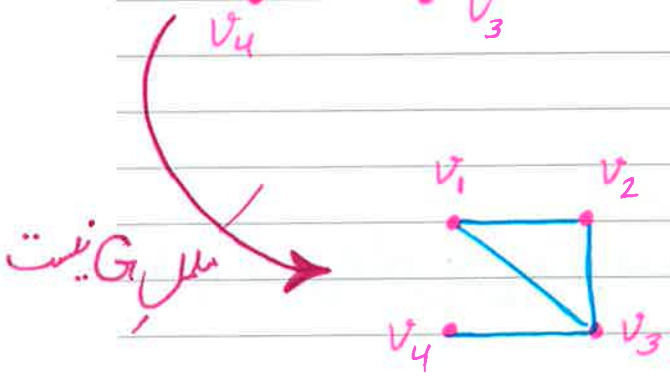
مثال: کدام دنباله، دنباله‌ی درجه رأس‌های گرافی ساده است؟

۱) 5, 4, 3, 2, 2, 1 ۲) 4, 4, 4, 3, 2, 1

۳) 5, 4, 3, 2, 2, 0 ۴) 5, 5, 3, 3, 1, 1

گراف مکمل:





اگر دو گراف مکمل یکدیگر باشند وقتی روی هم می اندازیمشان باید گراف کامل با همان مرتبه درست شود.

مثلاً اگر $P=4$ است و یک راس در گراف اصلی درجه 2 است همان رأس در گراف مکمل باید درجه 1 باشد.

* شرایط مکمل بودن:

① $P_G = P_{\bar{G}}$

② $q_G + q_{\bar{G}} = \binom{P}{2}$

③ $\deg(v_i)_G + \deg(v_i)_{\bar{G}} = P-1$

مثال: در گراف یک راس فول درجه وجود دارد. در مکمل آن چند راس ایزوله داریم؟

3) 4   2) 3   1) 2   0 (1

مثال: در گراف 2 راس فول درجه وجود دارد. در مکمل آن چند راس ایزوله داریم؟

نکته مهم: تعداد ریخت های یک گراف با تعداد ریخت های مکمل آن برابر است.

یعنی اگر پیدا کردن ریخت های یک گراف سخت باشد، ریخت های مکملش را پیدا می کنیم.

مثال: چند گراف غیر یکریخت از مرتبه 4 و اندازه ی 4 میتوان رسم کرد؟

Subject: (47)

مثال: چند نوع گراف از مرتبه‌ی 8 و با اندازه‌ی 25 وجود دارد؟

مثال: تعداد یال‌های یک گراف $\frac{1}{4}$ تعداد یال‌های مکمل آن است. مرتبه‌ی گراف چه عددی می‌تواند باشد؟

1) 14 2) 19 3) 21 4) 37

میانگین درجات رئوس :

$$\text{میانگین درجات رئوس} = \frac{\text{جمع درجات رئوس}}{\text{تعداد رئوس}} = \frac{2q}{p}$$

$\downarrow$

$\bar{X}$

$$\delta < \frac{2q}{p} < \Delta$$

اگر

$$\delta = \Delta \Rightarrow \delta \leqslant \frac{2q}{p} \leqslant \Delta$$

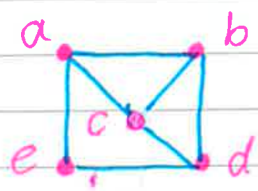
فقط یکی از این روابط را حق استفاده دارید .

مثال :

$$\left.\begin{array}{l} q = 26 \\ \delta = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \max(p) = ?$$

دور و مسیر در گراف :

تعریف مسیر : مسیر در گراف عبارت است از دنباله ای از رئوس که رأس تکراری نداشته باشد.
و تعداد یالهایی که از ابتدا تا انتهای مسیر وجود دارد را طول مسیر می گوییم.



ab : مسیری به طول 1

abc : مسیری به طول 2

abd : مسیری به طول 2

abcd : مسیر به طول 3

abcdb : مسیر نیست ← چون رأس تکرار دارد

تعریف دور : دور در گراف عبارت است از دنباله ای از رئوس که به جز ابتدا و انتها رأس تکراری دیگری نداشته باشد و تعداد یالهایی که در یک دور طی می شود را طول دور گوییم.

تذکر : حداقل طول یک دور 3 می باشد.

تذکر : برای دور یا مسیر از روی هر یال فقط یک بار عبور کنید.

تذکر: اگر بین دو رأس چند مسیر وجود داشت، در این صورت کوتاهترین طول مسیر بین آنها را فاصله‌ی آن دو رأس گوییم.

abca : دوری به طول ۳

abdea : دوری به طول ۴

abcdba : چون رأس تکراری دارد ← دور نیست

مثال: در گرافی با دنباله درجه‌ی ۱ و ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۴ دو رأسی که دارای بیشترین درجه‌ی باشند مجاور نیستند:

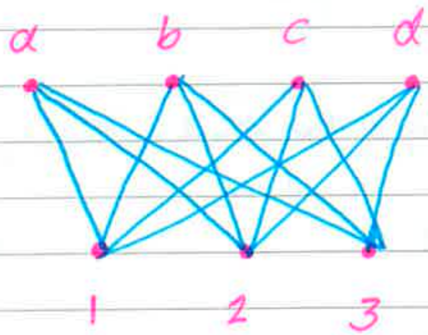
الف) چند دور به طول ۳ دارد؟

ب) چند دور به طول ۴ دارد؟

ج) چند دور به طول ۵ دارد؟

مثال: در گراف شکل زیر چند دور به طول 4 یافت می‌شود؟

1) 12 2) 18 3) 15 4) 20

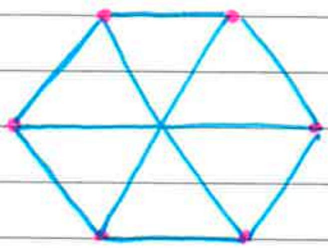


مثال: در گرافی 2 رأس از درجه‌ی 7 و 7 رأس از درجه‌ی 2 می‌باشند. اگر دو رأسی که بیشترین درجه‌ها را دارند مجاور نباشند در این صورت تعداد کل دورهای گراف را بیابید.

