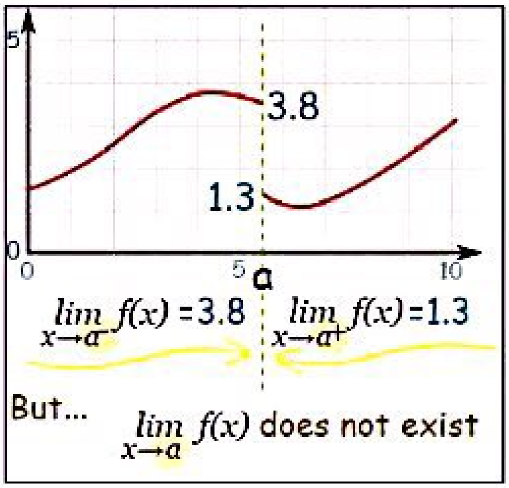
به نام خدا

جزوه تکنیکی- مفهومی

ریاضیات کنکور

ویژه رشته تجربی

مبحث: حد و پیوستگی



مدرس: شیوا اربابی

فارغ التحصیل دانشگاه صنعتی شریف

دانشجوی دندانپزشکی علوم پزشکی مشهد

@mathArbabi

مبحث : حد و پیوستگی

مفهوم بخش پذیری :

- اگر $x=a$ ریشه‌ی عبارت $f(x)$ باشد، پس $f(x)$ حتماً عامل صفر شونده‌ی $(x-a)$ را در خودش دارد ← در این مواقع می‌گوییم عبارت $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} f(x) & p(x) \\ \cline{2-2} - \quad\quad & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array} \longrightarrow f(x)=p(x)\,Q(x)+R(x) \quad (*)$$

اگر مقدار باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ را بخواهیم بدانیم، کافی است معادله‌ی فوق $(*)$ را به ازای $x=a$ (ریشه‌ی عبارت $p(x)$) حل کنیم ← مقدار $R(x)$ بدست می‌آید

مثلاً می‌خواهیم بدانیم باقی مانده تقسیم $\underbrace{x^3-2x^2+8x-11}_{f(x)}$ بر $\underbrace{2x-4}_{p(x)}$ چند می‌شود؟

$x=2$ ریشه عبارت $p(x)$ (مقسوم علیه) می‌باشد ← $f(x)=p(x)Q(x)+R(x)$

$$x=2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \underbrace{f(2)}_{5} = (\underbrace{2x-4}_{0})\,Q(x)+R(x) \longrightarrow \boxed{R(x)=5}$$

مثال (۱) اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $4-x^2$ برابر $3x+12$ باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم $2f(x+1)-1$ بر $x+3$ کدام است؟

۱) -6 ۲) 6 ۳) 11 ۴) -11

حل :

$f(x)=p(x)Q(x)+R(x) \longrightarrow f(x)=(x^2-4)Q(x)+3x+12$

$\longrightarrow f(2)=0+18=18 \quad , \quad f(-2)=0+6=6$

$2f(x+1)-1=(x+3)Q(x)+R(x) \xrightarrow{x=-3} 2f(-2)-1=0+R(-3)$

$\longrightarrow \boxed{R(-3)=11}$

۷) مفهوم همسایگی :

به هر بازه‌ای که شامل عددی خاص مثلاً $x=a$ باشد، یک همسایگی a می‌گوییم

مثلاً بازه‌ی $(2,5)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد.

حال اگر در این بازه خود عدد a حذف شده باشد، می‌گوییم یک همسایگی محذوف a داریم.

همسایگی a   همسایگی محذوف a

حال اگر ۲ را عددی مثبت و حقیقی فرض کنیم، بازه‌ی $(a, a+2)$ یک همسایگی راست a و

بازه‌ی $(a-2, a)$ یک همسایگی چپ a می‌باشد.

مثال (۲): کدام گزینه درباره‌ی تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-[x]}$ درست است؟

۱) در همسایگی $x=1$ تعریف شده است   ۲) در همسایگی راست $x=2$ تعریف می‌شود

۳) در همسایگی محذوف $x=2$ تعریف شده است   ۴) در همسایگی چپ $x=-2$ تعریف می‌شود

حل: ابتدا دامنه‌ی تابع $f(x)$ را می‌یابیم ← $4-x^2\geq 0 \longrightarrow x^2\leq 4 \longrightarrow -2\leq x\leq 2$

از طرفی مخرج کسر نباید صفر شود ← $x-[x]=0 \longrightarrow x\notin \mathbb{Z}$

از اشتراک دو بازه‌ی فوق درمی‌یابیم که دامنه‌ی تابع $f(x)$ معادل بازه‌های :

$(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$ می‌باشد

با بررسی گزینه‌ها درمی‌یابیم فقط گزینه‌ی اول صحیح می‌باشد.

مفهوم حد :

- دقت می‌کنیم $\lim_{x\to a} f(x)$ یعنی می‌خواهیم ببینیم اگر x به عدد a نزدیک شود (هم از راست هم از چپ) مقدار f به چه عددی نزدیک می‌شود.
- $\lim_{x\to a^+} f(x)$ یعنی اگر از سمت راست به a نزدیک شوم مقدار f به چه عددی نزدیک می‌شود
- $\lim_{x\to a^-} f(x)$ یعنی اگر از سمت چپ به a نزدیک شوم مقدار f به چه عددی نزدیک می‌شود.

شرط وجود حد در یک نقطه این است که اولاً هم حد راست داشته باشد هم حد چپ ثانیاً $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ و ثالثاً جواب حد، بی‌نهایت ($\pm\infty$) نشود.

یعنی اگر فرضاً از یک سمت حد نداشته باشیم (مثلاً در دامنه موجود نباشد) می‌گوییم در آن نقطه بطور کلی حد وجود ندارد (نظام جدید :)

مثال (۳) : آیا $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$ وجود دارد ؟

حل : دقت می‌کنیم x به ۲ میل می‌کند یعنی هم از سمت راست ($x\to 2^+$) هم از سمت چپ ($x\to 2^-$) باید بررسی شود

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2} \begin{cases} \lim_{x\to 2^+}\sqrt{x-2} = 0 \\ \lim_{x\to 2^-}\sqrt{x-2} = \text{وجود ندارد} \end{cases}$$

وجود ندارد ← چون $x<2$ در دامنه‌ی تابع موجود نیست

پس بطور کلی می‌گوییم این تابع در $x=2$ حد ندارد.

قدم اول در حد، حذف قدرمطلق و حذف جزء صحیح صورت سوال می باشد.

توجه کنید هر وقت در صورت سوال قدرمطلق دیدید، می بایست ابتدا عبارت داخل آن را تعیین علامت کرد و سپس با توجه به اینکه در همسایگی a $(x\to a)$ علامت عبارت داخل قدرمطلق مثبت است یا منفی، قدرمطلق را حذف می کنیم ←

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

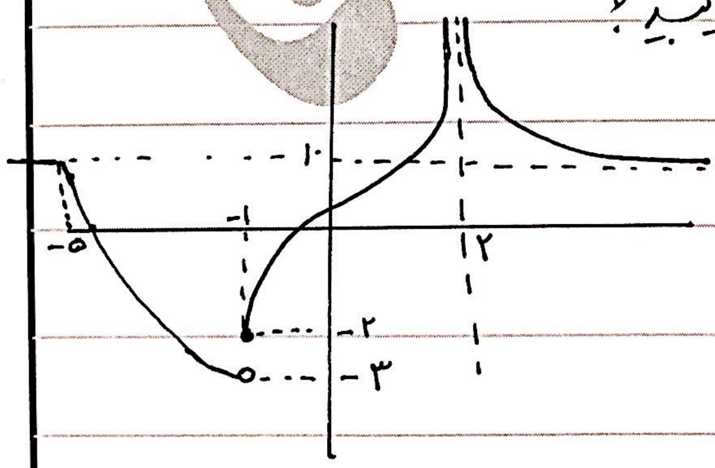
و هر وقت در صورت سوال جزء صحیح دیدید، با توجه به اینکه x به چه عددی میل می کند، جزء صحیح را حذف کرده و به جای آن عددی بذاریم

در واقع قدرمطلق را با تعیین علامت حذف می کنیم و جزء صحیح را با تعیین مقدار!

قدم بعدی در حد، جایگذاری $x = a$ در ضابطه‌ی $f(x)$ است.

مثلاً $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{5}{1} = \boxed{5}$

مثال (۴): در نمودار زیر حاصل حدهای زیر را بیابید؟



A) $\lim_{x\to 2} f(x)$

B) $\lim_{x\to -1} f(x)$

C) $\lim_{x\to -5} f(x)$

D) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

حل :

A) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) \begin{cases} f(2^+) = +\infty \\ f(2^-) = +\infty \end{cases} \longrightarrow$ حد ندارد

B) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \begin{cases} f((-1)^+) = -2 \\ f((-1)^-) = -3 \end{cases} \longrightarrow$ حد ندارد

C) $\lim\limits_{x \to -5} f(x) \begin{cases} f(-5)^+ = 1 \\ f((-5)^-) = 1 \end{cases} \longrightarrow$ حد دارد

D) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \begin{cases} f(+\infty) = 1 \\ f(-\infty) = 1 \end{cases} \longrightarrow$ حد دارد

همانطور که ملاحظه کردید حاصل این حد ها را فقط با جایگذاری a در ضابطه‌ی $f(x)$ یافتیم.

گفتیم قدم اصلی حد، جایگذاری $x = a$ در ضابطه‌ی $f(x)$ می‌باشد، حال اگر در حین جایگذاری به عدد صفر رسیدیم، تشخیص نوع صفر هم است $\longleftarrow$

انواع صفر:

- صفر حدی: عددی است بسیار نزدیک به صفر $\longrightarrow$ مثلاً عدد $0/0000\ldots1$ ± صفر حدی است یا مثلاً پاسخ حد $\lim\limits_{x \to 2} x-2 = 0$، صفر حدی است. چون x دقیقاً عدد ۲ نیست !!
- صفر مطلق: خود عدد صفر است $\longrightarrow$ مثلاً پاسخ حد $\lim\limits_{x \to 0^+} [x] = 0$ صفر مطلق است، چون جواب خلاصه، یک علامت بدون اشاره می‌باشد.

