محتوای ویژه کتاب

- مفاهیم ورودی
- مفاهیم آموزشی
- پاسخ به تمام فعالیت‌ها و تمرین‌های کتاب درسی
- ایستگاه یادگیری
- عبارت‌های مهم و سؤالات امتحانی
- ارزشیابی مستمر در پایان هر درس همراه با پاسخ و بارم‌بندی
- آزمون‌های پایانی با پاسخ و بارم‌بندی

هندسه ۱

مفاهیم ورودی

چندضلعی‌ها:

۱- به خط شکستهٔ بسته که ضلع‌ها همدیگر را فقط در رأس قطع کنند چندضلعی می‌گویند.

۲- **چندضلعی منتظم** : چندضلعی‌ای را منتظم گوییم هرگاه تمام ضلع‌ها با هم و تمام زاویه‌هایشان نیز با هم برابر باشند.

۳- **چندضلعی محدب** : چندضلعی را محدب گوییم هرگاه تمام زاویه‌هایش کمتر از ۱۸۰° باشد.

۴- **چندضلعی مقعر:** چندضلعی را مقعر گوییم هرگاه حداقل یک زاویهٔ آن بیشتر از ۱۸۰° باشد.

۵- **مرکز تقارن** : مرکز تقارن نقطه‌ای درون شکل است که اگر شکل را حول آن نقطه در جهت عقربه‌های ساعت به اندازهٔ ۱۸۰° بچرخانیم، شکل روی خودش منطبق می‌شود.

۶- **محور تقارن** : خطی است که شکل را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند به‌طوری که اگر شکل را از روی آن خط تا بزنیم، دو نیمه بر روی یکدیگر منطبق می‌شوند.

۷- یک nضلعی منتظم، n محور تقارن دارد.

۸- در یک nضلعی:

الف) اگر n زوج باشد، nضلعی مرکز تقارن دارد.

ب) اگر n فرد باشد، nضلعی مرکز تقارن ندارد.

۹- مجموع زاویه‌های داخلی یک nضلعی برابر است با:

$$(n-۲)۱۸۰^\circ$$

۱۰- اندازهٔ هر زاویهٔ داخلی در یک nضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{(n-۲)\times ۱۸۰^\circ}{n}$$

۱۱- در هر nضلعی مجموع زاویه‌های خارجی برابر با ۳۶۰° است.

۱۲- اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی در یک nضلعی منتظم برابر است با:

$$\frac{۳۶۰^\circ}{n}$$

۱۳- در nضلعی منتظم هر زاویهٔ خارجی با زاویهٔ داخلی مجاورش مکمل است.

روابط بین خط‌ها:

۱- دو خط نسبت به هم ۳ حالت دارند:

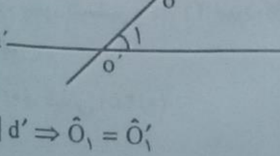
الف) با هم متقاطع هستند. (همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.)

ب) با هم موازی هستند. (همدیگر را قطع نمی‌کنند.)

ج) برهم منطبق هستند. (همدیگر را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کنند.)

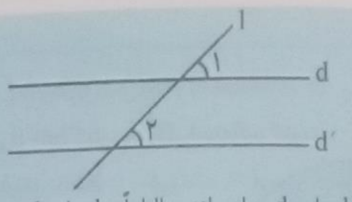
۲- قضیهٔ خطوط موازی:

دو خط d و d' با هم موازی هستند. خط موربی مانند l آنها را قطع می‌کند. زاویهٔ بین خط d و l ($O_۱$) با زاویهٔ بین خط d' و l ($O'_۱$) برابر است.



l مورب، $d \parallel d' \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}'_۱$

۳- دو خط d و d' توسط خط l قطع شده است. اگر زاویهٔ بین d و l با زاویهٔ بین d' و l برابر باشد، حتماً d و d' موازی هستند.



$\hat{۱} = \hat{۲} \Rightarrow d \parallel d'$

۴- دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با $d_۳$ موازی‌اند. الزاماً $d_۱$ با $d_۲$ موازی است.

$$\left.\begin{array}{l} d_۱ \parallel d_۳ \\ d_۲ \parallel d_۳ \end{array}\right\} d_۱ \perp d_۲$$

۵- اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود، بر دیگری نیز عمود است.

$$\left.\begin{array}{l} d_۱ \parallel d_۳ \\ d_۲ \perp d_۳ \end{array}\right\} d_۱ \perp d_۲$$

۶- دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

$$\left.\begin{array}{l} d_۱ \perp d_۲ \\ d_۳ \perp d_۱ \end{array}\right\} d_۳ \perp d_۲$$

دایره:

۱- یک خط و دایره نسبت به هم سه حالت دارند:

الف) خط و دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند.

ب) خط و دایره در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. در این حالت خط بر دایره مماس است.

ج) خط و دایره همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

۲- شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است.

۳- اگر از یک نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم، اندازهٔ دو مماس با هم برابر است.

۴- اگر دو وتر یک دایره با هم برابر باشند، کمان‌های نظیر آنها نیز با هم برابرند.

۵- اگر دو کمان در یک دایره با هم برابر باشند، وترهای نظیر آنها نیز با هم برابرند.

۶- **زاویهٔ مرکزی:** زاویه‌ای را مرکزی گوییم که رأس آن روی مرکز دایره قرار گیرد و اضلاعش دو شعاع دایره باشند. اندازهٔ چنین زاویه‌ای برابر با کمان مقابلش است.

۷- **زاویهٔ محاطی:** زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره قرار دارد و ضلع‌ها دو وتر از دایره هستند. اندازهٔ زاویهٔ محاطی نصف کمان مقابلش است.

۸- زاویه‌های محاطی مقابل به یک کمان با هم برابرند.

۹- زاویهٔ محاطی مقابل به قطر ۹۰° است.

هم‌نهشتی:

۱- دو nضلعی را هم‌نهشت گوییم اگر زاویه‌ها و ضلع‌های نظیرشان با هم برابر باشند.

۲- برای اثبات هم‌نهشتی دو مثلث می‌توان از یکی از روابط زیر استفاده کرد:

الف) سه ضلع هر دو مثلث به‌صورت نظیر به نظیر با هم برابر باشند. ← (ض ض ض)

ب) دو ضلع هر دو مثلث و زاویهٔ بین آنها با هم برابر باشند. ← (ض ز ض)

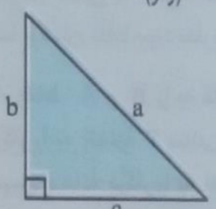
ج) دو زاویه از هر دو مثلث و ضلع بین آنها با هم برابر باشند. ← (ز ض ز)

۳- علاوه بر ۳ حالت گفته شده، می‌توان در مثلث قائم‌الزاویه از دو حالت زیر نیز استفاده کرد:

الف) وتر و یک ضلع ب) وتر و یک زاویهٔ تند.

۴- در هر مثلث قائم‌الزاویه رابطهٔ فیثاغورس برقرار است:

حاصل جمع مربعات دو ضلع دیگر = ^{۲}(وتر)



$a^۲ = b^۲ + c^۲$

۵- اگر در یک مثلث مقدار مربع یک ضلع برابر با حاصل‌جمع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس ۱ ترسیم‌های هندسی

مفاهیم آموزشی

۱- **تعریف دایره:** مجموعه نقاطی از فضا را که فاصلهٔ آنها از نقطه‌ای به نام مرکز یکسان است، دایره می‌نامیم. این فاصله شعاع دایره نام دارد.

بنابراین برای پیدا کردن نقاطی که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ثابتی به نام O برابر a سانتی‌متر باشد، کافی است دایره‌ای به شعاع a و مرکز O رسم کنیم.

۲- دو دایره نسبت به هم ۳ حالت دارند:

الف) اگر فاصلهٔ بین دو مرکز از مجموع شعاع‌ها بیش‌تر باشد، این دو دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند.

ب) اگر فاصلهٔ بین دو مرکز با مجموع شعاع‌ها برابر باشد، دو دایره در یک نقطه باهم تماس دارند.

ج) اگر فاصلهٔ بین دو مرکز از مجموع شعاع‌ها کمتر باشد، دو دایره همدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند.

مثال: فاصلهٔ بین مرکز دو دایره برابر $۶\,cm$ است. شعاع دایره اول برابر با $۴\,cm$ و شعاع دایرهٔ دوم $۲\,cm$ است. این دو دایره نسبت به هم چه حالتی دارند؟

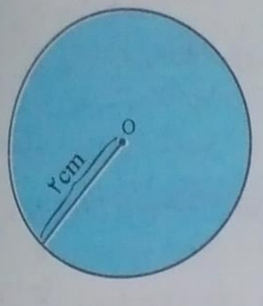
$$\left.\begin{array}{l} r_۱ = ۲cm \\ r_۲ = ۴cm \end{array}\right. \Rightarrow r_۱ + r_۲ = ۶cm$$

مجموع شعاع‌ها با فاصلهٔ بین مرکزها برابر است. بنابراین در یک نقطه باهم تماس دارند.

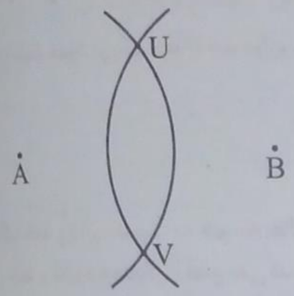
فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

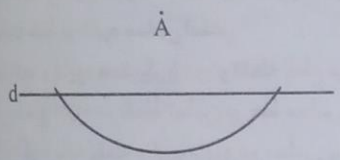
۱- نقطه‌ای مانند O در صفحه نظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید. نقاطی را مشخص کنید که فاصلهٔ یکسانی از نقطهٔ O دارند. (مثلاً همهٔ نقاطی که فاصله‌شان از نقطهٔ O برابر ۲ سانتی‌متر است.) با توجه به تعریف دایره کافی است دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم کنیم.



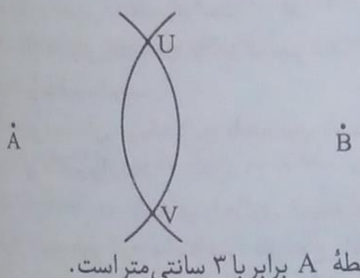
۲- نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنید و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟ فاصله U از A با فاصله U از B برابر است، همچنین فاصلهٔ V از A با فاصلهٔ V از B برابر است.



۳- نقطهٔ A مانند شکل مقابل به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ A باشند. کمانی به شعاع ۲ سانتی‌متر و مرکز A رسم می‌کنیم. محل برخورد خط و کمان نقاط مورد نظر هستند.



۴- نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ A یک کمان بزنید. سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطهٔ B یک کمان بزنید.



الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟ فاصلهٔ همهٔ این نقاط از نقطهٔ A برابر با ۳ سانتی‌متر است.

ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟ فاصلهٔ همهٔ نقاط از نقطهٔ B برابر با ۴ سانتی‌متر است.

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصلهٔ نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟ فاصلهٔ نقاط تقاطع از A برابر با ۳ سانتی‌متر و از B برابر با ۴ سانتی‌متر است. برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشد باید حاصل جمع شعاع‌های دو کمان از فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B بیشتر باشد.

ت) طول اضلاع مثلث AUB چند است؟

AB = ۵ **سانتی‌متر**

AU = ۳ سانتی‌متر

BU = ۴ سانتی‌متر

ایستگاه یادگیری

دو نقطهٔ A و B داریم که فاصله بین آنها a سانتی‌متر است. کمان‌هایی به مرکز A و B رسم می‌کنیم. ۳ حالت ممکن است پیش بیاید:

۱) اگر مجموع شعاع‌های دو کمان بیشتر از a باشد، دو کمان در ۲ نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

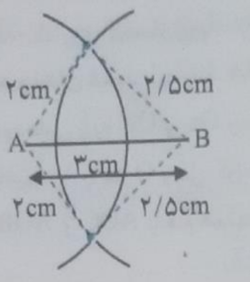
۲) اگر مجموع شعاع‌های دو کمان با a برابر باشد، دو کمان در یک نقطهٔ تماس دارند.

۳) اگر مجموع شعاع‌های دو کمان از a کوچک‌تر باشد، دو کمان همدیگر را قطع نمی‌کنند.

کار در کلاس

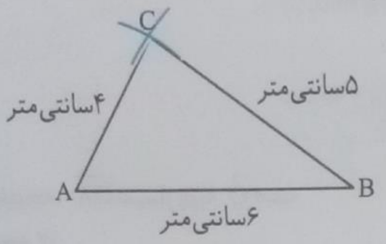
۱- دو نقطه مانند A و B به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

ابتدا دو نقطه A و B را به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از هم در نظر می‌گیریم. کمانی به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی‌متر و همچنین کمان دیگری به شعاع ۲/۵ سانتی‌متر و مرکز B رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان نقاط مورد نظر است. (نقاط نشان داده شده در شکل)



۲- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

ابتدا پاره‌خطی به‌طول ۶ سانتی‌متر را رسم کرده و آن را $\overline{AB}$ می‌نامیم. از نقطهٔ A کمانی به مرکز A و شعاع ۴ سانتی‌متر و همچنین کمان دیگری به مرکز B و شعاع ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل برخورد دو کمان را C می‌نامیم. نقاط را به هم وصل می‌کنیم.



۳- جاهای خالی را به‌گونه‌ای کامل کنید که مسئلهٔ زیر:

الف) دو جواب داشته باشد. ب) یک جواب داشته باشد. پ) جواب نداشته باشد.

نقاط A و B به فاصلهٔ .... از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطهٔ A برابر .... و از نقطهٔ B برابر .... باشد.

الف) ۶ - ۴ - ۳ ب) ۶ - ۳ - ۳ ج) ۶ - ۲ - ۳

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

ایستگاه یادگیری

۱) نیمساز یک زاویه نیم خطی است که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

۲) هر نقطهٔ روی نیمساز زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۳) هر نقطه که فاصلهٔ آن از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد، الزاماً روی نیمساز آن زاویه قرار می‌گیرد.

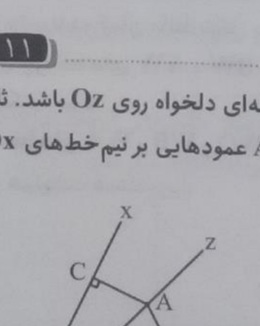
٤) فاصلهٔ یک نقطه از یک خط برابر با عمودی است که از آن نقطه بر خط رسم می‌شود.

۱۱

فعالیت

۱- زاویهٔ $x\hat{O}y$ و نیم‌خط Oz را نیمساز آن در نظر بگیرید. فرض کنید نقطهٔ A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصلهٔ نقطهٔ A از دو ضلع زاویهٔ $x\hat{O}y$ یکسان است. (یعنی اگر از نقطه A عمودهایی بر نیم‌خط‌های Ox و Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)

از نقطهٔ A عمودهایی را بر Ox و Oy رسم می‌کنیم و آنها را B و C می‌نامیم. ثابت می‌کنیم دو مثلث OAB و OAC با هم هم‌نهشت هستند.

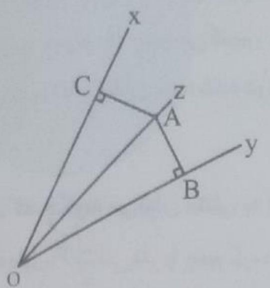


$$\left.\begin{array}{l}\overline{OA} \text{ ضلع مشترک} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ : چون Oz نیمساز زاویه O است}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} O\overset{\Delta}{A}C \cong O\overset{\Delta}{A}B \Rightarrow \overline{AC} = \overline{AB}$$

نتیجهٔ ۱:

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد فاصله‌اش از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.

۲- زاویه xOy و نقطهٔ A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصلهٔ نقطهٔ A از نیم‌خط‌های Oy و Ox با هم برابر باشد. نشان دهید که نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y$ قرار دارد. (راهنمایی: پاره‌خط OA، دو عمود از نقطه A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره خط OA همان نیم‌ساز xOy است.)



ابتدا از A عمودهایی را به Oy و Ox رسم می‌کنیم و آنها را B و C می‌نامیم. A را به O وصل کرده و ثابت می‌کنیم که دو مثلث AOB و AOC با هم هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{OA} & \text{ضلع مشترک} \\ \overline{AB} = \overline{AC} & \text{طبق فرض مساله} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{AOC} \Rightarrow A\hat{O}B = A\hat{O}C$$

در نتیجه: $\overline{OA}$ نمیساز زاویهٔ $\hat{O}$ است.

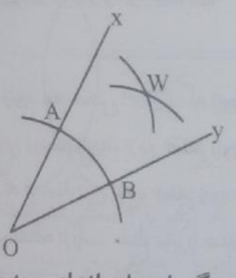
نتیجه ۲:

اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرا ر دارد.

نتیجه: از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

فعالیت ۱۲



۱- زاویهٔ $x\hat{O}y$ را در نظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به‌ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

- طول پاره‌خط OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

با هم برابرند، چون در حقیقت شعاع‌های یک دایره به مرکز O هستند.

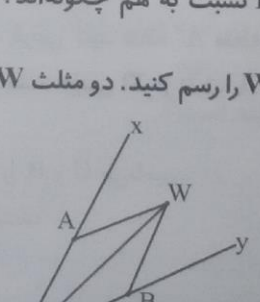
۲- دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

- طول پاره‌خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ با هم برابرند، چون در هنگام رسم آنها طول دهانهٔ پرگار تغییر نکرده است.

- پاره‌خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به‌هم چگونه‌اند؟ چرا؟

با هم هم‌نهشت هستند. زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OW \ \text{مشترک} \\ AW = BW \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{OAW} \cong \overset{\Delta}{WOB}$$

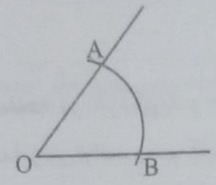


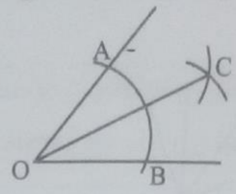
- اندازهٔ زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ با هم برابرند. چون دو مثلث OAW و OBW با هم هم‌نهشت هستند بنا به قسمت قبل در نتیجه اجزای متناظرشان با هم برابرند.

- پاره‌خط OW برای زاویهٔ $x\hat{O}y$ چه نوع پاره‌خطی است؟ نیمساز آن است.

کار در کلاس ۱۲

روش رسم نیمساز یک زاویهٔ را توضیح دهید. دهانهٔ پرگار را به‌اندازهٔ دلخواه باز کرده و به مرکز O کمانی می‌زنیم تا زاویه را در ۲ نقطهٔ A و B قطع کند. حال دهانهٔ پرگار را کمی بیش از فاصله A تا B باز می‌کنیم و به مرکز A و B، دو کمان رسم می‌کنیم و محل برخورد دو کمان را C می‌نامیم. O را به C وصل می‌کنیم. پاره‌خط حاصل نیمساز زاویهٔ O است.





ایستگاه یادگیری

۱- عمودمنصف: خطی است که بر پاره‌خط عمود شده و آن را به ۲ قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

۲- هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است.

۳- هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمودمنصف آن قرار دارد.

۴- از یک نقطه بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد.

۵- از دو نقطه فقط یک خط راست می‌توان رسم کرد.

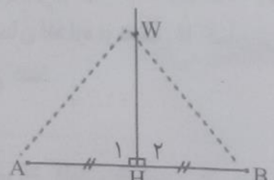
۶- برای رسم یک خط مشخص حداقل به ۲ نقطه از آن خط نیاز داریم.

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

فعالیت ۱۳

۱- پاره‌خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطهٔ W از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله است.

W را به A و B وصل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که $\overline{WA} = \overline{WB}$

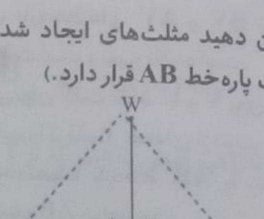


$$\left.\begin{array}{l} \overline{WH} \quad \text{ضلع مشترک} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \overline{AH} = \overline{BH} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض زض)}} \overset{\Delta}{WHA} \cong \overset{\Delta}{WHB} \Rightarrow \overline{WA} = \overline{WB}$$

نتیجه ۱: اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

۲- پاره‌خط AB و نقطهٔ W را به‌گونه‌ای در نظر بگیرید که نقطهٔ W از A و B به یک فاصله باشد. (یعنی WA=WB) نشان دهید W روی عمودمنصف $\overline{AB}$ قرار دارد.

(راهنمایی: از نقطه W به A و B و به وسط پاره خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.)



W را به A و B وصل می‌کنیم، همین‌طور W را به وسط پاره‌خط AB وصل کرده و آن نقطه را M می‌نامیم. حال ثابت می‌کنیم که دو مثلث WAM و WBM با هم هم‌نهشتند.

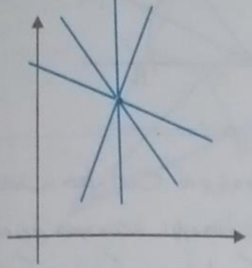
$$\left.\begin{array}{l} \overline{WA} = \overline{WB} \ \text{(طبق فرض)} \\ \overline{WM} \quad \text{ضلع مشترک} \\ \overline{MA} = \overline{MB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{WAM} \cong \overset{\Delta}{WBM} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

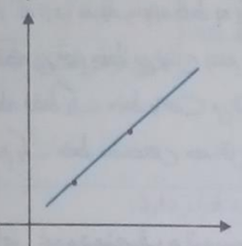
از طرفی چون $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ مکمل هستند، پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$.

نتیجه: اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن نقطه روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.
نتیجه: از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و **هر نقطه که** فاصلهٔ آن از دو سر پاره‌خط به یک اندازه باشد **روی عمودمنصف** آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت ۱۳

۱- یک نقطه در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه مورد نظر بگذرد؟
بی‌شمار خط می‌توان رسم کرد. از یک نقطه بی‌شمار خط عبور می‌کند.



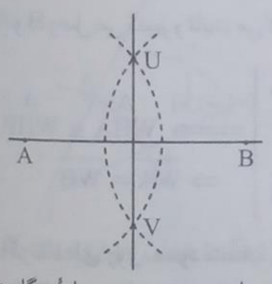


۲- دو نقطه در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ مورد نظر بگذرد؟ فقط یک خط می‌توان رسم کرد.

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به‌طور کامل مشخص باشد حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟
حداقل ۲ نقطه از خط باید مشخص باشد. زیرا از دو نقطهٔ متمایز فقط یک خط راست عبور می‌کند.

فعالیت ۱۴

پاره‌خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.
۱- دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و یک‌بار از نقطهٔ A و بار دیگر با همان اندازه از نقطهٔ B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه U و V قطع کنند.



۲- طول پاره‌خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ AU و BU با هم برابر هستند. چون دهانهٔ پرگار در هنگام رسم کمان‌ها ثابت مانده است.
۳- طول پاره‌خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ با هم برابر هستند. چون دهانهٔ پرگار در زمان رسم کمان‌ها ثابت است و تغییر نکرده است.
۴- آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارند؟ چرا؟ بله، با توجه به نتیجه‌ای که در فعالیت قبل گرفتیم، اگر فاصلهٔ نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد، آن نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد.
۵- عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید. کافی است. دو نقطهٔ U و V را به هم وصل می‌کنیم. خط ایجاد شده عمودمنصف AB خواهد بود.