1) 12 2) 15 3) 18 4) 21

نکته: اگر گرافی کامل نباشد یا حالت خاصی نداشته باشد، باید با توجه به شکل گراف تعداد دورها یا مسیرها را شمارش کنیم.

مثال: در گراف 3-منتظم مقابل، چند دور با طول 4 وجود دارد؟



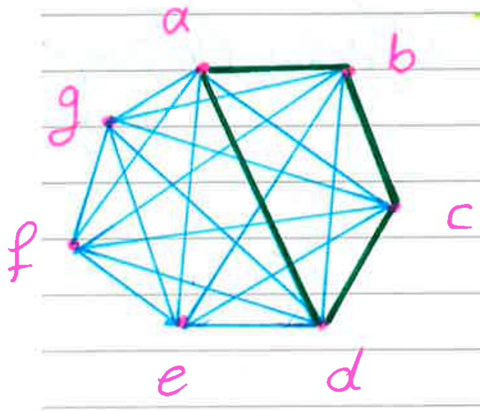
1) 6   2) 9

3) 8   4) 7

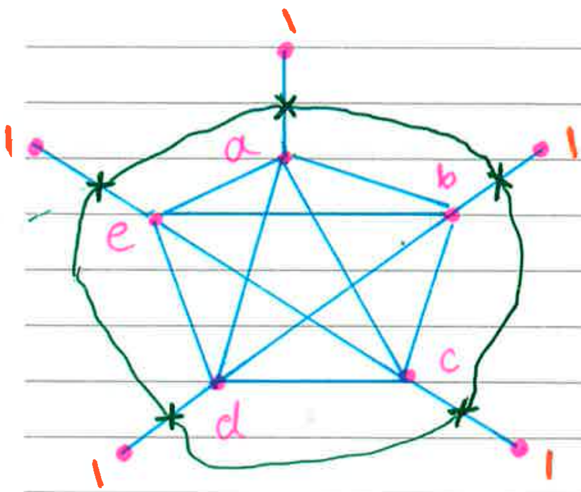
مثال: در گراف G، دنباله‌ی درجه‌ی رأس‌ها به صورت $5, 5, 2, 2, 2, 2, 2$ بوده و دو رأس از درجه‌ی Δ باهم مجاور نیستند. اگر s طول مسیری از گراف G باشد، s چند مقدار متمایزی می‌تواند داشته باشد؟

1) 2   2) 4   3) 5   4) 6

مثال مهم: در گراف کامل مرتبه‌ی 7 کلاً چند دور به طول 4 یافت می‌شود؟



مثال: دو گرافی از مرتبه‌ی 10 و اندازه‌ی 15 ، 5 رأس از درجه‌ی 1 بوده و سایر رئوس هم درجه‌اند تعداد کل دورهای این گراف را بیابید.



تذکر: در دنباله درجه‌ی رئوس مربوط به یک دور حداقل درجه باید 2 باشد یعنی رأس با درجه 1 و ایزوله یافت نمی‌شود.

مثال: در یک گراف کامل، حاصل ضرب اندازه و مرتبه‌ی آن 50 می‌باشد. در این گراف چند دور به طول 4 وجود دارد؟

1) 10　　2) 12　　3) 15　　4) 16

مثال: چند نوع گراف از مرتبه‌ی 5 می‌توان رسم کرد که فقط 2 دور داشته باشند؟

1) هیچ　　2) 1　　3) 2　　4) 3

مثال: گرافی از مرتبه‌ی ۱۰ دارای ۶ یال است. این گراف حداکثر چند دور دارد؟

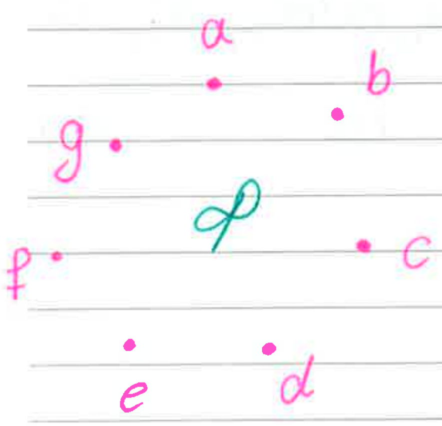
۱) 3   ۲) 4   ۳) 7   ۴) 9

مثال مهم: در گراف کامل مرتبه‌ی 7 چند دور به طول 4 یافت می‌شود به طوری که:

الف) شامل رأس c نباشد:

Subject: (57)

ب) شامل رأس c باشد:



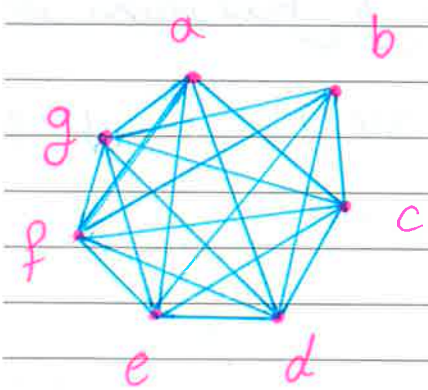
مثال: اگر a و b دو رأس متمایز از گراف کامل K_6 باشند، چند دور به طول 5 در این گراف وجود دارد که شامل یال ab باشد؟

1) 12　　2) 24　　3) 48　　4) 36

مثال: گرافی با 45 رأس درجه‌ی 2، حداکثر چند دور به طول 4 دارد؟

1) 11   2) 1   3) 15   4) 10

مثال: اگر از گراف کامل مرتبه‌ی 7، 1 یال حذف شود چند دور به طول 3 حذف می‌شود؟



مثال: دو گراف با دنباله درجه‌ی $3, 3, 4, 4, 4, 4$ چند دور به طول 3 یافت می‌شود؟

1) 5 2) 7 3) 9 4) 10

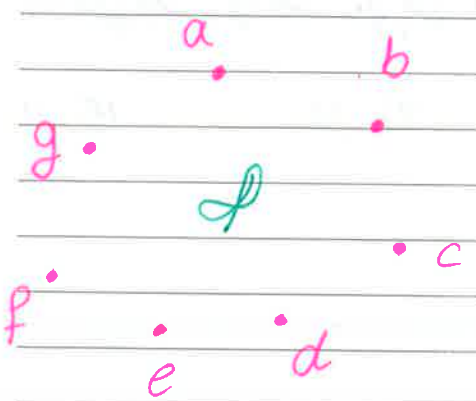
مثال: اگر یکی از رأس‌های گراف K_p و همه‌ی یال‌های مجاورش را حذف کنیم، تعداد دورهای به طول چ نصف می‌شود. گراف K_p چند یال دارد؟

