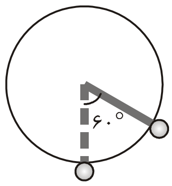
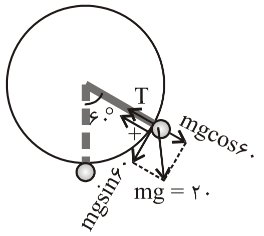


به انتهای میله‌ای به طول ۸۰cm گلوله‌ای به جرم ۲kg می‌بندیم و آن را حول انتهای دیگـر میلـه در سـطح قائم دوران می‌دهیم. در لحظه‌ی نشان داده شده سرعت گلوله $2\ \frac{m}{s}$ است. نیروی کشـش میلـه در ایـن لحظـه چنـد نیوتن است؟

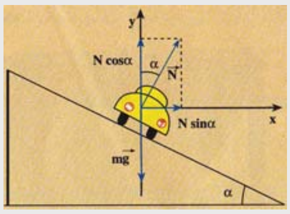


حل:

$$T - mg\cos 60 = \frac{mV^2}{R} \Rightarrow T = mg\cos 60° + \frac{mV^2}{R}$$

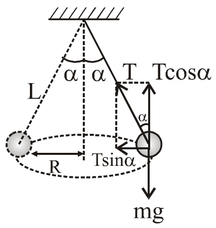
$$T = 20 \times \frac{1}{2} + \frac{2\times 2^2}{0/8} = 20N$$

شیب عرضی جاده: حداکثر سرعت مجاز در پیچ افقی یک جاده $V = \sqrt{\mu_s Rg}$ می‌باشد. برای افزایش این سرعت و برای دوران در جـاده‌ی بـدون اصـطکاک در عرض به جاده شیب می‌دهیم. تا مولفه‌ی افقی نیروی وارد بر اتومبیل، تأمین کننده‌ی نیروی مرکزگرا شود.



$$\left.\begin{aligned} N\sin\alpha &= \frac{mV^2}{R} \\ N\cos\alpha &= mg \end{aligned}\right| \Rightarrow \tan\alpha = \frac{V^2}{Rg} = \frac{a}{g}$$

آونگ مخروطی: کشش نخ به دو مولفه یکی در امتداد قائم به مقدار $T\cos\theta$ که با mg خنثی می‌شـود و دیگـری در امتـداد افـق بـه مقـدار $T\sin\alpha$ کـه نیروی مرکزگرا می‌باشد تجزیه می‌شود.



$$\left.\begin{aligned} T\sin\alpha &= mR\omega^2 \\ T\cos\alpha &= mg \end{aligned}\right| \Rightarrow \tan\alpha = \frac{R\omega^2}{g} = \frac{a}{g}$$

$$\tan\alpha = \frac{R\omega^2}{g} \xrightarrow{R = L\sin\alpha} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{L\sin\alpha.\omega^2}{g} \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{L\omega^2}{g}$$

ماهواره: ماهواره فقط تحت اثر نیروی وزنش در حرکت است. حرکت ماهواره سقوط آزاد است. اجسام در ماهواره بی‌وزن هستند.

سرعت ماهواره: سرعت ماهواره از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$\boxed{V = \sqrt{rg}}$ ← شتاب جاذبه در محل ماهواره
(شعاع دوران ماهواره) فاصله از مرکز زمین

سرعت ماهواره از روابط زیر نیز محاسبه می‌گردد.

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} = Re\sqrt{\frac{g_0}{r}}} \Rightarrow \boxed{V \propto \frac{1}{\sqrt{r}}}$$

دوره‌ی حرکت ماهواره نیز از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_e} r^3} \Rightarrow \boxed{T^2 \propto r^3}$$

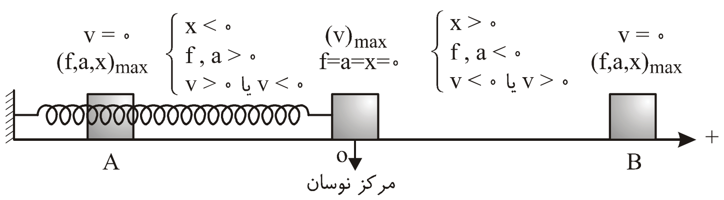
اگر شعاع دوران یک ماهواره چهار برابر شود، سرعت و دوره آن چند برابر می‌شود؟

حل:

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = 4^3 = 64 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 8$$

حرکت نوسانی

حرکت نوسـانی: حرکتـی اسـت کـه یـک متحـرک روی یـک پاره‌خط (AB) حول وسط آن (نقطه‌ی o) چنان انجام مـی‌دهـد که همواره شتابی متناسب با فاصله نوسانگر از مرکز نوسـان و بـه طرف مرکز نوسان داشته باشد.