کار در کلاس ۱۴

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره‌خط را توضیح دهید. ابتدا دهانهٔ پرگار را بیشتر از نصف پاره‌خط باز کرده و به مرکز دو سر پاره‌خط کمان‌هایی می‌زنیم. محل برخورد دو کمان را به هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. این خط عمودمنصف پاره‌خط مورد نظر است.

ایستگاه یادگیری

۱- از یک نقطه روی خط فقط یک عمود می‌توان رسم کرد.
۲- از یک نقطهٔ خارج خط فقط یک عمود می‌توان رسم کرد.
۳- فاصلهٔ یک نقطه از خط برابر با اندازهٔ پاره‌خطی است که از آن نقطه عبور کرده و بر خط عمود می‌شود که طبق نکتهٔ ۱ فقط یک عمود وجود دارد.
۴- برای به‌دست آوردن فاصلهٔ بین دو خط موازی d_1 و d_2، کافی است که یک نقطه روی d_2 در نظر گرفته و از آن عمودی بر d_1 رسم کنیم. اندازهٔ این عمود برابر با فاصلهٔ بین d_1 و d_2 است.

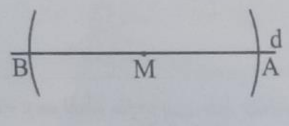
رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت ۱۴

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

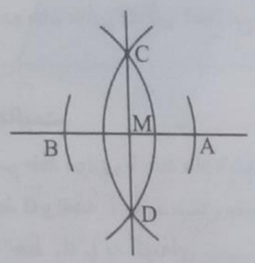
خط d و نقطهٔ M را روی آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره‌خط AB باشد.



کافی است که به مرکز M و شعاع دلخواه کمانی رسم کنیم که خط d را در دو نقطه قطع کند. یکی از نقاط ایجاد شده را A و دیگری را B می‌نامیم.

۲- عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید. کافی است با استفاده از گونیا عمودی رسم کنیم که از نقطهٔ M عبور کند، البته از آنجا که M وسط AB است می‌توانستیم عمودمنصف AB را به روش قبل رسم کنیم که حتماً از M عبور می‌کند چون هر نقطه که از ۲ سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار دارد.



۳- عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d عمود بوده و از نقطهٔ M عبور می‌کند.

کار در کلاس ۱۴

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از یک نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید. فرض کنیم خط d و نقطهٔ M روی آن داده شده است. ابتدا به مرکز M و شعاع دلخواه دو کمان می‌زنیم. (هر دو کمان به یک اندازه) محل برخورد دو کمان و خط d را A و B می‌نامیم. حال عمودمنصف پاره‌خط AB را به روشی که قبلاً گفته شد رسم می‌کنیم.
عمودمنصف پاره‌خط AB همان عمود بر خط d است که از نقطهٔ M نیز عبور می‌کند.

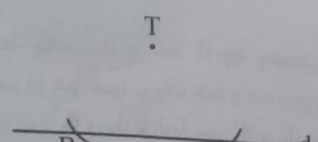
فعالیت ۱۵

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

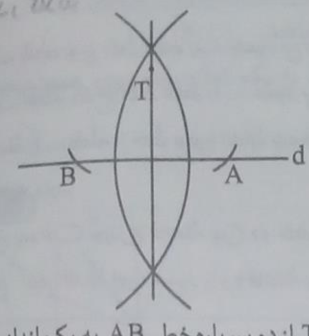
خط d و نقطهٔ T را که غیرواقع بر آن است، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ T به یک فاصله باشند.

کمانی به مرکز T رسم می‌کنیم که طول این کمان از فاصلهٔ T تا d باید بیشتر باشد. این کمان الزاماً d را در دو نقطه قطع می‌کند.



۲- عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.



دهانه پرگار را به اندازه‌ای کمتر از طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم. فقط باید حواسمان باشد که اندازه دهانه پرگار از نصف اندازه AB کمتر نشود. سپس دو کمان می‌زنیم یکی به مرکز نقطه A و دیگری به مرکز B اکنون نقاط تلاقی دو کمان را به‌هم وصل می‌کنیم که عمود منصف AB را تشکیل می‌دهد.

۳- آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ T می‌گذرد؟ چرا؟ بله، چون فاصلهٔ T از دو سر پاره‌خط AB به یک اندازه است. **عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d** عمود است **و از نقطهٔ T** عبور می‌کند.

کار در کلاس ۱۵

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. فرض کنیم خط d و نقطه T خارج از آن داده شده است. ابتدا کمانی به مرکز T و به اندازهٔ بیشتر از فاصلهٔ T تا d رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطهٔ A و B قطع کند. سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف از نقطهٔ T عبور می‌کند و بر خط d نیز عمود است.

ایستگاه یادگیری

۱- از هر نقطه خارج یک خط فقط می‌توان یک خط موازی با خط اول رسم کرد.

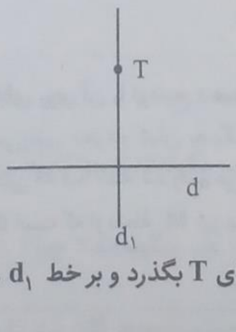
۲- دو خط موازی همدیگر را قطع نمی‌کنند و فاصله بین آنها در هر نقطه همیشه ثابت است.

فعالیت ۱۵

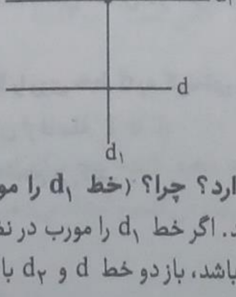
رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیرواقع بر آن

خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ T بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ T بگذرد و بر خط d عمود باشد. با استفاده از گونیا عمودی از نقطهٔ T به خط d رسم می‌کنیم.



۲- خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطه‌ای T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد. با استفاده از گونیا عمودی از نقطهٔ T خارج می کنیم و آن را d_2 می‌نامیم.

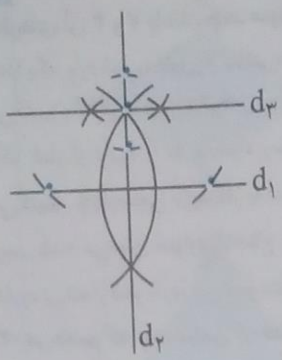


۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورّب در نظر بگیرید.) d و d_2 با هم موازی‌اند. می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند. اگر خط d_1 را مورب در نظر می‌گرفتیم و خط d_2 را طوری رسم می کردیم که زاویهٔ بین d_1 و d_2 با زاویهٔ بین d و d_1 برابر باشد، باز دو خط d و d_2 با هم موازی می‌شدند.

کار در کلاس

۱۵

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.



ابتدا فرض می‌کنیم که خط d_1 و نقطه T داده شده است. می‌توانیم از نقطه‌ی T خطی موازی d_1 رسم کنیم. برای انجام این کار ابتدا عمودی به d_1 رسم می‌کنیم که از T عبور کند آن را d_2 می‌نامیم. سپس عمود دیگری بر d_2 رسم می‌کنیم که از نقطهٔ T عبور کند و آن را d_3 می‌نامیم. از آنجا که d_1 و d_3 هر دو بر d_2 عمود هستند، پس d_1 و d_3 الزاماً باهم موازی‌اند.

روش دوم: با استفاده از گونیا عمودی بر d_1 رسم می‌کنیم که از نقطهٔ T عبور کند و آن را d_2 می‌نامیم. سپس عمود بر d_2 رسم می‌کنیم که از نقطه T عبور کرده و آن را d_3 می‌نامیم. حال چون d_1 و d_3 به d_2 عمود هستند، بنابراین الزاما باهم موازی‌اند.

فعالیت

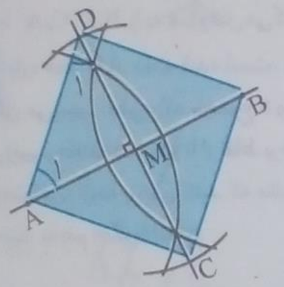
۱۵

پاره‌خط داده شدهٔ AB در شکل مقابل با اندازهٔ ۴ واحد، را در نظر بگیرید.

الف) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطهٔ برخورد این عمودمنصف با پاره‌خط M , AB باشد.

ب) به مرکز M به شعاع AM دایره‌ای رسم کنید تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

پ) چهارضلعی ACBD چگونه چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟



چون C و D روی عمودمنصف AB است، پس تساوی روبه‌رو را داریم:

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{DB} \\ \overline{AC} = \overline{BC} \end{cases}$$

همچنین چون مثلث‌های ایجاد شدهٔ MDB ، MDA ، MBC و MAC با هم هم‌نهشت هستند. تساوی زیر را داریم:

$\overline{AD} = \overline{DB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

از طرفی چون $\overline{MA} = \overline{MD}$ است، بنابراین در مثلث MDA اندازهٔ زاویه‌های $\hat{D}_1 = \hat{A}_1 = ۴۵^\circ$ است و با همین استدلال داریم: $\hat{D} = \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۹۰^\circ$

چهارضلعی‌ای را که ضلع‌هایش با هم برابر و تمام زاویه‌های آن نود درجه است، مربع گوییم.

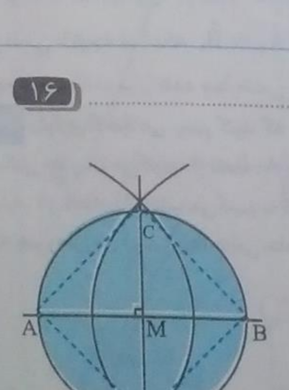
ایستگاه یادگیری

در مربع قطرها عمودمنصف یکدیگر بوده و با هم برابرند.

کار در کلاس

۱۶

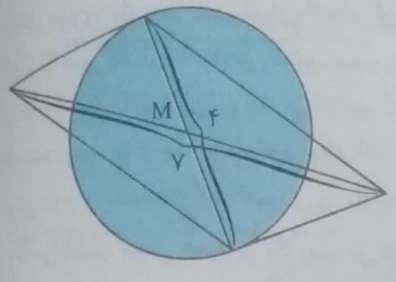
طریقهٔ رسم مربعی که قطرآن داده شده باشد را توضیح دهید.



می‌خواهیم مربعی رسم کنیم که قطرهای آن ۶ سانتی‌متر باشد. ابتدا یک پاره‌خط به اندازهٔ ۶ سانتی‌متر رسم کرده آن را AB می‌نامیم. سپس محل برخورد عمودمنصف خط AB را M می‌نامیم. به مرکز M و به شعاع ۳ سانتی‌متر دایره‌ای رسم می‌کنیم. محل برخورد دایره با عمودمنصف AB را C و D می‌نامیم. حال نقاط A ، C، B و D را به هم وصل می‌کنیم. شکل حاصل مربع خواسته شده است.

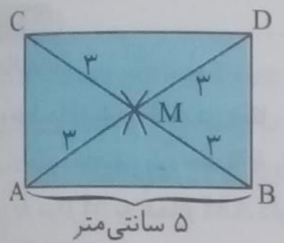
تمرین

۱- می‌دانیم چندضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟



ابتدا یک پاره‌خط به‌طول ۷ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم، نقطهٔ وسط آن را پیدا می‌کنیم و M می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز M و شعاع ۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. یک قطر از دایره را به دلخواه رسم می‌کنیم. این نقطه‌ها را به‌هم وصل می‌کنیم، چهارضلعی موردنظر به‌دست می‌آید. به تعداد تمام قطرهای دایره رسم شده می‌توان متوازی‌الاضلاع به قطر ۴، ۷ سانتی‌متر رسم کرد و چون دایره بی‌شمار قطر دارد، بی‌شمار متوازی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد.

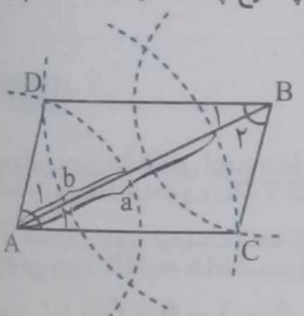
۲- می‌دانیم که چندضلعی که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد. ابتدا پاره‌خط دلخواه AB را رسم می‌کنیم، مثلاً به طول ۵ سانتی‌متر. سپس از دو سر آن دو کمان به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم و محل برخورد آنها را M می‌نامیم. AM و BM را به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر امتداد می‌دهیم و نقاط پایانی را C و D می‌نامیم.



نقاط A, C, D, B را به هم وصل می‌کنیم.

۳- پاره‌خط AB داده شده است. دهانهٔ پرگار را یکبار به اندازهٔ a و بار دیگر به اندازهٔ b باز می‌کنیم و از نقطهٔ A دو کمان می‌زنیم. (بطوری‌که مجموع a و b از اندازه AB بزرگ‌تر باشد) سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این‌بار از نقطهٔ B می‌زنیم و مانند شکل دو تا از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چندضلعی ACBD چه نوع چندضلعی‌ای است؟ چرا؟

(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث‌های ABC و ABD و زوایای A_1 , B_1 نسبت به‌هم چگونه‌اند.)

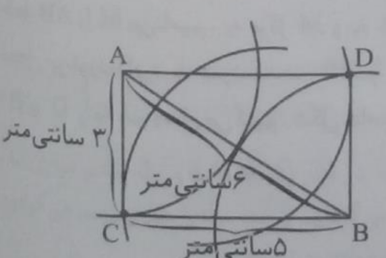


AD شعاع دایره‌ای به مرکز A و BC شعاع دایره‌ای به مرکز B است. چون دو کمان با شعاع‌های برابر و مرکزهای مختلف زدیم، پس $\overline{BC} = \overline{AD}$ و با همین استدلال $\overline{DB} = \overline{AC}$ می‌شود.

با توجه با مطالب فوق، دو مثلث $ADB \cong ABC$ در نتیجه $\hat{A}_1 = \hat{B}_2$, $\hat{A}_2 = \hat{B}_1$, $\hat{D} = \hat{C}$

از طرفی با توجه به اینکه $\hat{A}_2 = \hat{B}_1$ و قضیهٔ توازی دو خط و قطع کردن خط مورب می‌توان نتیجه گرفت که $DB \parallel AC$ با توجه به مطالب بیان شده چهارضلعی یک متوازی‌الاضلاع است.

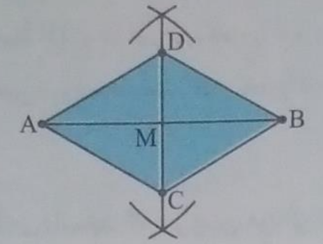
۴- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد. ابتدا پاره‌خط AB را به اندازهٔ ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم، از نقطهٔ A و B دو کمان به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. ۴ نقطهٔ برخورد وجود دارد. دو نقطه را انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که در یک طرف پاره‌خط AB نباشند. آنها را D و C نامگذاری می‌کنیم و نقاط را به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی حاصل شکل خواسته شده است.



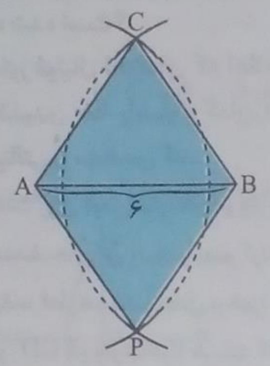
۵- می‌دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم‌های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد. ابتدا قطری به طول ۵ سانتی‌متر را رسم کرده و آن را AB می‌نامیم. عمودمنصف AB را رسم کرده و محل برخورد آن با AB را M می‌نامیم.

نقاط D و C را روی عمودمنصف چنان اختیار می‌کنیم که فاصله‌شان از M، ۱/۵ سانتی‌متر باشد. این نقاط را به هم وصل می‌کنیم.



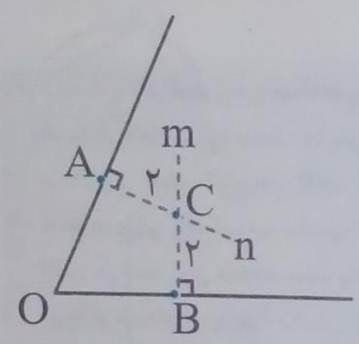
ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید. ابتدا قطری به طول ۶ سانتی‌متر را رسم می‌کنیم و آن را AB می‌نامیم. به مرکز A و B کمان‌هایی به اندازهٔ ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل برخورد کمان‌ها را D و C می‌نامیم و به هم وصل می‌کنیم.



۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

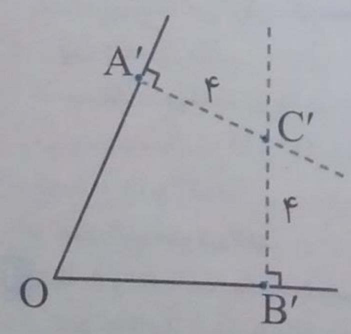
الف) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ مورد نظر ۲ واحد باشد.

یک زاویه دلخواه $(\hat{O})$ رسم کرده و بر روی هر ضلع آن یک نقطه با فاصله مشخص از رأس زاویه ا نتخاب می‌کنیم. $(\overline{OA}=\overline{OB})$ سپس از هریک از این نقطه‌ها، خطی عمود بر ضلع زاویه رسم می‌کنیم (خط‌های m و n). این دو خط یک‌دیگر را در یک نقطه قطع خواهند کرد (نقطه C) که فاصله این نقطه از دو ضع زاویه باهم برابر است (با استفاده از تشابه مثلث‌ها این قضیه قابل اثبات است.) حالا با استفاده از خط‌کش فاصله نقطه تقاطع عمودها با ضلع‌های زاویه $(\overline{AC},\overline{BC})$ را اندازه می‌گیریم. اگر این فاصله برابر ۲ بود، نقطه به دست آمده جواب مسئله است. در غیر این‌صورت باید آنقدر عمودها را جابه‌جا کنیم تا فاصله نقطه تقاطع آنها از دو ضلع زاویه برابر ۲ شود.

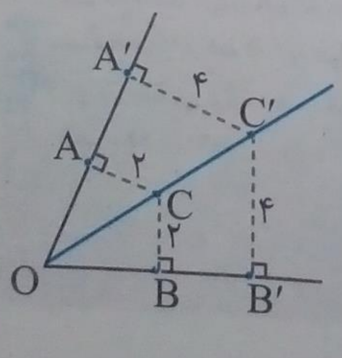


ب) نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع اولیهٔ مورد نظر ۴ واحد باشد.

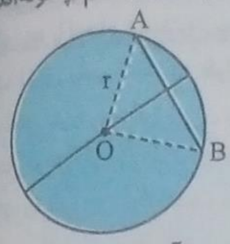
مانند روش قبل عمل می‌کنیم؛ یعنی آنقدر عمودها را جابه‌جا می‌کنیم تا فاصله نقطه تقاطع آنها از دوضلع زاویه برابر ۴ شود.



پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویهٔ مورد نظر را رسم کنید. کافی است دو نقطهٔ C و ′C را به هم وصل کرده و امتداد دهیم. همان‌طور که می‌دانیم این خط الزاماً نیمساز است، چون فاصله نقطه‌های روی آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.



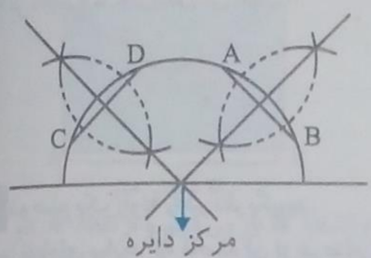
۷- وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم، O روی عمودمنصف AB قرار دارد، چون فاصلهٔ O از دو سر پاره‌خط با هم برابر است زیرا $OA = OB = r$ و همین‌طور عمودمنصف نقش قطر را دارد.

آیا می‌دانستید که در زمین فوتبال نقطهٔ پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می‌کند متوجه می‌شود که نقطهٔ پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد چگونه می‌تواند با استفاده از قوس جلوی محوطهٔ هجده‌قدم، نقطهٔ پنالتی را مشخص کند.



کافی است روی قوس موردنظر دو وتر به دلخواه رسم کنید. سپس عمودمنصف‌های آن وترها را رسم کرده و امتداد دهد. این عمودمنصف‌ها در حقیقت قطر هستند و محل برخورد آنها نشان‌دهندهٔ مرکز است.

AB و CD دو وتر دلخواه هستند که عمودمنصف آنها را رسم می‌کنیم.

ارزشیابی مستمر

۱- درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)

الف) در دایره، عمودمنصف هر وتر از مرکز دایره عبور می‌کند. ☐ درست ☐ نادرست

ب) از یک نقطه خارج خط d حداقل یک خط می‌توان بر d عمود کرد. ☐ درست ☐ نادرست

۲- جاهای خالی را با کلمات مناسب کامل کنید. (۱)

الف) هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن .... است.

ب) اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه .... قرار دارد.

۳- گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (۱)

الف) برای مشخص کردن یک خط متمایز حداقل به:

۱) یک نقطه نیاز داریم.

۲) حداقل به دو نقطه نیاز داریم.