1) 15 2) 21 3) 10 4) 28

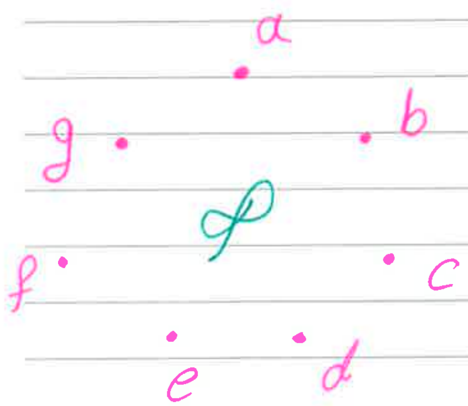
مثال: با مجموعه رأس های $V = \{a, b, c, d, e\}$ چند گراف 5 یالی شامل دور $abea$ می توان ساخت؟

1) 6 2) 21 3) 32 4) 128

مثال: در گراف کامل مرتبه 7 بین دو رأس مشخص (مثلاً a و b) چند مسیر به طول 4 یافت می شود؟

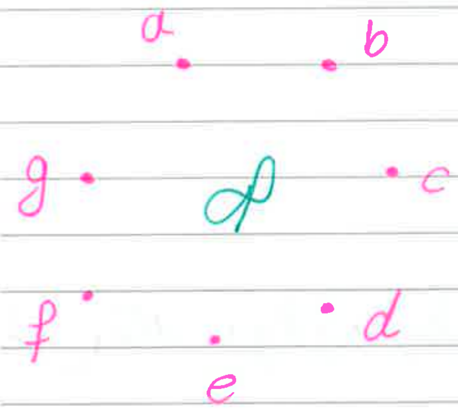


مثال: در گراف کامل مرتبه 8 بین دو رأس مشخص چند مسیر به طول 4 یافت میشود؟

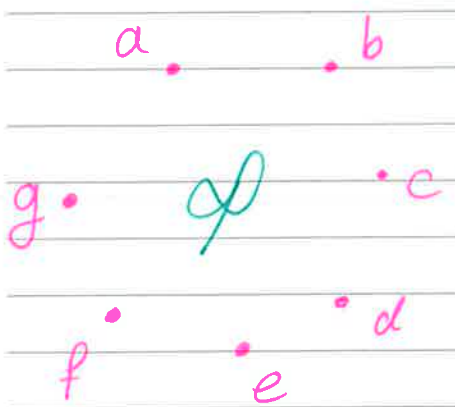


مثال: در گراف K_7 بین دو رأس مشخص a و b چند مسیر به طول 4 یافت میشود بطوریکه:

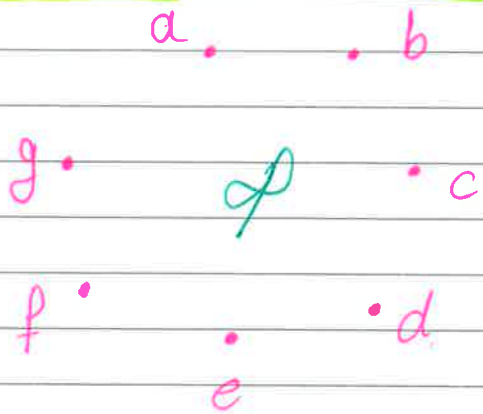
الف) شامل رأس c نباشد:



ب) شامل رأس c باشد:



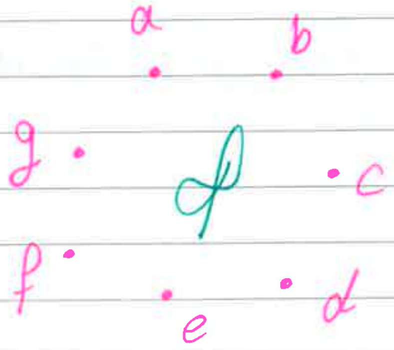
* مثال مهم: در گراف K_7 چند مسیر به طول 4 یافت می‌شود؟ (بین دو رأس نامشخص)



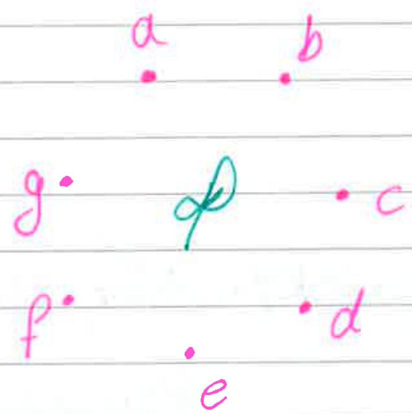
مثال: در گراف K_8 چند مسیر به طول 4 یافت می‌شود؟

مثال: در گراف K_7 چند مسیر به طول 4 یافت می‌شود به طوری که:

الف) شامل رأس c نباشد.



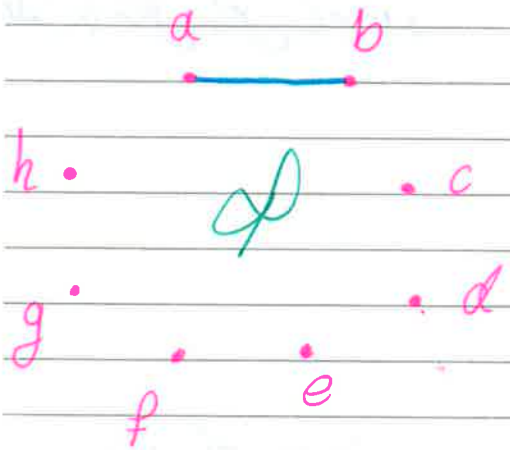
ب) شامل رأس c باشد.