بعد حرکت: به فاصله‌ی نوسانگر از مرکز نوسان بعد می‌گوییم. بیش‌ترین فاصله از مرکز نوسان **دامنه** می‌باشد. زمـان یـک رفـت و برگشـت کامـل را **دوره حرکـت** می‌نامیم. و تعداد نوسانات در واحد زمان را **بسامد** می‌نامیم. و داریم: $\boxed{T=\frac{1}{f}}$

تعریف دیگر حرکت نوسانی: هرگاه یک متحرک روی دایره حرکت دورانی یکنواخت کند، تصویرش روی هر یک از قطرها، یک حرکت نوسانی دارد.

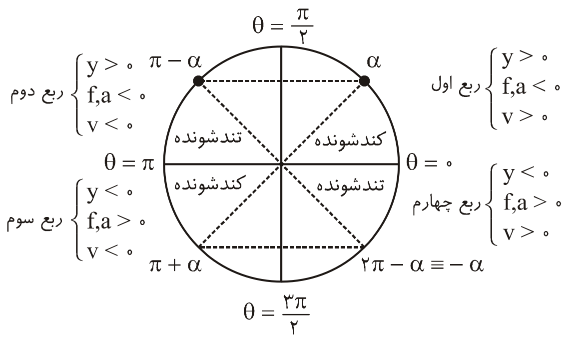
معادله‌ی حرکت نوسانی: معادله‌ای است که در هر لحظه، فاصله‌ی نوسانگر را از مرکز نوسان نشان می‌دهد.

$$\text{بعد حرکت} \leftarrow \boxed{y=\underbrace{A}_{\text{بعد بیشینه (دامنه)}}\sin(\underbrace{\omega t+\theta_0}_{\text{فاز حرکت}})} \rightarrow \text{فاز اولیه} \xrightarrow{t=0} y_0=A\sin\theta_0 \rightarrow \boxed{\sin\theta_0=\frac{y_0}{A}}$$

اگر متحـرک فرضـی روی دایـره‌ی مرجـع حرکـت دایـره‌ای یکنواخـت داشـته باشـد. تصویرش حرکت نوسانی دارد. که اگر نوسانگر بـه طـرف انتهـای مسـیر بـرود حرکـت کندشونده و وقتی متحرک به طرف مرکز نوسان می‌رود حرکت تندشونده است.

* اگر متحرک روی پاره‌خطی به طول d نوسان کند، $A=\frac{d}{2}$ است.

رابطه‌ی سرعت زاویه‌ای – بسامد و دوره $\boxed{\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}}$



نوسانگری بر روی پاره‌خطی به طول ۱۰ سانتی‌متر نوسان می‌کند و در مدت ۴ ثانیه ۲۰ بار پاره‌خط را طی می‌کند. اگر در مبدأ زمان در نصف بعد ماکزیمم در بعدهای منفی حرکت کندشونده داشته باشد معادله‌ی حرکت آن در SI چیست؟

حل:

(نوسان) ۱۰ = ۲۰ بار   ۴ ثانیه

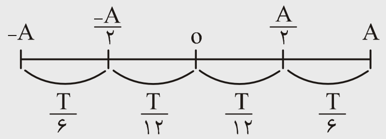
$A=\frac{d}{2}=\frac{10}{2}=5cm=0/05m$

۱    $f=2/5Hz \Rightarrow \omega=2\pi f=5\pi$

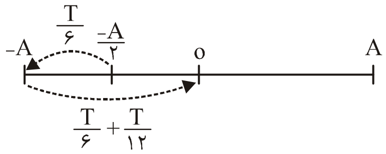
$$\sin\theta_0=\frac{y_0}{A}\xrightarrow{y_0=-\frac{1}{2}A}\sin\theta_0=-\frac{1}{2}\xrightarrow[\text{کندشونده}]{y<0}\text{ربع سوم}\Rightarrow\theta_0=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

$$y=A\sin(\omega t+\theta_0)\Rightarrow y=0/05\sin(5\pi t+\frac{7\pi}{6})$$

* اگر نوسانگری از مرکز نوسان حرکت کند و مسیرش را تا انتها به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم کند، نیمه‌ی اول را در $\frac{T}{12}$ و نیمه‌ی دوم را در مدت $\frac{T}{6}$ می‌پیماید.