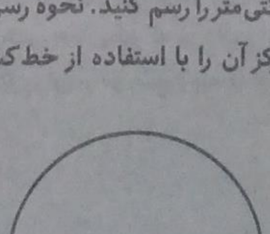
ب) دو دایره به مرکز O و 'O به شعاع‌های ۱ و ۳ هستند و همچنین فاصلهٔ O تا 'O برابر با ۵ سانتی‌متر است. دو دایرهٔ O و 'O :

۱) همدیگر را قطع می‌کنند. **۲) همدیگر را قطع نمی‌کنند.**

۴- نقطهٔ A و 'A به روی یک خط راست واقع‌اند و فاصلهٔ آنها از هم برابر با ۳ سانتی‌متر است. نقاطی از صفحه را پیدا کنید که فاصلهٔ آنها از A و 'A به‌ترتیب ۲ و ۴ سانتی‌متر باشد. (۱)

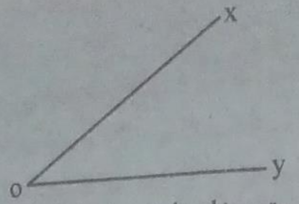
۵- عمودمنصف پاره خط AB به طول ۶ سانتی‌متر را رسم کنید. نحوهٔ رسم عمودمنصف را توضیح دهید. (۱)

۶- کمان زیر قسمتی از یک دایره است. مرکز آن را با استفاده از خط‌کش و پرگار به‌دست آورید. نحوهٔ رسم آن را توضیح دهید. (۲)



۷- نقطهٔ T خارج از خط d قرار دارد. عمود وارد بر خط d را که از نقطهٔ T عبور می‌کند رسم کنید. (۱)

۸- نیمساز زاویهٔ $\widehat{xoy}$ را به‌دست آورید. (۱)



۹- یک لوزی رسم کنید که قطر آن ۵ سانتی‌متر و ضلع‌هایش برابر ۳ سانتی‌متر باشد. (۱)

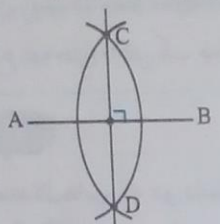
پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) درست (۰/۵)، ب) نادرست (۰/۵) ۲ الف) به یک فاصله (۰/۵) ب) روی نیمساز آن زاویه (۰/۵)

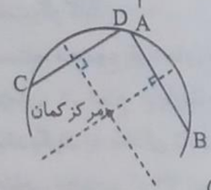
۳ الف) گزینهٔ ۲ (۰/۵)، ب) گزینهٔ ۲ (۰/۵)

۴ به مرکز A و ′A به‌ترتیب ۲ دایره به شعاع ۲ و ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو دایره نقاط مورد نظر هستند. (۱)

۵ ابتدا دهانهٔ پرگار را به‌اندازهٔ بیش از نصف AB باز کرده و دو کمان به مرکز A و B رسم می‌کنیم. (۰/۵) محل برخورد این دو کمان را D و C می‌نامیم و نقاط D و C را به هم وصل می‌کنیم. خط گذرنده از D و C، عمودمنصف خط AB است. (۰/۵)

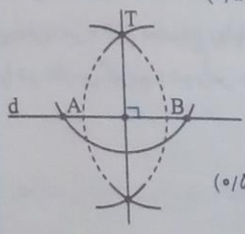


۶ دو وتر AB و CD را به‌طور دلخواه رسم کرده (۰/۵) و سپس عمودمنصف وترها را رسم می‌کنیم. (۰/۵) محل برخورد این دو عمودمنصف مرکز کمان مورد نظر است. (۰/۵)



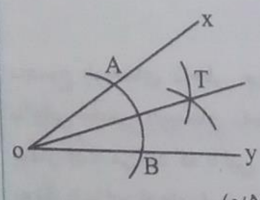
(۰/۵)

۷ فرض می‌کنیم خط d و نقطهٔ T را داریم. ابتدا به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطهٔ B و A قطع کند. عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. (۰/۵)



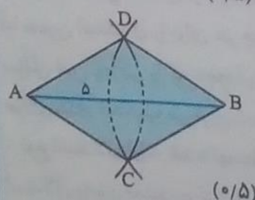
(۰/۵)

۸ دهانه پرگار را به اندازه دلخواه باز کرده و کمان به مرکز O رسم می‌کنیم. محل برخورد دو کمان را A و B می‌نامیم. دو کمان به مرکز A و B و به اندازهٔ بیشتر از نصف A و B رسم می‌کنیم. محل برخورد دو کمان را T می‌نامیم. O را به T وصل کرده و امتداد می‌دهیم. خط حاصل نیمساز مورد نظر خواهد بود. (۰/۵)



(۰/۵)

۹ ابتدا قطر ۵ سانتی‌متری را رسم می‌کنیم و آن را A و B می‌نامیم. سپس دو کمان به مرکز دو سر پاره‌خط و به اندازهٔ ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم و آنها را D و C می‌نامیم. نقاط A,B,C,D را به هم وصل می‌کنیم. (۰/۵)



(۰/۵)

درس ۲ استدلال

مفاهیم آموزشی

انواع استدلال به صورت زیر هستند:

۱) **استدلال استقرایی:** به آن دسته از استدلال‌ها می‌گوییم که شخص از جزء به کل می‌رسد، یعنی با دیدن و یا بررسی کردن چند حالت نتیجه کلی در مورد آن می‌گیرد. برای مثال: در باغ وحش A، میمون‌ها موز می‌خورند. در باغ‌وحش B نیز میمون‌ها موز می‌خورند. و در نتیجه، میمون‌ها موز می‌خورند.

۲) **استدلال استنتاجی:** این استدلال بر پایهٔ روابط منطقی و حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، مانند اکثر اثبات‌هایی که در هندسه داریم: مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است و ....

۳) **استدلال تمثیلی:** یعنی مثال زدن، یک حکم صادق برای اثبات درستی حکمی که از جهاتی به این مثال ما شباهت دارد. (استفاده از مشابهت‌های یک معلوم برای کشف یک مجهول) می‌توان گفت، انسان بر اساس اطلاعات و معلوماتی که در مورد یک پدیده یا فرد دارد، فرد یا پدیدهٔ مشابه را تعریف و شناسایی کند. مانند انواع ضرب‌المثل‌ها و داستان‌های تمثیلی.

مارگزیده از ریسمان سفید و سیاه می‌ترسد.

ایستگاه یادگیری

مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی برابر با 360° است.

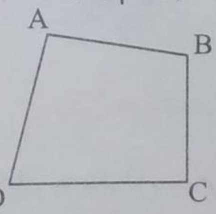
فعّالیت ۱۹

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئله زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هریک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی هرچهار ضلعی محدب 360° است.

پژمان: در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع باتوجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هرچهار ضلعی محدب 360° است.

پیمان: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.



مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{BCD}$ برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابراست با 360°.

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهار ضلعی برابر 360° است، آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟ بله

آیا همین استدلال را برای هر چهار ضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، سپس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئلهٔ قبل برابر 360° است.» به سایر چهار ضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

- نوع استدلال ارائه شده توسط هر کدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

استدلال پژمان تمثیلی و استدلال پیمان استدلال استنتاجی است.

ایستگاه یادگیری

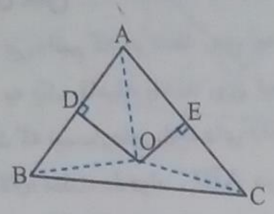
۱- در مثلث عمودمنصف‌ها همرس هستند. ۲- در مثلث ارتفاع‌ها همرس هستند.

سؤال متن

۱۹

می‌دانیم که هر نقطهٔ روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سرِآن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند. (در یک نقطه به هم می‌رسند).

استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌خط‌های AB و AC متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع هستند.



۱- نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است، بنابراین: $OA = OC$

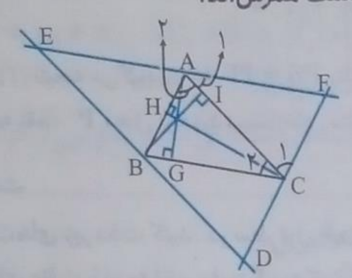
۲- نقطه O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، بنابراین: $OA = OB$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $OC = OB$ **بنابراین نقطه O روی عمودمنصف CB قرار دارد. در نتیجه نقطه O محل برخورد** عمودمنصف‌ها است.

سؤال متن

۲۰

مثال: استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.



استدلال: مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به‌وجود آید.

چهارضلعی ABCF چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟

متوازی‌الاضلاع است. زیرا $BC \parallel AF$ و $AB \parallel FC$ است.

در دو مثلث ABC و AFC ابتدا:

دو خط موازی AB و FC و مورب AC را در نظر می‌گیریم، داریم: $\hat{C}_1 = \hat{A}_2$

سپس دو خط موازی AF و BC و مورب AC را در نظر می‌گیریم، داریم. $\hat{C}_2 = \hat{A}_1$

و چون AC ضلع مشترک در دو مثلث است، در نتیجه به حالت (ز ض ز) این دو مثلث هم‌نهشتند. از برابری اجزای متناظر نتیجه می‌گیریم: $AF = BC$ و $AB = FC$

بنابراین $BC = AF$ (۱)

چهارضلعی ACBE چه نوع چهارضلعی است؟ چرا؟

$$\left.\begin{matrix} BE \parallel AC \\ AE \parallel BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow ACBE$$

چهارضلعی ACBE یک متوازی‌الاضلاع است، زیرا:

بنابراین $BC = EA$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $AF = EA$ **بنابراین، نقطهٔ A وسط پاره‌خط EF است.**

$$\left.\begin{matrix} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG \boxed{\perp} EF$$

لذا خط AG عمودمنصف **پاره‌خط EF است.**

به‌طور مشابه می‌توان نشان داد:

پاره‌خط BI عمودمنصف **پاره‌خط DE است.**

پاره‌خط CH، عمودمنصف **پاره‌خط DF است.**

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث EFD هستند و در نتیجه، همرسند.

ایستگاه یادگیری

۱- نیمسازها در مثلث همرسند.

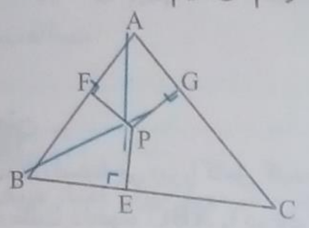
۲- در هر مثلث زاویهٔ روبه‌رو به بزرگ‌ترین ضلع، از همهٔ زاویه‌ها بزرگ‌تر است.

۳- در هر مثلث ضلع روبه‌رو به بزرگ‌ترین زاویه، از همهٔ ضلع‌ها بزرگ‌تر است.

سؤال متن (۲۰)

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند.

استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطهٔ P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.



۱- نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ A است، بنابراین PF = PG

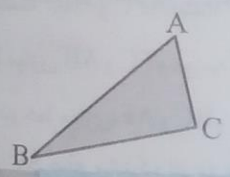
۲- نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ B است، بنابراین PE = PF

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: $\Leftarrow PG = PF$ بنابراین نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ $\hat{C}$ قرار دارد.

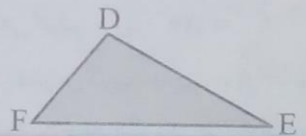
در نتیجه نقطهٔ P محل برخورد نیمسازهای مثلث ABC است.

فعالیت (۲۱)

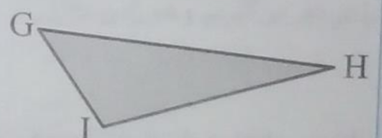
به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اولِ جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع	AB	BC	AC
زاویه‌ها	$\hat{C}$	$\hat{A}$	$\hat{B}$



اضلاع	FE	DE	DF
زاویه‌ها	$\hat{D}$	$\hat{F}$	$\hat{E}$



اضلاع	GH	HI	GI
زاویه‌ها	$\hat{I}$	$\hat{G}$	$\hat{H}$

چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویهٔ زیر آن وجود دارد؟ ضلع‌ها و زاویه‌هایی که زیر هم نوشته شده‌اند، روبه‌روی یکدیگر هستند.

با توجه به این رابطه در مورد یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟ زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از بقیهٔ زاویه‌ها بزرگ‌تر است و برعکس.

برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟ استدلال استقرایی

آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس مورد نظر درست است؟ خیر

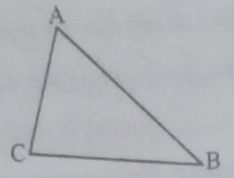
سؤال متن (۲۱)

مسئله: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

استدلال: برای واضح شدن مطلب و کمک به حل مسئله شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد. خیر، مثلث متساوی‌الاضلاع نمی‌توان کشید زیرا تمام ضلع‌ها با هم و تمام زاویه‌ها با هم برابرند، در نتیجه کمکی نمی‌کند.

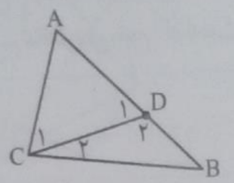
فرض: $AB > AC$

حکم: $\hat{C} > \hat{B}$



می‌دانیم طبق فرض $AB > AC$. لذا می‌توانیم نقطهٔ D را روی AB جایی انتخاب کنیم که $AC = AD$.

★ اندازه زاویه‌های C و C_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟



$\hat{C} = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 \Rightarrow \qquad \hat{C}\ \boxed{>}\ \hat{C}_1$ با هم برابرند.

مثلث ADC مثلث متساوی‌الساقین است.

★★ اندازهٔ زاویه‌های C_1 و D_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1\ \boxed{=}\ \hat{D}_1$

زاویهٔ D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟ زاویهٔ خارجی

★★★ اندازهٔ زاویه‌های D_1 و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_1\ \boxed{>}\ \hat{B}$ $\quad \hat{D}_1 = \hat{B} + \hat{C}_2 \Rightarrow$

از ★ و ★★ و ★★★ چه نتیجه‌ای در مورد اندازهٔ زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟

$$(★★★)و(★★) \Rightarrow \hat{C}_1 > \hat{B} \overset{★}{\Rightarrow} \boxed{\hat{C}} > \boxed{\hat{B}}$$

چرا می‌توان این موضوع را در مورد تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند پذیرفت؟

چون در این اثبات از عبارت‌های منطقی و درست استفاده شده است که همان استدلال استنتاجی است. همچنین در اثبات این مسئله یک مثلث دلخواه فرض شده است.

ایستگاه یادگیری

۱- روابط و نتایجی را که می‌توان درستی آنها را با استفاده از استدلال استنتاجی اثبات کرد قضیه می‌نامیم.

مثلاً مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث °۱۸۰ است.

۲- اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم عوض شود، آن را عکس قضیه می‌گوییم که می‌تواند درست یا نادرست باشد.

مثلاً اگر در مثلثی مربع یک ضلع با حاصل جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر شد آن مثلث، یک مثلث قائم‌الزاویه است. (عکس قضیهٔ فیثاغورس)

در حقیقت، جای نتیجه با داده‌های اولیهٔ مسئله جابه‌جا می‌شود.

۳- گزاره جمله‌ای است خبری که دقیقاً درست یا نادرست است.

دو نوع گزاره داریم:

الف) گزارهٔ ساده که فقط یک خبر را اعلام می‌کند. من کلاس دهم هستم.

ب) گزارهٔ مرکب که دو یا چند خبر را اعلام می‌کند.

من کلاس دهم هستم و امسال سال ۱۳۹۵ است.

۴- همان‌طور که بیان شد یک گزاره درست یا نادرست است و نقیض آن دقیقاً مخالف ارزش اولیهٔ آن است. (تقریباً می‌توان گفت همان علامت قرینه در ریاضی)

الان من به مدرسه می‌روم $\xrightarrow{\text{نقیض}}$ الان من به مدرسه نمی‌روم.

حاصل جمع دو عدد زوج، عددی زوج است $\xrightarrow{\text{نقیض}}$ حاصل جمع دو عدد زوج، عددی زوج نیست که می‌توان این‌طور نیز بیان کرد: حاصل جمع دو عدد زوج، عددی فرد است.

۵- در برخی از موارد، خبر یک گزاره وابسته به یک شرط است. یعنی اگر آن شرط برقرار شود، گزاره ارزش درستی یا نادرستی پیدا می‌کند.

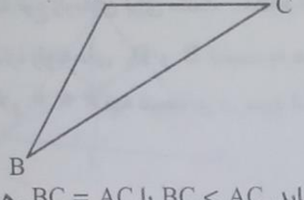
مثلاً: اگر من خوب درس بخوانم، می‌توانم نمره‌های خوبی در امتحان کسب کنم.

۶- در بعضی از موارد فرض می‌کنیم که حکم مسئله نادرست و نقیض آن درست باشد. این شیوهٔ اثبات، برهان غیر مستقیم یا برهان خلف نامیده می‌شود.

مثال: از یک نقطه خارج یک خط فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد.
اثبات برهان خلف: فرض می‌کنیم که از یک نقطه خارج یک خط حداقل ۲ خط موازی عبور می‌کند.
استدلال: خط d و نقطهٔ A را داریم.
فرض می‌کنیم دو خط d_1 و d_2 از نقطهٔ A عبور می‌کنند و با خط d موازی‌اند، داریم: $d_1 \parallel d$ ، $d_2 \parallel d$
قبلاً خوانده‌ایم که دو خط موازی با یک خط با هم موازی‌اند $d_1 \parallel d_2$ است که با حکم در تناقض است. توجه داریم که این دو خط در نقطهٔ A یکدیگر را قطع کرده‌اند. لذا، فرض اینکه با یک خط از یک نقطه حداقل ۲ خط موازی می‌گذرد، رد می‌شود.
با توجه به آن به یک تناقض می‌رسیم که باعث می‌شود حکم ثانویه را رد کنیم، این روش اثبات را برهان خلف گویند.

سؤال متن ۲۵

عکس قضیهٔ ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر. برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.



فرض: $\hat{A} > \hat{B}$

حکم: $BC > AC$

اثبات: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد. بنابراین باید $BC < AC$ یا $BC = AC$. هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اول: اگر $BC < AC$ باشد طبق قضیهٔ ۱ باید $\hat{B} > \hat{A}$، که با فرض در تناقض است.

حالت دوم: اگر $BC = AC$ باشد $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث متساوی‌الساقین خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن هستند. بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.

ایستگاه یادگیری

در بعضی موارد که حکم کلی در مورد چیزی بیان می‌شود، برای اثبات عدم درستی آن می‌توانیم مثال نقض به‌کار ببریم، به این ترتیب کلیت آن مسئله نقض می‌شود. در حقیقت، مثال نقض، مثالی است که کلیت و درستی یک گزاره را رد می‌کند.
مثال: حاصل جمع ۲ عدد گنگ، گنگ است.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۲} \in \mathbb{Q}' \\ -\sqrt{۲} \in \mathbb{Q}'\end{array}\right\} \Rightarrow (\sqrt{۲}) + (-\sqrt{۲}) = ۰ \in \mathbb{Z}'$$

اگر برای رد یک گزاره نتوانیم مثال نقض ارایه دهیم، دلیل بر درستی آن نیست. در حقیقت، مثال نقض یک روش برای رد حکم مسئله است نه اثبات درستی آن.

سؤال متن ۲۶

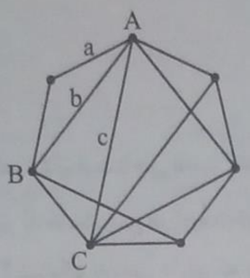
در مورد درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟
در لوزی چهارضلع با هم برابر هستند ولی زاویه‌ها الزاماً برابر نیستند. بنابراین حکم «ب» نادرست است.
اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، در مورد درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟
در صورتی که نتوانیم مثال نقض ارائه دهیم، در مورد درستی یا نادرستی آن چیز خاصی نمی‌توان گفت.
آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟
خیر، در مورد (پ) و (ت) نمی‌توان مثال نقض پیدا کرد.

کار در کلاس

۲۷

۱- در شکل مقابل نقطه‌ها رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، حاصل می‌شود.»

خیر، نقاط A، B و C را که در شکل مشخص شده است، به هم وصل می‌کنیم. مشاهده می‌شود که ضلع‌ها دارای اندازه‌های a و b و c هستند که تشکیل مثلث مختلف‌الاضلاع می‌دهند.



۲- آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$

A و B می‌تواند دو مجموعهٔ جدا از هم باشند:

$$A = \{۱,۲\}, B = \{۳,۴\} \Rightarrow \begin{array}{l} A \not\subseteq B \\ B \not\subseteq A \end{array}$$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت هستند.

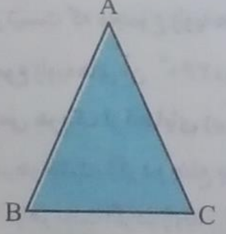
فرض کنیم مثلث ABC دارای ارتفاع ۲ و قاعدهٔ ۱۲ باشد، در این صورت $۱۲ = (۲ \times ۱۲)\frac{۱}{۲} = S_{\underset{ABC}{\Delta}}$ و مثلث $A'B'C'$ دارای ارتفاع ۳ و قاعدهٔ ۸ باشد. در نتیجه، $۱۲ = (۳ \times ۸)\frac{۱}{۲} = S_{\underset{A'B'C'}{\Delta}}$. می‌بینیم $S_{\underset{ABC}{\Delta}} = S_{\underset{A'B'C'}{\Delta}}$، امّا قاعده‌ها برابر نیستند. $(۱۲ \neq ۸)$ حداقل یک ضلع آنها با هم برابر نیست.

تمرین

۲۷

۱- می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند. استدلال: فرض می‌کنیم که حکم غلط است. یعنی فرض می‌کنیم خطی که یکی از دو خط موازی را قطع می‌کند، دیگری را قطع نمی‌کند و موازی آن است.
فرض کنیم دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با هم موازی هستند و خط، خط $d_۱$ را قطع می‌کند، بنابراین در نقطهٔ M با هم مشترک هستند. از طرفی خط d خط $d_۲$ را قطع نمی‌کند، پس با $d_۲$ موازی است. یعنی داریم $d_۱ \parallel d_۲$ و $d \parallel d_۲$، که از این نتیجه می‌شود $d \parallel d_۱$. این در حالی است که نقطهٔ M محل برخورد دو خط $d_۱$ و d است. پس فرض خلف ما باطل و حکم برقرار است.

۲- با برهان خلف ثابت کنید که اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.



برهان خلف: فرض می‌کنیم حکم غلط است، یعنی فرض می‌کنیم $\hat{B} = \hat{C}$.
می‌دانیم مثلثی که دو زاویه در آن با هم برابر باشند یک مثلث متساوی‌الساقین است که الزاماً باید ضلع‌های روبه‌رو به دو زاویهٔ برابر با هم برابر باشند، یعنی $AB = AC$ که خلاف فرض است. در نتیجه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

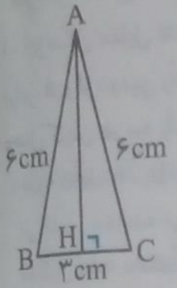
۳- گزارهٔ زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه کوچک‌تر است.

مثلثی داریم که اندازهٔ زاویه‌های آن به‌ترتیب برابر $\begin{cases} \hat{A} = ۱۰^\circ \\ \hat{B} = ۳۰^\circ \\ \hat{C} = ۱۴۰^\circ \end{cases}$ است که $۱۴۰^\circ > ۴ \times ۱۰^\circ$ (مثال نقض)

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

مثال نقض: مثلث متساوی‌الساقینی رسم می‌کنیم که طول ضلع‌های آن ۶، ۶ و ۳ باشد.
واضح است که ارتفاع وارد بر ضلع ۳ از آن ضلع بزرگ‌تر است.



$AH > BC$

۴- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر nضلعی محدب برابر است با $180^\circ \times (n-2)$.

می‌دانیم که حاصل جمع هر زاویهٔ داخلی با زاویهٔ خارجی‌اش برابر با 180° است. از طرفی مجموع زاویه‌های خارجی برابر با 360° است.
فرض کنیم یک nضلعی داریم که بر روابط زیر برقرار است:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}'_1 = 180^\circ$$
$$\hat{A}_2 + \hat{A}'_2 = 180^\circ$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\hat{A}_n + \hat{A}'_n = 180$$

nسطر را با هم جمع می‌کنیم

$$\hat{A}_1 + \hat{A}'_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}'_2 + \ldots + \hat{A}_n + \hat{A}'_n = 180n$$

$$\Rightarrow (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_n) + \overbrace{(\hat{A}'_1 + \hat{A}'_2 + \ldots + \hat{A}'_n)}^{\text{۳۶۰ مجموع زاویه‌های خارج}} = 180n$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_n = 180n - 360$$

مجموعه زاویه‌های داخلی را S می‌گیریم $\Rightarrow S = 180(n-2)$

۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

این‌طور نیست که هر لوزی یک مربع است. ⟵ مربعی وجود دارد که لوزی نباشد.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

این‌طور نیست که مستطیلی وجود دارد که مربع نیست ⟵ هر مستطیلی مربع است.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.

این‌طور نیست که هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه نداشته باشد. ⟵ مثلثی وجود دارد که حداقل ۲ زاویهٔ قائمه دارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.

