

جمع بندی حد و پیوستگی

اولین قدم برای محاسبه حد جا بگذاری است

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{1^2 + 1}{1 + 1} = 1$$

اما گنگورنه اینجوری کتب نمی ده

حد و قدر مطلق: قبل از هر اقدامی قدر مطلق رو دقیقین علامت کن یعنی برود داخل قدر مطلق رو نگاه کن ببین حوالی حد خواسته شده می مبه
 مثبت شد ← خودشو بیرون بیار
 منفی شد ← قرینش رو بیرون بیار

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} |4 - x^2| = -(4 - x^2) = -(0) = 0$$

$$|4 - (4, 4)| = |-1/4| = 0 \text{ داخل منفی شد} \rightarrow \text{قرینش رو بیار بیرون}$$

مثلاً $2^+ \rightarrow 2,1$

به سوال: آره $\lim_{x \rightarrow 2} |4 - x^2|$ روداره بود چی کار کنیم (تلفته بود چی با راست)

نگاه کن کنیم آره عددی که x داره همسین میل میکنه (اینجا 2) ربه داخل قدر مطلق بود
 حتماً باید ربه بار $x \rightarrow 2^+$ و ربه بار $x \rightarrow 2^-$ رو محاسبه کنیم آره هم ربه نبوده فقط کافی

$$\lim_{x \rightarrow 2} |4 - x^2| = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} |4 - x^2| = -(4 - x^2) = 0 & \text{جا بگذاری کنیم} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} |4 - x^2| = 4 - x^2 = 0 & \text{هر دو منفی شدن بیامورده} \end{cases}$$

می خوره ← وقتی $\frac{0}{0}$ میاد وسط می نمایی

حد جزء صحیح: قبل از هر اقدام جزو صحیح رو تعیین مقدار می کنیم یعنی عددی نداریم حوالی

حد فزاینده شده بین می

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = [2, 1] = 2$$

این عدد 2^+ از 2

$$a \leq x < a+1 \quad [x] = a$$

می درنیم نه

یعنی جواب می گوید

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [-x] = [-2, 1] = -2 \rightarrow$$

خواهیم باشه نه به جایی x ما 1 گذاشتیم
یعنی اول منفرجه گذا رو جواب تا بیرون نذاره

یه سوال: آره $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$ روداد چهارتم: میوریم به با چپ و به با راست رو حساب کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 2} [x] \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = [2, 1] = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = [1, 0] = 1 \end{cases}$$

$$2 \neq 1$$

حد ندارد

گذرد تا به وقتی حد داره نه حد چپ و راست موجود و برابر باشه

یعنی همیشه میوریم برای می به حد، چپ و راست رو حساب کنیم: توی حالت این کار واجب

۱) قدر مطلق که حد فزاینده شده روی قدر مطلق هست

۲) جزو صحیح قطعا تحت هر شرایطی با چپ و راست روی میوریم

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq a \\ g(x) & x < a \end{cases}$$

۳) خودش دو ضابطه ای بده

حد و ترکیب توابع: به همین کتاب درس داریم که امروزه حد و ترکیب توابع، ترکیب کرده

می‌تونه ست جدید کتلور باشه بریم ببینیم چه می‌تونه

در صورتی که $f(x+2) = \frac{x+4}{x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

ضریب ساده می‌ایم $x+2=3$ اینجا $x=1$ می‌گفتیم که رو اینجا $(\frac{x+4}{x})$ چندتا

که می‌تونه به همین راحتی

رفع ابهام $\frac{0}{0}$: قبل از هر چیزی قدر مطلق درجه صغیر و طبق اول چیزی که به کعب تقسیم

از بین ببر بعدش برو رفع ابهام

در روش برای رفع ابهام داریم
 هم ارزی ما مثلثاتی
 هم ارزی ما مثلثاتی

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sin u = u \rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \sin^m u = u^m$$

هم ارزی ما مثلثاتی:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \tan u = u \rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \tan^m u = u^m$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} 1 - \cos u = \frac{u^2}{2} \rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} 1 - \cos^m u = \frac{m u^2}{2}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} u - \sin u = \frac{u^3}{6}$$

این ما هم فقط با هم به عنوان کلمه

$$\lim_{u \rightarrow 0} \tan u - u = \frac{u^3}{3}, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \tan u - \sin u = \frac{u^3}{2}$$

سوئیچال: از صورت مشتق بگیر اونو تو صورت بنویس از مخرج مشتق بگیر اونو تو مخرج بنویس

جنگ سوئیچال دسم ارزی: حق با دسم ارزی است

اول از کدوم استفاده کنم ← مثلثاتی دیدی قبل سوئیچال هم دسم ارزی برد چون راحت تره

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \text{، صورت } 0 \text{ مخرج } x$$

دسم ارزی رو میباید فقط برای به قیمت نوشت مثلاً

ولی مخرج سر جا خودش میمونه و دسم ارزی نداره

سوئیچال قطعاً باید همزمان از صورت و مخرج باشه

نمی اول دسم ارزی رفت بعد دسم ارزی آنگه باز دسم ← سدا و دیکه دسم ارزی نداریم

از سوئیچال بری

تحلیل این تست به ما میبده که باید چیکار کنیم

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos 2x)}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0}$$