مبحث : حد و پیوستگی

حالات مختلف حدگیری $x=a$ در حد تابع $f(x)$:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = L \longrightarrow$ حد دارد

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر مطلق}} \longrightarrow$ تعریف نشده $\longrightarrow$ حد ندارد

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}} = \pm\infty \longrightarrow$ حد ندارد

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} =$ تعریف نشده $\longrightarrow$ حد ندارد

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} =$ صفر مطلق $\longrightarrow$ حد دارد

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \text{صفر مطلق} \times \infty = 0 \longrightarrow$ حد دارد

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \text{صفر حدی} \times \infty =$ مبهم $\longrightarrow$ باید رفع ابهام شود

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}} =$ مبهم $\longrightarrow$ باید رفع ابهام شود

۲ حالت یکسان

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = {\text{۱ مطلق}}^{\infty} = 1 \longrightarrow$ حد دارد

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = {\text{۱ حدی}}^{\infty} =$ مبهم $\longrightarrow$ باید رفع ابهام شود

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty - \infty =$ مبهم $\longrightarrow$ باید رفع ابهام شود

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty} =$ مبهم $\longrightarrow$ باید رفع ابهام شود

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty^{\text{صفر حدی}} =$ مبهم $\longrightarrow$ باید رفع ابهام شود

حال حالات رفع ابهام را با هم بررسی می‌کنیم ...

مبحث : حد و پیوستگی

مبهم $= \dfrac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$ (غیر مثلثاتی) :

در این حالت ۲ روش ارائه می‌دهیم ←

روش اول : حذف عامل صفر شونده از صورت و مخرج کسر ← دقت کنید وقتی x به a میل می‌کند و حاصل حد $\frac{0}{0}$ می‌شود یعنی هم صورت و هم مخرج، عامل صفر شونده $(x-a)$ را در خود دارد. حال می‌بایست این عامل را در صورت و مخرج یافته و سپس با هم ساده کنیم تا رفع ابهام صورت گیرد.

مثلاً برای حل حد $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ ابتدا $x=1$ را جایگذاری می‌کنیم می‌بینیم $\frac{0}{0}$ صفر حدی می‌شود ← $(x-1)$ عامل صفر شونده است ←

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = \boxed{3}$$

مثال (۵) : حاصل حد روبرو را بیابید؟ $\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+5x-9}{x-1}$

حل : ابتدا $x=1$ را در صورت سؤال جایگذاری می‌کنیم می‌بینیم حاصل $\frac{0}{0}$ صفر حدی می‌شود. سپس باید عامل صفر شونده $(x-1)$ را از صورت و مخرج با هم ساده کرد.

$$= \frac{4\cancel{(x-1)}(x+9/4)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} 4x+9 = \boxed{13}$$

نکته : هر وقت قادر به تجزیه عبارت صورت سؤال نبودید، صورت و مخرج را بر عامل صفر شونده مثلاً $(x-a)$ تقسیم کنید تا خارج قسمت تعیین شود.

روش ۲ : هوپیتال ← (ویژه دانش آموزان دوازدهم + فارغ التحصیلان)

در این روش ابتدا از صورت و مخرج مشتق می‌گیریم و سپس حد آن در $x=a$ را محاسبه می‌کنیم

(اگر باز هم $\frac{0}{0}$ شد، می‌توان برای چندمین بار از هوپیتال استفاده کرد)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

مثال (۶) : حاصل حد زیر را بیابید؟

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x-1}=\frac{0}{0}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2}{1}=\boxed{5}$$

نکته : هرگاه عبارت زیر رادیکال صفر شود، نمی‌توان از هوپیتال استفاده کرد. برای آن ۲ راه حل ارائه می‌دهیم.

راه حل ۱ ← عبارت زیر رادیکال را مربع کامل کنیم تا رادیکال حذف شود و بتوان از هوپیتال استفاده کرد.

راه حل ۲ ← از حذف عامل صفرشونده استفاده می‌کنیم.

مثال (۷) حاصل حد زیر را بیابید؟ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$

حل : ابتدا $x=1$ را جایگذاری می‌کنیم می‌بینیم حاصل $\frac{0}{0}$ (صفر/صفر) می‌شود

از طرفی چون عبارت زیر رادیکال صفر است پس نمی‌توان از هوپیتال استفاده کرد ← مربع کامل هم نمی‌توان ساخت ← حذف عامل صفرشونده

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}^{1/2}}=\lim_{x\to 1}(x-1)^{1/2}(x+1)$$

$= 0$ ← حد دارد

مثال (۸) : حد عبارت $\lim \frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ وقتی $x \to 2^-$ کدام است؟

-3 (۱ -2 (۲ 2 (۳ 3 (۴

حل : برای حل، ابتدا می بایست قدر مطلق را حذف کنیم سپس تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق

	-1		2	
x^2-x-2	$+$	$-$		$+$

$\uparrow$ 2^-

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{-x^2+x+2}{2x-\sqrt{x^2+12}} = \frac{0}{0} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 2} \frac{-2x+1}{2-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}} = \boxed{-30}$$

---

۷) مبهم $= \frac{\text{صفرصفری}}{\text{صفرصفری}}$ (مثلثاتی) :

اگر پس از جایگذاری $x=a$ در ضابطه‌ی $f(x)$ (مثلثاتی) به $\frac{0}{0}$ $\left(\frac{\text{صفری}}{\text{صفری}}\right)$ رسیدیم می بایست با استفاده های فرمولهای مثلثاتی، عامل صفر شونده را یافته تا بتوانیم آن را از صورت و مخرج حذف کنیم.

مثال (۹) : حد عبارت $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$ وقتی $x \to \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

حل : $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \frac{0}{0} \to$ مبهم

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}{\cancel{(1-\sin x)}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} 1+\sin x = \boxed{2}$$

مثال (۱۰) : حاصل $\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\tan 2x}$ کدام است ؟

۱) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$

حل : ابتدا به جای $\tan 2x$ قرار می دهیم $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

دقت کنید چون $\cos 2x = 1$ می باشد در ازای $x=\pi$)

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\tan 2x} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}$$

همان مشتق‌گیری را در عبارت جایگذاری می کنیم

$$= \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin 2x} \times \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin 2x(\sqrt{1-\cos x})} = \frac{|\sin x|}{2\sin x \cos x \sqrt{1-\cos x}}$$

$x\to\pi^-$

در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد.

$$= \frac{\cancel{\sin x}}{2\cancel{\sin x} \times -1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{-\sqrt{2}}{4}}$$

نکته : در حدهای مثلثاتی هر وقت عبارت $\sqrt{1+\cos x}$ یا $\sqrt{1-\cos x}$ داریم ، می توانیم عبارت را

در مزدوج آن ضرب کرد تا به عبارت $\sqrt{1-\cos^2 x} = |\sin x|$ برسیم .

دقت کنید شرط لازم برای حل حدهای مثلثاتی ، تسلط کافی بر دایره‌های مثلثاتی می باشد .

حد بی نهایت ← $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \pm\infty$:

در این گونه مسائل ، علامت ∞ برای ما اهمیت دارد و برای تعیین علامت ∞ ، می بایست

علامت صفر صدی را تعیین کنیم ← تعیین علامت برح

انواع ریشه	ریشه ساده : علامت تابع قبل و بعد ریشه عوض می شود .
	ریشه مضاعف : علامت تابع قبل و بعد ریشه عوض نمی شود

نکته : وقتی x به ریشه ساده ی مخرج میل کند (ریشه مشترکی با صورت کسر را صفر نکند) آنگاه برای تعیین علامت ∞ می بایست حد را به ۲ شاخه تقسیم کنیم { حد راست / حد چپ

مثلاً در حد مقابل می بایست حتی $x \to 3^{+}$ و $x \to 3^{-}$ را جداگانه بررسی کنیم :

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0} = \infty \quad \begin{cases} x \to 3^{+} : \dfrac{1}{0^{+}} = +\infty \\ x \to 3^{-} : \dfrac{1}{0^{-}} = -\infty \end{cases}$$

در واقع چون $x=3$ ریشه ساده مخرج است ، پس $x-3$ در اطراف $x=3$ تغییر علامت می دهد ← علامت ∞ قبل و بعد ریشه تغییر می کند ←

		3	
$x-3$	$-$		$+$

نکته : وقتی x به ریشه مضاعف مخرج میل کند (ریشه مشترکی با ریشه صورت نباشد) آنگاه برای تعیین علامت ∞ نیازی به دو شاخه کردن نمی باشد ← چون علامت تابع قبل و بعد ریشه عوض نمی شود . مثلاً در حد $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2}$ ، چون $x=3$ ریشه مضاعف مخرج است و در هر دو حالت 3^{+} و 3^{-} علامت مخرج مثبت است ، پس در هر دو حالت جواب حد $+\infty$ می باشد و نیازی به ۲ شاخه کردن نیست .

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{0^{+}} = +\infty$$

		3	
$(x-3)^2$	$+$		$+$

نتیجه‌گیری مهم : هر وقت دیدیم $x \to a$ و جواب حد بی‌نهایت شده است ، نتیجه می‌گیریم $x=a$ حتماً ریشه فرج است و ریشه صورت نمی‌باشد $\leftarrow \infty = \frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

و اگر دیدیم $x \to a$ و جواب حد $+\infty$ یا $-\infty$ است ، یعنی $x=a$ قطعاً ریشه مضاعف فرج است $\leftarrow$ چون اطراف a (a^- و a^+) فرج تغییر علامت نداده و علامت ∞ در هر دو طرف (a^+ و a^-) یکسان می‌باشد.

مثال (۱۱) : اگر $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = -\infty$ باشد ، $a+b$ کدام است ؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) 6 ۴) 12

حل : با توجه به نکته‌ی فوق ، در می‌یابیم $x=3$ قطعاً ریشه‌ی مضاعف فرج می‌باشد $\leftarrow$ چون اطراف $x=3$ (3^- و 3^+) ، علامت ∞ یکسان است $\leftarrow$ پس فرج حول دهنده ریشه تغییر علامت نداده است.

$$\to 2x^2+ax+b = 2\underset{\downarrow}{(x-3)^2} = 2(x^2-6x+9) = 2x^2\underbrace{-12}_{a}x+\underbrace{18}_{b}$$

چون $x=3$ ریشه مضاعف است $\qquad \to a+b = -12+18 = \boxed{+6}$

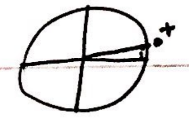
دقت کنید این سؤال ، راه‌حل‌های متفاوت دیگری هم دارد.