این‌طور نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهار ضلعی محدب برابر ۳۶۰ درجه باشد. ⟵ چهار ضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زاویه‌های آن 360° نیست. (از آن کمتر یا بیشتر است.)

۶- عکس هر یک از قضایای زیر را نوشته و سپس آنها را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویهٔ روبه‌رو آنها نیز برابرند.

عکس: در هر مثلث اگر دو زاویه برابر باشند، ضلع‌های مقابل به آن دو زاویه با هم برابرند.

دو شرط:

در هر مثلث دو زاویه برابر است اگر و تنها اگر ضلع‌های مقابل به آن دو زاویه با هم برابر باشند.

ت) اگر دو دایره شعاع های برابر داشته باشند. آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

اگر دو دایره هم‌مساحت باشند، شعاع‌هایشان با هم برابر است.

دو دایره دارای شعاع یکسان هستند اگر و تنها اگر هم‌مساحت باشند.

ارزشیابی مستمر

۱- جاهای خالی را با کلمات و یا عبارت‌های مناسب کامل کنید. (۰/۵ نمره)

الف) مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی محدب برابر است با ....

ب) مثال نقض روشی برای اثبات درستی حکم ....

۲- درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. (۰/۵)

الف) از یک نقطهٔ خارج خط فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد. ☐ درست ☐ نادرست

ب) سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس هستند. ☐ درست ☐ نادرست

۳- گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (۱)

الف) در هر مثلث زاویهٔ c روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، .... از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع ....

۱) بزرگ‌تر، کوچک‌تر

۲) کوچک‌تر تا بزرگ‌تر

ب) مجموع زاویه‌های داخلی یک nضلعی برابر ۹۰۰ است. تعداد ضلع‌ها برابر است با

۱) ۵

۲) ۷

۴- استدلال استنتاجی را تعریف کنید. (۱)

۵- با استدلال استنتاجی ثابت کنید که سه ارتفاع هر مثلث همرس هستند. (۱/۵)

۶- گزاره و نقیض گزاره را تعریف کنید. (۱)

۷- نقیض گزارهٔ زیر را بنویسید. (۰/۵)

اگر در مثلثی دو ضلع با هم برابر نباشند، آنگاه زاویه‌های مقابل به آنها نیز با هم برابر نیست.

۸- به استقرا ثابت کنید که مجموع زاویه‌های داخلی یک nضلعی محدب برابر است با $۱۸۰\times(n-۲)$ (۱).

۹- با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که از هر نقطه خارج خط فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد. (۱)

۱۰- مثال نقض را تعریف کنید. (۰/۷۵)

۱۱- قضیهٔ دو شرطی را تعریف کنید و مثال بزنید. (۰/۷۵)

۱۲- عکس قضیهٔ زیر را بنویسید. (۰/۵)

در مثلث قائم‌الزاویه با وتر a رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ برقرار است؛

توان دوم وتر برابر است با حاصل جمع توان دوم ضلع‌های دیگر.

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) ۳۶ (۰/۲۵)، ب) نیست (۰/۲۵)

۲ الف) درست (۰/۲۵)، ب) درست (۰/۲۵)

۳ الف) گزینهٔ ۱ (۰/۵)

$$(n-۲)\times ۱۸۰ = ۹۰۰ \quad (n-۲)=\frac{۹۰۰}{۱۸۰}=۵ \Rightarrow n=۷$$

ب) گزینهٔ ۲ (۰/۵)

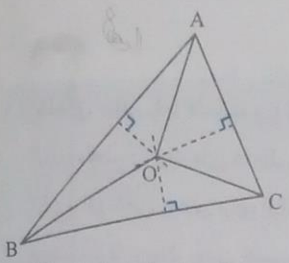
۴ نوعی از استدلال که براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم. (۱)

۵ مثلث دلخواه ABC را رسم می‌کنیم و از آنجا که پاره‌خط‌های AB و AC متقاطع هستند، عمودمنصف آنها نیز با هم در نقطه‌ای مانند O متقاطع هستند. (۰/۵)

هندسه

۱- نقطهٔ O روی عمودمنصف AC قرار دارد، پس $OA = OC$ (۱) (۰/۲۵)

۲- نقطهٔ O روی عمودمنصف AB قرار دارد، پس $OA = OB$ (۲) (۰/۲۵)



(۱) و (۲) $\Rightarrow OB = OC$

طبق قضیهٔ عمودمنصف‌ها هر نقطه که فاصلهٔ آن از دو سر پاره‌خط یکسان باشد روی عمودمنصف آن قرار دارد. بنابراین O روی عمودمنصف BC است و O محل تلاقی سه عمودمنصف است. (۰/۵)

۶ گزاره: جملهٔ خبری که دقیقاً درست یا نادرست است. (۰/۵)

نقیض گزاره: یک گزاره یا درست است یا نادرست. ارزش نقیض گزاره دقیقاً مخالف با ارزش خود گزاره است. (۰/۵)

۷ این‌طور نیست که اگر در مثلثی دو ضلع با هم برابر نباشند، آنگاه زاویه‌های مقابل آنها نیز با هم برابر نیست. (۰/۵)

که معادل جملهٔ زیر است:

اگر در مثلثی دو زاویه با یکدیگر برابر باشند، آنگاه اضلاع مقابل به دو زاویه نیز با هم برابر است. (۰/۵)

۸

تعداد ضلع‌ها	تعداد مثلث‌ها	مجموع زاویه‌های داخلی	
۳ ضلعی	۱	$1 \times 180 = 180$	
۴ ضلعی	۲	$2 \times 180 = 360$	(۰/۲۵)
۵ ضلعی	۳	$3 \times 180 = 540$	(۰/۲۵)
$\vdots$		$\vdots$	
nضلعی	$(n-2)$ (۰/۲۵)	$(n-2) \times 180$	(۰/۲۵)

۹ برهان خلف:

اثبات: فرض خط d و نقطهٔ A غیر واقع بر آن وجود دارد.

حکم: از نقطهٔ A بیش از یک خط موازی با d می‌توان رسم کرد. (حداقل ۲ خط) (۰/۵)

فرض کنیم که دو خط d_1 و d_2 موازی d بوده و از نقطهٔ A عبور می‌کنند، یعنی نقطهٔ A محل برخورد d_1 و d_2 است.

$$\begin{matrix} d_1 \parallel d \\ d_2 \parallel d \end{matrix} \xRightarrow{\text{می‌دانیم}} d_1 \parallel d_2$$

که با فرض خلف در تناقص است.

چون در آنجا بیان شد که d_1 و d'_2 در نقطهٔ AC مشترک‌اند، پس d_1 و d'_2 یک خط هستند. (۰/۵)

۱۰ به مثالی گفته می شود که کلیت حکم در مورد آن صدق نمی‌کند و روشی برای رد حکم است. (۰/۷۵)

۱۱ قضیه‌هایی که عکس آنها نیز درست باشد قضیهٔ دو شرطی می‌گویند که با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان می‌شوند. (۰/۵)

اگر در مثلثی، دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر از ضلع مقابل به زاویه کوچک‌تر، بزرگ‌تر است و برعکس. (۰/۲۵)

۱۲ اگر در یک مثلث‌مربع یکی از ضلع‌ها با حاصل‌جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است. (۰/۵)

فصل ۲ قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

درس ۱ نسبت و تناسب در هندسه

مفاهیم آموزشی

۱- اگر داشته باشیم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ که $d \neq 0$ و b، آنگاه با طرفین وسطین داریم: $ad = bc$

۲- اگر داشته باشیم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xLeftarrow{(b,d\neq 0)} ad = bc$

۳- نسبت در هندسه هم به‌همین صورت تعریف می‌شود. فرض کنیم پاره‌خط $\overline{AB}=a$ سانتی‌متر باشد، و $\overline{DC}=b$ سانتی‌متر باشد، حال نسبت پاره‌خط $\frac{AB}{DC}$ برابر است با $\frac{a}{b}$.

توجه: واحد اندازه‌گیری باید یکسان باشد.

۴- به‌کمک اعمال جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب با تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت که به بعضی از آنها اشاره می‌کنیم:

طرفین وسطین کردن

۱) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

معکوس کردن طرفین تناسب

۲) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad (a, b, c, d \neq 0)$

تعویض جای طرفین یا وسطین

۳) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

ترکیب نسبت در صورت و یا مخرج

۴) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

۵) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$

۶) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

۷) $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}$$

۵- میانگین یا واسطهٔ هندسی:

اگر در یک نسبت مقدار طرفین یا وسطین با هم برابر باشد، داریم:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{a} \Rightarrow a^2 = c.b$

یا $\frac{a}{b}=\frac{b}{d} \Rightarrow b^2 = a.d$

در این‌صورت a را واسطهٔ هندسی بین c و b گوییم. (در رابطهٔ دوم b را واسطهٔ هندسی بین a و d گوییم.)

مثال: واسطهٔ هندسی بین ۶ و ۹ را به‌دست آورید.

$a^2 = 6 \times 9 = 54 \Rightarrow a = \sqrt{54}$

مثال: اگر $\frac{a+b}{11a+5b}=\frac{8}{67}$ آنگاه مقدار $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

$\frac{a+b}{11a+5b}=\frac{8}{67} \Rightarrow 8(11a+5b) = 67(a+b)$

$88a + 40b = 67a + 67b \Rightarrow 88a - 67a = 67b - 40b$

$11a = 27b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{27}{11}$

مثال: اگر مقدار $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ باشد، مطلوب است محاسبه $\frac{a+b}{b}$ و $\frac{a-b}{b}$.

$\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

$\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

مثال: اگر $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$، آنگاه حاصل $\frac{3y-3}{3x-2}$ را به‌دست آورید.

$\frac{x}{y}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3y}{3x}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3y-3}{3x-2}=\frac{3}{2}$

مثال: زاویه‌های خارجی مثلثی با عددهای ۴، ۶ و ۸ متناسب‌اند. اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویهٔ داخلی مثلث را به‌دست آورید.

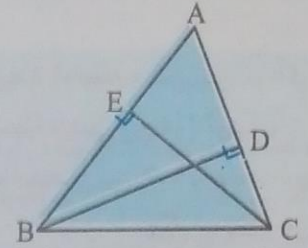
فرض کنیم $\hat{C}_1$، $\hat{B}_1$، $\hat{A}_1$ زاویه‌های خارجی و A و B و C زاویه‌های داخلی باشند.

$$\frac{A_1}{4}=\frac{B_1}{6}=\frac{C_1}{8}=\frac{\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{C}_1}{4+6+8}=\frac{360^\circ}{18}=20^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 80^\circ & \hat{A} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ \\ \hat{B}_1 = 120^\circ \Rightarrow & \hat{B}_1 = 60^\circ \\ \hat{C}_1 = 160^\circ & \hat{C}_1 = 20^\circ \end{cases}$$

فعالیت (۱) ۳۰

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن قاعدهٔ AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعدهٔ AB بنویسید.



ABC مساحت $= \frac{1}{2} AC \times BD$

ABC مساحت $= \frac{1}{2} AB \times CE$

- عبارت‌های سمت راست هر دو مساوی یک چیز است.

بنابراین؛ $AC \times BD = AB \times CE$ آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب هندسی بنویسید؟

بله، به طور مثال $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BD}$.

پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید. آیا به یک جواب رسیده‌اید؟ خیر

تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟ با توجه به رابطهٔ ضرب می‌توانیم نسبت‌های متفاوت بنویسیم.

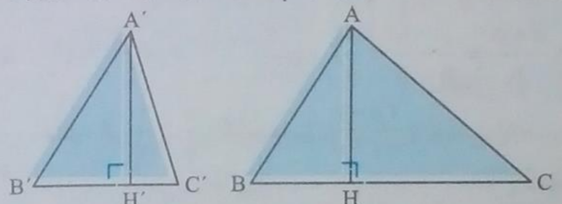
با توجه به فعالیت بالا، جای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با نسبت ارتفاع وارد بر آنها برابر است.

فعالیت (۲) ۳۱

در شکل مقابل ارتفاع‌های AH و A′H′ در دو مثلث ABC و A′B′C′ هم‌اندازه‌اند. $(AH = A'H')$

با پر کردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجهٔ زیر را به دست آورید.



$S_{ABC} = ABC$ مساحت $= \frac{1}{2} AH \times BC$

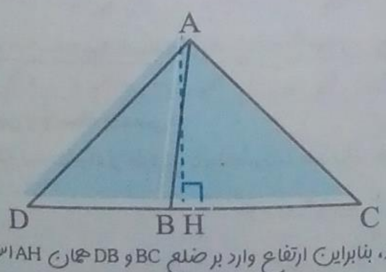
$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} A'H' \times B'C'$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AH \times BC}{\frac{1}{2} A'H' \times B'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

نتیجه ۱: هرگاه اندازه ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آنها وارد شده‌اند.

ایستگاه یادگیری

۱- دو مثلث ABC و ABD را مانند شکل مقابل داریم که در رأس A مشترک بوده و قاعده‌های BC و BD در امتداد یکدیگر هستند.



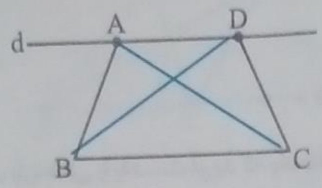
از آنجا که از یک نقطه خارج یک خط فقط یک عمود می‌توان رسم کرد، بنابراین ارتفاع وارد بر ضلع BC و DB همان AH است و نسبت مساحت ABC به ABD برابر با نسبت قاعده‌های آنها است، یعنی $\frac{BC}{BD}$.

۲- فرض کنیم دو یا چند مثلث داشته باشیم که هم‌قاعده باشند و رأس‌های مقابل بر این قاعده روی یک خط قرار بگیرند، به‌طوری که با قاعده موازی باشد، آنگاه این مثلث‌ها هم‌مساحت هستند.

مثال: نسبت مساحت مثلث ABC به DBC برابر با چند است؟

پاسخ: قاعدهٔ هر دو مثلث برابر با BC است و رأس‌های مقابل به این قاعده که A و D باشند روی خط d که موازی با BC است، قرار گرفته‌اند.

طبق نکتهٔ بالا داریم:

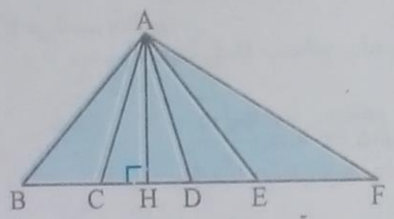


$S_{\underset{ABC}{\triangle}} = S_{\underset{DBC}{\triangle}}$

کار در کلاس

۳۱

در شکل مقابل مثلث‌های ABC، ACD، ADE و AEF را که در رأس A مشترک‌اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همهٔ این مثلث‌ها کدام پاره‌خط است؟ پاره خط AH



چون از یک نقطه خارج یک خط فقط یک عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

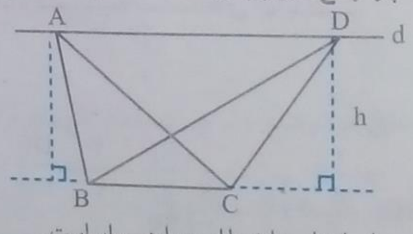
با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{BC}{CD} \qquad \frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \frac{DC}{EF} \qquad \frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \frac{CE}{BF}$$

کار در کلاس

۳۲

در شکل زیر خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعدهٔ BC در مثلث‌های DBC و ABC با هم برابر است؟



چون BC || d، پس فاصلهٔ بین آنها که همان ارتفاع مثلث‌ها است با هم برابر است.

اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت همهٔ این مثلث‌ها چقدر است؟

$S = \frac{۱}{۲} h.a$

ویژگی‌های تناسب

۳۳

سؤال متن

اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطهٔ هندسی بین آنها است. (چرا؟) بله، زیرا:

$a^۲ = b.c$

$a^۲ = ۹ \times ۴ \Rightarrow a^۲ = ۳۶ \Rightarrow a = \sqrt{۳۶} = ۶$

تمرین

۱- اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ حاصل $x+y+z$ **را به‌دست آورید.** با توجه به ویژگی(۷) داریم:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}=\frac{x+y+z+۳}{۲+۳+۶+۵}$$

$$\frac{۳}{۵}=\frac{x+y+z+۳}{۱۶}\Rightarrow x+y+z+۳=\frac{۴۸}{۵}\Rightarrow x+y+z=\frac{۴۸}{۵}-۳=۶/۶$$

۲- طول پاره‌خطی را به‌دست آورید که واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی‌متر است.

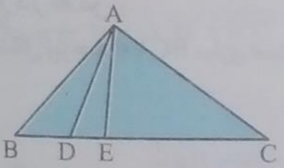
$$a^۲=b.c\Rightarrow a^۲=۸\times ۱۰\Rightarrow a=\sqrt{۸۰}\ \text{سانتی‌متر}$$

۳- طول‌های اضلاع مثلثی ۴، ۶ و ۸ سانتی‌متر هستند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ سانتی‌متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به‌دست آورید. مساحت مثلث برابر است با $\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{۲}$. از طرفی ارتفاع $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ سانتی‌متر بر کوچک‌ترین ضلع وارد شده است. دو ارتفاع دیگر را a و 'a می‌نامیم و داریم:

$$\frac{۸\times a}{۲}=\frac{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{\cancel{۲}}\times \cancel{۴}^{۱}}{\cancel{۲}_{۱}}\Rightarrow ۴a=۳\sqrt{۱۵}\Rightarrow a=\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$\frac{۶\times a'}{۲}=\frac{\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}\times \cancel{۴}^{۲}}{\cancel{۲}_{۱}}\Rightarrow ۳a'=۳\sqrt{۱۵}\Rightarrow a'=\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۳}=\sqrt{۱۵}$$

۴- در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به‌دست آورید.



می‌دانیم اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند، نسبت مساحت‌های آنها با نسبت قاعدهٔ آنها برابر است.

$$\left.\begin{array}{l}۱)\ S_{\overset{\Delta}{ACE}}=۳S_{\overset{\Delta}{ADE}}\\ ۲)\ S_{\overset{\Delta}{ACE}}=۲S_{\overset{\Delta}{ABD}}\end{array}\right\}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ADE}}=\frac{۲}{۳}S_{\overset{\Delta}{ABD}}\Rightarrow\frac{S_{\overset{\Delta}{ADE}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}=\frac{۲}{۳}=\frac{DE}{BD}$$

نسبت $\frac{BC}{DE}$:

باتوجه به شکل می‌توان نوشت که:

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADE}+S_{AEC}\xrightarrow{S_{ACE}=۳S_{ADE}}S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADE}+۳S_{ADE}$$

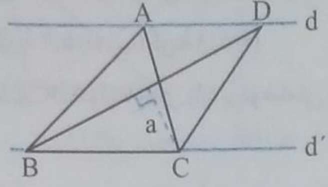
$$\xrightarrow[S_{ABD}=\frac{۳}{۲}S_{ADE}]{\text{باتوجه به قسمت قبل می‌توان نوشت}}S_{ABC}=\frac{۳}{۲}S_{ADE}+S_{ADE}+۳S_{ADE}$$

$$S_{ABC}=\frac{۱۱}{۲}S_{ADE}$$

ازآن جا که دو مثلث در رأس مشترک‌اند، نسبت مساحت‌های آنها با نسبت قاعدهٔ مقابل به راس مشترک آنها برابر است. پس:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\frac{BC}{DE}=\frac{۱۱}{۲}$$

۵- در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC، $۸cm^۲$ است. اگر $BD = ۶cm$ باشد، فاصله نقطهٔ C از BD را به‌دست آورید.



می‌دانیم: $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = S_{\overset{\Delta}{BCD}} = ۸cm^۲$

$$۸ = \frac{۱}{۲} \times BD \times a \Rightarrow ۸ = \frac{۱}{\cancel{۲}_{۱}} \times \overset{۳}{\cancel{۶}} \times a \Rightarrow a = \frac{۸}{۳}$$

ارزشیابی مستمر

۱- درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. (۰/۵نمره)

الف) می توانیم تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ را به‌صورت $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ بنویسیم. ☐ درست ☐ نادرست

ب) هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌ها با هم برابر باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت قاعده‌هایی است که از ارتفاع‌ها برآنها وارد شده است. ☐ درست ☐ نادرست

۲- جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب کامل کنید. (۰/۵)

الف) اگر داشته باشیم $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ معکوس آنها نیز .... است.

ب) در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت .... وارد بر آنها برابر است.

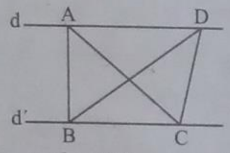
۳-گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (۱)

الف) با توجه به رابطهٔ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ کدام گزینه درست است؟

۱) $ad = ca$ ۲) $\frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$

ب) با توجه به شکل مقابل نسبت مساحت $\overset{\Delta}{ABC}$ به $\overset{\Delta}{BDC}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{AD}{BC}$



۴- رابطهٔ «هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع با عکس نسبت ارتفاع وارد برآنها برابر است» را اثبات کنید. (۱/۵)

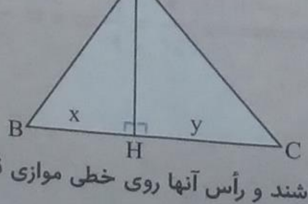
۵- ثابت کنید: (۱/۵)

اگر دو مثلث در یک راس مشترک باشند و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر است با نسبت اندازهٔ قاعده‌های آنها.

۶- با فرض $\frac{x}{۳} = \frac{y}{۶} = \frac{۱۰}{۹}$ حاصل $۲x + ۲y$ را به‌دست آورید. (۱)

۷- با فرض $x - y = ۸$ مقدار x و y را با توجه به رابطهٔ $\frac{x}{y} = \frac{۶}{۸}$ به‌دست آورید. (۱)

۸- با توجه به شکل زیر و اینکه $BC = ۶$ و $S_{ABH} = ۴$ و $S_{AHC} = ۹$، مقادیر x و y را به‌دست آورید. (۱/۵)



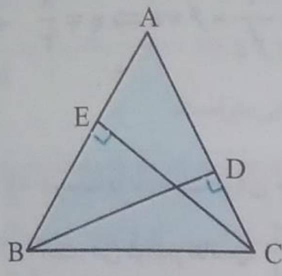
۹- ثابت کنید اگر دو مثلث هم‌قاعده باشند و رأس آنها روی خطی موازی قاعده قرار گیرد، دارای مساحت معادل هستند. (۱/۵)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) درست (۰/۲۵)، ب) درست (۰/۲۵) ۲ الف) با هم برابر (۰/۲۵)، ب) ارتفاع‌های (۰/۲۵)

۳ الف) گزینهٔ ۲ (۰/۵)، ب) گزینهٔ ۱ (۰/۵)

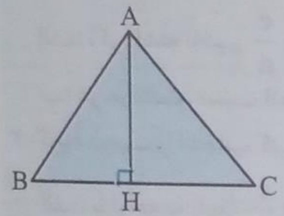
۴ ابتدا مثلث ABC و ارتفاع‌های وارد بر دو ضلعش را رسم می‌کنیم و مساحت مثلث ABC را می‌نویسیم.



