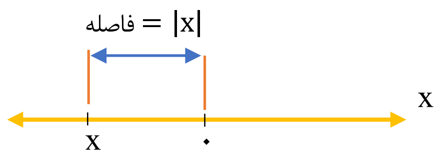
❋ قدر مطلق و ویژگیهای آن :

قدر مطلق: قدر مطلق هر عدد حقیقی، یعنی فاصله ی آن عدد حقیقی تا مبداء مختصات. قدر مطلق عدد حقیقی x را با $|x|$ نشان می دهیم.



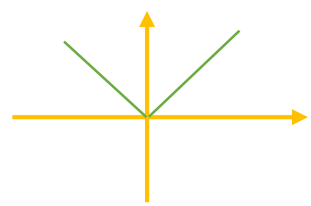
به عنوان مثال فاصله نقاط به طول های ۲ و ۲- روی محور اعداد حقیقی تا مبداء مختصات برابر ۲ واحد است

پس:
$$|-۲| = |۲| = ۲$$

به طور کلی فاصله ی ۲ عدد a و b روی محور اعداد حقیقی برابر $|a-b|$ است تعریف جبری قدر مطلق عدد حقیقی x به صورت زیر است:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

قرینه



یعنی اگر داخل قدرمطلق مثبت باشد خود آن عدد را بیرون می آوریم و اگر درون قدر مطلق منفی باشد قرینه ی آن عدد را بیرون می آوریم.

مثال: حاصل عبارات زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $|-۱۲ \div ۲ \times ۳|$

ب) $|۳ - \sqrt{۲}|$

پ) $|۳ - \sqcap|$

ت) $|۲\sqrt{۳} - ۳\sqrt{۲}|$

ج) $\left|۱-\sqrt{۳}\right|+\left|\sqrt{۳}-۲\right|$

د) $\left|-(x-۱)^{۲}-۳\right|$

مثال۲: حاصل عبارات زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{a^{۴}+۲a^{۲}+۱}$

ب) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}$

مثال۳: اگر $x<۰$ حاصل $\sqrt{x^{۲}+۱+۲\sqrt{x^{۲}}}$ کدام است.

الف) $-(x-۱)$ ب) $x+۱$ ج) $x-۱$ د) $-(x+۱)$

مثال۴: اگر $a>۰>b$ حاصل $|a-b|+|a+۱|-|۱-b|$ را به ساده ترین صورت بنویسید.

مثال۵: اگر $۱<x<۳$ باشد حاصل عبارت $|x-۱|+|x-۳|$ را بدست آورید.

❋ روش کلی رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق :

۱- ریشه های داخل قدر مطلق را بدست می آوریم و عبارات داخل قدرمطلق را تعیین علامت می کنیم.

۲- با توجه به جدول تعیین علامت و علامت عبارت داخل قدرمطلق در هر بازه، قدر مطلق را برمی داریم و تابع را به صورت یک تابع چند ضابطه ای می نویسیم.

۳- نمودار هر ضابطه را با توجه به محدوده ی مورد نظر رسم می کنیم.

مثال۶: با استفاده از تعیین علامت، ضابطه ی هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) $y = |x - ۲| + ۱$

ب) $y = x|x|$

پ) $y = |x - ۱| + |x + ۲|$

ت) $y = |x - ۱| - |x + ۲|$

ج) $y = |x^{۲} - ۱|$

د) $y = ۳ - |x + ۱|$

ه) $y = x + |x|$

ی) $f(x) = ۲x - |x - ۱| + \frac{|x|}{x}$

نکته:

برای رسم توابع به فرم $y = k|ax + b| + d$ به کمک نقطه یابی ابتدا ریشه ی داخل قدر مطلق را بدست آورده و ریشه ی بدست آمده را همراه با یک عدد در سمت چپ و یک عدد در سمت راست آن را به x می دهیم و y را بدست می آوریم .