مثال (۱۲) : حاصل $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1-x}{1-\cos x}$ کدام است ؟ ۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) صفر

حل : قدم اول حد ، جایگذاری $x=a$ در ضابطه‌ی $f(x)$ می‌باشد $\leftarrow$

$$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1-x}{1-\cos x} = \frac{1}{0} = \infty \longrightarrow \text{علامت } \infty \text{ برای ما مبهم است}$$

برای تعیین علامت ∞ ، می‌بایست علامت صفر را تعیین کنیم $\leftarrow$ $\cos 0^+ = 1^- \to 1-\cos x = 1-1^- = 0^+$

 $\longrightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1-x}{1-\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

نکته : دقت کنید $-1 \le \cos x \le 1$ و $-1 \le \sin x \le 1$ می باشد. پس با توجه به این محدوده درمی یابیم عبارت $1-\cos x$ همیشه مثبت یا صفر می باشد.

مثال (۱۳) : نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x-4}$ در همسایگی $x=-1$ به صورت کدام شکل زیر است؟

حل : دقت کنید هر وقت در سوال نمودار یک تابع را در همسایگی $x=a$ از ما خواهند، می بایست از تابع در $x=a$ حد بگیریم ($x\to a^+$ و $x\to a^-$)

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-3x-4} = \frac{10}{0} = \infty$$

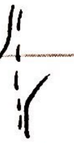
با توجه به جدول تعیین علامت:

$x\to(-1)^+ : \frac{10}{0^-} = -\infty$

$x\to(-1)^- : \frac{10}{0^+} = +\infty$

		-1		4	
x^2-3x-4	$+$		$-$		$+$
	$(-1)^-$		$(-1)^+$		

پس نمودار آن به صورت



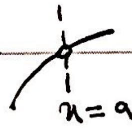
می باشد که گزینه ۴ صحیح است.

نکته : وقتی x به ریشه ی مخرج میل می کند، دو حالت پیش می آید: حالت اول ← $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}=\infty$ (مثلاً $x=a$)

یعنی $x=a$ فقط ریشه ی مخرج است ←

← در $x=a$ حد ندارد.

حالت دوم ← $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}=$ ؟ ← یعنی $x=a$ علاوه بر ریشه ی مخرج، ریشه ی صورت هم می باشد و باید رفع ابهام شود ←

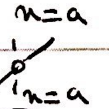


← در $x=a$ حد دارد.

نتیجه می گیریم ← هر وقت در نمودار تابعی

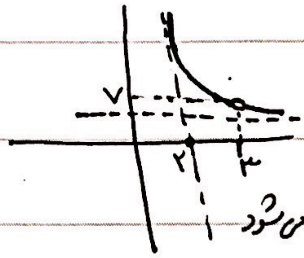
دیدیم یعنی $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}=\infty$ ← $x=a$ فقط ریشه ی مخرج است

و هر وقت در نمودار تابعی نقطه ی توخالی دیدیم



یعنی $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ← $x=a$ هم ریشه ی صورت و هم ریشه ی مخرج می باشد.

مثال (۱۴) : اگر قسمتی از نمودار تابع $y=\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل عبارت $ab+cd$ کدام است؟



۱) ۱۵- ۲) ۱۵ ۳) ۳۰ ۴) ۳۰-

حل : با توجه به نمودار متوجه می‌شویم که وقتی $x\to 2$ جواب حد ∞ می‌شود

پس مخرج کسر صفر می‌کند، $x=2$ ریشه مخرج می‌باشد

همچنین $x=3$ نقطه‌ی توخالی نمودار است ← $x=3$ هم ریشه صورت هم ریشه مخرج می‌باشد

پس معادله مخرج $x=2$ و $x=3$ ریشه‌های مخرج می‌باشد ← $x^2\underset{\downarrow}{-5}x+\underset{\downarrow}{6}$ (c و d) ؛ جمع $S=2+3=5$، ضرب $P=2\times 3=6$

طبق نمودار وقتی $x\to 3$ جواب حد 7 می‌باشد و از طرفی وقتی در نمودار نقطه توخالی می‌بینیم حالت $\frac{0}{0}$ می‌باشد و می‌دانیم وقتی بعد از جایگذاری در حد به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم از هوپیتال استفاده می‌کنیم ← پس جواب حد بعد از هوپیتال برابر 7 می‌باشد

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-5x+6}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 3}\frac{4x+a}{2x-5}=\frac{12+a}{1}=12+a=7\to \boxed{a=-5}$$

از طرفی می‌دانیم $x=3$ ریشه صورت کسر هم می‌باشد ← $2\times 3^2+(-5\times 3)+b=0$

$$\to 18-15+b=0\to \boxed{b=-3}\to ab+cd=15-30=\boxed{-15}$$

---

۷) حد در بی‌نهایت ← $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$ ← (مبهم $=\frac{\infty}{\infty}$)

وقتی $x\to\infty$ و جواب حد به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ شود، از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots}\simeq\frac{ax^n}{a'x^m}\begin{cases}\frac{a}{a'} & m=n\\ \frac{\infty}{\infty}=0 & m>n\\ \frac{\infty}{\infty}=\infty & n>m\end{cases}$$

مثال (۱۵) : حد عبارت زیر را بیابید؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sqrt{9x^2+4x-1}}{3x+1}$$

حل: دقت کنید وقتی x به ∞ میل می‌کند

می‌بایست از هم ارزی پرتوان استفاده کرد.

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty}}_{\text{هم ارزی پرتوان}}\frac{2x-\sqrt{9x^2+4x-1}}{3x+1}\simeq\lim_{x\to\infty}\frac{2x-|3x|}{3x}$$

$+\infty:\ \frac{2x-3x}{3x}=\frac{-x}{3x}=\boxed{-\frac{1}{3}}$

$-\infty:\ \frac{2x+3x}{3x}=\frac{5x}{3x}=\boxed{\frac{5}{3}}$

مثال (۱۶) : اگر $\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b}=+\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}$

کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) 3 ۳) -3 ۴) $\frac{1}{3}$

حل: با توجه به اینکه جواب حد اولی برابر $+\infty$ شده و $x\to -3$، نتیجه می‌گیریم که اولاً $x=-3$

ریشه مخرج است و ثانیاً چون از هر دو سمت ($(-3)^-$ و $(-3)^+$) به $+\infty$ میل کرده است، پس

$x=-3$ ریشه مضاعف مخرج بوده است $\leftarrow$ $(x+3)^2=x^2+6x+9$

$\rightarrow\ =x^2+2ax+b \rightarrow a=3$

$\searrow b=9$

حال حد دومی را محاسبه می‌کنیم $\leftarrow$ هم ارزی پرتوان چون $x\to+\infty$

$$\rightarrow\underbrace{\lim_{x\to+\infty}}_{\text{هم ارزی پرتوان}}\frac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}\simeq\frac{ax^3}{bx^3}=\frac{a}{b}=\frac{3}{9}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

مبحث:

اصلاحیه و ادامه صفحه ۱۵ ⟸

نکته بسیار مهم: گاهی اوقات وقتی x به $\pm\infty$ میل می‌کند و از هم ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم، می‌بایست حتماً عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کرد، پس از هم ارزی استفاده کرد.

برای مثال برای حل حد عبارت $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-4x+1}$ وقتی از هم ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم جواب حد صفر می‌شود ⟵ اشتباه است!!

باید عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کنیم ⟵

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-4x+1}\times\frac{x+\sqrt{x^2-4x+1}}{x+\sqrt{x^2-4x+1}}=\frac{x^2-(x^2-4x+1)}{x+\sqrt{x^2-4x+1}}$$

$$\underset{x\to+\infty}{=}\frac{4x-1}{x+\sqrt{x^2-4x+1}}\xrightarrow{\text{استفاده از هم ارزی پرتوان}}=\frac{4x}{x+|x|}=\frac{4x}{2x}=\boxed{2}$$

نتیجه‌گیری ⟵ وقتی پس از استفاده از هم ارزی پرتوان عبارتهای شامل x با هم خنثی شوند (حذف شوند) می‌بایست ابتدا عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کرد و پس از هم ارزی پرتوان استفاده کرد.

(توضیح بیشتر در کلاس)

مفهوم پیوستگی :

شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در $x=a$ این است که اولاً تابع $f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد

یعنی حد راست و چپ برابر باشند $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ و ثانیاً مقدار حد (L) با مقدار تابع

در $x=a$ برابر باشد $\Leftarrow f(a)=L$

پس به طور کلی تابع پیوسته $f(x)$ در $x=a$ $\Leftarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

حال اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) = L$ می‌گوییم تابع فقط پیوستگی از سمت راست دارد

و اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) = L$ می‌گوییم تابع فقط پیوستگی از سمت چپ دارد.

توجه کنید توابع چند ضابطه‌ای در نقاط مرزی ممکن است ناپیوسته باشند. یعنی مثلاً در تابع

$f(x): \begin{cases} f_1(x) & x \geq a \\ f_2(x) & x < a \end{cases}$ می‌بایست حتماً پیوستگی $f(x)$ را در $x=a$ بررسی کنیم.