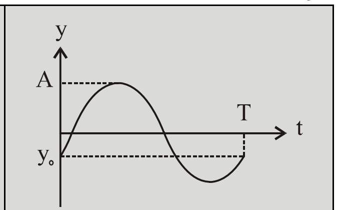
نوسانگری با دوره‌ی $T=0/12s$ در حرکت است. در ابتدا در نصف بعـد بیشـینه و در بعدهای منفی قرار دارد و به طرف انتهای مسیر پیش می‌رود. پس از چه مدت به مرکز نوسـان می‌رسد؟



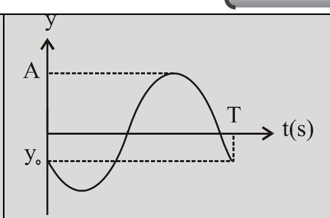
حل:

$$t=\frac{T}{6}+\frac{T}{6}+\frac{T}{12}=\frac{5}{12}T=\frac{5}{12}\times 0/12=0/05s$$

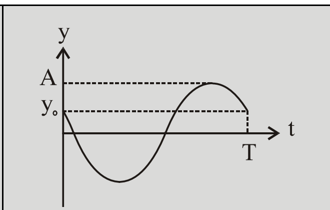
▼ نمودار مکان- زمان در حرکت نوسانی



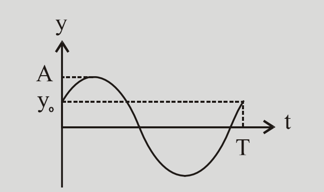
فاز اولیه در ربع چهارم



فاز اولیه در ربع سوم

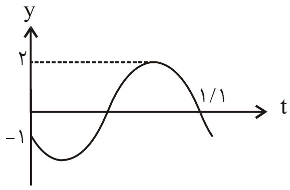


فاز اولیه در ربع دوم



فاز اولیه در ربع اول

نمودار مکان- زمان جسم مرتعشی به شکل مقابل است. معادله‌ی حرکت آن چیست؟



حل: $\sin\theta_0 = \frac{y_0}{A} = -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \theta_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

در لحظه‌ی $t = 1/1$ برای دومین بار $y = 0$ می‌شود. $y = 2\sin(\omega t + \frac{7\pi}{6}) = 0$

مقادیر صفر و π قابل قبول نیستند چون $t < 0$ می‌شود. در 2π برای اولین بار و 3π برای دومین بار $y = 0$ می‌شود.

$\sin(\omega t + \frac{7\pi}{6}) = 0 \Rightarrow \omega t + \frac{7\pi}{6} = 0$ یا π یا 2π یا 3π

$t = 1/1 \Rightarrow 1/1\omega + \frac{7\pi}{6} = 3\pi \to \omega = \frac{5\pi}{3}$

$y = A\sin(\omega t + \theta_0) \Rightarrow y = 2\sin(\frac{5\pi}{3}t + \frac{7\pi}{6})$

سرعت- شتاب و نیرو در حرکت نوسانی

$y = A\sin(\omega t + \theta_0)$

$V = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \theta_0) \Rightarrow \boxed{V_m = A\omega}$

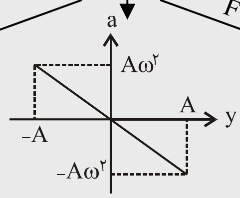
$a = \frac{dV}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \theta_0) \Rightarrow \boxed{a_m = A\omega^2}$

$\Rightarrow \boxed{a_m = V_m.\omega}$

$\xrightarrow{y = A\sin(\omega t + \theta_0)} \boxed{a = -\omega^2 y} \xrightarrow{a + \omega^2 y = 0} \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0}$ شکل دوم معادله نوسانی