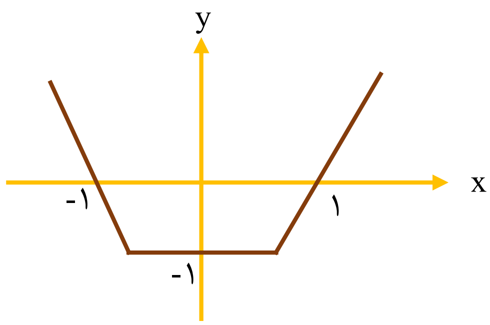
x	یک عدد قبل	ریشه	یک عدد بعد
y			

مثال۷: نمودار تابع $f(x) = -۲|x - ۳| + ۱$ را رسم کنید .

❋ رسم توابع به فرم $y = |f(x)|$:

ابتدا نمودار $y = f(x)$ یعنی عبارات داخل قدر مطلق را رسم می کنیم سپس قسمت های بالای محور x ها را نگه می داریم و قرینه ی قسمتهایی که زیر محورx ها هستند را نسبت به محورx ها بدست می آوریم .

مثال۸ : شکل زیر نمودار تابع با ضابطه ی $y = f(x)$ است نمودار $y = |f(x)|$ را رسم کنید.



مثال۹: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |x^{۲} - ۱|$

ب) $y = |\sin x|$ $\qquad -\frac{\sqcap}{۲} \leq x \leq \frac{\sqcap}{۲}$

پ) $y = |\cos x|$ $\quad ۰ \leq x \leq ۲\sqcap$

ت) $y = \left||x| - ۲\right|$

ج) $y = |x^۲ - ۲x|$

د) $y = \left||x + ۱| - ۱\right|$

❋ ویژگیهای قدر مطلق:

۱- قدر مطلق هر عدد حقیقی، مقداری نامنفی است $|x| \geq ۰$

۲-قدر مطلق هر عدد حقیقی و قدر مطلق قرینه ی آن عدد با هم برابرند $|x| = |-x|$

۳- $\sqrt{x^۲} = |x|$ در حالت کلی $\forall x \in \mathrm{IR}؛ \sqrt[۲n]{x^{۲n}} = |x|$

۴- برای هر دو عدد حقیقی x و y همواره داریم $(y \neq ۰)$ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ و $|x.y| = |x||y|$

تمرین: ویژگی ۴ را ثابت کنید.

۵- برای هر عدد حیقیقی x　$|x^۲| = |x|^۲ = x^۲$

۶- برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$|x| = |y| \Longrightarrow x = \pm y$ $\qquad$ $|x| = a \overset{a>0}{\Longrightarrow} x = \pm a$

۷- برای هر عدد حقیقی x، اگر $a > 0$ باشد آنگاه

الف) $|x| \leq a \to -a \leq x \leq a$

ب) $|x| \geq a \to \begin{cases} x \geq a \\ \text{یا} \\ x \leq -a \end{cases}$

تمرین: ویژگی ۷ را ثابت کنید.

۸- برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

تمرین: ویژگی ۸ را ثابت کنید.

مثال۱۰: برای هر دو عدد حقیقی b و a ثابت کنید(نامساوی مثلث)

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

مثال ۱۱: برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید.

الف) $|x-y| \leq |x| + |y|$

ب) $|x| - |y| \leq |x-y|$

حل معادلات شامل قدرمطلق:

الف) معادلاتی که به وسیله ی ویژگی های قدر مطلق حل می شوند:

$|U|^۲ = U^۲$　　$|f(x)| = |g(x)| \Longrightarrow f(x) = \pm g(x)$　　$|U| = a \Longrightarrow U = \pm a$

مثال ۱۲: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $|۲x+۱| - ۲ = ۵$

۲) $\big||۳x-۱| - ۳\big| = ۸$

۳) $|۳x-۲| = |x-۴|$

۴) $|x-۱| = ۴ - ۳x$

۵) $\big||x^۲-۱| - ۲\big| = ۱$

۶) $۲x - |x - ۵| = ۱$

۷) $|x^{۲} - ۳x| + x^{۲} - ۳x = ۰$

ب) معادلاتی که با ویژگی های قدر مطلق حل نمی شوند را با ریشه یابی عبارات درون قدر مطلق و تعیین علامت آنها، حل می کنیم.