مثال (۱۷): اگر $f(x) = \begin{cases} [-x] & ; x<-2 \\ \left|x-\frac{1}{a}\right| & x \geq -2 \end{cases}$ در $x=-2$ پیوسته باشد، آنگاه مقدار

$f(a)$ کدام است؟ ۱) $\frac{15}{4}$ ۲) $\frac{17}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

حل: شرط پیوستگی را در $x=-2$ برای $f(x)$ اعمال می‌کنیم $\Leftarrow$

نکته $\Leftarrow$ وقتی $x \to a^+$ آنگاه $-x \to (-a)^-$

و وقتی $x \to a^-$ آنگاه $-x \to (-a)^+$

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = [-(-2)^-] = 2$

مثلاً در این سؤال چون $x \to (-2)^-$ پس $-x \to 2^+$ پس $\lim\limits_{x\to(-2)^-} [-x] = [2^+] = 2$

ادامه حل سؤال ← $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^+} \left|x-\frac{1}{a}\right| = \left|-2-\frac{1}{a}\right| = f(-2)$

حال چون تابع $f(x)$ در $x=-2$ پیوسته است پس ← $\left|-2-\frac{1}{a}\right| = 2$

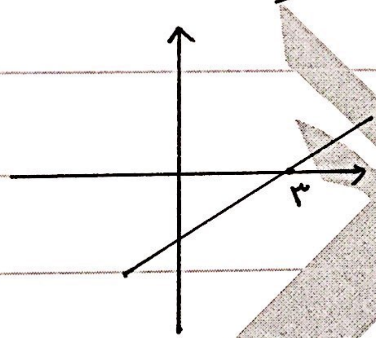
$\to -2-\frac{1}{a} = 2 \to \frac{1}{a} = -4 \to a = -\frac{1}{4}$

$\to -2-\frac{1}{a} = -2 \to \frac{1}{a} = 0 \to$ غ ق ق

$\underbrace{f(a) = f(-\frac{1}{4})} = |x-(-4)| = |x+4| = \left|-\frac{1}{4}+4\right| = \boxed{\frac{15}{4}}$

از ضابطه‌ی پایینی $f(x)$ باید استفاده کنیم

مثال (۱۸) : نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x+b}{x-a} & x \neq a \\ -5 & x = a \end{cases}$ به صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



۱) -4 ۲) -5 ۳) -7 ۴) -8

حل : اولاً با توجه به نمودار درمی‌یابیم $f(3)=0$

پس ← $f(3) = \frac{x^2-x+b}{x-a} = \frac{9-3+b}{3-a} = 0$

$\to \frac{6+b}{3-a} = 0 \to \boxed{b=-6}$

از طرفی همانطور که از نمودار مشخص است می‌بینیم تابع در تمامی نقاط پیوسته است پس در $x=a$ (که نقطه مرزی تابع است) هم پیوسته است. پس حد آن در $x=a$ و مقدار آن در $x=a$ می‌بایست باهم برابر باشند ←

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-x+b}{x-a} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to a} \frac{2x-1}{1} = 2a-1$

$f(a) = -5 \to 2a-1 = -5 \to 2a = -4 \to \boxed{a=-2} \to a+b = \boxed{-8}$

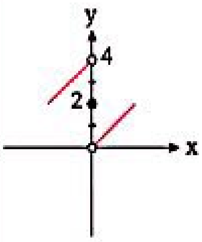
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: ارزیابی حد و پیوستگی

شیوا اربابی

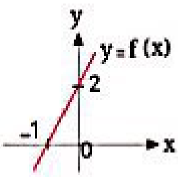
۱- اگر $\frac{1}{2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2



۲- اگر شکل زیر مربوط به تابع $g(x)$ باشد، حاصل $\lim_{x\to 0^-}\frac{4-g(x)}{\sqrt{g(x)}-2}$ کدام است؟

① $-\infty$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{2}{\sqrt{2}-2}$ ④ -4

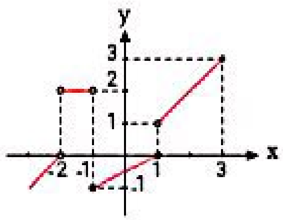


۳- با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2f^{-1}(x)}{x}$ کدام است؟

① 3 ② 1 ③ 4 ④ 2

۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-1$ و $x+1$ به‌ترتیب 3 و -2 باشد، k کدام باشد تا $f(x)=p(x+1)-2p(x+3)+x^2-2kx$ بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد؟

① $\frac{2}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$



۵- نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. حاصل $\lim_{x\to 3^-} f(-\frac{x}{3})+\lim_{x\to(-1)^-}[f(2x)]$ کدام است؟

① 1 ② 2

③ -2 ④ -1

۶- اگر $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{4x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، آنگاه حاصل ab کدام است؟

① -2 ② 2 ③ -4 ④ 4

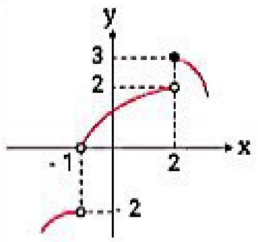
۷- اگر $f(x+2)=\frac{\cos\pi x}{1+\sin\pi x}$، حاصل $\lim_{x\to 2} f(x)$ کدام است؟

① 0 ② -1 ③ 1 ④ $+\infty$

۸- اگر بازهٔ $(2-x\ ,\ 1-4x)$ یک همسایگی برای ۱٫۴ و ۱٫۸ باشد، محدودهٔ x کدام است؟

① $(-0.2\ ,\ 0.6)$ ② $(-0.6\ ,\ 0.2)$ ③ $(-0.1\ ,\ 0.2)$ ④ $(-0.2\ ,\ 0.1)$

۹- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-} f(1-x)$ کدام است؟



① -1 ② -2 ③ 2 ④ صفر

۱۰- اگر $f(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{[x]-1}{1-\tan x}$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

① صفر ② $-\infty$ ③ $+\infty$ ④ -1

۱۱- در تابع $f(x)=\frac{[x+2]+k}{x-2}$، اگر $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ باشد، محدودهٔ k کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $-4<k<-3$ ② $-3<k<-2$ ③ $k<-4$ یا $k>-3$ ④ $k<-3$ یا $k>-2$

۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

① ∞ ② 2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$

۱۳- حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}$ کدام است؟

① 24 ② 12 ③ 8 ④ 6

۱۴- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}}([x]+[-x])\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$ کدام است؟

① $\frac{-2}{3}$ ② $\frac{-3}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$

۱۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{|x^2+x-2|}{x-1} & ;x\neq 1\\ a & ;x=1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟

① هر مقدار a ② -3 ③ 3 ④ هیچ مقدار a

۱۶- اگر $f(x)=\begin{cases}[x]-3 & ;x<a\\ x^2-3x & ;x\geq a\end{cases}$، $a\in\mathbb{Z}$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)-\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=0$ باشد، $f(-\frac{a}{3})$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① 2 ② -2 ③ -3 ④ -4

۱۷- حد چپ تابع $f(x)=4[x]+3[-x]$ در نقطه‌ای به‌طول صحیح a، دو برابر حد راست تابع f در این نقطه است. a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2

۱۸- حد چپ تابع $f(x)=\frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ در نقطه‌ی $x=3$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

① 1 ② -1 ③ 0 ④ ∞

۱۹ - حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12^x - 3^x + 4^x - 1}{16^x - 1}$ کدام است؟

① ۱ ② ۳ ③ ۴ ④ ۱۲

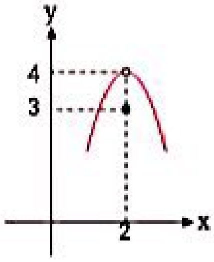
۲۰ - حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\tan^2 x}$ برابر کدام است؟

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{16}$

۲۱ - نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $\left[\lim\limits_{x\to 2} f(x)\right] - \lim\limits_{x\to 2}[f(x)]$ ۲ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① ۱ ② ۲

③ ۳ ④ ۴



۲۲ - حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos 2x - 1}{2\sin^2 x + \sin x - 1}$ کدام است؟

① $-\frac{2}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{4}{3}$

۲۳ - حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}} \dfrac{1+\cot x}{1+\tan x}$ کدام است؟

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $+\infty$

۲۴ - اگر $(3b-2a,7)\cup(c,2a+b)$ یک همسایگی محذوف عدد ۴ باشد، آنگاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی برای کدام‌یک از عددهای زیر است؟

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{9}{4}$

۲۵ - اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x)$ بر x^2+3x+2، $2x+1$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x-1)-p(x-2)$ بر x کدام است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۲۶ - حاصل $\lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\tan 2x}$ کدام است؟

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ④ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

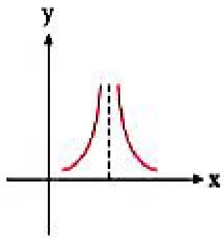
۲۷ - در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+b\sqrt{x^2+3}}{x^2-3x+2}$، اگر $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ باشد، آن‌گاه حد تابع $g(x)=xf(x)$ وقتی $x\to -\infty$ کدام است؟

① ۴ ② -8 ③ ۸ ④ -4

۲۸ - حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \dfrac{\cos^3 x}{|\sin 2x - 2\cos x|}$ کدام است؟

① -1 ② صفر ③ ۱ ④ $-\infty$

۲۹ - شکل زیر بخشی از نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x+a}{4x^2+bx+1}$ است. دوتایی مرتب (a,b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟



① $(0,4)$
② $(0,-4)$
③ $(-2,4)$
④ $(-2,-4)$

۳۰ - حد عبارت $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ وقتی $x\to(\frac{\pi}{2})^+$، کدام است؟

① $+\infty$ ② ۲ ③ ۱ ④ $-\infty$

۳۱- اگر $f(x)=\dfrac{(m^2-1)x^4+(2m+3)x^3+2x^2-1}{mx+5}$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$ باشد، مقدار m کدام است؟

① ۱ ② هیچ مقداری برای m وجود ندارد. ③ ±1 ④ -1

۳۲- اگر $\lim\limits_{x\to k^+}\dfrac{1-x}{x^2+x-12}=+\infty$ باشد، مقدار k کدام است؟

① فقط ۳ ② فقط -4 ③ ۳ یا -4 ④ وجود ندارد.