$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} BD.AC \quad (۰/۲۵)$$
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} CE.AB \quad (۰/۲۵)$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} BD.AC = \frac{۱}{۲} CE.AB \quad (۰/۵)$$
$$\Rightarrow \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC} \quad (۰/۵)$$

برای ضلع دیگر نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود.

۵ مثلث ABC با ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.



$$(۱)\ S_{AHC} = \frac{۱}{۲} AH \times HC \quad (۰/۵)$$
$$(۲)\ S_{AHB} = \frac{۱}{۲} AH \times HB \quad (۰/۵)$$
$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{S_{AHC}}{S_{AHB}} = \frac{\frac{۱}{۲} AH \times HC}{\frac{۱}{۲} AH \times HB} = \frac{HC}{HB} \quad (۰/۵)$$

۶

$$\frac{x}{۳} = \frac{y}{۶} = \frac{۱۰}{۹} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{y}{۶} = \frac{۱۰}{۹} = \frac{x+y+۱۰}{۳+۶+۹} \quad (۰/۵)$$
$$\Rightarrow \frac{۱۰}{۹} = \frac{x+y+۱۰}{۱۸} \Rightarrow x+y+۱۰ = ۲۰ x+y = ۱۰ \Rightarrow ۲(x+y) = ۲۰ \quad (۰/۵)$$

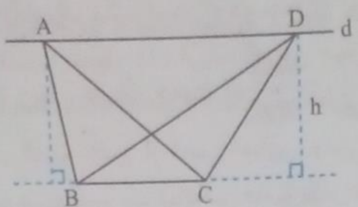
۷

$$\frac{x}{y} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow \frac{x}{y-x} = \frac{۶}{۸-۶} \Rightarrow \frac{x}{y-x} = \frac{۶}{۲} \xRightarrow{x-y=۸ \Rightarrow y-x=-۸} \frac{x}{-۸} = ۳$$
$$x = -۲۴$$
$$x - y = ۸ \xRightarrow{x=-۲۴} -۲۴ - y = ۸ \Rightarrow -y + ۳۲ \quad (۰/۵)$$
$$\Rightarrow y = -۳۲ \quad (۰/۵)$$

۸

$$\frac{S_{ABH}}{S_{AHC}} = \frac{BH}{HC} \rightarrow \frac{۴}{۹} = \frac{x}{y} \quad (۰/۵)$$
$$\xRightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{۴}{۴+۹} \overset{(۰/۵)}{=} \frac{x}{x+y} \xRightarrow{x+y=BC=۶} \frac{۴}{۱۳} = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = \frac{۲۴}{۱۳}$$
$$y = ۶ - \frac{۲۴}{۱۳} = \frac{۵۴}{۱۳}$$

۹ دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{DBC}$ را رسم می‌کنیم به‌طوری‌که قاعده‌های هر دو BC بوده و رأس آنها روی خط d موازی قاعده قرار دارد. ارتفاع دو مثلث را رسم کرده و مساحت آنها را می‌نویسیم. (۰/۵)



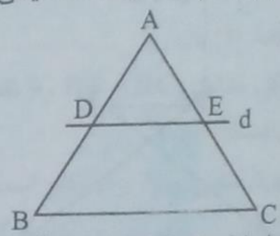
هر دو مثلث دارای ارتفاع h هستند. چون $AD \parallel BC$ است، پس فاصلهٔ آن دو در هر نقطه برابر است. (۰/۵)

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{۱}{۲}BC.h \\ S_{DCB} = \frac{۱}{۲}BC.h \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABC} = S_{DCB} \quad (۰/۵)$$

درس ۲ قضیهٔ تالس

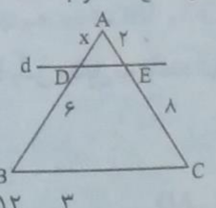
مفاهیم آموزشی

۱- مثلث ABC را داریم. خط d که موازی ضلع BC است آن را در دو نقطه قطع می‌کند. مقطع‌های ایجاد شده روی دو ضلع دیگر با هم متناسب هستند. یعنی داریم:



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

مثال: اندازهٔ ضلع AD را به‌دست آورید.



$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\frac{x}{۶} = \frac{۲}{۸} \Rightarrow x = \frac{۲ \times ۶}{۸} = \frac{۱۲}{۸} = \frac{۳}{۲}$$

۲- همان‌طور که قبلاً نیز بیان شد با ترکیب و تفصیل می‌توان تناسب‌های جدید نیز ایجاد کرد، یعنی:

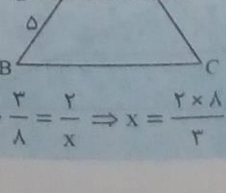
۱) ترکیب نسبت در مخرج:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{AD + DB} = \frac{AE}{AE + EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

۲) تفصیل نسبت در صورت:

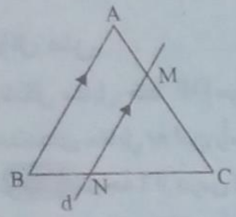
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AB - AD}{AB} = \frac{AC - AE}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

مثال: در شکل زیر اندازهٔ AC را به‌دست آورید.



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{۳}{۸} = \frac{۲}{x} \Rightarrow x = \frac{۲ \times ۸}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$$

مثال: مقدار x را با توجه به معلومات زیر به‌دست آورید.



$BC = x + ۷$

$BN = x$

$MC = ۷$

$AM = ۲$

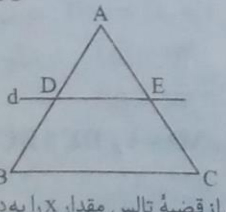
$$\frac{BN}{BC} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow \frac{x}{x + ۷} = \frac{۲}{۹} \Rightarrow ۹x = ۲x + ۱۴$$

$$\Rightarrow ۷x = ۱۴ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow BN = ۲ \ , \ BC = ۹$$

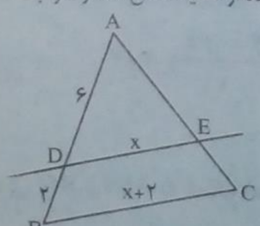
تعمیم قضیهٔ تالس:

ABC یک مثلث است که خط d که موازی BC بوده، آن را در دو نقطهٔ D و E قطع می‌کند. ADE یک مثلث است که اضلاع آن با مثلث ABC متناسب است، یعنی داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



مثال: با استفاده از قضیهٔ تالس مقدار x را به‌دست آورید.



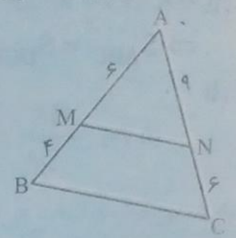
$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۶}{۸} = \frac{x}{x + ۲}$$

$$\Rightarrow ۶x + ۱۲ = ۸x \Rightarrow ۲x = ۱۲ \Rightarrow x = ۶$$

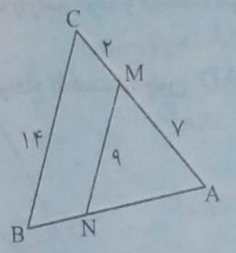
۴- ABC یک مثلث است که دو ضلع آن توسط خط d به چهار قسمت تبدیل شده است. اگر این چهار قسمت با هم متناسب باشند، آنگاه خط d با ضلع سوم موازی است.

۵- در قضیهٔ تالس از فرض «موازی بودن» به «متناسب بودن» می‌رسیدیم ولی در عکس قضیهٔ تالس فرض «متناسب بودن» است و باید به حکم «موازی بودن» برسیم.

مثال: در کدام یک از مثلث‌های زیر MN موازی BC است؟



$$\frac{AM}{MB}=\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲} \qquad \frac{AN}{NC}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲} \qquad \frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow MN \parallel BC$$



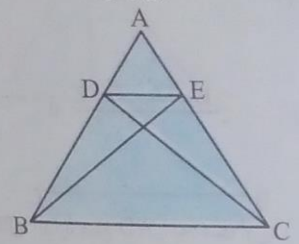
$$\frac{AM}{AC}=\frac{۷}{۹} \qquad \frac{MN}{BC}=\frac{۹}{۱۴} \qquad \frac{۷}{۹}\neq\frac{۹}{۱۴}\Rightarrow MN \nparallel BC$$

سؤال متن ۳۴

در شکل مقابل خط DE موازی ضلع BC رسم شده است. مثلث‌های DAE و DEC در رأس D مشترک‌اند.

قاعده‌های مقابل به این رأس کدام‌اند؟ در مثلث ADE قاعدهٔ AE و در مثلث DEC قاعدهٔ EC مقابل رأس D است.

با توجه به نتیجهٔ ۱ از درس اول، تناسب‌های زیر را کامل کنید.



$$\frac{S_{DAE}}{S_{DEC}}=\frac{AE}{EC} \quad و \quad \frac{S_{ADE}}{S_{DBE}}=\frac{AD}{DB}$$

برای دو مثلث ADE و DBE قاعده‌های روبه‌رو به رأس مشترک E را در نظر می‌گیریم.

مثلث‌های DBE و DEC هم مساحتند. (چرا؟) چون هر دو یک قاعده دارند (DE) و نقاط رأس مقابل به قاعده آنها در یک خط قرار دارد، پس مساحت هر دوی آنها برابر است.

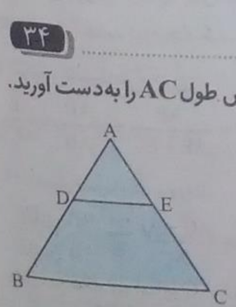
با توجه به این موضوع از تساوی‌های بالا تناسب زیر را نتیجه‌گیری کنید.

چون $S_{DBE}=S_{\underset{DEC}{\triangle}}$، پس دو کسر بالا با هم برابرند، در نتیجه:

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$$

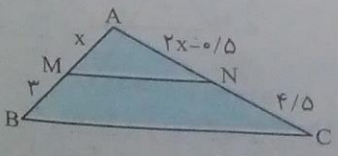
کار در کلاس ۳۴

۱- در شکل مقابل DE || BC و AD = ۱، DB = ۳ و AE = ۰/۸. به کمک قضیهٔ تالس طول AC را به‌دست آورید.



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{۰/۸}{x}\Rightarrow x=\frac{۴\times ۰/۸}{۱}=۳/۲$$

۲- در شکل مقابل MN || BC به کمک قضیهٔ تالس و با تشکیل یک معادله، مقدار x را به‌دست آورید.

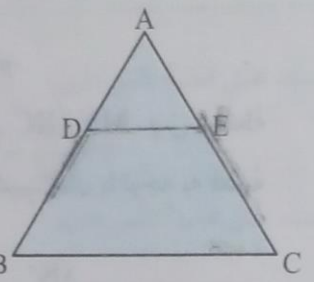


$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow\frac{x}{۳}=\frac{۲x-۰/۵}{۴/۵}$$
$$\Rightarrow ۴/۵x=۶x-۱/۵\Rightarrow -۱/۵x=-۱/۵\Rightarrow x=۱$$

۳- در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ؛ تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید و به کمک ترکیب نسبت در مخرج، رابطهٔ $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$ و با تفضیل نسبت در صورت، از این تناسب، رابطهٔ $\frac{CE}{AC}=\frac{DB}{AB}$ را نتیجه بگیرید. این رابطه‌ها صورت‌های دیگر قضیهٔ تالس هستند.

$$1)\ \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}}\frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

$$2)\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل در}}\frac{AB-AD}{AB}=\frac{AC-AE}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$$

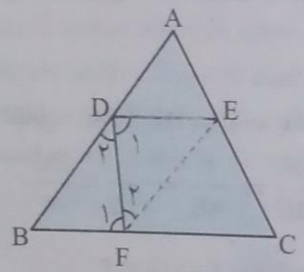


۳۵

فعالیت (۱)

در شکل مقابل $DE \parallel BC$ ، از نقطهٔ E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم کرده‌ایم. چهارضلعی DEFB چه نوع چهار ضلعی است؟ چرا؟

این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است چون ضلع‌ها دوبه‌دو موازی هستند. برای برابری ضلع‌ها کافی است ثابت کنیم دو مثلث DEF و DBF با هم هم‌نهشت هستند:



$$\left.\begin{array}{l} BD \parallel EF \text{ و } \text{مورب است } DF \Rightarrow \hat{D}_2=\hat{F}_2 \\ DE \parallel BF \text{ و } \text{مورب است } DF \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{F}_1 \\ \text{ضلع مشترک است } DF=DF \\ DB=EF \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{زضز})} \overset{\Delta}{DBF}\cong\overset{\Delta}{DFE}$$

در نتیجه، BFED متوازی‌الاضلاع است.

با توجه به این موضوع داریم: $EF = DB$ و $BF = DE$

در مثلث ABC و با در نظر گرفتن $DE \parallel BC$ قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\ (1)$$

در مثلث CAB با توجه به $AB \parallel EF$ قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}\ (2)$$

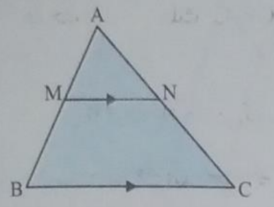
باتوجه به روابط (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF خواهیم داشت:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

۳۵

کار در کلاس

در شکل مقابل، با فرض $MN \parallel BC$ ، طبق قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ حالا عکس قضیهٔ تالس را به زبان ریاضی بنویسید:

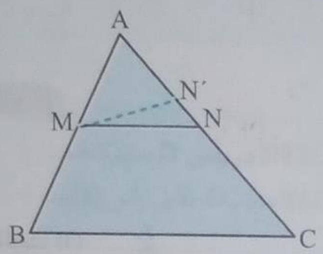


$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB-AM}=\frac{AN}{AC-AN} \Rightarrow \frac{AM}{BM}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$$

۳۶

سؤال متن

اثبات با برهان خلف است. در شکل می‌دانیم:



$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ ، فرض کنیم بر خلاف حکم $MN \nparallel BC$ ، پس از نقطهٔ M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. حال با توجه به قضیهٔ تالس داریم:

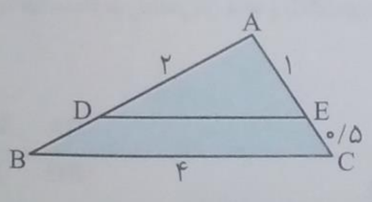
$$MN' \parallel BC \Rightarrow \frac{AN'}{AC}=\frac{AM}{AB}$$

از مقایسهٔ این تناسب، با فرض مسئله نتیجه می‌شود $\frac{AN'}{AC}=\frac{AN}{AC}$ و در نتیجه: $AN'=AN$. بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.

۳۶

تمرین

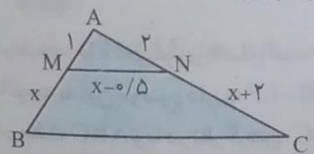
۱- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ ، با توجه به اندازهٔ پاره‌خط‌ها، طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.



$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{AB}=\frac{۱}{۱/۵}=\frac{DE}{۴}$$

$$\begin{cases} \frac{۲}{AB}=\frac{۱}{۱/۵} \Rightarrow AB=۲\times ۱/۵=۳ \\ \frac{۱}{۱/۵}=\frac{DE}{۴} \Rightarrow DE=\frac{۴\times ۱}{۱/۵}=\frac{۸}{۳} \end{cases}$$

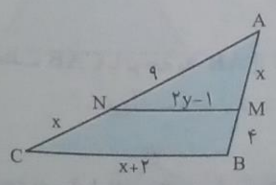
۲- در شکل مقابل، اگر $MN \parallel BC$ مقدار x را به‌دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{۱}{x}=\frac{۲}{x+۲} \Rightarrow x+۲=۲x \Rightarrow x=۲$$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۳}=\frac{۱/۵}{BC} \Rightarrow BC=۴/۵$$

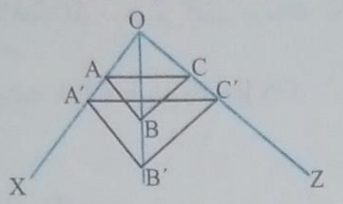
۳- در شکل مقابل $MN \parallel BC$ مقادیر x و y را به‌دست آورید.



$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{x}{x+۴}=\frac{۹}{۹+x} \Rightarrow \cancel{۹x}+x^۲=\cancel{۹x}+۳۶ \Rightarrow x=۶$$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}}{\underset{۵}{\cancel{۱۰}}}=\frac{۲y-۱}{۸} \Rightarrow ۱۰y-۵=۲۴ \Rightarrow ۱۰y=۲۴-۵=۱۹ \Rightarrow y=\frac{۱۹}{۱۰}=۱/۹$$

۴- در شکل مقابل می‌دانیم $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیهٔ تالس و عکس آن ثابت کنید: $AC \parallel A'C'$



در دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{OA'B'}$ داریم:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \quad (1)$$

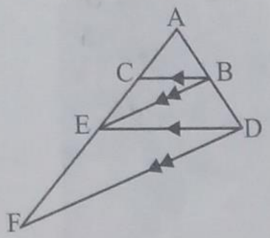
همچنین در دو مثلث $\overset{\Delta}{OBC}$ و $\overset{\Delta}{OB'C'}$ داریم:

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{OB}{OB'} \quad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OC'}$، حالا طبق عکس قضیهٔ تالس در مثلث $OA'C'$ داریم: $AC \parallel A'C'$

۵- در شکل مقابل می‌دانیم $BC \parallel DE$ و $BE \parallel DF$ به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ADE و ADF مقایسهٔ تناسب‌ها با یکدیگر، ثابت کنید: $AE^2 = AC.AF$. (به عبارت دیگر AE واسطهٔ هندسی بین AC و AF است.)

در مثلث AED می‌دانیم BC با ED موازی است، طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad (1)$$

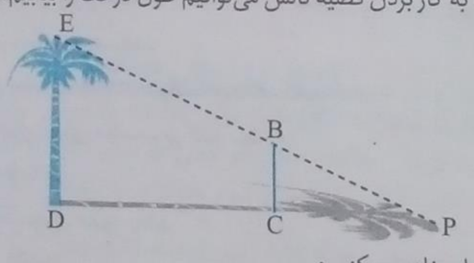
در مثلث ADF می‌دانیم BE با DF موازی است. طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AF} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow AE^2 = AC.AF$$

۶- یکی از کاربردهای قضیهٔ تالس از زمان‌های دور تاکنون، محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس بوده است. به‌عنوان مثال برای تعیین یک ارتفاع بلند مانند ارتفاع یک درخت بلند، در زمانی معین، طول سایهٔ درخت را روی زمین اندازه می‌گیریم. سپس یک قطعه چوب کوتاه را که به آن شاخص می‌گویند، طوری به صورت عمودی جابه‌جا می‌کنیم که سایهٔ آن روی امتداد سایهٔ درخت قرار گیرد و نوک سایهٔ شاخص نیز بر نوک سایهٔ درخت منطبق شود. به‌طور مثال اگر طول سایهٔ درخت ۶۰ متر، طول سایهٔ شاخص ۳ متر و طول شاخص ۱ متر باشد، بلندی درخت چند متر است؟

ابتدا نقاط را نام‌گذاری می‌کنیم. با به کار بردن قضیهٔ تالس می‌توانیم طول درخت را بیابیم. طبق فرض داریم:



با توجه به قضیهٔ تالس از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

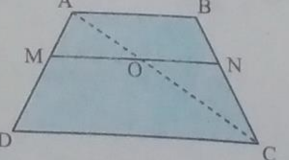
$DP = ۶۰$
$PC = ۳$
$BC = ۱$
$DE = ؟$

$$\frac{PC}{DP} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{۳}{۶۰} = \frac{۱}{DE} \Rightarrow DE = \frac{۱ \times \cancel{۶۰}^{۲۰}}{\cancel{۳}_{۱}} \Rightarrow DE = ۲۰$$

پس بلندی درخت برابر با ۲۰ متر است.

۷- در ذوزنقهٔ مقابل $AB \parallel CD \parallel MN$، ثابت کنید: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ (قضیهٔ تالس در ذوزنقه)

(راهنمایی: یکی از قطرها را رسم کنید.)



ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم. در مثلث $\overset{\Delta}{ADC}$ داریم: $(MO \parallel DC)$

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AO}{OC} \qquad (۱)$$

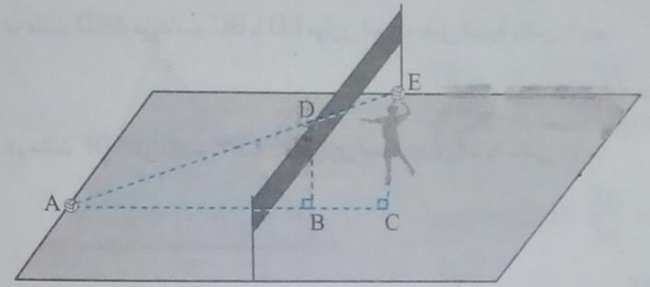
در مثلث CBA داریم: $(ON \parallel AB)$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{OA}{OC} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

۸- ابعاد یک زمین استاندارد والیبال ۹ متر در ۱۸ متر است که توسط خط میانی به دو مربع ۹ × ۹ تفکیک می‌شود و تور والیبال مردان با ارتفاع ۲/۴۳ متر روی خط وسط نصف شده است. در یک لحظه، یک بازیکن با قد ۱۸۰ سانتی‌متر و در فاصلهٔ دو متری تور، به هوا می‌پرد و توپی را که در ارتفاع ۳۰ سانتی‌متری بالای سرش است با ضربه آبشار مماس بر تور وسط روانهٔ زمین حریف می‌کند و توپ روی خط انتهای زمین حریف می‌نشیند. این بازیکن برای ضربه زدن چقدر به هوا پریده است؟



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{۹}{۱۱} = \frac{۲/۴۳}{CE} \Rightarrow CF = \frac{۱۱ \times ۲/۴۳}{۹} = ۲/۹۷$$

CE حاصل جمع میزان پرش + قد بازیکن و فاصلهٔ توپ از بازیکن است.

یعنی داریم: میزان پرش بازیکن $۲/۹۷ = x + ۱/۸ + ۰/۳ \Rightarrow x = ۰/۸۷$

ارزشیابی مستمر

۱- درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. (۰/۵ نمره)

الف) دو مثلث هم‌نهشت، هم‌مساحت هستند. ☐ درست ☐ نادرست

ب) دو مثلث که در یک رأس مشترک هستند هم‌مساحت هستند. ☐ درست ☐ نادرست

۲- جاهای خالی را با کلمه‌ها یا عبارت‌های مناسب پر کنید. (۰/۵)

الف) دو خط موازی با یک خط با هم

ب) اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد

۳- گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (۰/۵)

الف) ارتفاع مثلثی ۱۲ و مساحت آن ۳۶ بوده است. قاعدهٔ آن برابر با:

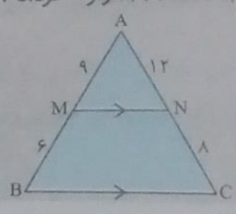
۱) ۶ ۲) ۱۲

ب) در قضیهٔ تالس، خط قاطع دو ضلع باید با ضلع سوم:

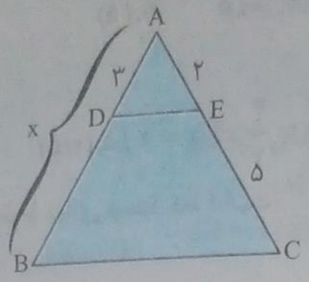
۱) موازی باشد. ۲) برابر باشد.