$\boxed{a = -\omega^2 y} \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{-y}{a}}}$

$\boxed{a = -\omega^2 y} \xrightarrow{F = ma} \boxed{F = -m\omega^2 y}$ نیروی نوسانی



روابط مستقل از زمان درحرکت‌های نوسانی

روابط مستقل از زمان در حرکت‌های نوسانی	
$(\frac{y}{A})^2 + (\frac{V}{V_m})^2 = 1 \longrightarrow$	$V = \pm\omega\sqrt{A^2 - y^2}$
$(\frac{a}{a_m})^2 + (\frac{V}{V_m})^2 = 1 \longrightarrow$	$a = \pm\omega\sqrt{V_m^2 - V^2}$

معادله حرکت متحرکی در SI به صورت $y = 0/02\sin(100t - \frac{\pi}{8})$ می‌باشد. وقتی نوسان‌گر در $x = +1cm$ قرار دارد و حرکتش تندشـونده اسـت، سرعتش چند متر بر ثانیه می‌باشد؟

حل: وقتی بعد مثبت و حرکت تندشونده است، فاز اولیه در ربع دوم می‌باشد و سرعت منفی است.

$V = -\omega\sqrt{A^2 - x^2} \xrightarrow{A = 0/02m = 2cm} V = -100\sqrt{2^2 - 1^2} = -100\sqrt{3}\,\frac{cm}{s} = -\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$

اختلاف فاز بین معادله حرکت- سرعت و شتاب

در حرکت نوسانی همواره نیرو و شتاب هم فازند و نسبت به سرعت $\frac{\pi}{2}$ و نسبت به بعد به اندازه‌ی π تقدم فاز دارند. سرعت نسبت به شتاب $\frac{\pi}{2}$ تأخیر فاز و نسبت به بعد به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ تقدم فاز دارد.

$y = A\sin(\omega t + \theta_0)$

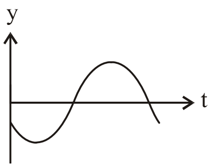
$V = A\omega\cos(\omega t + \theta_0) = V_m\sin(\omega t + \theta_0 + \frac{\pi}{2})$

$a = -A\omega^2\sin(\omega t + \theta_0) = a_m\sin(\omega t + \theta_0 + \pi)$

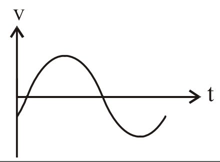
$f = ma \to f = f_m\sin(\omega t + \theta_0 + \pi)$

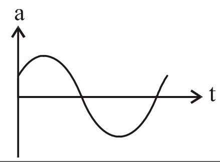
با توجه به مطالب فوق. اگر فاز اولیه معادله حرکت در ربع اول باشد فاز اولیه معادله سینوسی سرعت در ربع دوم و فاز اولیه‌ی شتاب در ربع سوم است. اگر فاز اولیه معادله حرکت در ربع دوم باشد، فاز اولیه معادله‌ی سینوسی سرعت در ربع سوم و فاز اولیه شتاب در ربع چهارم است.

نمودار $y-t$ یک نوسانگر به شکل مقابل است. نمودار سرعت – زمان و شتاب زمان، آن چگونه است؟

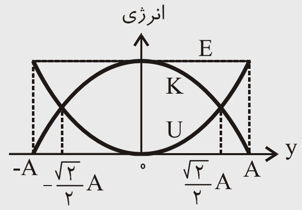


حل: چون فاز اولیه $y-t$، در ربع سوم است، فاز اولیه سرعت و شتاب به ترتیب ربع چهارم و اول می‌باشد.





▼ انرژی



انرژی مکانیکی $E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$ با مجذور دامنه و مجذور بسامد نسبت مستقیم دارد.