۳۳ - مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{\tan^3 x}$ کدام است؟

① ۱ ② -1 ③ $\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$

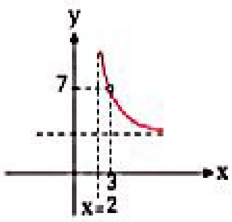
۳۴- اگر $f(x)=2x^3+ax^2+4x-3$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد، مجموع مجذورات صفرهای $f(x)$ کدام است؟

① $\frac{61}{4}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{25}{3}$ ④ $\frac{65}{4}$

۳۵ - تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-[x]}$ در همسایگی محذوف چند نقطه به طول عدد صحیح تعریف شده است؟

① ۶ ② ۸ ③ ۷ ④ ۹

۳۶- اگر قسمتی از نمودار تابع $y=\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$ مطابق شکل زیر باشد حاصل $ab+cd$ کدام است؟



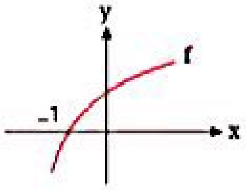
① -15 ② ۱۵
③ ۳۰ ④ -30

ارزیابی حد و پیوستگی

۳۷- حد عبارت $\dfrac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\dfrac{1}{\tan x}}}{\cos 2x}$ وقتی $x \to \dfrac{\pi}{4}$ کدام است؟

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2

۳۸- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{f(x)}}$ در اطراف $x=-1$ به کدام صورت است؟



①  ② 

③  ④ 

۳۹- کدام‌یک از توابع زیر در همسایگی چپ $x=0$ تعریف می‌شود، اما در همسایگی راست این نقطه تعریف نمی‌شود؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $y=\sqrt{x-[x]}$ ② $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-[x]}}$ ③ $y=\dfrac{1}{[x]}$ ④ $y=\dfrac{1}{[-x]}$

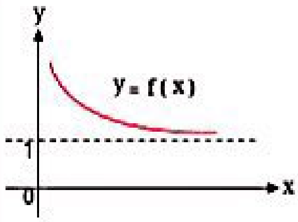
۴۰- اگر $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=2$ آنگاه a کدام است؟

① $a=1$ ② $a=-1$ ③ $a=5$ ④ $a=-5$

۴۱- اگر $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{|3a|x^5-ax^n+7x^4-2}{4x^5+1}=1$، آنگاه مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

① صفر ② 1 ③ 2 ④ 4

۴۲- باتوجه به نمودار تابع $y=f(x)$، حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{1-f(x)}$ کدام است؟



① $-\dfrac{1}{2}$ ② 1

③ -1 ④ $\dfrac{1}{2}$

۴۳- در تابع $f(x)=\dfrac{3x-\sqrt{x^2+16x}}{ax^n+b}$ اگر $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=c$ باشند، آنگاه عدد حقیقی c کدام است؟ $(c\neq 0)$

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{4}{3}$

۴۴- با شرط $m>4, n<2$ ، $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^2x^{m-3}+nx+m}{mx^{-n+3}+mx-3}=3$ مقدار $m-n$ کدام است؟

① صفر ② 6 ③ 9 ④ 18

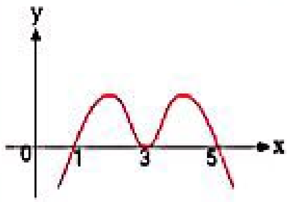
۴۵- اگر $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{۲-\sqrt{ax-۲}}{\sqrt[۳]{۳x-۱}-۲} = b$، حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) صفر

۴۶- اگر $\lim\limits_{x\to -۲} \dfrac{\sqrt{x+۴}+۲}{x^۲+۲ax+b} = +\infty$ باشد حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{ax^۳+۲x+۵}{bx^۳+x^۲+۷}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۷- نمودار تابع f به صورت شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{(-۱)^{[x]}}{f(x)-f(x-۴)}$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

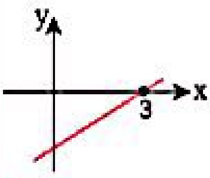


۱) $-\infty$
۲) ۱
۳) -۱
۴) $+\infty$

۴۸- اگر $f(x) = \dfrac{ax^۲+\sqrt{x^۴+۵x}}{-x^n-ax-۱}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = ۱$ باشد، آنگاه حد راست و چپ تابع f در $x=۱$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $+\infty$ و $+\infty$ ۲) $-\infty$ و $-\infty$ ۳) $+\infty$ و $-\infty$ ۴) $-\infty$ و $+\infty$

۴۹- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲-x+b}{x-a} & ,x \neq a \\ -۵ & ,x = a \end{cases}$، به صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



۱) -۴ ۲) -۵ ۳) -۷ ۴) -۸

۵۰- تابع $f(x) = [x^۲]$ در بازهٔ $(-۱, k)$ فقط در یک نقطه ناپیوسته است. بیش‌ترین مقدار k کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۵۱- اگر $f(x) = \begin{cases} [-x] & ;x < -۲ \\ |x - \dfrac{۱}{a}| & ;x \geq -۲ \end{cases}$، در $x=-۲$ پیوسته باشد آنگاه مقدار $f(a)$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $\frac{۱۵}{۴}$ ۲) $\frac{۱۷}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۵۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [۴\sin^۲ \pi x]$ روی بازه‌ی $\left[۰, \frac{۱}{۲}\right]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b}=\frac{0}{2a+b}\xrightarrow[\frac{0}{0}\text{ بوده که پس از رفع ابهام جوابش } \frac{1}{2} \text{ شده است}]{\text{چون جواب حد برابر عدد شده است پس این کسر حتما}}2a+b=0$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{1-\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a}=\frac{1-\frac{3}{4}}{a}=\frac{1}{4a}=\frac{1}{2}\to a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-1$$

۲ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4-g(x)}{\sqrt{g(x)}-2}=\frac{4-4}{\sqrt{4}-2}=\frac{0}{0}$$

عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4-g(x)}{\sqrt{g(x)}-2}\times\frac{\sqrt{g(x)}+2}{\sqrt{g(x)}+2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(4-g(x))(\sqrt{g(x)}+2)}{g(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(g(x)-4)(\sqrt{g(x)}+2)}{g(x)-4}=\lim_{x\to 0^-}-(\sqrt{g(x)}+2)=-(\sqrt{4}+2)=-4$$

۳ ـ گزینه ۱ ابتدا با داشتن دو نقطه‌ی $B\left|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$ و $A\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$ روی تابع $y=f(x)$ معادله‌ی آن را می‌نویسیم و سپس ضابطه‌ی معکوس آن را بدست می‌آوریم و می‌دانیم برای بدست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، ابتدا رابطه‌ی را برحسب x بدست می‌آوریم و سپس x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y}{x+1}=\frac{0-2}{-1-0}=2\to y=f(x)=2x+2\ ;\ y=f(x)$$ ضابطه‌ی تابع

$$y=2x+2\to 2x=y-2\to x=\frac{y-2}{2}\to f^{-1}(x)=\frac{x-2}{2}\ ;\ y=f(x)$$ ضابطه‌ی معکوس تابع

پس: $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2f^{-1}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2+2(\frac{x-2}{2})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2+x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$$

۴ ـ گزینه ۱ باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $x-1$ برابر با ۳ می‌باشد، پس: $p(1)=3$

باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $x+1$ برابر با ۲− می‌باشد، پس: $p(-1)=-2$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ برابر است با $f(-2)$، بنابراین:

$$f(-2)=p(-1)-2p(1)+4+6k=-2-6+4+6k=0\Rightarrow 6k=4\Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

۵ ـ گزینه ۳

$$x\to 3^-: x<3\to\frac{x}{3}<1\to-\frac{x}{3}>-1$$

پس $$\lim_{x\to 3^-}f(-\frac{x}{3})=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=-1$$

از طرفی: $$\lim_{x\to(-1)^-}[f(2x)]=[f((-2)^-)]=[0^-]=-1$$

توجه کنید وقتی x از سمت مقادیر کوچک‌تر از ۲− به ۲− نزدیک می‌شود y از سمت مقادیر کوچک‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود.

بنابراین $$\lim_{x\to 3^-}f(-\frac{x}{3})+\lim_{x\to(-1)^-}[f(2x)]=-1+(-1)=-2$$

۶ ـ گزینه ۳ صورت کسر به ازای $x=\frac{1}{2}$ منفی است و چون جواب حد برابر $-\infty$ شده است بنابراین مخرج باید 0^+ باشد پس حتماً $x=\frac{1}{2}$ ریشهٔ مضاعف مخرج است یعنی مخرج به صورت $4(x-\frac{1}{2})^2$ است.

$$2(x-\frac{1}{2})^2 = 2(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 2x^2 - 2x + 1 \xrightarrow{\text{مقایسه با مخرج}} \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \rightarrow ab = -2$$

۷ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x+1)$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\cos \pi x}{1+\sin \pi x} = \frac{\cos \pi}{1+\sin \pi} = \frac{-1}{1+0} = -1$$

۸ ـ گزینه ۳ باید دو عدد ۱٫۲ و ۱٫۸ را در این بازه یعنی بازهٔ $(1-4x \,,\, 2-x)$ قرار داشته باشند پس داریم:

$$1-4x < 1.2 < 2-x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-4x < 1.2 \Rightarrow -4x < 0.2 \Rightarrow x > -\frac{0.2}{4} \Rightarrow x > -0.05 \\ 2-x > 1.2 \Rightarrow 2-1.2 > x \Rightarrow x < 0.8 \end{cases} \Rightarrow -0.05 < x < 0.8 \quad (1)$$

$$1-4x < 1.8 < 2-x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-4x < 1.8 \Rightarrow -4x < 0.8 \Rightarrow x > -\frac{0.8}{4} \Rightarrow x > -0.2 \\ 2-x > 1.8 \Rightarrow 2-1.8 > x \Rightarrow x < 0.2 \end{cases} \Rightarrow -0.2 < x < 0.2 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -0.05 < x < 0.2$$

۹ ـ گزینه ۴

$$x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow 1-x > -1$$

پس وقتی $x \to 2^-$ آنگاه $1-x \to (-1)^+$ و در نتیجه:

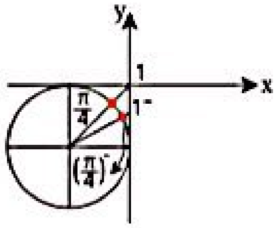
$$\lim_{x\to 2^-} f(1-x) = \lim_{x\to (-1)^+} f(x) = f(-1^+) = 0$$

۱۰ ـ گزینه ۲

دقت کنید که $x + \frac{\pi}{4} = (\frac{\pi}{2})^- \rightarrow x = (\frac{\pi}{4})^-$ است.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-} f(x+\frac{\pi}{4}) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-} \frac{[x]-1}{1-\tan x} = \frac{0-1}{1-1^-} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

دقت کنید: $\underbrace{\left[(\frac{\pi}{4})^-\right]}_{\text{بین صفر و یک}} = 0 \,,\, \tan(\frac{\pi}{4})^- = 1^-$



۱۱ ـ گزینه ۱ برای آنکه $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$ باشد، باید حد چپ و راست f، وقتی $x \to 2$ هر دو برابر $+\infty$ باشند، پس:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{[x+1]+k}{x-2} = \frac{[3^+]+k}{2^+-2} = \frac{3+k}{0^+} = +\infty$$

$$\xrightarrow{\text{باید صورت کسر مثبت باشد.}} k+3 > 0 \Rightarrow k > -3$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{[x+1]+k}{x-2} = \frac{[3^-]+k}{2^--2} = \frac{2+k}{0^-} = +\infty$$

$$\xrightarrow{\text{باید صورت کسر منفی باشد.}} 2+k < 0 \Rightarrow k < -2$$

از اشتراک دو شرط بالا، داریم: $-3 < k < -2$.