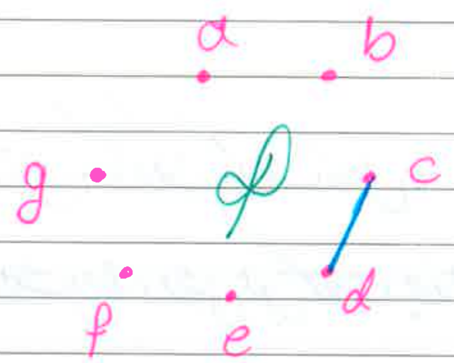
مثال: اگر در یک گراف کامل، 56 مسیر به طول 3 بین دو رأس متمایز a و b وجود داشته باشد، مرتبه این گراف چند است؟

1) 7 2) 8 3) 9 4) 10

مثال: در گراف K_8 چند مسیر به طول 4 یافت می‌شود به طوریکه یال بین دو رأس a و b جزء آن باشد؟



مثال: در گراف K_7 چند مسیر به طول 4 بین a و b یافت می‌شود به طوریکه یال cd جزء مسیر باشد؟



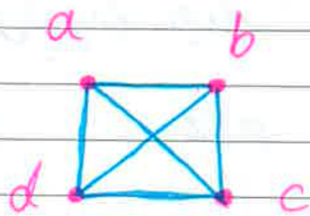
مثال: در گرافی از مرتبه‌ی 9، بین هر دو رأس متمایز دقیقاً 2 مسیر متفاوت وجود دارد. اندازه‌ی این گراف چند است؟

1) 8 2) 9 3) 18 4) 20

مثال: چند مسیر با بلندترین طول ممکن در گراف K_7 وجود دارد؟

1) $21 \times 5!$ 2) $21 \times 6!$ 3) $15 \times 5!$ 4) $15 \times 6!$

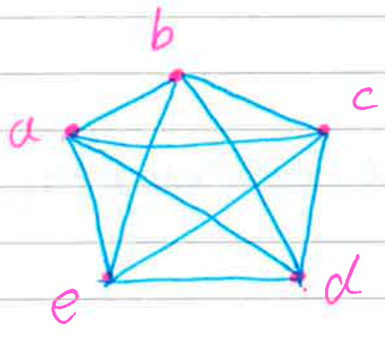
* مثال مهم: در گراف K_4 بین دو رأس a و b کلاً چند مسیر وجود دارد؟



* مثال مهم: در گراف K_4 بین دو رأس نامشخص کلاً چند مسیر وجود دارد؟ (مسیرها به طول طبیعی یا مسیرهای بین دو رأس)

* مثال مهم: در گراف K_4 کلاً چند مسیر وجود دارد؟ (همه‌ی مسیرها)

مثال: در گراف K_5 بین دو راس مشخص چند مسیر وجود دارد؟



مثال: در گراف K_5 چند مسیر به طول طبیعی وجود دارد؟ (بین رئوس)

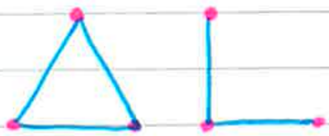
مثال: در گراف K_5 کلاً چند مسیر وجود دارد؟

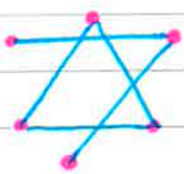
مثال: در شکل زیر، چند مسیر از u به v وجود دارد به طوری که از رأس w عبور نکند؟

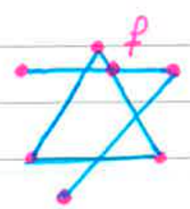
همبندی و ناهمبندی:

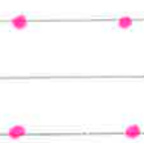
گراف همبند: گراف همبند گرافی است که بین هر دو رأس متمایز آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. به زبان ساده یعنی دو بخشی یا چند بخشی نباشد. یعنی یکپارچه باشد.
(با برداشتن یک رأس، کل شکل برداشته نشود.)

مثال: کدام گزینه همبند است؟

1) 

2) 

3) 

4) 

Subject: (70)

تذکر: تمامی گرافهای تهی .... می باشند. به جز ....

تذکر: تمامی گرافهای کامل .... می باشند.

مثال: کدام یک از گزینه‌های زیر دنباله‌ی درجه‌ی رئوس گرافی است که **قطعاً** همبند است؟

1) 2 , 2 , 1 , 1 , 1 , 1

2) 3 , 3 , 2 , 2 , 0

3) 2 , 2 , 2 , 1 , 1

4) 4 , 3 , 2 , 2 , 1

تذکر مهم: اگر در گرافی رأس ایزوله داشته باشیم .... و اگر رأس فول درجه

داشته باشیم .... است.

مثال: چند گراف همبند و ناهمبند وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه‌ی آنها برابر 8 باشند؟

مثال: ماکزیمم اندازه‌ی یک گراف ناهمبند که در آن $\Delta = 7$ و $\delta = 3$ و با حداقل رئوس

ممکن می‌باشد، چقدر است؟

مثال: چند گراف منتظم از مرتبه 7 می‌توان ساخت؟

1) 2   2) 4   3) 5   4) 6

مثال: چند گراف n-منتظم و ناتهی از مرتبه 10 وجود دارد که در آنها $q \leq 10$ باشد؟

1) 4   2) 5   3) 6   4) 7

مثال: درصورتی که گراف ۶ـ منتظم G دارای P رأس و q یال باشد، مقدار $q - P$

کدام یک از مقادیر زیر میتواند باشد؟

۱) 8 ۲) 10 ۳) 12 ۴) 14

نکته مهم: حداقل مرتبه‌ی یک گراف ۳ـ منتظم ناهمبند برابر است با:

به چهار نکته‌ی مهم زیر توجه کنید:

1- حداقل اندازه‌ی گرافی از مرتبه‌ی P برای آنکه همبند شود برابر است با:

2- حداقل اندازه‌ی گرافی از مرتبه‌ی P برای آنکه قطعاً همبند شود برابر است با:

3- حداکثر اندازه‌ی گروهی از مرتبه‌ی P برای آنکه نا‌هم‌بند باقی بماند برابر است با:

4- حداکثر اندازه‌ی گروهی از مرتبه‌ی P برای آنکه قطعاً ناهم‌بند باقی بماند برابر است با:

مثال: گرافی از مرتبهی 10 مفروض است:

الف) حداقل اندازه برای هم‌بند شدن چقدر است؟

ب) حداقل اندازه برای قطعاً هم‌بند شدن چقدر است؟

ج) حداکثر اندازه برای ناهم‌بند شدن چقدر است؟

د) حداکثر اندازه برای قطعاً ناهم‌بند شدن چقدر است؟

هـ) بازه‌ی قطعاً ناهم‌بندی و قطعاً هم‌بندی را بنویسید.