مثال۱۳: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $x|x| = -۴$

۲) $|۲x - ۱| + |x| = ۷$

۳) $|x - ۲| - |x + ۱| = ۳$

۴) $|۳x - ۱| - |x| = x + ۲$

مثال۱۴: معادلات زیر را حل کنید.

$۱)\sqrt{x-۱}-|x-۱|=۰$

$۲)\dfrac{۲-x}{|x-۳|}=۱$

$۳)\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}=۲x+۱$

مثال۱۵: بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱- و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد.

حل معادلات به روش هندسی:

برای حل معادله $f(x)=g(x)$ کافی است نمودارهای $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را در یک دستگاه رسم کنید طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار جواب های معادله $f(x)=g(x)$ خواهند بود.

در این روش حل معادله، تعداد جواب ها و مقدار تقریبی آنها (و گاهی دقیق) قابل تشخیص است.

مثال۱۶: معادلات زیر را به رو ش هندسی حل کنید.

۱) $\sqrt{x} = -x + ۱$

۲) $|x| = x^{۲} - ۳x$

۳) $|x - ۱| = x^{۲} - x - ۱$

۴) $x - ۲\sin x = ۰$

۵) $|x| = \sqrt{۲ - x}$

۶) $x^{۲} - \sqrt{x + ۲} = ۲x - ۱$

۷) $|x - ۱| + |x + ۱| = ۲$

مثال۱۷: معادله $|x^{۲} - ۱| = |۲x - ۱|$ را به دو روش جبری و هندسی حل کنید.

مثال۱۸: نمودار تابع $y = x - \frac{x}{|x|}$ را رسم کنید سپس به ازای $y = ۳$ معادله را به روش جبری و هندسی حل کنید.

مثال۱۹: نمودار $f(x) = \big||x| - ۲\big|$ را رسم کنید سپس معادله $f(x) = ۱$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

مثال۲۰: نمودار تابع $f(x) = |x^{۲} - ۲x|$ را رسم کنید سپس به دو روش جبری و هندسی معادله $|x^{۲} - ۲x| = ۲$ را حل کنید.

❋ حل نامعادلات شامل قدر مطلق به کمک ویژگی های قدر مطلق:

$$|U| \leq a \rightarrow -a \leq U \leq a$$

$$|U| \geq a \rightarrow \begin{cases} U \geq a \\ \text{یا} \\ U \leq a \end{cases}$$

مثال(۲): نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $|۲-۳x| < ۵$

۲) $|۲x+۱| > ۳$

۳) $\frac{۱}{|۳x-۱|} > ۲$

۴) $|۲x-۳| < x$

۵) $|x+۱| < \sqrt{۳x+۱}$

۶) $|۲x+۱| < |x+۱|$

تمرینات تکمیلی

۱- معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف) $|sin\,x| = |cos\,x|$ ب) $\sqrt{(x-۲)^{۲}} = ۲ - x$

پ) $\sqrt{x-۱} - sin\,x = ۰$ ت) $\sqrt{x} + ۲x = x^{۲} - ۲$

۲- جوابهای معادله $۳ = \frac{|۲x|}{|x+۱|}$ را بدست آورید.

۳- اگر $۲x \geq x^{۲}$ باشد حاصل $A = \sqrt{x^{۲}} + \sqrt{x^{۲} - ۴x + ۴}$ کدام است.

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) $۲ - ۲x$ ۴) $۲x - ۲$

۴- اگر فاصله ی عدد حقیقی x روی محور اعداد حقیقی تا ۱- ، کم تر از ۲ باشد حاصل $A = |x+۳| + |x-۱|$ کدام است.

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵

۵- مجموع جوابهای معادله $|x^{۲} + ۳x - ۲| = |x^{۲} + x|$ کدام است.

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۶- به ازای کدام مقدار k معادله $||x+۲| - ۲| = k^{۲} - ۷$ دارای ۳ جواب است.

۱) ± ۱ ۲) ± ۳ ۳) ± ۵ ۴) ± ۹

۷- مساحت ناحیه محدودیه نمودار های دو تابع $y = x + |x|$ و $y = ۲ - |x|$ کدام است.

۱) ۲ ۲) $\frac{۷}{۳}$ ۳) $\frac{۸}{۳}$ ۴) ۳