۱۲ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})}{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)} = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$$

۱۳ ـ گزینه ۳ اگر صورت و مخرج بصورت ضرب باشند و تعداد جملات آنها برابر باشد آن عبارت را به ضرب چند جمله تبدیل می‌کنیم و هر کدام را بطور جداگانه رفع ابهام می کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{\sqrt{x}-1}\times\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{\sqrt[4]{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}\times\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt[4]{x}-1)}=2\times4=8$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt[4]{x}-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\times\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{0}{0}$$
$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}=2\times4=8$$

۱۴ ـ گزینه ۱ می‌دانیم که $[x]+[-x]=-1$ است.

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}=\frac{0}{0}\rightarrow\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^3 x}$$

در صورت از اتحاد مزدوج و در مخرج از اتحاد چاق و لاغر کمک می گیریم.

$$=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1+\sin^2 x-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{-(1-\sin x)}{1+\sin^2 x-\sin x}=\frac{-(1+1)}{1+1+1}=\frac{-2}{3}$$

۱۵ ـ گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=1$ بدست آوریم.

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{|\overbrace{(x+2)(x-1)}^{+}|}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}=3$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{|\overbrace{(x+2)(x-1)}^{-}|}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)}=-3$$

این تابع در $x=1$ پیوسته نمی باشد.

۱۶ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}(x^2-3x)=a^2-3a\quad,\quad\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^-}[x]-3=a-1-3=a-4$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a^+}f(x)-\lim_{x\to a^-}f(x)=0\Rightarrow a^2-3a-a+4=0\Rightarrow a^2-4a+4=0$$

$$\Rightarrow(a-2)^2=0\Rightarrow a=2\Rightarrow f(x)=\begin{cases}[x]-3 & ,x<2\\ x^2-3x & ,x\geq2\end{cases}$$

$$f(-\frac{a}{3})=f(-\frac{2}{3})=[-\frac{2}{3}]-3=-1-3=-4$$

۱۷ ـ گزینه ۴

می‌دانیم که $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ,x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ,x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ است.

ابتدا ضابطهٔ f را به صورت چند ضابطه ای می نویسیم:

$$f(x)=[x]+3([x]+[-x])\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x & ;x\in\mathbb{Z}\\ [x]-3 & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=[a^-]-3=a-1-3=a-4\\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=[a^+]-3=a-3\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{فرض سوال}}a-4=2a-6\Rightarrow a=2$$

۱۸ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to3^-}\frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\lim_{x\to3^-}\frac{(3-\overset{\overset{2}{\uparrow}}{[3^-]})\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to ۳^-}\frac{\overbrace{|x-۳|}^{-}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{-(x-۳)}{x-۳}=-۱$$

۱۹ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱۲^x-۳^x+۴^x-۱}{۱۶^x-۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳^x(۴^x-۱)+(۴^x-۱)}{(۴^x-۱)(۴^x+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳^x+۱}{۴^x+۱}=\frac{۲}{۲}=۱$$

۲۰ ـ گزینه ۲ روش اول:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{\tan^۲ x}:\frac{۰}{۰}\Rightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{\sin^۲ x}\times\cos^۲ x=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{۱-\cos^۲ x}\times\cos^۲ x$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}\times\cos^۲ x=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{(۱-\sqrt{\cos x})(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)}\times\cos^۲ x$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos^۲ x}{(۱+\sqrt{\cos x})(۱+\cos x)}=\frac{\cos^۲(۰)}{(۱+\sqrt{\cos ۰})(۱+\cos ۰)}=\frac{۱}{۲\times ۲}=\frac{۱}{۴}$$

روش دوم: می‌دانیم که $\lim\limits_{u\to ۰}(۱-\cos^m u)\sim\frac{u^۲}{۲}\times m$ و $\lim\limits_{u\to ۰}\tan^n u\sim u^n$ است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^{\frac{۱}{۲}} x}{\tan^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{x^۲}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{x^۲}=\frac{۱}{۴}$$

۲۱ ـ گزینه ۲ در $x\to ۲$ مقادیر تابع از پایین به ۴ نزدیک می‌شوند.

$$۲\lim_{x\to ۲}[f(x)]-\left[\lim_{x\to ۲}f(x)\right]=۲[۴^-]-[۴]=۲\times ۳-۴=۲$$

۲۲ ـ گزینه ۴

می‌دانیم که $\cos ۲a=۱-۲\sin^۲ a$ است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۲\cos ۲x-۱}{۲\sin^۲ x+\sin x-۱}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۲(۱-۲\sin^۲ x)-۱}{۲\sin^۲ x+۲\sin x-\sin x-۱}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۱-۴\sin^۲ x}{۲\sin x(\sin x+۱)-(\sin x+۱)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{-(۲\sin x-۱)(۲\sin x+۱)}{(\sin x+۱)(۲\sin x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{-(۲\sin x+۱)}{\sin x+۱}=\frac{-(۲\times\frac{۱}{۲}+۱)}{\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{-۲}{\frac{۳}{۲}}=-\frac{۴}{۳}$$

۲۳ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{۱+\cot x}{۱+\tan x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{۱+\frac{۱}{\tan x}}{۱+\tan x}=\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}\frac{(۱+\tan x)}{\tan x(۱+\tan x)}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

توجه کنید که $\tan\frac{۳\pi}{۴}=\cot\frac{۳\pi}{۴}=-۱$ است.

۲۴ ـ گزینه ۳ توجه کنید $(a,b)\cup(b,c)$ یک همسایگی محذوف عدد b است.

با توجه به تساوی $(۳b-۲a,۷)\cup(c,۲a+b)=(c,۲a+b)\cup(۳b-۲a,۷)$ داریم:

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a+b=۴\\ ۳b-۲a=۴\end{cases}\Rightarrow ۴b=۸\Rightarrow b=۲\Rightarrow ۲a+b=۴\xrightarrow{b=۲}a=۱$$

بازهٔ (a,b) برابر با $(۱,۲)$ است که با توجه به گزینه‌ها، یک همسایگی برای $\frac{۳}{۲}$ است.

۲۵ ـ گزینه ۲ با نوشتن رابطهٔ تقسیم داریم:

$$p(x)=(x^۲+۳x+۲)q(x)+۲x+۱=(x+۱)(x+۲)q(x)+۲x+۱\quad(۱)$$

حال برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x-۱)-p(x-۲)$ بر x داریم:

$x=۰\Rightarrow$ باقی مانده $=p(۰-۱)-p(۰-۲)=p(-۱)-p(-۲)$

$(۱)\Rightarrow p(-۱)=۰+۲(-۱)+۱=-۱\quad,\quad p(-۲)=۰+۲(-۲)+۱=-۳$

باقی مانده $=p(-۱)-p(-۲)=-۱-(-۳)=۲$

۲۶ ـ گزینه ۴

می دانیم: $\boxed{\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\ ,\ 1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}}$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\tan 2x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x\overbrace{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}^{+}}{\sin 2x}$$

$(\frac{\pi}{2})^-$ در ناحیه ی اول است و در این ناحیه، کسینوس مثبت است.

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x\cdot\cos\frac{x}{2}}{2(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{4\sin\frac{x}{2}\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{4(1)(-1)}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۷ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax+b\sqrt{x^2+3}}{x^2-3x+2}=\frac{a+2b}{0}\xrightarrow{\text{چون جواب حد عدد شده است بنابراین}}a+2b=0\to a=-2b$$

این کسر حتما $\frac{0}{0}$ بوده است

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax+b\sqrt{x^2+3}}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{a+b\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}}{2x-3}=\frac{a+\frac{b}{2}}{-1}$$

$$=-a-\frac{b}{2}=2b-\frac{b}{2}=\frac{3b}{2}=2\to b=\frac{4}{3}\ ,\ a=-\frac{8}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}xf(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx\sqrt{x^2+3}}{x^2-3x+2}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx\overbrace{|x|}^{-}}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2-bx^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-b)x^2}{x^2}=a-b=\frac{-8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{-12}{3}=-4$$

۲۸ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\sin 2a = 2\sin a\cos a}$

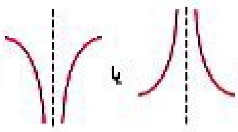
ابتدا باید مشخص کنیم که داخل قدر مطلق چه علامتی دارد.

$$|\sin 2x-2\cos x|=|2\sin x\cos x-2\cos x|=|2\cos x(\sin x-1)|$$

وقتی $x\to(\frac{\pi}{2})^-$ یعنی x در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی است و در این ناحیه، کسینوس مثبت است و $\sin(\frac{\pi}{2})^-=1^-$ است. بنابراین $\sin x-1$ مقداری منفی است در نتیجه داخل قدر مطلق، منفی است.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\cos^3 x}{-2\cos x(\sin x-1)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\cos^2 x}{-2(\sin x-1)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{1-\sin^2 x}{-2(\sin x-1)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{2(1-\sin x)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{1+\sin x}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

۲۹ ـ گزینه ۲ شکل تابع در اطراف ریشهٔ مضاعف مخرج به صورت  است.

بنابراین مخرج باید دارای ریشهٔ مضاعف مثبت باشد.

$$\begin{cases}\Delta=0\to b^2-4ac=0\to b^2-16=0\to b=\pm 4\\ -\frac{b}{2a}>0\to-\frac{b}{8}>0\to b<0\end{cases}\to b=-4$$

چون جواب حد $+\infty$ شده پس صورت کسر به‌ازای ریشهٔ مخرج $(\frac{-b}{2a})$ یعنی $x=\frac{1}{2}$ باید یک عدد مثبت باشد:

$$2(\frac{1}{2})+a>0\to 1+a>0\to a>-1$$

گزینهٔ دوم می‌تواند صحیح باشد.

۳۰ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{(1-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

۳۱ ـ گزینه ۴ حالت ۱: اگر بزرگ‌ترین درجهٔ صورت چهار باشد داریم:

ارزیابی حد و پیوستگی

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(m^2-1)x^3}{mx} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{m^2-1}{m}\right)x^2$$

حد فوق در $x \to +\infty$ و $x \to -\infty$ متفاوت می‌باشد زیرا:

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \end{cases}$$

چون حد تابع در $x \to \pm\infty$ فقط برابر $-\infty$ می‌باشد، پس نمی‌تواند بزرگ‌ترین درجهٔ صورت برابر چهار باشد.