مثال: گرافی از مرتبه‌ی ۱۱ همبند است. چند مقدار متمایز برای اندازه‌ی آن وجود دارد؟

10 (1   11 (2   45 (3   46 (4

مثال: در گراف ساده و همبند G داریم $qp=20$. در این صورت $p+q$ کدام عددی نمی‌تواند باشد؟

8 (1   9 (2   10 (3   12 (4

مثال: حداقل مرتبه در گراف ناهمبند با $\Delta=8$ و $\delta=3$ کدام است؟

17 (1   11 (2   20 (3   13 (4

گراف اویلری: گرافی است همبند که دارای گذر اویلری باشد.

گذر اویلری یعنی اگر از رأس دلخواهی مثلاً a شروع کردیم آنگاه با عبور از تمامی یالها (یال‌ها) بصورت هرکدام فقط یکبار به رأس اولیه a بازگردیم.

نکته مهم: شرط لازم و کافی برای آنکه گراف همبندی اویلری باشد آن است که درجه تمام رئوس آن زوج باشند.

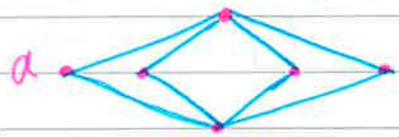
تذکر: گراف‌های کامل مرتبه P زمانی اویلری هستند که .... زیرا در اینصورت درجات رئوس آنها که .... است .... می‌شود.

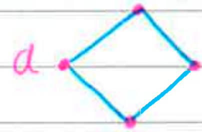
گراف همیلتونی: گرافی است همبند که دارای دور همیلتونی باشد.

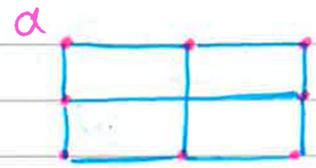
دور همیلتونی یعنی دوری به طول P یا به عبارتی دوری که از همه رئوس بگذرد یا میتوان گفت دور همیلتونی یعنی اگر از رأس دلخواهی مانند a شروع کردیم آنگاه با عبور از تمامی رأس‌ها بصورت هرکدام فقط یکبار به رأس اولیه a بازگردیم.

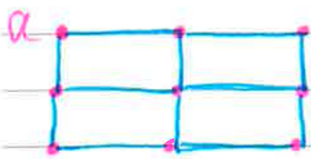
تذکر: تمامی گرافهای کامل بجز K_1 و K_2 همیلتونی هستند.

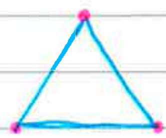
تذکر: در گراف همیلتونی $\delta \geq 2$ است.

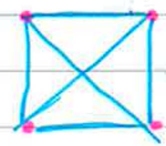


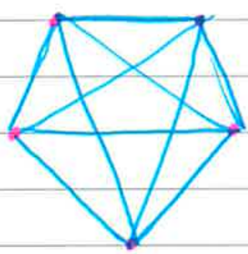




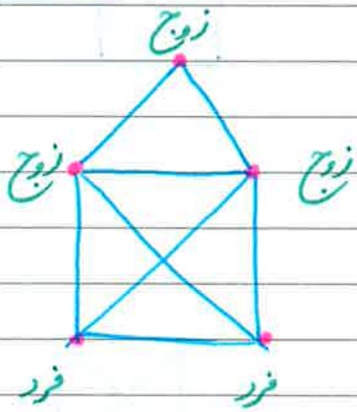




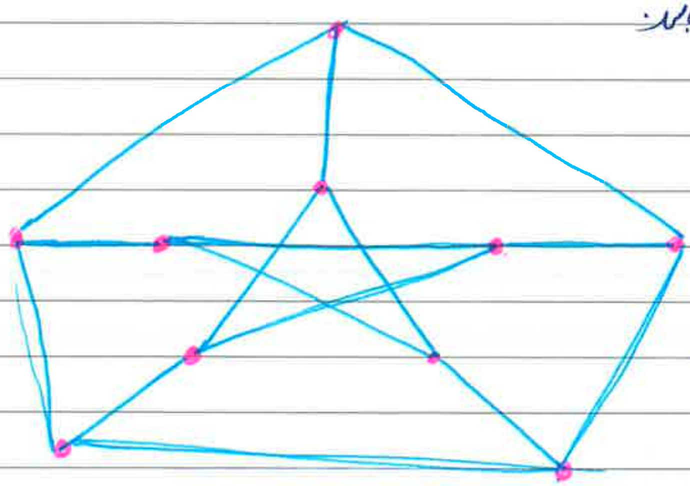




گراف نیمه اویلری: گرافی است همبند که فقط دو رأس با درجه‌ی فرد دارد که اگر از یکی از رئوس با درجه‌ی فرد شروع کنیم باید با عبور از تمامی یال‌ها (هر کدام فقط یکبار) به رأس با درجه‌ی فرد دیگر بازگردیم.



گراف پترسن: گرافی است همبند، 3 منتظم، مرتبه‌ی 10، اندازه‌ی 15 که دارای دورهایی به طول‌های 5، 6، 8 و 9 می‌باشد.



تذکر: گراف پترسن نمی‌تواند .... باشد زیرا ....

تذکر: گراف پترسن نمی‌تواند .... باشد زیرا ....

مثال: گراف 2-منتظم از مرتبه 9 اویلری نیست. چند گراف با این شرایط وجود دارد؟

مثال: کدام یک از گراف‌های زیر حتماً همیلتنی است؟

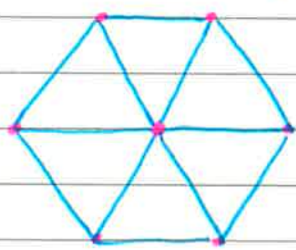
1) 2-منتظم از مرتبه 7

2) 3-منتظم از مرتبه 10

3) 2-منتظم از مرتبه 6

4) 3-منتظم از مرتبه 6

مثال: دست کم چند یال به گراف روبه‌رو اضافه کنیم تا گراف اویلری شود؟



1) 1

2) 2

3) 3

4) گراف اویلری است.