انرژی جنبشی $K=\frac{1}{2}mV^2=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-y^2)$

انرژی پتانسیل $U=\frac{1}{2}m\omega^2y^2$

انرژی مکانیکی $E=K+U=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

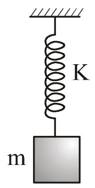
$$\Rightarrow \frac{K}{U}=\frac{A^2-y^2}{y^2},\quad \frac{K}{E}=\frac{A^2-y^2}{A^2},\quad \frac{U}{E}=\frac{y^2}{A^2}$$

در چه فاصله‌ای از مرکز نوسان انرژی پتانسیل و جنبشی برابر است؟

حل:
$$\frac{k}{U}=1\Rightarrow\frac{A^2-y^2}{y^2}=1\rightarrow y^2=\frac{1}{2}A^2\Rightarrow\boxed{y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A}$$

در حرکت‌های نوسانی در مکان‌های $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$ و در فازهای $\theta=(2n-1)\frac{\pi}{4}$ انرژی پتانسیل و جنبشی برابرند.

نوسان جرم و فنر: دوره حرکت و بسامد زاویه‌ای از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.



$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}\Rightarrow\boxed{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

* دوره حرکت نوسانی جرم و فنر به دامنه، شتاب جاذبه و طول فنر بستگی ندارد. با جذر جرم نسبت مستقیم و با جذر ضریب سختی فنر نسبت عکس دارد.

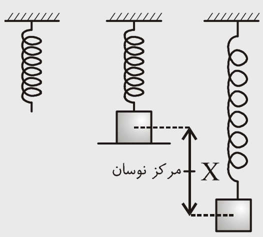
* انرژی مکانیکی مجموعه‌ی جرم و فنر از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{E=\frac{1}{2}kA^2}$$

به فنری به ثابت k، جسمی به جرم m می‌بندیم و با دامنه‌ی A به نوسان در می‌آوریم. انرژی مکانیکی آن E می‌شود اگر فنر را به دو نیمه تقسیم کنیم و به یک نیمه‌ی آن جسمی به جرم 3m بیاویزیم و آن را به دامنه $\frac{A}{2}$ به نوسان درمی‌آوریم. انرژی مکانیکی آن چند E می‌شود؟

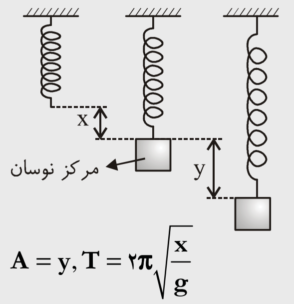
حل: **وقتی فنری به ثابت k به دو نیمه تقسیم می‌شود، ضریب سختی هر نیمه 2k می‌شود.**
$$E=\frac{1}{2}kA^2\rightarrow\frac{E_2}{E_1}=\frac{k_2}{k_1}.\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\Rightarrow\frac{E_2}{E_1}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

به فنری به ثابت k، جسمی به جرم m می‌بندیم و رها می‌کنیم تا جسم بر روی پاره‌خطی به طول X نوسان کند دامنه و دوره آن از رابطه زیر بدست می‌آید.



$$A=\frac{X}{2},\ T=2\pi\sqrt{\frac{X}{2g}}$$

به فنری به ثابت k، که از سقف آویزان است جسمی به جرم m می‌بندیم. فنر پس از تغییر طولی به اندازه x جسم را به تعادل در می‌آورد. جسم را به اندازه y از وضع تعادل خارج کرده و رها می‌کنیم و جسم با دامنه و دوره زیر نوسان می‌کند



$$A=y,\ T=2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$$

آونگ ساده: دوره‌ی یکه آونگ ساده از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

دوره آونگ ساده به جرم گلوله بستگی ندارد.

اگر به جرم گلوله علاوه بر نیروی وزن نیرویی در امتداد قائم وارد شود برای محاسبه‌ی دوره حرکت آونگ، شتاب ناشی از این نیرو تأثیر دارد. اگر نیرو به طرف بالا بود این شتاب را از g کم و اگر به طرف پایین بود جمع می‌کنیم.