حالت ۲: اگر بزرگ‌ترین درجهٔ صورت سه باشد داریم:

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$m = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3+2x^2-1}{x+5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 5x^2 = 5(\pm\infty)^2 = +\infty$$

پس $m = 1$ غیر قابل قبول است.

$$m = -1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2x^2-1}{-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{-x} = \lim_{x\to\pm\infty} (-x^2) = -(\pm\infty)^2 = -\infty$$

بنابراین $m = -1$ قابل قبول است.

۳۲ ـ گزینه ۴ چون حاصل حد نامتناهی شده است، پس k می‌تواند یکی از ریشه های مخرج باشد. پس:

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3, -4$$

در هر دو حالت حد را حساب می‌کنیم:

$$1)\ x = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{1-x}{x^2+x-12} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1-x}{(x-3)(x+4)} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$2)\ k = -4 \Rightarrow \lim_{x\to(-4)^+} \frac{1-x}{x^2+x-12} = \lim_{x\to(-4)^+} \frac{1-x}{(x-3)(x+4)} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

پس برای k مقداری وجود ندارد.

۳۳ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{\tan^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - 2\sin x\cos x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x(1-\cos x)\cos^3 x}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)(1)^3}{(1-\cos^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{2}{2} = 1$$

۳۴ ـ گزینه ۴

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 4x - 3$$

چون $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -2 + a - 4 - 3 = 0 \Rightarrow a = 9$$

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 4x - 3$$

با تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ داریم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 9x^2 + 4x - 3 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 \pm 2x^2} & 2x^2 + 7x - 3 \\ 7x^2 + 4x - 3 & \\ \underline{-7x^2 \pm 7x} & \\ -3x - 3 & \\ \underline{\pm 3x \pm 3} & \\ 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(2x^2+7x-3) = 0 \Rightarrow x = -1\ ,\ 2x^2+7x-3 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 + 7x - 3 = 0$ را x_1 و x_2 بنامیم، داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{49}{4} - 2\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{61}{4}$$

مجموع مجذورات صفرهای $f(x)$ $= (-1)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 + \frac{61}{4} = \frac{65}{4}$

۳۵ ـ گزینه ۳ باید دامنهٔ تابع را بیابیم.

زیر رادیکال $\geq 0 \to 16 - x^2 \geq 0 \to x^2 \leq 16 \to -4 \leq x \leq 4$

مخرج $\neq 0 \to x - [x] \neq 0 \to [x] \neq x \to x \notin \mathbb{Z}$

پس: $D_f = [-4,4] - \mathbb{Z} = (-4,4) - \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

تابع در همسایگی محذوف نقاط $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ تعریف شده است.

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \Rightarrow \text{۷ عدد}$$

۳۶ ـ گزینه ۱ تابع در $x = 2$ ناپیوسته می‌شود بنابراین $x = 2$ ریشهٔ مخرج است.

$$x = 2 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 4 + 2c + d = 0 \to 2c + d = -4$$

تابع در $x = 3$ توخالی است بنابراین $x = 3$ ریشهٔ مخرج است.

$$x = 3 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 9 + 3c + d = 0 \to 3c + d = -9$$

از حل دو معادله به جواب $c = -5$ و $d = 6$ می‌رسیم پس مخرج $x^2 - 5x + 6$ یا همان $(x-2)(x-3)$ است.

با توجه به شکل، تابع در $x = 3$ حدی برابر ۷ دارد.

$$x = 3 \to \frac{18 + 3a + b}{0} \xrightarrow[\text{جواب ۷ شده است.}]{\text{این کسر حتماً } \frac{0}{0} \text{ بوده که پس از رفع ابهام}} 18 + 3a + b = 0$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 + ax + b}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(2x + a + 6)}{(x-2)(x-3)} = \frac{12 + a}{1} = 7 \to a = -5, b = -3$$

پس $ab + cd = 15 - 30 = -15$ است.

برای آنکه متوجه شوید چگونه $2x^2 + ax + b$ را به صورت $(x-3)(2x + a + 6)$ نوشتیم باید توجه کنید که $2x^2 + ax + b$ را بر $x - 3$ تقسیم کردیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + ax + b & x - 3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^2 + 6x} & 2x + a + 6 \\ (a+6)x + b & \\ \underline{-(a+6)x + 3a + 18} & \\ \underbrace{3a + 18 + b}_{\text{صفر است}} & \end{array}$$

$$\to 2x^2 + ax + b = (x-3)(2x + a + 6)$$

و توجه کنید برای رفع ابهام از $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 6}$ می‌توان از روش هوپیتال نیز استفاده کرد.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \to 3} \frac{4x + a}{2x - 5} = \frac{12 + a}{1} = 7 \to a = -5$$

۳۷ ـ گزینه ۲ می‌دانیم $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ است.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - \frac{1}{\sqrt{\tan x}}}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\tan x - 1}{\sqrt{\tan x}}}{\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x - 1)(1 + \tan^2 x)}{\sqrt{\tan x}(1 - \tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-(1 - \tan x)(1 + \tan^2 x)}{\sqrt{\tan x}(1 + \tan x)(1 - \tan x)} = \frac{-(1+1)}{1(1+1)} = -1$$

۳۸ ـ گزینه ۱ ابتدا دامنهٔ تابع g را حساب می‌کنیم.

$$\frac{2x + 1}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x + 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
عبارت ≥ 0		$+$	ن	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -1) \cup [-\frac{1}{2}, +\infty)$$

با توجه به دامنه، تابع g در همسایگی چپ $x = -1$ تعریف شده است، حال داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^-}\sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}}=\sqrt{\frac{-2+1}{0^-}}=\sqrt{\frac{-1}{0^-}}=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

۳۹ ـ گزینه ۳ دامنهٔ تابع مربوط به هر گزینه را می‌یابیم.

گزینهٔ ۱) $y=\sqrt{x-[x]}$: می‌دانیم $0\le x-[x]<1 \Rightarrow x\in\mathbb{R} \Rightarrow$ دامنه $=\mathbb{R}$

گزینهٔ ۲) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-[x]}} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-[x]>0 \\ \text{می‌دانیم}:\ 0\le x-[x]<1\end{array}\right\} \Rightarrow x-[x]\neq 0 \Rightarrow [x]\neq x \Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ دامنهٔ تابع $=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

گزینهٔ ۳) $y=\dfrac{1}{[x]}$ ، $[x]=0 \Rightarrow 0\le x<1 \Rightarrow$ دامنه $=\mathbb{R}-[0,1)=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

با توجه به دامنه، تابع در همسایگی چپ $x=0$ تعریف شده است ولی در همسایگی راست این نقطه تعریف نشده است.

گزینهٔ ۴) $y=\dfrac{1}{[-x]}$ ، $[-x]=0 \Rightarrow 0\le -x<1 \Rightarrow -1<x\le 0$

دامنه $=\mathbb{R}-(-1,0]=(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

۴۰ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to-3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)(1+\sqrt{5x+16})}{(1-\sqrt{5x+16})(1+\sqrt{5x+16})}$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{a(x+3)(2)}{-5(x+3)}=\frac{2a}{-5}=2\Rightarrow 2a=-10\Rightarrow a=-5$$

۴۱ ـ گزینه ۲ چون جواب حد، عددی غیرصفر شده است پس بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج باید باهم برابر باشند.

حالت اول: وقتی $n<5$ است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|3a|x^5}{4x^5}=\frac{|3a|}{4}=1\to|3a|=4\to 3a=\pm4\to a=\pm\frac{4}{3}$$

حالت دوم: وقتی $n=5$ است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|3a|x^5-ax^5}{4x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(|3a|-a)x^5}{4x^5}=\frac{|3a|-a}{4}=1$$

$$\to|3a|-a=4\to\begin{cases}a\ge0\to3a-a=4\to2a=4\to a=2 & \text{ق ق}\\ a<0\to-3a-a=4\to-4a=4\to a=-1 & \text{ق ق}\end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+2-1=1$ است.

۴۲ ـ گزینه ۱

عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{1-f(x)}\times\frac{f(x)+\sqrt{f(x)}}{f(x)+\sqrt{f(x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)-f(x)}{(1-f(x))(f(x)+\sqrt{f(x)})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-f(x)(1-f(x))}{(1-f(x))(f(x)+\sqrt{f(x)})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-f(x)}{f(x)+\sqrt{f(x)}}=\frac{-1}{1+\sqrt{1}}=\frac{-1}{2}$$

۴۳ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\sqrt{x^2}}{ax^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-|\overset{-}{x}|}{ax^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{ax^n}\overset{n=1}{=\!=}\frac{4}{a}=2$$

$$\longrightarrow a=2$$

ارزیابی حد و پیوستگی

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x-\sqrt{x^2+16x}}{2x+b}=c \xrightarrow[\text{نیز باید صفر باشد تا جواب حد، صفر نشود.}]{\text{چون صورت صفر است مخرج}} 2x+b=0 \to 4+b=0 \to b=-4$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-\sqrt{x^2+16x}}{2x-4}\times\frac{3x+\sqrt{x^2+16x}}{3x+\sqrt{x^2+16x}}=\lim_{x\to 2}\frac{9x^2-x^2-16x}{(2x-4)(3x+\sqrt{x^2+16x})}=\lim_{x\to 2}\frac{8x(x-2)}{2(x-2)(3x+\sqrt{x^2+16x})}$$

$$=\frac{16}{2(12)}=\frac{2}{3}=c$$

البته توجه کنید حد را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توان محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-\sqrt{x^2+16x}}{2x-4}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{3-\dfrac{1(2x+16)}{2\sqrt{x^2+16x}}}{2}=\frac{3-\dfrac{20}{12}}{2}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

۴۴ - گزینه ۴ چون جواب حد، عددی غیر از صفر شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند.

$m>4\to m-3>1\to$ بزرگترین توان x صورت برابر $m-3$ است

$n<2\to -n>-2\to -n+3>1\to$ بزرگترین توان x مخرج برابر $-n+3$ است.