مثال: در گراف کاملی، دوری وجود دارد که از همه‌ی یال‌های گراف عبور می‌کند. اندازه‌ی این گراف کدام مقدار زیر می‌تواند باشد؟

1) 6　　2) 15　　3) 21　　4) 28

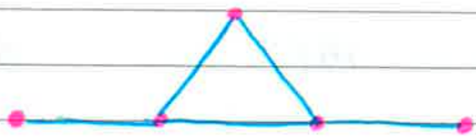
گراف بازه‌ای:

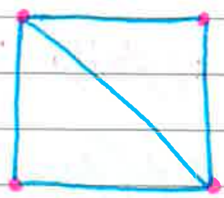
گراف بازه‌ای گرافی است که رئوس آن فاصله‌های بازی از اعداد حقیقی می‌باشد که اگر اشتراک دو بازه تهی باشد آنها 2 رأس غیر مجاور و اگر اشتراک دو بازه غیر تهی باشد آنها دو رأس مجاور می‌باشند.

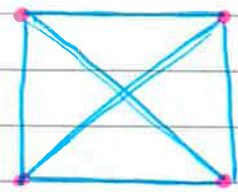
مثال: برای بازه‌های زیر گراف مناسب رسم کنید.

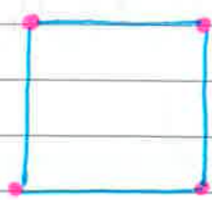
$(1,7)$ $(2,5)$ $(3,8)$ $(5,9)$ $(8,11)$

مثال: برای گرافهای زیر بازه‌ی مناسب بیابید.



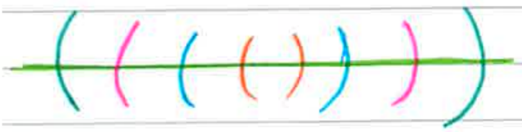






نکته‌مهم: هر چهار ضلعی به بالا که قطر نداره نمی‌تونه گراف بازه‌ای باشه.

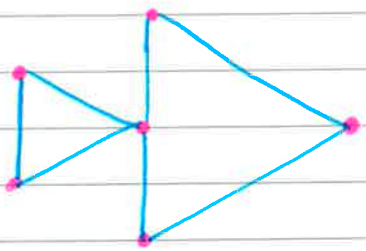
تذکر: تمامی گرافهای کامل بازه‌ای هستند.



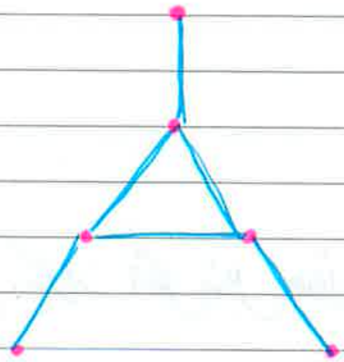
مثال: به گراف شکل مقابل حداقل چند یال بیفزاییم تا به گراف بازه‌ها تبدیل شود؟

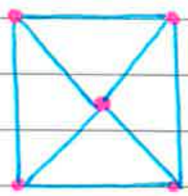
1) 1   2) 2   3) 3   4) 4

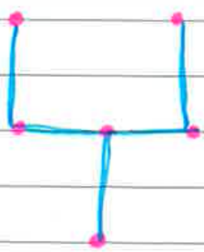
مثال مهم: چندتا از گرافهای زیر بازه‌ای است؟



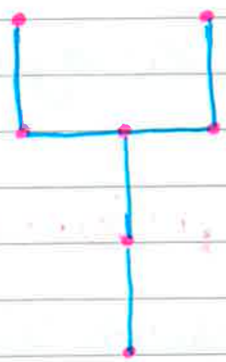
Subject: (86)







خاک انداز دسته دوتیله



مثال: اگر x عددی طبیعی و کوچکتر مساوی 5 باشد گراف بازه‌ای $(-x , x)$ چند یال دارد؟

5 (1   8 (2

9 (3   10 (4

Subject: (88)

درخت:

درخت گرافی است همبند فاقد دور.

مشخصات درخت:

1- در تمام درخت ها همواره رابطه‌ی $q = P-1$ وجود دارد.

2- در تمام درخت ها به جز T_1 وجود رأس درجه 1 الزامی است.

3- در بین گرافهای همبند و هم مرتبه، درخت دارای کمترین تعداد یال است. ($P-1$)

4- اگر یک یال به درخت اضافه کنید دیگر درخت نیست زیرا دور ایجاد می شود و نکته مهم اینکه فقط 1 دور در آن ایجاد می شود.

5- در بین گرافهای همبند و هم اندازه، درخت دارای بیشترین تعداد رأس می باشد.

6- چون بین هر دو رأس متمایز در درخت فقط یک مسیر وجود دارد (به طول طبیعی یا حداقل 1) پس می توان ادعا کرد تعداد مسیرها به طول طبیعی در هر درخت ______ و تعداد کل مسیرها در درخت ______.