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g\pm a}}}$$

نیرو به طرف پایین

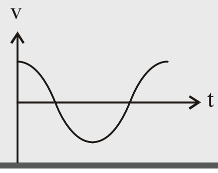
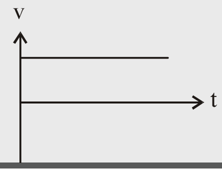
نیرو به طرف بالا

گلوله‌ی یک آونگ آهنی است و با دوره‌ی $T = 2s$ نوسان می‌کند. طول آونگ را نصف می‌کنیم و به کمک یک آهنربا نیرویی معادل وزن گلوله در امتداد قائم به طرف پایین به آن وارد می‌کنیم. دوره‌ی آن چند ثانیه می‌شود؟

حل:
$$\frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{L'}{L} \times \frac{g}{g + \frac{F}{m}}} \Rightarrow \frac{T'}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{g}{g + \frac{mg}{m}}} \Rightarrow T' = 1s$$

موج‌های مکانیکی

موج با سرعت ثابت در یک محیط همگن منتشر می‌شود. و معادله‌ی انتشار آن به صورت $x = Vt$ می‌باشد. سرعت انتشار امواج مکانیکی در جامدات بیش‌تر از مایعات و در مایعات بیش‌تر از گازهاست.

سرعت ارتعاشات ذرات محیط	سرعت انتشار موج
$V = A\omega\cos(\omega t + \theta_0)$	به خواص محیط بستگی دارد.
به خواص منبع (θ_0, ω, A) بستگی دارد.	به خواص منبع بستگی ندارد.
مستقل از خواص محیط است.	
	

طول موج: مسافتی که موج در یک دوره طی می‌کند طول موج نام دارد. (λ)

$$\boxed{\lambda = VT = \frac{V}{f}}$$

سرعت انتشار موج در یک سیم: جرم واحد طول سیم را با μ نشان می‌دهیم

$$\mu = \frac{m}{L} \rightarrow \text{جرم واحد طول سیم } \left(\frac{kg}{m}\right)$$

$$\text{سرعت انتشار ارتعاش } \left(\frac{m}{s}\right) \quad \boxed{V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho . A}} = \frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}} \rightarrow \text{چگالی سیم } \left(\frac{kg}{m^3}\right)$$

D: قطر سیم (m)

بنابراین برای مقایسه سرعت انتشار ارتعاشات در دو سیم از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \times \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \begin{cases} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \times \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \\ \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \times \frac{D_1}{D_2} \end{cases}}$$

تاری به طول L را که m گرم جرم دارد با نیروی F بین دو نقطه می‌کشیم و آن را مرتعش می‌کنیم. اگر تار دیگری به طول $\frac{5}{4}L$ و جرم $8m$ را با همان نیروی کشش، مرتعش کنیم، سرعت انتشار موج در آن چند برابر سیم اول است؟

حل:
$$\mu_2 = \frac{m_2}{L_2} = \frac{0/8m}{\frac{5}{4}L} = (0/8)^2\frac{m}{L} = (0/8)^2\mu_1 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \times \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = 1 \times \sqrt{\frac{\mu_1}{0/8^2\mu_1}} = \frac{5}{4}$$

در رابطه‌ی $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}}$ در صورتی که جرم سیم تغییر نکند و طول آن تغییرکند سرعت انتشار ارتعاشات با جذر طول سیم نسبت مستقیم پیدا می‌کند ولی اگر با تغییر طول سیم جرم آن هم به همان نسبت تغییرکند، μ ثابت می‌ماند و سرعت انتشار ارتعاشات به طول سیم بستگی ندارد.

سرعت انتشار ارتعاشات در سیمی که با نیروی F کشیده می‌شود V می‌باشد. اگر سیم را از دستگاهی عبور دهیم تا طولش دو برابر شود و سیم را با همان نیرو بکشیم، سرعت انتشار ارتعاشات در سیم چند برابر می‌شود؟

حل: **چون جرم ثابت می‌ماند سرعت انتشار ارتعاشات با جذر طول نسبت مستقیم دارد.**

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \sqrt{2}$$

دو سیم به طول‌های L و $3L$ از یک کلاف سیم همگن می‌بریم و آن‌ها را با نیروی کشش یکسان می‌کشیم. سرعت انتشار ارتعاشات در سیم اول چند برابر سرعت در سیم دوم است؟ (جواب: ۱ برابر)

❋ وقتی امواج یک منبع موج از یک محیط وارد محیط دیگری می‌شود بسامد ثابت می‌ماند در این صورت طبق رابطه‌ی $\lambda = \frac{V}{f}$ طول موج به نسبت تغییرات سرعت انتشار موج تغییرمی‌کند.

$$f_1 = f_2 \Rightarrow \boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{V_1}{V_2}}$$