۴- عکس قضیهٔ تالس را بیان و آن را اثبات کنید. (۲)(مشهد - خرداد ۸۴)

۵- با توجّه به شکل مقابل ثابت کنید $MN \parallel BC$. (۱) (اهواز - خرداد ۸۷)

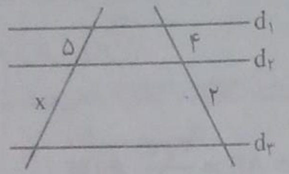


۶- مقدار x را به‌دست آورید. $(MN \parallel BC)$ (۱) (تهران - خرداد ۷۶)

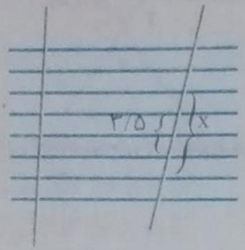


۷- مقدار x را به‌دست آورید. (۱/۵)

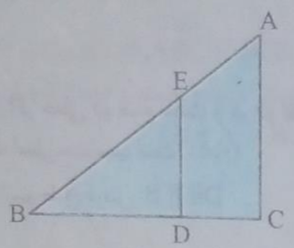
الف) $d_۱ \parallel d_۲ \parallel d_۳$ (تهران - خرداد ۹۰)



ب) خطوط افقی موازی‌اند. (کرج - شهریور ۹۱)



۸- با توجه به شکل زیر تساوی‌ها را کامل کنید. $(DE \parallel AC)$ (۱) (اهواز - خرداد ۹۲)



$$\frac{BE}{EA} = \frac{\square}{DC}$$

$$\frac{AC}{ED} = \frac{BC}{\square}$$

۹- تعمیم قضیهٔ تالس را بیان و اثبات کنید. (۲)

پاسخ ارزشیابی مستمر

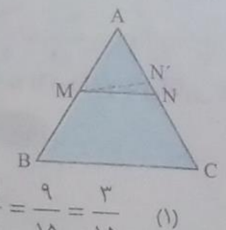
۱ الف) درست (۰/۲۵)، ب) نادرست (۰/۲۵) ۲ الف) موازی‌اند (۰/۲۵)، ب) بر دیگری نیز عمود است. (۰/۲۵)

۳ الف) گزینهٔ ۱ (۰/۲۵) ، ب) گزینهٔ ۱ (۰/۲۵) ۴ اگر خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناظر متناسب جدا کند، آنگاه C با ضلع سوم مثلث موازی است. (۰/۲۵) اثبات از طریق برهان خلف:

$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ و فرض کنیم برخلاف حکم $MN \nparallel BC$ ، پس از نقطهٔ M پاره‌خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم. (۰/۵)

حال با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}$ (۰/۲۵) باتوجه به رابطهٔ فرض مسئله داریم:

$\frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC}$ که از آن نتیجه می‌شود که $AN = AN'$ و بنابراین N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است. (۰/۵)



۵ $\frac{PN}{AC} = \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵}$ (۲) (۰/۵)

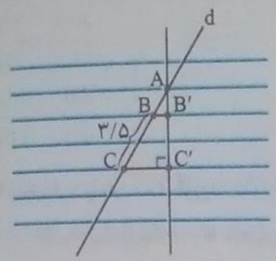
با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$\frac{AM}{AB} = \frac{۹}{۱۵} = \frac{۳}{۱۵}$ (۱) (۰/۵)

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{طبق عکس}} MN \parallel BC$$

۶ $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\overset{(۰/۵)}{\Rightarrow}\frac{۳}{x}=\frac{۲}{۷}\Rightarrow x=\frac{۳\times ۷}{۲}=۱۰/۵$ (۰/۵)

۷ الف) $\frac{۵}{x}=\frac{۴}{۲}\Rightarrow x=۲/۵$ (۰/۵)



ب) در واقع x طول ۴ قطعهٔ ایجاد شده روی خطوط موازی توسط خط d است.

$\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \text{: از قضیهٔ تالس داریم}\\ ۲A'B'=B'C' \text{: با توجه به شکل داریم}\\ BC=۳/۵ \text{: طبق صورت سوال}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{AB}{۳/۵}=\frac{A'B'}{۲A'B'}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow AB=\frac{۳/۵}{۲}$ (۰/۵)

پس طول قطعه‌های ایجاد شده روی خطوط موازی توسط d همگی باهم برابر هستند و مقدار آنها $\frac{۳/۵}{۲}$ است. بنابراین:

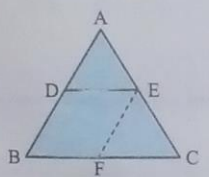
$x=۴\times\frac{۳/۵}{۲}=۷$ (۰/۵)

۸

$\frac{BE}{EA}=\frac{BD}{DC}$ (۰/۵) و $\frac{AC}{ED}=\frac{BC}{BD}$ (۰/۵)

۹ اگر خطی دو ضلع مثلث را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم موازی باشد، مثلثی پدید می آید که اندازه‌های ضلعش با مثلث اصلی متناسب است. (۰/۵)

می‌دانیم طبق فرض DE || B



$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

از نقطهٔ E پاره‌خط EF را موازی DB رسم می‌کنیم چهار ضلعی BEFB یک متوازی‌الاضلاع است، چون ضلع‌های روبرو دوبه‌دو موازی‌اند، بنابراین DE = BF و DB = EF (۰/۵)

در مثلث ABC با در نظر گرفتن DE || BC داریم:

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ رابطهٔ (۱) (۰/۵)

در مثلث ABC و با در نظر گرفتن EF || AB داریم:

$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$ رابطهٔ (۲)

با توجه به (۱) و (۲) و جای‌گذاری DE به جای BF داریم:

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ (۰/۵)

درس ۳ تشابه مثلث‌ها

مفاهیم آموزشی

۱- دو چندضلعی را متشابه گوییم هرگاه زاویه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر و اضلاع آنها با هم متناسب باشد.

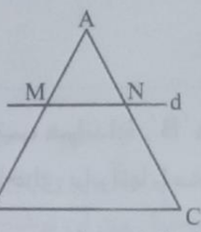
مثال: دو مربع همیشه با هم متشابه هستند. چون زاویه‌های آنها همگی برابر ۹۰° و اضلاع متناسب است.

۲- نسبت بین اضلاع را نسبت تشابه می‌گوییم.

مثال: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به نسبت $\frac{۲}{۳}$ با هم متشابه هستند. نسبت بین اضلاع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ برابر با $\frac{۲}{۳}$ است.

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها:

۳- خط d را موازی یکی از ضلع‌های مثلث رسم می‌کنیم که این مثلث ABC را در دو نقطه قطع می‌کند. مثلث ایجاد شده با مثلث اصلی متشابه است.



$$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

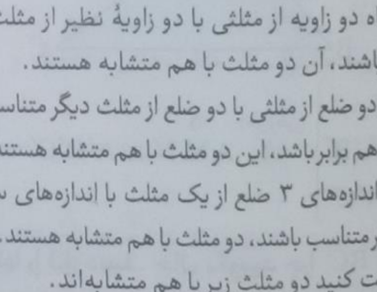
۴- با توجه به ویژگی‌های مثلث، برای اثبات تشابه دو مثلث می‌توان از حالت‌های زیر استفاده کرد:

الف) هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویهٔ نظیر از مثلث دیگر با هم برابر باشند، آن دو مثلث با هم متشابه هستند.

ب) هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویهٔ بین آنها با هم برابر باشد، این دو مثلث با هم متشابه هستند.

ج) هرگاه اندازه‌های ۳ ضلع از یک مثلث با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث با هم متشابه هستند.

مثال: ثابت کنید دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند.



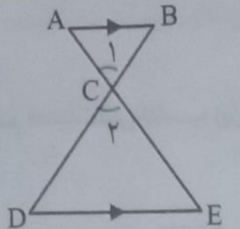
$$\left.\begin{array}{l} \frac{AC}{CE} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \\ \frac{BC}{DC} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{DC} \quad (۱)$$

(۲) متقابل به رأس $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$

بنا به حالت تناسب بین دو ضلع و برابری زاویه بین آنها نتیجه می‌شود:

$$(۱), (۲) \Rightarrow \overset{\Delta}{ACB} \sim \overset{\Delta}{DCE}$$

مثال: آیا دو مثلث ABC و CDE با هم متشابه هستند؟



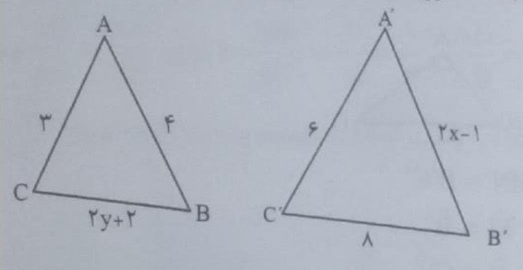
(۱) $AB \parallel DE$ و مورب $BD \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$

(۲) $AB \parallel DE$ و مورب $AE \Rightarrow \hat{A} = \hat{E}$

(۳) $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ متقابل به رأس‌اند.

$$(۱) \text{ و } (۲) \text{ و } (۳) \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DCE}$$

مثال: دو مثلث زیر با هم متشابه هستند. مقدار x و y را به‌دست آورید. $(A = A' \,,\, B = B')$



$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'} \Rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{۴}{۲x-۱} = \frac{۲y+۲}{۸}$$

$$\frac{\cancel{۳}^{\,۱}}{\cancel{۶}_{\,۲}} = \frac{۲y+۲}{۸} \Rightarrow ۴y+۴ = ۸ \Rightarrow ۴y = ۴ \Rightarrow y = ۱$$

$$\frac{\cancel{۳}^{\,۱}}{\cancel{۶}_{\,۲}} = \frac{۴}{۲x-۱} \Rightarrow ۲x-۱ = ۸ \Rightarrow ۲x = ۹ \Rightarrow x = \frac{۹}{۲}$$

سؤال متن

سؤال: مثلث ABC با چه نسبت تشابهی با مثلث $A'B'C'$ متشابه است؟

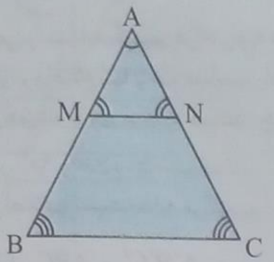
نسبت ضلع‌های مثلث ABC به مثلث $A'B'C'$ را به‌دست آوریم، مثلاً:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{۲}{۱}$$

درنتیجه، نسبت تشابه مثلث ABC به مثلث $A'B'C'$، ۲ است.

سؤال متن ۳۸

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (و یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.



$$MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

۱- زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به‌ترتیب با زاویه‌های $\angle B, \angle C$ برابرند. چرا؟

$BC \parallel MN$ و AB مورب $\Rightarrow \angle M = \angle B$

$BC \parallel MN$ و AC مورب $\Rightarrow \angle N = \angle C$

۲- با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس تناسب زیر را کامل کنید:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

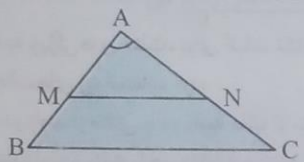
۳- از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

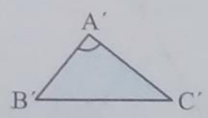
این دو مثلث با هم متشابه هستند.

سؤال متن ۳۹

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به‌ترتیب هم‌اندازهٔ $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم.

۱- مثلث‌های AMN و $A'B'C'$ به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ اجزای برابر آنها را مشخص کنید.





$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A}' \\ AM = A'B' \\ AN = A'C'\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض‌زض)}} \overset{\Delta}{AMN} \cong A'B'C' \xRightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{array}{l} MN = B'C' \\ \hat{M} = \hat{B}' \\ \hat{N} = \hat{C}'\end{array}$$

۲- در فرض مسئله، به جای $A'B'$ و $A'C'$، پاره‌خط‌های هم‌اندازه با آنها را قرار دهید. حال بگویید چرا $MN \parallel BC$؟

طبق عکس قضیهٔ تالس داریم:

$$\underbrace{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow MN \parallel BC$$

۳- با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها و نتیجهٔ قسمت (۱) درستی حکم را ثابت کنید.

۱) ضلع‌ها متناسب‌اند.

۲)

$$\begin{cases} MN \parallel BC \text{ و مورب } AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{M} \\ MN \parallel BC \text{ و مورب } AC \Rightarrow \hat{N} = \hat{C} \end{cases}$$

$\hat{A} = \hat{A}$ زاویه مشترک

درنتیجه $\overset{\Delta}{AMN}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ متشابه‌اند. از طرفی $\overset{\Delta}{AMN}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ هم‌نهشت‌اند؛ درنتیجه $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ متشابه‌اند.

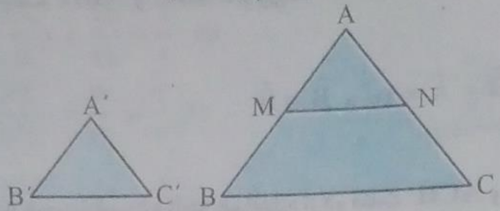
۴۰ سؤال متن

اثبات: روی AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به‌ترتیب هم‌اندازهٔ $A'B'$ و $A'C'$ جدا کنید.

۱- در فرض، به جای $A'B'$ و $A'C'$ مساوی‌های آنها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا $MN \parallel BC$ ؟

طبق فرض داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$



طبق عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم: $MN \parallel BC$

۲- از قضیهٔ اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟ ضلع‌ها متناسب و زاویه‌ها برابرند، پس $\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

۳- تعمیم قضیهٔ تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسهٔ این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض نتیجه بگیرید: $MN = B'C'$

$$\left.\begin{array}{l} \text{تعمیم تالس}: \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{MN}{BC} \\ \text{فرض}: \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{BC}=\frac{B'C'}{BC} \Rightarrow MN = B'C'$$

۴- مثلث‌های $A'B'C'$ و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از اینجا درستی حکم را ثابت کنید.

به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند.

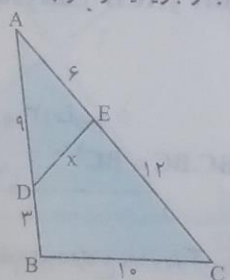
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AMN} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \\ \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

۴۱ سؤال متن

مثال: در شکل مقابل اندازهٔ هر پاره‌خط روی آن نوشته شده است. اندازهٔ x را به‌دست آورید.

حل: به کمک عددهای داده شده بدیهی است که $\frac{AE}{AB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{AD}{AC}=\frac{۹}{۱۸}=\frac{۱}{۲}$ بنابراین: $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$ و با

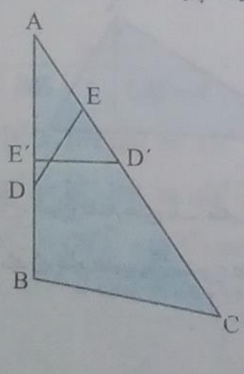
توجه به زاویهٔ مشترک A، مثلث‌های $\overset{\Delta}{ADE}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ متشابه‌اند. نسبت تشابه را بنویسید و x را به‌دست آورید.



$$\frac{DE}{BC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۱۰}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۵$$

۴۱ سؤال متن

در شکل روی AC، AD' را هم‌اندازهٔ AD و روی AB، AE' را هم اندازهٔ AE جدا کنید. چرا $BC \parallel D'E'$ ؟



$AD' = AD$

$AE' = AE$

اثبات می‌کنیم که قطعات ایجاد شده توسط DD' روی ضلع‌های AB و AC با هم متناسب هستند.

$$\frac{AD'}{AC} \xRightarrow{AD'=AD} \frac{AD}{AC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{AD'}{AC}=\frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

$$\frac{AE'}{AB} \xRightarrow{AE'=AE} \frac{AE}{AB}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{AE'}{AB}=\frac{۱}{۲} \qquad (۲)$$

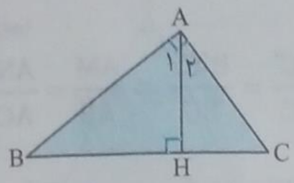
از (۱) و (۲) طبق عکس قضیهٔ تالس نتیجه می‌گیریم که $BC \parallel D'E'$.

۴۱

هندسه

فعالیت (۱)

۱- در مثلث قائم الزاویه ABC $(A = 90^\circ)$ ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید دو زاویهٔ هم‌اندازه را در دو مثلث ABH و ABC نام ببرید؟



$\hat{H} = \hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{B} = \hat{B}$

به همین ترتیب دو زاویهٔ هم‌اندازه از دو مثلث ACH و ABC را نام ببرید. بنابراین می‌توانیم بگوییم:

$\hat{A} = \hat{H} = 90^\circ, \hat{C} = \hat{C}$

$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ABC}\ ,\ \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

چرا مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{ACH}$، خودشان با هم متشابه‌اند؟

با توجه به قسمت (۱) داریم: $A_1 = C$

و با توجه به قسمت (۲) داریم: $A_2 = B$

$H_1 = H_2 = 90^\circ$

می‌توان نتیجه گرفت که $\overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABH}$

۲- نسبت تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ را بنویسید.

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \times BC$$

۳- نسبت تشابه به دو مثلث $\overset{\Delta}{ACH}$ و $\overset{\Delta}{ABC}$ را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC واسطهٔ هندسی BC و CH است.

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC.CH$$

۴- نسبت تشابه دو مثلث $\overset{\Delta}{ACH}$ و $\overset{\Delta}{ABH}$ را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH واسطه هندسی بین BH و CH است.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow AH^2 = CH.BH$$

۵- از روابط (۲) و (۳) داریم:

قضیهٔ فیثاغورس $\mathbf{AB^2 + AC^2 = BC \times BH + BC \times HC = BC(BH + HC) = BC.BC = BC^2}$

ایستگاه یادگیری

۱- در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به ۲ مثلث قائم الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۲- در هر مثلث قائم الزاویه روابط طولی زیر برقرار است: فرض می‌کنیم $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث قائم الزاویه است:

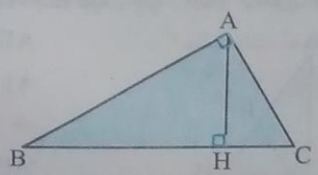
۱) $AB^2 = BC.BH$

۲) $AC^2 = BC.CH$

۳) $AH^2 = BH.CH$

۴) $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (رابطهٔ فیثاغورس)

۵) $AH \times BC = AB \times AC$

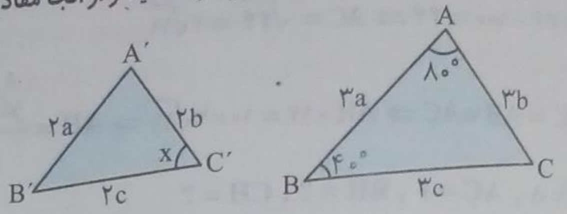


مثال: طول ضلع‌های یک مثلث قائم الزاویه برابر با ۱۰، ۸ و ۶ است. اندازهٔ ارتفاع وارد به وتر را به دست آورید.

در مثلث قائم الزاویه بزرگ‌ترین ضلع، وتر است ← ۱۰

$10 \times a = 6 \times 8 \Rightarrow a = \frac{6 \times 8}{10} = 4/8$

۱- در هریک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر y و x را مشخص کنید.



$$\frac{A'C'}{AC}=\frac{۲b}{۳b}=\frac{۲}{۳}\quad (۱)$$

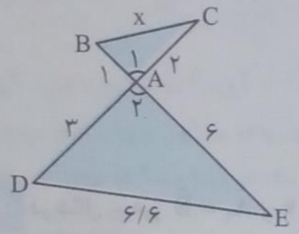
$$\frac{B'C'}{B'C'}=\frac{۲c}{۳c}=\frac{۲}{۳}\quad (۲)$$

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{۲a}{۳a}=\frac{۲}{۳}\quad (۳)$$

از روابط مقابل نتیجه می‌گیریم دو مثلث ABC و $A'B'C'$ به حالت تناسب سه ضلع، متشابه‌اند.

و داریم:

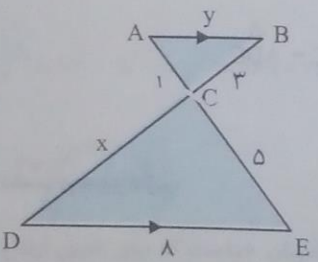
$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'\Rightarrow \hat{A}=۸۰^\circ\\ \hat{B}=\hat{B}'\Rightarrow \hat{B}'=۴۰^\circ\\ \hat{C}=\hat{C}'\Rightarrow \hat{C}=\hat{C}'=۱۸۰^\circ-(\overset{۱۲۰^\circ}{\cancel{۸۰^\circ+۴۰^\circ}})=۶۰^\circ\end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{AD}=\frac{۱}{۳}\\ \frac{AC}{AE}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\end{array}\text{ و }\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\right\}\Rightarrow A\hat{B}C\sim A\hat{D}E$$

با تناسب بین دو ضلع و برابری زاویهٔ بین آنها دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{۱}{۳}=\frac{x}{۶/۶}\rightarrow x=\frac{۶/۶\times ۱}{۳}=۲/۲$$



$$\left.\begin{array}{l}AB\parallel DE,\ \text{مورب}\ DB\ \Rightarrow \hat{D}=\hat{B}\\ AB\parallel DE,\ \text{مورب}\ AE\ \Rightarrow \hat{A}=\hat{E}\\ \text{متقابل به راس}\ \hat{C}_۱=\hat{C}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow A\hat{B}C\sim D\hat{C}E$$

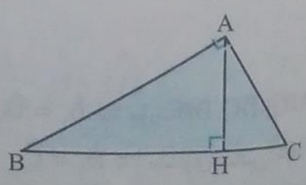
با حالت برابری ۳ زاویه دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{BC}{DC}=\frac{AC}{CE}\Rightarrow\frac{۳}{x}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow x=\frac{۱۵}{۲}=۷/۵$$

$$\frac{y}{۸}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow y=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

۲- در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(A=۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، در هریک از موارد زیر باتوجه به مفروضات داده شده مقادیر مجهول را محاسبه کنید.