$\begin{cases} P=1 \\ q=0 \end{cases}$ $\leftarrow T_1 \rightarrow$ 

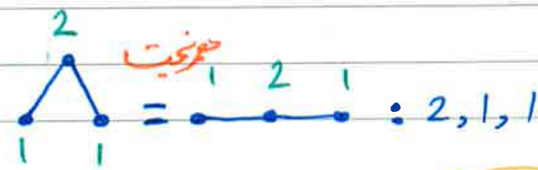
$\leftarrow K_1 , \bar{K}_1$ 1 حل

***

$\begin{cases} P=2 \\ q=1 \end{cases}$ $\leftarrow T_2 \rightarrow$ 

$\leftarrow K_2$ 1 حل

***

$\begin{cases} P=3 \\ q=2 \end{cases}$ $\leftarrow T_3 \rightarrow$ 

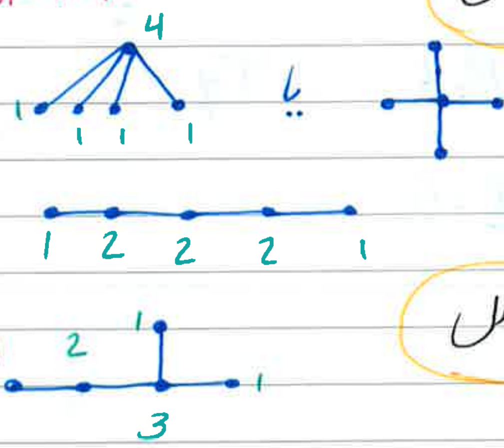
1 حل

***

$\begin{cases} P=4 \\ q=3 \end{cases}$ $\leftarrow T_4 \rightarrow$ 

2 حل

***

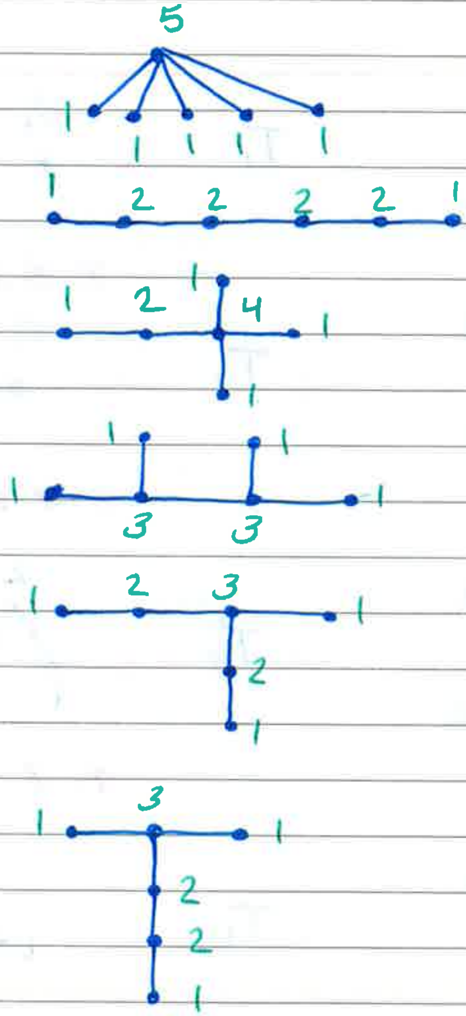
$\begin{cases} P=5 \\ q=4 \end{cases}$ $\leftarrow T_5 \rightarrow$ 

3 حل

Subject: (90)

$p=6$ $\longleftarrow T_6 \longrightarrow$

$q=5$



حل 6

$p=7$ $\longleftarrow T_7 \longrightarrow$ حل 11

$q=6$

7_ اگر یکی از یال های درخت را حذف کنید دیگر درخت نیست زیرا دیگر همبند نیست و درخت ها تبدیل به 2 درخت می شود و از 2 درخت به بالا را جنگل می نامند.

8_ اگر max درجه درختی عدد K باشد آنگاه در آن درخت حداقل K رأس درجه 1 خواهیم داشت.

مثال: در گرافی همبند فاقد دور 10 رأس درجه 3 یافت می شود و سایر رئوس هم درجه اند (یعنی درجه 1 هستند) اندازه ی این گراف چقدر است؟

1) 20 2) 21 3) 22 4) 23

مثال: کدام گزینه می تواند جمع مرتبه و اندازه ی یک درخت باشد؟

1) 18 2) 13 3) 10 4) 8

مثال: در گراف همبندی که با حذف هر یالش ناهمبند می‌شود 5 رأس درجه 1، 4 رأس درجه 3، 3 رأس درجه 2 و سایر رئوس هم درجه‌اند. مرتبه‌ی گراف را بیابید.

مثال: گرافی از مرتبه‌ی P و اندازه‌ی q مفروض است. اگر 11 یال به آن بیفزاییم تبدیل به گرافی می‌شود که دقیقاً بین هر دو رأس آن 1 یال وجود دارد و اگر 10 یال از آن کم کنیم تبدیل به گرافی می‌شود که بین هر دو رأس متمایز آن فقط 1 مسیر وجود دارد. $P+q$ را بیابید.

مثال: میانگین درجات رئوس یک درخت کدام گزینه می‌تواند باشد؟

1) 0.7   2) 1.8   3) 2.3   4) 3.4

مثال: میانگین درجات رئوس گراف همبند فاقد دور 1.8 می‌باشد در این گراف تعداد مسیرها:

الف) به طول 1 چقدر است؟

ب) به طول حداقل 1 چقدر است؟

ج) به طول حداقل 2 چقدر است؟

د) کلاً چند مسیر دارد؟

Subject: (94)

مثال: در درختی 21 مسیر به طول 2 یا بیشتر وجود دارد. به این گراف چند یال اضافه کنیم تا به یک گراف کامل تبدیل شود؟

15 (1   17 (2   18 (3   21 (4

* رابطه‌ی وجود مسیر بین رئوس گراف ساده:

مثال: رابطه‌ی «در وجود مسیر بین رئوس» گرافی از مرتبه‌ی 8 را به 3 کلاس هم‌ارزی (3 مؤلفه‌ی همبندی یا 3 بخش جدا از هم) افراز کرده است. حداکثر اندازه‌ی این گراف را بیابید.

1) 5   2) 9   3) 11   4) 15

نکته مهم: اگر رابطه‌ی «در وجود مسیر بین رئوس گراف ساده» رئوس گرافی از مرتبه‌ی P را به K تا کلاس هم‌ارزی افراز کند پیشنهاد می‌شود .... رئوس را اینگونه قرار دهید و آنگاه:

الف) برای داشتن $\max(q)$:

ب) برای داشتن $\min(q)$:

Subject: (96)

بعضی از افرازها:

مثال: رابطه وجود مسیر رئوس گراف از مرتبه ۱۵ را به ۶ کلاس هم ارزی افراز کرده است.

الف) حداقل q چقدر است؟

ب) حداکثر q چقدر است؟

ج) اگر رأس ایزوله نداشته باشیم حداقل q چقدر است؟

د) اگر رأس ایزوله نداشته باشیم حداکثر q چقدر است؟

ماتریس مجاورت گراف‌های ساده:

مشخصات:

1- مرتبه‌ی آنها P می‌باشد. یعنی P سطر، P ستون و P^2 درایه دارند.

2- قطر اصلی آنها همواره ـــ است. چون در گراف‌های ساده ـــ تعریف نمی‌شود.