بزرگترین توان x صورت = بزرگترین توان x مخرج $\to m-3=-n+3\to m+n=6$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n^2\cdot x^{m-3}}{m\cdot x^{-n+3}}=\frac{n^2}{m}=3\to n^2=3m\to m=\frac{n^2}{3}$$

$$\xrightarrow{m+n=6}\frac{n^2}{3}+n=6\to n^2+3n-18=0\to(n+6)(n-3)=0$$

$$\to\begin{cases} n=-6\to m=12\to m-n=18\\ n=3 \quad \text{غ ق ق}\ (n<2)\end{cases}$$

۴۵ - گزینه ۴ چون مخرج کسر، به ازای $x=3$، صفر می‌باشد و حاصل حد نیز متناهی است، پس صورت کسر نیز باید به ازای $x=3$ صفر شود.

$$2-\sqrt{3a-2}=0\Rightarrow\sqrt{3a-2}=2\Rightarrow a=2$$

روش اول: $a=2$ را جایگذاری کرده، حد تابع را می‌گیریم.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{2-2}}{\sqrt[3]{3x-1}-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 3}\frac{-\dfrac{2}{2\sqrt{2x-2}}}{\dfrac{3}{3\sqrt[3]{(3x-1)^2}}}=\frac{-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4}}=-2\Rightarrow b=-2\Rightarrow a+b=0$$

روش دوم:

$$b=\lim_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{2x-2}}{\sqrt[3]{3x-1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(2-\sqrt{2x-2})(2+\sqrt{2x-2})(\sqrt[3]{(3x-1)^2}+2\sqrt[3]{3x-1}+4)}{(\sqrt[3]{3x-1}-2)(\sqrt[3]{(3x-1)^2}+2\sqrt[3]{3x-1}+4)(2+\sqrt{2x-2})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(4-2x+2)(4+4+4)}{(3x-9)(2+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{-2(x-3)(12)}{3(x-3)(4)}=\frac{-24}{12}=-2\Rightarrow a+b=0$$

۴۶ - گزینه ۴

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b}=+\infty$$

حد صورت برابر ۳ است و چون حاصل حد $+\infty$ می‌باشد، پس باید $x=-3$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد و با توجه به اینکه ضریب x^2 در مخرج برابر یک است، یعنی مخرج همان عبارت $(x+3)^2$ می‌باشد.

$$x^2+2ax+b=(x+3)^2=x^2+6x+9$$

$2a=6 \Rightarrow a=3, b=9$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3}{9x^3}=\frac{1}{3}$$

۴۷ ـ گزینه ۴ باید حد چپ و حد راست عبارت مورد نظر را در $x=5$ محاسبه کنیم، بنابراین داریم:

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 5^-}\frac{(-1)^{[x]}}{f(x)-f(x-4)}=\frac{(-1)^{[5^-]}}{f(5^-)-f(5^- -4)}=\frac{(-1)^4}{0^+-f(1^-)}$$

$$=\frac{1}{0^+-0^-}=\frac{1}{0^++0^+}=+\infty$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 5^+}\frac{(-1)^{[x]}}{f(x)-f(x-4)}=\frac{(-1)^{[5^+]}}{f(5^+)-f(5^+ -4)}=\frac{(-1)^5}{0^--f(1^+)}$$

$$=\frac{-1}{0^--0^+}=\frac{-1}{0^-+0^-}=+\infty$$

بنابراین جواب حد داده شده برابر $+\infty$ است.

۴۸ ـ گزینه ۲ باید درجهٔ عبارت صورت و مخرج یکسان باشد تا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ شود.

بنابراین $n=2$ است. حال داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+\sqrt{x^4+5x}}{-x^2-ax-1}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+x^2}{-x^2}=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{(a+1)x^2}{-x^2}=1\Rightarrow a+1=-1\Rightarrow a=-2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{-2x^2+\sqrt{x^4+5x}}{-(x-1)^2}=\frac{-2+\sqrt{6}}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{-2x^2+\sqrt{x^4+5x}}{-(x-1)^2}=\frac{-2+\sqrt{6}}{0^-}=-\infty$$

بنابراین حد راست و چپ تابع در $x=1$ برابر $-\infty$ است.

۴۹ ـ گزینه ۴ مقدار تابع در $x=3$ برابر صفر است بنابراین باید کسر $\frac{x^2-x+b}{x-a}$ به ازای $x=3$ صفر گردد.

$$x=3\rightarrow\frac{9-3+b}{3-a}=0\rightarrow 6+b=0\rightarrow b=-6$$

چون تابع همواره پیوسته است پس باید در $x=a$ نیز پیوسته باشد. از طرفی چون $f(a)=-5$ و $f(3)=0$ است پس $a\neq 3$ است.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-x-6}{x-a}=\frac{0}{0}\longrightarrow a^2-a-6=0\Rightarrow\begin{cases}a=-2 & \text{ق.ق}\\ a=3 & \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

توجه کنید که چون مقدار کسر تابع به‌ازای $x=a$ صفر است ولی مقدار حد تابع برابر -5 است پس مقدار صورت تابع نیز صفر است.

پس $a+b=-8$ است.

۵۰ ـ گزینه ۳ می دانیم تابع $[x]$ (جزء صحیح) در نقاطی با طول صحیح ناپیوسته و در نقاطی با طول غیرصحیح پیوسته است. لذا با توجه به بازهٔ مطرح شده، کافیست شرط پیوستگی را برای تابع $[x^2]$ در نقاطی که x^2 صحیح می‌شود بررسی کنیم یعنی نقاط ۰ و ۱ و $\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$$

تابع در این نقطه، پیوسته است.

$$x=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x^2\to 1^+}[x^2]=1=f(1)\\ \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x^2\to 1^-}[x^2]=0\end{cases}$$

تابع در این نقطه، ناپیوسته است.

$$x=\sqrt{2}\Rightarrow x^2=2\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+} f(x)=\lim\limits_{x^2\to 2^+}[x^2]=2=f(2)\\ \lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^-} f(x)=\lim\limits_{x^2\to 2^-}[x^2]=1\end{cases}$$

تابع در این نقطه، ناپیوسته است.

روشن است که به ازای مقادیر $k>\sqrt{2}$، تعداد نقاط ناپیوستگی بیش از یکی خواهد بود، پس بیشترین مقدار k برابر $\sqrt{2}$ است.

۵۱ ـ گزینه ۱

با فرض پیوسته بودن $f(x)=\begin{cases}[-x] & ,\ x<-2\\ \left|x-\frac{1}{a}\right|, & x\geq -2\end{cases}$ در $x=-2$ داریم:

$$f(-2)=\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}\left|x-\frac{1}{a}\right|=\left|-2-\frac{1}{a}\right|\xlongequal{|f|=|-f|}\left|2+\frac{1}{a}\right|$$

$$\lim_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}[-x]=\left[-(-2)^-\right]=\left[2^+\right]=2$$

شرط پیوستگی: $f(-2)=\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)\Rightarrow\left|2+\frac{1}{a}\right|=2\Rightarrow 2+\frac{1}{a}=\pm 2$

$$\Rightarrow\begin{cases}2+\frac{1}{a}=2\to\frac{1}{a}=0 & \text{امکان ندارد:}\\ 2+\frac{1}{a}=-2\Rightarrow\frac{1}{a}=-4\Rightarrow\frac{-1}{4}=a\end{cases}$$

$$f(a)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=\left|-\frac{1}{4}+4\right|=\frac{15}{4}$$

۵۲ ـ گزینه ۴ روش اول، تابع به فرم $y=[f(x)]$ در نقاطی که داخل جزء صحیح مقداری صحیح شود و به شرط آنکه این نقطه طول Min نسبی پیوسته تابع f نباشد ناپیوسته است.

$$0\leq x\leq\frac{1}{2}\to 0\leq\pi x\leq\frac{\pi}{2}\to 0\leq\sin^2\pi x\leq 1\to 0\leq 4\sin^2\pi x\leq 4$$

$$4\sin^2\pi x=0\to\sin\pi x=0\to\pi x=0\to x=0$$

$$4\sin^2\pi x=1\to\sin^2\pi x=\frac{1}{4}=\sin^2\frac{\pi}{6}\to\pi x=\frac{\pi}{6}\to x=\frac{1}{6}$$

$$4\sin^2\pi x=2\to\sin^2\pi x=\frac{2}{4}=\sin^2\frac{\pi}{4}\to\pi x=\frac{\pi}{4}\to x=\frac{1}{4}$$

$$4\sin^2\pi x=3\to\sin^2\pi x=\frac{3}{4}=\sin^2\frac{\pi}{3}\to\pi x=\frac{\pi}{3}\to x=\frac{1}{3}$$

$$4\sin^2\pi x=4\to\sin^2\pi x=1=\sin^2\frac{\pi}{2}\to\pi x=\frac{\pi}{2}\to x=\frac{1}{2}$$

ابتدای بازه‌ی بسته پیوستگی راست و انتهای بازه‌ی بسته پیوستگی چپ اگر برقرار باشد نقطه، نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد. تابع در $x=0$ پیوستگی راست دارد پس $x=0$ نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد و تابع در $x=\frac{1}{2}$ پیوستگی چپ ندارد پس نقطه‌ی ناپیوستگی محسوب می‌شود بنابراین مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع به‌صورت $\left\{\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$ است.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۲	۹ - ۴	۱۷ - ۴	۲۵ - ۲	۳۳ - ۱	۴۱ - ۲	۴۹ - ۴
۲ - ۴	۱۰ - ۲	۱۸ - ۲	۲۶ - ۴	۳۴ - ۴	۴۲ - ۱	۵۰ - ۳
۳ - ۱	۱۱ - ۱	۱۹ - ۱	۲۷ - ۴	۳۵ - ۳	۴۳ - ۱	۵۱ - ۱
۴ - ۱	۱۲ - ۴	۲۰ - ۲	۲۸ - ۳	۳۶ - ۱	۴۴ - ۴	۵۲ - ۴
۵ - ۳	۱۳ - ۳	۲۱ - ۲	۲۹ - ۲	۳۷ - ۲	۴۵ - ۴	
۶ - ۳	۱۴ - ۱	۲۲ - ۴	۳۰ - ۴	۳۸ - ۱	۴۶ - ۴	
۷ - ۲	۱۵ - ۴	۲۳ - ۱	۳۱ - ۴	۳۹ - ۳	۴۷ - ۴	
۸ - ۳	۱۶ - ۴	۲۴ - ۳	۳۲ - ۴	۴۰ - ۴	۴۸ - ۲	