۱) $\overbrace{BH=۹\ ,\ CH=۴}^{BC=۱۳}\ ,\ AH=?\quad AB=?\quad AC=?$



$AH^۲=BH.CH\Rightarrow AH^۲=۹\times۴=۳۶\Rightarrow AH=۶$

$AB^۲=BC.BH\Rightarrow AB^۲=۱۳\times۹\Rightarrow AB=۳\sqrt{۱۳}$

$AC^۲=(BC)^۲-(AB^۲)\Rightarrow AC^۲=(۱۳)^۲-(۳\sqrt{۱۳})^۲$

$\Rightarrow AC^۲=۱۳\times۱۳-۹\times۱۳=۴\times۱۳\Rightarrow AC=۲\sqrt{۱۳}$

۲) $AB = 10\ ,\ BC = 12\ ,\ AC = ?\ ,\ AH = ?$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC^2 = (12)^2 - (10)^2$$

$$AC^2 = 144 - 100 = 44 \Rightarrow AC = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times 12 = 10 \times 2\sqrt{11} \Rightarrow AH = \frac{\cancel{10}^{\,5} \times \cancel{2}^{\,1}\sqrt{11}}{\cancel{12}\ \cancel{6}_{\,3}} = \frac{5}{3}\sqrt{11}$$

۳) $AB = 8\ ,\ AC = 6\ ,\ BH = ?\ ,\ CH = ?$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow BC^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

$$AB^2 = BC.BH$$

$$(6)^2 = 10 \times BH \Rightarrow BH = 3/6$$

$$AC^2 = BC.CH \Rightarrow 8^2 = 10 \times CH \Rightarrow CH = 6/4$$

۴) $AB = 8\ ,\ AH = 4\ ,\ BC = ?\ ,\ AC = ?$

$$BH^2 = (AB)^2 - (AH)^2 \Rightarrow BH^2 = 8^2 - 4^2 \Rightarrow BH^2 = 64 - 16$$

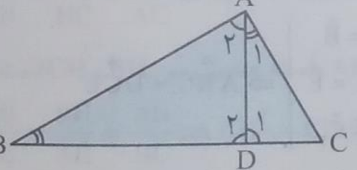
$$BH = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$AB^2 = BC.BH \Rightarrow 8^2 = BC.4\sqrt{3} \Rightarrow BC = \frac{\cancel{64}^{\,16}}{\cancel{4}_{\,1}\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \frac{16}{3}\sqrt{3}$$

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow AC^2 = (\frac{16}{3}\sqrt{3})^2 - 8^2 = \frac{(16)^2}{3} - 8^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = \frac{4 \times 8^2 - 3 \times 8^2}{3} = \frac{8^2}{3} \Rightarrow AC = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

۴۳ در شکل روبه‌رو $\hat{A}_1 = \hat{B}$ و $AC = 4$ و $BD = 6$ طول BC را به‌دست آورید.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{E} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array}\right. \Rightarrow D_1 = A \Rightarrow \overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{ADC}$$

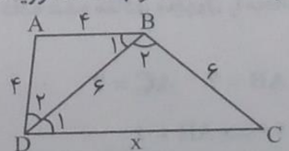
تناسب روبه‌رو را داریم:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC^2 = C = D_2 = B_1 \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{A}$$

$$AC^2 = BC.DC \xrightarrow[DC = x-4]{BC = x} 4^2 = x.(x-6) \Rightarrow 16 = x^2 - 6x$$

$$x^2 - 6x - 160 = 0(x-8)(x+2) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ ق.ق} \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ غ ق.ق} \end{array}\right. \Rightarrow BC = 8$$

۴۴ شکل روبه‌رو ABCD ذوزنقه است. طول قاعدهٔ CD را به‌دست آورید.



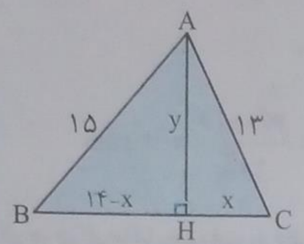
$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC, DB \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ DBC \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C} \\ ABD \text{ متساوی‌الساقین} \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{B}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C} = \hat{D}_2 = B_1 \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{A}$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{B}_۲\\ \dfrac{BD}{AB}=\dfrac{۶}{۴}=\dfrac{۳}{۲}\\ \dfrac{BC}{AD}=\dfrac{۶}{۴}=\dfrac{۳}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{BDC}$$

پس داریم:

$$\frac{DC}{BD}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{x}{۶}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳\times ۶}{۲}=۹$$

۵- در شکل مقابل مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH مقادیر x و y را به‌دست آورید و از آن‌جا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



(۱) در مثلث $\overset{\Delta}{ABH}$: $y^۲+(۱۴-x)^۲=۱۵^۲\Rightarrow y^۲=۱۵^۲-(۱۴-x)^۲$

(۲) در مثلث $\overset{\Delta}{ACH}$: $y^۲+x^۲=۱۳^۲\Rightarrow y^۲=۱۳^۲-x^۲$

از (۱) و (۲) داریم:

$$۱۵^۲-(۱۴-x)^۲=۱۳^۲-x^۲$$
$$۲۲۵-۱۹۶+۲۸x-x^۲=۱۶۹-x^۲$$
$$۲۸x=۱۶۹-۲۹\Rightarrow ۲۸x=۱۴۰$$
$$x=\frac{۱۴۰}{۲۸}=۵$$

با جای‌گذاری مقدار x در رابطهٔ ۲:

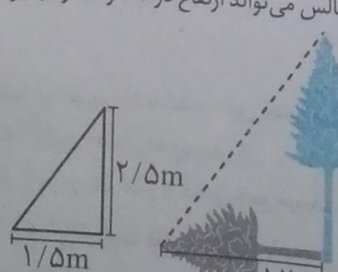
$$y^۲=۱۳^۲-۵^۲\Rightarrow y^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴\Rightarrow y=۱۲$$

مساحت مثلث برابر است:

$$\frac{۱۲\times \cancel{۱۴}^{۷}}{\cancel{۲}_{۱}}=۸۴$$

۶- در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش‌آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش‌آموز را می‌بینید. با توجّه به اطلاعات داده شدهٔ ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.

الف) روش ترانه: ترانه یک چوب ۲/۵ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایهٔ چوب، در آن زمان ۱/۵ متر بود. همزمان طول سایهٔ درخت ۱۲ متر بود. از اینجا چگونه او توانست ارتفاع درخت را اندازه بگیرد؟ ارتفاع این درخت چند متر است؟ با تشکیل دو مثلث متشابه و کاربرد قضیهٔ تالس می‌تواند ارتفاع درخت را اندازه بگیرد.



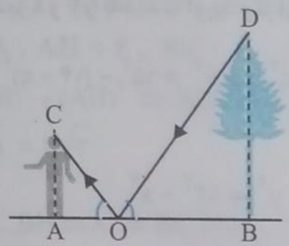
$$\frac{x}{۲/۵}=\frac{۱۲}{۱/۵}\Rightarrow x=\frac{\cancel{۱۲}^{۴}\times\cancel{۲/۵}^{۵}}{\cancel{۱/۵}\ \cancel{۳}_{۱}}\Rightarrow x=۲۰m$$

ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطه O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجّه به آنچه که از خواص آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازهٔ قد شهرزاد، (فاصلهٔ چشم او تا زمین) ارتفاع درخت را به‌دست آورد. اگر قد شهرزاد ۱۶۰ سانتی‌متر و فاصلهٔ پای او از آینه ۲/۵ متر و فاصلهٔ آینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟

با توجه به ویژگی آینهٔ تخت، زاویهٔ بازتاب نور برابر با زاویهٔ تابش آن است. در نتیجه، $\widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲$. از طرفی زاویه‌های B و A برابر ۹۰° هستند. با توجه به اینکه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰° است، نتیجه می‌شود:

$$\widehat{C} = ۱۸۰^\circ - (\widehat{A} + \widehat{O}_۱) = ۱۸۰^\circ - (\widehat{B} + \widehat{O}_۲) = \widehat{D}$$

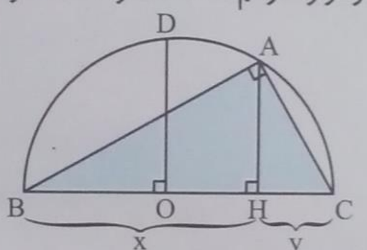
پس دو مثلث OAC و OBD به حالت برابری سه زاویه متشابه‌اند. پس می‌توان با تناسب زیر ارتفاع درخت را به‌دست آورد:



$$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{DB}$$

$$\frac{۲/۵}{۲۰} = \frac{۱/۶}{x} \Rightarrow x = \frac{\overset{۸}{\cancel{۲۰}} \times ۱/۶}{\underset{۱}{\cancel{۲/۵}}} = ۱۲/۸m$$

۷- در شکل مقابل نیم‌دایره به قطر BC و مرکز O رسم شده است و نقطهٔ دلخواه A روی محیط نیم‌دایره است.



الف) چرا زاویهٔ A قائمه است؟ زاویهٔ محاطی مقابل به قطر برابر با ۹۰° درجه است.

ب) برای نقطهٔ A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شد و OD شعاع دایره است اندازه‌های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

$OD \boxed{>} AH$

پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

$$\left.\begin{array}{l} OD = OB = \dfrac{x+y}{۲} \text{ چون هر دو شعاع هستند، با هم برابرند} \\ AH^۲ = x.y \Rightarrow AH = \sqrt{x.y} \text{ رابطه طول} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x+y}{۲} > \sqrt{x.y}$$

ت) آیا می‌توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$ ؟ چرا؟ بله، برقرار است.

ابتدا طرفین را در عدد ۲ ضرب کرده و به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \xRightarrow{\times ۲} a + b \geq ۲\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow (a+b)^۲ \geq ۴ab \Rightarrow a^۲ + b^۲ + ۲ab \geq ۴ab$$

$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ - ۲ab \geq ۰ \Rightarrow (a+b)^۲ \geq ۰$$

۸- با قضیهٔ فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC قائمه باشد آنگاه $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

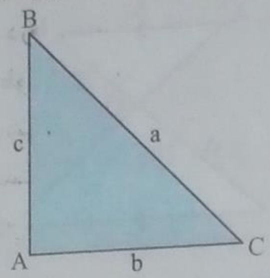
الف) عکس این قضیه را بنویسید.

اگر در مثلثی مربع یک ضلع با حاصل‌جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است، یعنی اگر در مثلث به طول اضلاع c,b,a یکی از رابطه‌های زیر برقرار باشد: $a^۲ = b^۲ = c^۲$ یا $b^۲ = a^۲ + c^۲$ یا $c^۲ = a^۲ + b^۲$

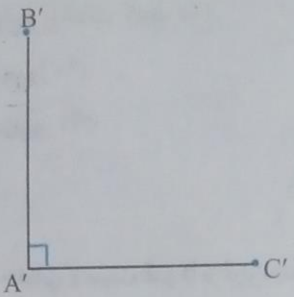
آنگاه مثلث قائم‌الزاویه است.

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.



۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل را به گونه‌ای در نظر بگیرید که $A' = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$.



۳) با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$ اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

$$(B'C')^2 = (A'B')^2 + (A'C')^2 \xRightarrow[A'C'=b]{A'B'=C} (B'C')^2 = c^2 + b^2$$

$$\xRightarrow{c^2+b^2=a^2} (B'C')^2 = C^2 = (BC)^2 \rightarrow B'C' = BC$$

۴) توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

$$\left.\begin{array}{ll} AB = A'B' & \text{طبق فرض مساله} \\ AC = A'C' & \\ HBC = B'C' & \text{از قسمت۳ استفاده کردیم} \end{array}\right\} \underset{(\text{ض‌ض‌ض})}{\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}} \Rightarrow \hat{A} = \hat{A}' = 90$$

ج) قضیهٔ فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان نمایید.

مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع با حاصل‌جمع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.

ارزشیابی مستمر

۱- درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. (۰/۵ نمره)

الف) دو چندضلعی را متشابه گوییم هرگاه تمام زاویه‌هایشان نظیر به نظیر برابر باشند. ☐ درست ☐ نادرست

ب) دو شکل هم‌نهشت با هم متشابه‌اند. ☐ درست ☐ نادرست

۲- جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب کامل کنید. (۰/۵)

الف) نسبت اندازه‌های اضلاع نظیرهم در دو مثلث را .... گوییم.

ب) هر دو مربع دلخواه با هم ....

۳- گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (۰/۵)

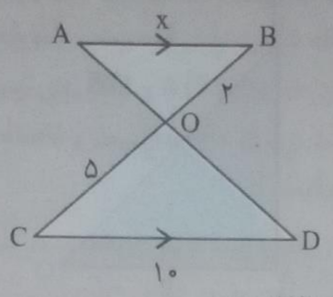
الف) ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه آن را به دو مثلث .... تقسیم می‌کند.

۱) هم‌نهشت ۲) متشابه

ب) کدام‌یک حالت تشابه است؟

۱) برابری دو زاویه ۲) برابری دو ضلع

۴- ثابت کنید دو مثلث زیر با هم متشابه هستند. سپس مقدار x را به‌دست آورید. (۱/۵) (تهران - خرداد ۹۰)
$(AB \parallel CD)$



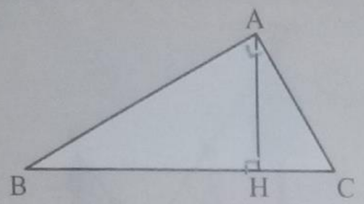
۵- حالت‌های تشابه دو مثلث را نام ببرید. (۰/۷۵)

۶- قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها را بیان کنید. (۰/۷۵) (اردبیل - خرداد ۹۰)

۷- با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویهٔ زیر، روابط را اثبات کنید. (۲)

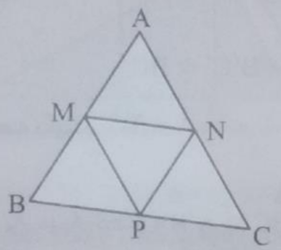
الف) $AB^{2} = BC.BH$ (تهران - شهریور ۹۰)

ب) $AH^{2} = BH.CH$ (اردبیل - شهریور ۹۱)



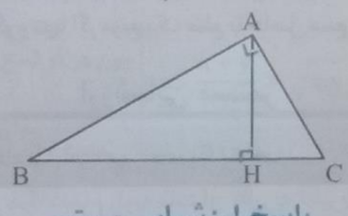
۸- آیا رابطهٔ $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ برای هر عدد حقیقی و مثبت a و b برقرار است؟ اثبات کنید. (۱)

۹- در شکل مقابل M,N,P وسط اضلاع مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ هستند. چرا دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{MND}$ با هم متشابه اند و نسبت تشابه چند است؟ (۱/۵) (تهران - دی ۸۶)



۱۰- با توجه به شکل و دو رابطهٔ داده شده، قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه بگیرید. (۱)

الف) $AC^{2} = BC.CH$ ب) $AB^{2} = BC.BH$



پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) نادرست (۰/۲۵)، ب) درست (۰/۲۵)

۲ الف) نسبت تشابه(۰/۲۵)، ب) متشابه‌اند. (۰/۲۵)

۳ الف) گزینهٔ ۲(۰/۲۵)، ب) گزینهٔ ۱(۰/۲۵)

۴

$$AB \parallel DC \text{ و } CB \text{ مورب} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \ (0/5)$$
$$AB \parallel DC \text{ و } AD \text{ مورب} \Rightarrow \hat{A} = \hat{D} \ (0/5)$$
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{OAB} \sim \overset{\Delta}{OCD} \text{ برابری دو زاویه}$$

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{2}{5} \rightarrow x = 4 \quad (0/5)$$

۵ متناسب بودن سه ضلع، برابری دو زاویه، متناسب بودن دو ضلع و برابری زاویهٔ بین آنها. (۰/۷۵)

۶ اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است. (۰/۷۵)

۷

الف) $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABH} \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BH}{AB} \overset{(۰/۵)}{\Rightarrow} AB^۲ = BC.BH \quad (۰/۵)$

ب) $\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{HC}{AH} \overset{(۰/۵)}{\Rightarrow} AH^۲ = BH.HC \quad (۰/۵)$

۸

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab} \xrightarrow[\text{دو می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان}} \quad (۰/۲۵)$$

$$(a+b)^۲ \geq (۲\sqrt{ab})^۲ \Rightarrow a^۲ + ۲ab + b^۲ \geq ۴ab \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۲ab + b^۲ \geq ۰ \Rightarrow (a-b)^۲ \geq ۰ \quad (۰/۵)$$

۹

ازآنجا که M و N وسط ضلع‌های AB و AC واقع هستند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$۱ = \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} MN \parallel BC$$

همچنین چون N و P وسط ضلع‌های AC و BC هستند، تناسب زیر را دادیم:

$$۱ = \frac{AN}{NC} = \frac{BP}{PC} \Rightarrow AB \parallel NP$$

$$\begin{matrix} NP \parallel AB \\ MN \parallel BC \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} MNPB \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow \hat{N} = \hat{B} & (۱) & (۰/۲۵) \\ MNPC \text{ متوازی الاضلاع} \Rightarrow \hat{C} = \hat{M} & (۲) & (۰/۲۵) \end{matrix}$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم:

$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP}$ برابری دو زاویه (۰/۲۵)

نسبت تشابه:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow[NC=MP]{\overset{(۰/۲۵)}{NCMP \text{ متوازی الاضلاع}}} \frac{MP}{AC} = \frac{۱}{۲} \quad (۰/۵)$$

۱۰ دو رابطهٔ (الف) و (ب) را با هم جمع می‌کنیم.

$$AC^۲ + AB^۲ = BC.CH + BC.BH = BC(CH + BH) \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow AC^۲ + AB^۲ = BC.BC = BC^۲ \quad (۰/۵)$$

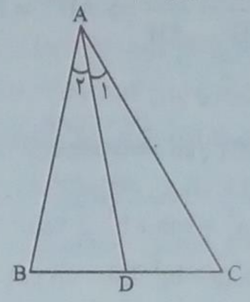
هندسه

کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها

مفاهیم آموزشی

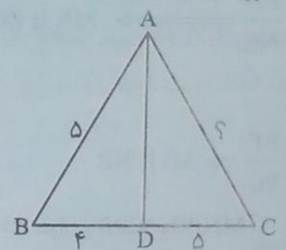
۱- نیمسازهای زاویه‌های داخلی:

ABC یک مثلث است که نیمساز یکی از زاویه‌های داخلی آن را رسم کرده‌ایم. قطعه‌های ایجاد شده روی ضلع مقابل به این زاویه با دو ضلع دیگر متناسب است. فرض $(\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲)$



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

مثال: در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ را رسم کرده‌ایم. با داشتن اندازهٔ $CD = ۵$ و $BD = ۴$، اندازهٔ ضلع سوم مثلث را به‌دست آورید.



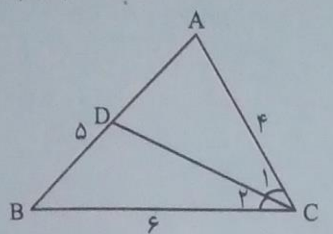
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{۵}{x} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow x = \frac{۲۵}{۴}$$

مثال: در مثلث ABC نیمساز زاویهٔ $\hat{C}$ را رسم کردیم. با داشتن اندازه‌های $AB = ۵$ ، $AC = ۴$ و $BC = ۶$ طول دو قطعه‌ای را که نیمساز C روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند به‌دست آورید.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۴}{۶} = \frac{AD}{BD}$$

$$\frac{۴+۶}{۶} = \frac{AD+BD}{BD} \Rightarrow \frac{۱۰}{۶} = \frac{۵}{BD} \Rightarrow BD = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳$$

$$AD = ۵ - ۳ = ۲$$



۲- نسبت اجزای فرعی، محیط و مساحت‌های دو مثلث متشابه:

ABC و $A'B'C'$ دو مثلث متشابه هستند. اگر نسبت تشابه این دو مثلث برابر با k باشد، نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها و نیمسازهای نظیر برابر k است. همچنین نسبت محیط این دو مثلث برابر با k و نسبت مساحت آنها برابر با $k^۲$ است.

مثال: دو مثلث ABC و $A'B'C'$ با هم متشابه هستند و نسبت تشابه آنها $\frac{۱}{۲}$ است. نسبت تشابه محیط و مساحت این دو مثلث را به‌دست آورید.

نسبت تشابه محیط $= \frac{۱}{۲}$

نسبت تشابه مساحت $= (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$

۳- دو چندضلعی داریم که با هم متشابه هستند و نسبت تشابه آنها برابر با k است. نسبت تشابه محیط آنها نیز k و نسبت تشابه مساحت‌شان برابر با $k^۲$ است.

مثال: دو پنج‌ضلعی داریم که با هم متشابه بوده و نسبت تشابه آنها برابر با ۴ است. نسبت تشابه محیط و مساحت این دو چندضلعی را به‌دست آورید.

نسبت تشابه محیط‌ها برابر با ۴ و نسبت تشابه مساحت‌ها برابر با ۱۶ است.

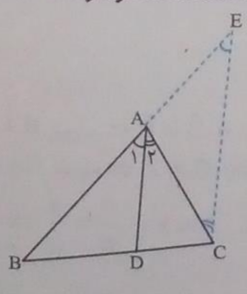
۱- قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

۴۵

سؤال متن

اثبات: مطابق شکل، از نقطهٔ C خط راستی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.

الف) چرا $\angle A_۱ = \angle E$ و چرا $\angle A_۲ = \angle C$ ؟



$AD \parallel EC$ و BE مورب $\Longrightarrow \angle A_۱ = \angle E$

$AD \parallel EC$ و AC مورب $\Longrightarrow \angle A_۲ = \angle C$

ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای در مورد زوایای E و C می‌توان گرفت؟ طبق فرض داریم: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

حال با توجّه به قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم:

$\hat{E} = \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{C} \Rightarrow \hat{E} = \hat{C}$

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟ مثلث متساوی‌الساقین، چون:

$\hat{E} = \hat{C} \Rightarrow AC = AE$

ج) با توجّه به قضیهٔ تالس در مثلث $E\overset{\Delta}{B}C$ $(AD \parallel EC)$ نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجّه به نتیجهٔ قسمت (ب) اثبات را کامل کنید:

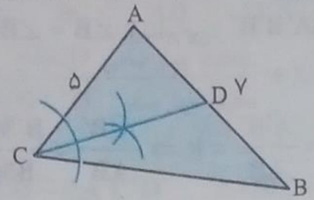
$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

کار در کلاس ۴۶

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویهٔ C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را که این نیمساز روی AB جدا می‌کند، به‌دست آورید.

ابتدا نیمساز زاویهٔ $\hat{C}$ را با توجه به روشی که در فصل اول خواندیم، رسم می‌کنیم و محل برخورد نیمساز C با AB را D می‌نامیم.

بنابراین داریم:



$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$$

۲- نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های مثلث متشابه

سؤال متن ۴۶

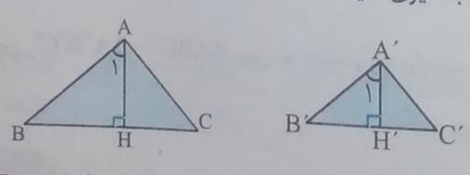
اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها). (چرا؟) زیرا ما حکم را تنها برای یک ارتفاع خاص در یک مثلث خاص ثابت نمی‌کنیم، بلکه ارتفاع دلخواه در مثلثی دلخواه را در نظر می‌گیریم. در نتیجه حکم قابل تعمیم است.

الف) ارتفاع‌ها:

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'\ ,\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = K$
حکم	$\frac{A'H'}{AH} = K$

$\angle B = \angle B'$ چرا

بنابراین: $\Delta ABH \sim A'B'H'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه‌گیری کنید.



از آنجا که طبق فرض $A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$ در نتیجه الزاماً $\angle\hat{B} = \angle\hat{B}'$.