3- چون به ازای هر یال در گراف، دوتا 1 در ماتریس منظور می‌شود پس تعداد کل 1 های ماتریس همواره ـــــ یا همان ـــــ می‌باشد.

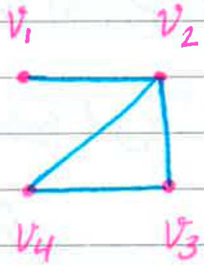
4- درجه‌ی هر رأس گراف با تعداد 1 ها (مجموع اعداد) سطر یا ستون مربوط به آن برابر است.

5- این ماتریس‌ها متقارن می‌باشند یعنی درایه‌ها نسبت به قطر اصلی تقارن دارند.

* تعداد صفرها + تعداد یک‌ها = تعداد کل درایه‌ها

تعداد یک‌ها $\downarrow$ $2q$ ، تعداد کل درایه‌ها $\downarrow$ P^2

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{تعداد صفرها} = P^2 - 2q}$



$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

تذکر: اگر ماتریس مجاورت یک گراف ساده را در خودش ضرب کنیم متوجه می‌شویم که درایه‌های قطر اصلی ماتریس M^2 همان درجات رئوس گراف است.

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

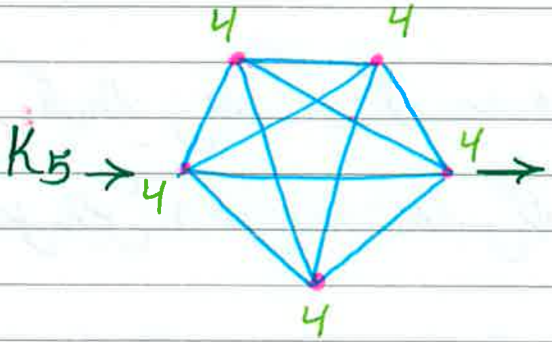
$$= \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 3 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{+} 2q$$

قطر اصلی

Subject: (100)

تذکر: اگر M ماتریس مجاورت گراف کامل مرتبه‌ی P باشد آنگاه در ماتریس M قطر اصلی صفر و سایر درایه‌ها 1 می‌باشند. ولی در ماتریس M^2 قطر اصلی همگی .... و سایر

درایه‌ها همگی .... می‌باشند.



$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\rightarrow \quad M^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$P-2$

$P-1$

مثال: ماتریس مجاورت یک درخت، 26 صفر دارد. تعداد مسیرهای بین رئوس آن را می‌یابید.

مثال: اگر M ماتریس مجاورت گراف کامل مرتبه‌ی 7 باشد، جمع درایه‌های M^2 را بیابید.

مثال: در گرافی ناهمبند و از مرتبه‌ی 7، حداقل چند درایه‌ی صفر در ماتریس مجاورت گراف وجود دارد؟

1) 39 2) 37 3) 29 4) 19

مثال: اگر M ماتریس مجاورت یک گراف کامل و اویلری باشد در اینصورت جمع درایه‌های غیر از قطر اصلی ماتریس M^2 کدام گزینه می‌تواند باشد؟

1) 24   2) 48   3) 60   4) 72

مثال: در ماتریس مجاورت یک گراف منتظم، 24 درایه صفر وجود دارد این گراف:

1) دو منتظم همبند است   2) دو منتظم ناهمبند است

3) دو منتظم است   4) سه منتظم همبند است.

مثال: اگر M ماتریس مجاورت گراف ساده مرتبه ۴ باشد در اینصورت کدام گزینه می‌تواند ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس M^2 باشد؟

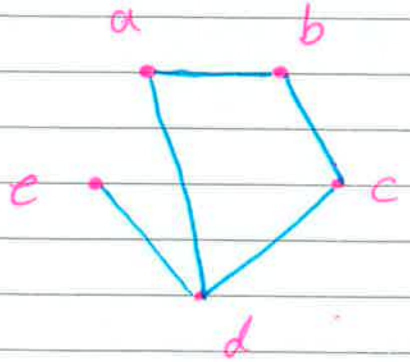
1) 3 2) 12 3) 18 4) 36

مثال: کدامیک از گزینه‌های زیر می‌تواند ماتریس مجاورت یک گراف ناهمبند باشد؟ (منظور از A و B و O ماتریس‌های باشند و منظور از O ماتریس صفر است)

1) $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & O \end{array}\right]$ 2) $\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right]$

3) $\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline B & O \end{array}\right]$ 4) $\left[\begin{array}{c|c} O & A \\ \hline B & O \end{array}\right]$

نکته مهم: در ماتریس M^2 می‌دانیم درایه‌های روی قطر اصلی بیانگر درجات رئوس گراف می‌باشند و اما درایه‌ای غیر قطر اصلی واقع در محل تلاقی سطر i ام ستون j ام در واقع تعداد مسیرهایی به طول 2 از رأس i به رأس j می‌باشد.



$$M^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ a \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} & 0 & 2 & 0 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

نکته: مجموع درایه‌های ماتریس M^2 با مجموع مربعات درجات رئوس آن برابر است.

مثال: هر یک از درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی ماتریس M^2 که در آن M ماتریس مجاورت یک درخت از مرتبه‌ی P می‌باشد حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

1) 1   2) 2   3) $P-3$ 4) $P-4$

تذکر: در مربع ماتریس مجاورت یک درخت درایه‌های غیر قطر اصلی حداکثر 1 می‌باشند زیرا بین هر دو رأس متمایز درخت یا مسیر به طول 2 وجود ندارد یا اگر هست فقط یکی است.

مثال: اگر x، y و 5 سه درایه‌ی قطر اصلی و z و t دو درایه‌ی غیر قطر اصلی مجذور ماتریس مجاورت گراف K_P باشند، مقدار $x+y+z+t$ چند است؟

1) 20   2) 18   3) 22   4) 14

مثال: اگر A ماتریس مجاورت گرافی با $P=9$ باشد و حداقل یکی از درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+A^2$ صفر باشد، آنگاه حداکثر اندازه‌ی گراف چند است؟

1) 21 2) 28 3) 36 4) 35

مثال: مجموع درایه‌های قطر اصلی مربع ماتریس مجاورت یک گراف از مرتبه‌ی 6 با شرط $\delta=4$ و $\Delta=5$ کدام می‌تواند باشد؟

1) 22 2) 24 3) 26 4) 29