✓ $x \rightarrow \pi$ رفته و ما میبینیم که $1 + \cos 2x$ میمونه صفره چون \sin صفره

سپس تو صورت طبق $(\lim_{k \rightarrow 0} \sin k = k)$ بجای $\sin(1 + \cos 2x)$ میذاریم بنویسیم $1 + \cos 2x$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \frac{0}{0} \text{ چون } \cos 2x \text{ به سمت صفر میره}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin x}{2 \sin 2x} = \frac{0}{0} \text{ ✓ می ریم سوئیچال}$$

عالی بود این تست

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\cos x}{2x \cos 2x} = \frac{1}{4} \text{ ✓ باز سوئیچال}$$

حد بی نهایت: می روئیم که $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$ حالا چه بی نهایتی میسر لکن ضرب کردن اینها

ضرب کردن علامت عدد در علامت جیب و راست $(0^+$ و $0^-)$

$$\frac{\text{علامت}}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty \quad \text{و} \quad \frac{\text{علامت منفی}}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 + x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 = \infty$$

حد در بی نهایت: اینجا دنبال بی نهایت بگرد

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m}{a'x^n} = \begin{cases} m < n & 0 \\ m = n & \frac{a}{a'} \\ m > n & \infty \end{cases}$$

رتبه اعداد $\frac{\infty}{\infty}$

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1}}$$

$$= \begin{cases} \text{زوج } n & \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na}\right) \\ \text{فرد } n & \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na}\right) \end{cases}$$

متداول ترین بی نهایت $\frac{\infty}{\infty}$ روکت برون نه جوابش بی نهایت (یعنی بی نهایت با صورت و مخرج برابرند)

و بعضی بی حد $\frac{0}{0}$ رداخت بخواد یا چیزی بی نهایت همین ماجرا

اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$ نماند حد این سر وقت $x \rightarrow 3$ کدام است؟

وقتی جواب $\frac{\infty}{\infty}$ شده بی حد یعنی بی نهایت با صورت و مخرج از یک درجه اند و قبیه ماجرا

$$\frac{a}{-1} = 3 \Rightarrow a = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \text{ hop} = \frac{-3}{-1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}} = 3$$

رفع اہتمام $\infty - \infty$:

درتوابع سری: مخرج مشترک کی کیریم و بقیمہ ماجرا $\leftarrow \frac{0}{0}$ میں و تعویض
 جواب میں کفایت میں \leftarrow

رفع اہتمام $\infty \times \infty$: عامل ∞ راہ صورت مکتوبوں زیر عامل صفر میں نویسیم تا بہ

$\frac{0}{0}$ تبدیل شود و سین یا کوسین تعویض تعویض رفع اہتمام میں نویسیم

بیوستگی: چیز جدیدی نسبت ہمیں حد میں باہر تفاوت نہ ہو جب برابر

حد راست برابر مقدار تابع در اول نقطہ

تیب ما مداول بیوستگی: \leftarrow بالا و پایین برابر قرار دے

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \leq a \\ g(x) & x > a \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ g(x) & x = a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dots & x > a \\ \dots & x < a \end{cases}$$

اینیم و اندھی جب حد میں راست \rightarrow این برای مقدار تابع

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & |x| < a \\ g(x) & |x| \geq a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dots & |x| < a \\ \dots & |x| \geq a \end{cases}$$

تو دو نقطہ a و $-a$ باید بررسی نمی بیوستگی رو

بیوستگی از این ۳ تیب خارج تیب قطعاً حالاتوابع می باشند به طراح محرم تیب داره
 می تونه جبر ساده، قدر مطلق، جزء صحیح، مثلثات باشد احتمال زیاد
 دیهودسون به اہتمام $\frac{0}{0}$ لیم داشته باشند آنگه بخوان نفس نشن

دو نلته منصوص خلی عمم نه طراح ما دستور همس توج نلردن

۱) یہ حد بہ نسبت علامت جوابس شدہ یہ عدد بعدس دو حالت پس میاد

حالت اول: صورت صفریہ از مخرج صفریم ← مخرج ہم باید صفریہ

حالت دوم: مخرج صفریہ از صورت بن خیریم ← صورت ہم باید صفریہ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 2} = L \quad \text{و } L \in \mathbb{R} \quad \text{آنگاه } L \text{ تمام است}$$

مخرج میہ صفر و جواب ہم تک عدد حقیقی است لذا باید به ازای $x=1$ صورت ہم صفر شود

$$\lim_{x \rightarrow 1} ax - \sqrt{x+2} = 0 \quad a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 2} = \frac{0}{0} \text{ h.o.p.} = \frac{1}{12}$$

۲) یہ حد بہ نسبت بن نہایت میرہ جواب شدہ یہ عدد ولی نہ کامل متر اعم وجود دارہ نہ لیج

میشہ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)x^2 + x^2}{bx^2} = 1 \quad \text{ا } a+b \text{ تمام است}$$

جواب عدد شدہ پس باید بر توان ما صورت و مخرج تک باشند اول x امانہ صحت باید از پس بگیریم

$$a+b=0 \leftarrow \frac{1}{b}=1 \Rightarrow \boxed{b=1}, \quad a+1=0 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

✓