$\angle B = \angle B'$ (۱)

$\angle H = \angle H' = 90^\circ$ (۲)

چون مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث 180° است، پس:

$\angle A_1 = 180^\circ - (\angle B + \angle H)$

$\angle A'_1 = 180^\circ - (\angle B' + \angle H')$

در نتیجه $\angle A_1 = A'_1$ (۳)

$(1),(2),(3) \Rightarrow \Delta A'B'H' \sim \Delta ABH$

بنا به حالت برابری سه زاویه دو مثلث متشابه‌اند.

چون دو مثلث با هم متشابه هستند، پس داریم:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'H'}{BH}=\frac{A'H'}{AH}$$

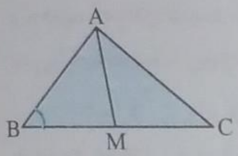
و از طرفی طبق فرض داریم $\frac{A'B'}{AB}=K$ در نتیجه:

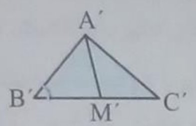
$$\frac{A'H'}{AH}=k$$

ب) میانه‌ها:

فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'\ ,\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=K$
حکم	$\frac{A'M'}{AM}=K$

چرا $\angle B=\angle B'$ ؟ بنابراین: $\Delta ABH \sim \Delta A'B'H'$ در نتیجه $\hat{B}=\hat{B}'$





$$\frac{B'M'}{BM}=\frac{\frac{۱}{۲}B'C'}{\frac{۱}{۲}BC}=\frac{A'B'}{AB}=k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'M'}{BM}$$

بنابراین $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

به حالت تناسب دو ضلع و برابری زاویهٔ بین آنها دو مثلث متشابه‌اند

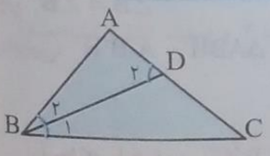
$$\left.\begin{aligned}&\angle B=\angle B'\\&\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'M'}{BM}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta A'B'M'$$

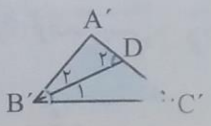
$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'M'}{BM}=\frac{A'M'}{AM}=k \Rightarrow \frac{A'M'}{AM}=k$$

ج) نیمسازها

فرض:	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'\ ,\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=K$
حکم:	$\frac{B'D'}{BD}=K$

چرا $\angle A=\angle A'$ ، **چرا** $\angle B_۲=\angle B'_۲$ ؟





چون $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ پس سه زاویه با هم برابرند.

$$\angle A=\angle A'$$

$$\angle B=\angle B' \Rightarrow \frac{۱}{۲}\angle B=\frac{۱}{۲}\angle B' \Rightarrow \angle B_۲=\angle B'_۲$$

بنابراین $\Delta A'B'D' \sim \Delta ABD$ (چرا؟) و از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

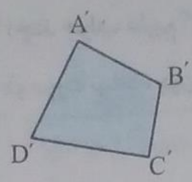
چون:

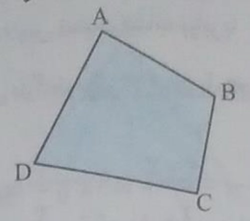
$$\left.\begin{aligned}&\angle A=\angle A'\\&\angle B_۲=\angle B'_۲\\&\angle D_۲=۱۸۰^\circ-(\angle A+\angle B_۲)\\&\angle D'_۲=۱۸۰^\circ-(\angle A'+\angle B'_۲)\end{aligned}\right\}\xRightarrow{\text{برابری سه زاویه}}\Delta A'B'D' \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'D'}{AD}=\frac{B'D'}{BD}=k$$

کار در کلاس

۴۸

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.





۱- اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

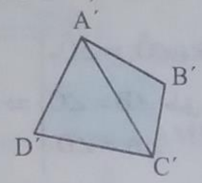
چون با هم متشابه هستند، پس رابطهٔ زیر را داریم:

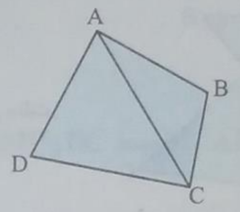
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'D'}{AD}=\frac{D'C'}{DC}=k \xrightarrow[\text{ویژگی‌های تناسب}]{\text{با استفاده از}} =\frac{A'B'+B'C'+A'D'+D'C'}{AB+BC+AD+DC}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{محیط چهار ضلعی } ABCD}{\text{محیط چهار ضلعی } A'B'C'D'}=K$$

۲- قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید و نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$





دو مثلث به حالت تناسب دو ضلع و برابری زاویهٔ بین آنها متشابه‌اند.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A'D'}{AD}=\frac{D'C'}{DC} \ \text{طبق قسمت (۱)} \\ \hat{D}=\hat{D}' \ \text{(چون این دو چهارضلعی متشابه‌اند.)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta A'C'D'$$

به‌طور مشابه دو مثلث ΔABC و $\Delta A'B'C'$ متشابه‌اند.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC} \\ \hat{B}=\hat{B}'\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟ نسبت تشابه همان k می‌شود، چون طبق فرض داریم: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=K$.

۳- جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}}=k^{۲} \ ، \ \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^{۲} \Rightarrow \frac{S_{A'C'D'}+S_{A'B'C'}}{S_{ACD}+S_{ABC}}=k^{۲} \Rightarrow \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=k^{۲}$$

۴۸

سؤال متن

می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند. (چرا؟) زیرا در هر مثلث متساوی‌الاضلاع اندازهٔ هر سه زاویه برابر با ۶۰° است. در نتیجه، هر دو مثلث متساوی الاضلاع دلخواه به حالت برابری سه زاویه متشابه‌اند.

۴۸

کار در کلاس

۱- اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه به‌ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

$$\frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}}=(\frac{۱۸}{۱۰})^{۲} \Rightarrow \frac{۱۵}{x}=(\frac{\cancel{۱۸}^{\,۹}}{\cancel{۱۰}_{\,۵}})^{۲} \Rightarrow \frac{۱۵}{x}=\frac{۸۱}{۲۵} \Rightarrow x=\frac{۱۵\times ۲۵}{۸۱}\simeq ۴/۶۳$$

۲- نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟) چون نسبت مساحت‌ها برابر با $\frac{۴}{۹}$ است، پس نسبت تشابه برابر با $\frac{۲}{۳}$ است.

می‌توان نسبت را به دو صورت نوشت، چون مشخص نشده است که محیط پنج‌ضلعی بزرگ‌تر برابر ۱۲ است یا پنج‌ضلعی کوچک‌تر!

$$\frac{۲}{۳}=\frac{۱۲}{x}\Rightarrow x=\frac{\cancel{۱۲}^{۶}\times ۳}{\cancel{۲}_{۱}}=۱۸ \quad \text{یا} \quad \frac{۲}{۳}=\frac{x}{۱۲}\Rightarrow x=\frac{۲\times \cancel{۱۲}^{۴}}{\cancel{۳}_{۱}}=۸$$

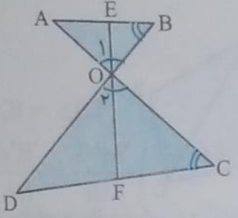
محیط پنج‌ضلعی دیگر ۱۸ یا ۸ است.

۳- اندازه‌های اضلاع یک هفت‌ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت‌ضلعی چند برابر می‌شود؟ چون زاویه‌ها عوض نشده است. پس دو شکل با هم متشابه هستند و نسبت تشابه برابر ۳ است. بنابراین نسبت مساحت‌ها ۹ می‌شود. (از آن‌جا که اگر نسبت تشابه k باشد نسبت مساحت $K^۲$ می‌شود).

فعالیت ۴۹

در شکل روبه‌رو $EF=۱۰cm$ نیمساز دو زاویهٔ متقابل به رأس O است و $\angle B=\angle C$.

الف) چرا مثلث‌های ΔOAB و ΔOCD متشابه‌اند؟ دو مثلث به حالت تساوی سه زاویه متشابه‌اند.



$$\left.\begin{array}{ll}\angle \hat{O}_۱=\angle \hat{O}_۲ & \text{متقابل به راس‌اند}\\ \angle B=\angle C & \text{طبق فرض } ۱۸۰^\circ \text{ بودن مجموع زاویه‌های داخلی مثلث}\\ \angle A=\angle D & \end{array}\right\}\Rightarrow OAB\sim OCD$$

ب) اگر $\frac{OB}{OC}=\frac{۲}{۳}$، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟ طبق قضیه می‌دانیم اگر نسبت تشابه دو مثلث برابر با k باشد، نسبت بین نیمسازها هم برابر با k است.

$$\frac{OE}{OF}=\frac{۲}{۳}$$

ج) طول‌های OE و OF را به‌دست آورید.

$$\frac{OE}{OF}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \frac{OE}{\underbrace{OE+OF}_{EF=۱۰}}=\frac{۲}{۳+۲}$$

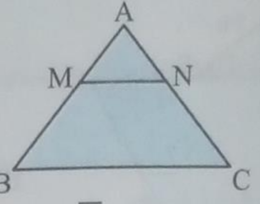
$$\Rightarrow \frac{OE}{۱۰}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow OE=\frac{۱۰\times ۲}{۵}=۴cm \Rightarrow \text{و } OF=۱۰-۴=۶\ cm$$

تمرین ۴۹

۱- طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰، ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

$$\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۱۲}{x}=\frac{۱۰}{y}\quad \left\{\begin{array}{l}\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۱۲}{x}\Rightarrow x=\frac{\cancel{۱۰}^{۲}\times \cancel{۱۲}^{۴}}{\cancel{\cancel{۱۵}}^{\cancel{۳}}_{۱}}=۸\\ \frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۱۰}{y}\Rightarrow y=\frac{\cancel{۱۰}^{۲}\times ۱۰}{\cancel{۱۵}_{۳}}\simeq ۶/۶\end{array}\right\}\Rightarrow ۸+۶/۶+۱۰=۲۴/۶$$

۲- در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$ است و مساحت ذوزنقهٔ MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.

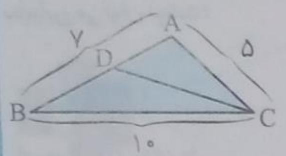


$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{MNCB}} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{MNCB} + S_{AMN}} = \frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{ABC}}} = \frac{۱}{۹}$$

نسبت تشابه برابر است با $\sqrt{\frac{۱}{۹}} = \frac{۱}{۳}$. در نتیجه:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{AM}{AB - AM} = \frac{۱}{۳-۱} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{۲}{۱}$$

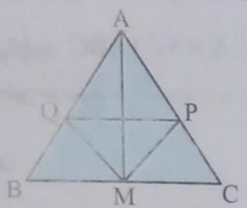
۳- در مثلث ABC ، $AB = ۷$ و $AC = ۵$ و $BC = ۱۰$ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.



$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۵}{۱۰} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{۱}{۲+۱} = \frac{AD}{\underbrace{AD + BD}_{۷}} \Rightarrow AD = \frac{۷}{۳}$$

$$DB = ۷ - \frac{۷}{۳} = \frac{۱۴}{۳}$$

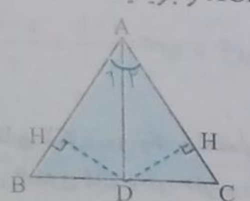
۴- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



$$\left.\begin{array}{l} AMB \xRightarrow[\text{در مثلث}]{\text{نیمساز } MQ} \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AQ}{BQ} \\ AMC \xRightarrow[\text{در مثلث}]{\text{نیمساز } MP} \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AP}{PC} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{چون } BM=MC} \frac{AQ}{BQ} = \frac{AP}{PC} \xRightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$$

۵- در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویهٔ A است و عمودهای DH و DH' نیز رسم شده‌اند.

الف) با توجّه به نتیجهٔ (۲) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.



دو مثلث ABD و ADC در رأس A مشترک‌اند و قاعده‌های مقابل به این رأس روی یک خط راست هستند، پس نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه‌های قاعده‌های آنهاست:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{DC} \quad (۱)$$

ب) چرا $DH = DH'$ ؟ با توجّه به این موضوع و نتیجهٔ (۱) از درس اوّل بار دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید:

چون دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH و ADH' به حالت (وتر و یک زاویهٔ تند) هم‌نهشت هستند، پس نتیجه می‌شود $DH = DH'$. چون دو ارتفاع با هم برابرند، پس:

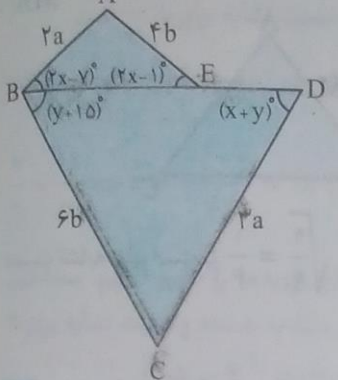
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC} \quad (۲)$$

ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیهٔ نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

با توجه به روابط (۱) و (۲) می‌توان نوشت $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ که همان قضیهٔ نیمسازها است.

هندسه

۶- در شکل روبه‌رو می‌دانیم $BE = 2DE$ است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



$$BE = 2DE \Rightarrow \frac{BE}{DB} = \frac{2}{3} \text{ و } \frac{AB}{DC} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3} \text{ و } \frac{AE}{BC} = \frac{4b}{6b} = \frac{2}{3} \qquad (1)$$

اندازهٔ اضلاع مثلث‌ها با هم متناسب‌اند، در نتیجه، مثلث‌های ABE و BCD متشابه‌اند و زاویه‌هایشان با هم برابر است.

$\angle A = \angle C$ و $\angle D = \angle ABE$ و $\angle E = \angle CBD$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\angle D = \angle ABE \Rightarrow (x+y)^\circ = (2x-7)^\circ \Rightarrow y = x - 7 \qquad (1)$$

$$\angle E = \angle CBD \Rightarrow (2x-1)^\circ = (y+15)^\circ \Rightarrow y = 2x - 16 \qquad (2)$$

$$2x - 16 = x - 7 \Rightarrow x = 9, y = 2$$

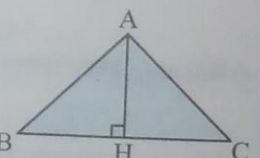
باتوجه به (۱) و (۲) داریم:

با توجه به (۱) نسبت تشابه $B\hat{C}D$ به $B\hat{A}E$ برابر $\frac{3}{2}$ است. در نتیجه، نسبت مساحت‌ها برابر است با $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$

۷- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\angle A = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$ است. با توجه به این موضوع،

الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 \ , \ \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$



$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{BH}{AC} \Rightarrow \text{نسبت مساحت دو مثلث} = (\frac{AB}{BC})^2$$

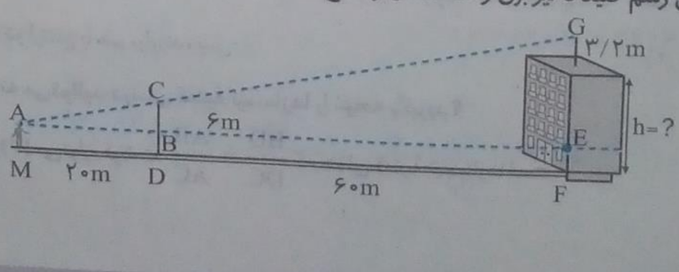
$$\Delta ACH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \text{نسبت مساحت دو مثلث} = (\frac{AC}{BC})^2$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامهٔ کار، درستی قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}} + \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$$

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} \xrightarrow{\text{طبق رابطه بالا}} \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

۸- مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید. (از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیهٔ تالس کمک بگیرید.)



با توجه به راهنمای مسئله خط راست را رسم می‌کنیم و نقاط را نام‌گذاری می‌کنیم، چون AE را موزای MF رسم کردیم، پس اندازه‌های زیر را داریم:

$BD = ۱/۶ \Rightarrow BC = ۶ - ۱/۶ = ۴/۴$

$EF = ۱/۶$

در مثلث AEG دو خط BC و EG موازیند، پس داریم:

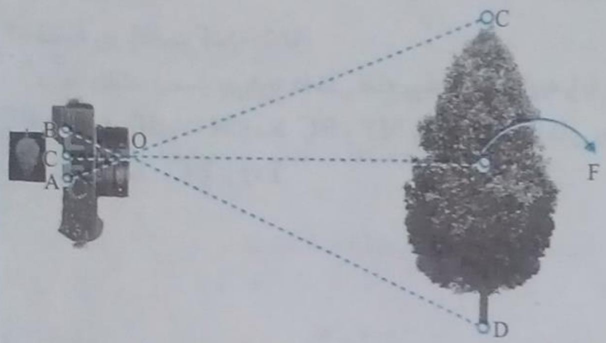
$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EG} \Rightarrow \frac{۲۰}{۸۰} = \frac{۴/۴}{x} \Rightarrow x = \frac{\cancel{۸۰}^{۴} \times ۴/۴}{\cancel{۲۰}_{۱}} = ۱۷/۶$$

$۱۶ = ۶ - ۱/۶ + (۲/۳ - ۶/۱۷)$ = بلندی ساختمان

ارتفاع ساختمان ۱۶ متر است.

۹- در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقهٔ فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، ۳۵mm و فاصلهٔ آن درون دوربین تا عدسی، ۴/۲cm و فاصلهٔ عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازهٔ واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟

از آنجا که $AB \parallel CD$ است می‌توان به راحتی اثبات کرد که $AOB \simeq OCD$. بنا به حالت (ز ز ز) بنابراین می‌توانیم تناسب زیر را داشته باشیم:



$$\frac{AB}{OC} = \frac{OC}{OF} \Rightarrow \frac{۰/۰۳۵}{۰/۰۴۲} = \frac{x}{۶} \Rightarrow x = \frac{۱۶ \times \cancel{۰/۰۳۵}^{۵}}{\cancel{۰/۰۴۲}\ \cancel{۶}_{۱}} = ۵$$ متر

اثبات ویژگی‌های تناسب

۵۲

مجله ریاضی

ویژگی‌های تفصیل نسبت در صورت و مخرج را خودتان اثبات کنید.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} - ۱ = \frac{c}{d} - ۱ \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} - ۱ = \frac{d}{c} - ۱$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c} \xRightarrow[\text{ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } -۱} \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

به همین ترتیب می‌توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.

$$\frac{a_۱}{b_۱} = \frac{a_۲}{b_۲} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_۱ + a + \ldots + a_n}{b_۱ + b_c + \ldots + b_n}$$

اثبات:

$$\frac{a_۱}{b_۲} = \frac{a_۲}{b_۲} = \ldots\ldots = \frac{an}{bn} = k$$

$$\Rightarrow a_۱ = b_۱ k\ ,\ a_۲ = b_۲ + k, \ldots\ , a_n = b_n k$$

$$\Rightarrow \frac{a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n}{b_۱ + v_۲ + \ldots + b_n} = \frac{b_۱ k + b_۲ k + \ldots b_n k}{b_۱ + b_۲ + \ldots + b_n} =$$

$$\frac{k(b_۱ + b_۲ + \ldots + b_n)}{(b_۱ + b_۲ + b_۳ + \ldots + b_n)} = k \Rightarrow \frac{a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n}{b_۱ + b_۲ + \ldots + b_n} = \frac{a_۱}{b_۱} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$$

ارزشیابی مستمر

۱- درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. (۰/۵ نمره)

الف) نسبت بین ضلع‌ها را در دو مثلث متشابه نسبت تشابه گوییم. ☐ درست ☐ نادرست

ب) نسبت بین محیط‌های دو مثلث متشابه برابر است با توان دوم نسبت تشابه ☐ درست ☐ نادرست

۲- جاهای خالی را با کلمه و یا عبارت‌های مناسب کامل کنید. (۰/۵)

الف) نسبت تشابه بین مثلث ABC و $A'B'C'$ برابر با M است. نسبت بین نیمسازهای متناظر آن .... می‌شود.

ب) هر دو nضلعی منتظم همواره با هم ....

۳- گزینه درست را انتخاب کنید. (۰/۵)

الف) هرگاه دو چندضلعی متشابه باشند، نسبت مساحت آنها برابر است با:

۱) مربع نسبت تشابه ۲) نسبت تشابه

ب) در دو چندضلعی متشابه ضلع‌ها:

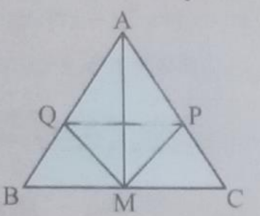
۱) با هم برابرند. ۲) با هم متناسب‌اند.

۴- قضیهٔ زیر را ثابت کنید: (۱/۵)

در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کنند.

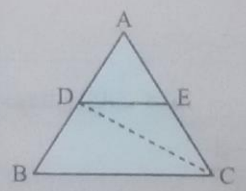
۵- در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زاویه‌های AMC و AMB هستند. (۱)

ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

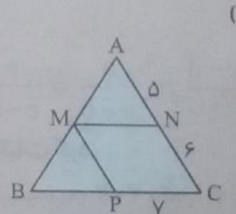


۶- طول ضلع‌های مثلث به‌ترتیب برابر است با ۶ و ۸ و ۱۰. اگر طول کوچک‌ترین ضلع مثلث متشابه به آن برابر با ۹ باشد، محیط این مثلث را به‌دست آورید. (۱/۵) (اهواز - شهریور ۸۷)

۷- درشکل زیر $\frac{AD}{AB}=\frac{۳}{۷}$, $DE \parallel BC$ مساحت ADE به DEC را به‌دست آورید. (۱/۵) (تبریز-خرداد ۹۰)



۸- در شکل روبه‌رو $MN \parallel BC$, $MP \parallel AC$ است. اگر $AN = ۵$ و $NC = ۶$ و $PC = ۷$ باشد، BP را به‌دست آورید؟ (۱/۵) (تهران - خرداد ۸۸)



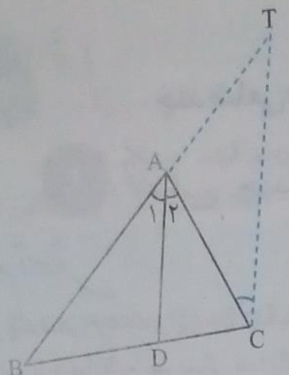
۹- دو مربع داریم که ضلع‌های آنها ۶ و ۸ است. نسبت محیط و مساحت این دو مربع را محاسبه کنید. (۱/۵)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) درست (۰/۲۵)، ب) نادرست (۰/۲۵) ۲ الف) M (۰/۲۵)، ب) متشابه هستند. (۰/۲۵)

۳ الف) گزینهٔ ۱ (۰/۲۵)، ب) گزینهٔ ۲ (۰/۲۵) ۴ AD نیمساز زاویهٔ A است. باید ثابت کنیم که $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (۰/۲۵)

اثبات: از نقطهٔ C موازی AD خطی رسم می‌کنیم که امتداد AB را در نقطهٔ T قطع کند. (۰/۲۵) از آنجا که $CT \parallel AD$ و BT خط مورب آنها $\hat{T}=\hat{A}_1$ و با در نظر گرفتن AC به‌عنوان خط مورب $\hat{C}_1=\hat{A}_2$.



مثلث متساوی‌الساقین $ATC \leftarrow \hat{C}_۱ = \hat{T} \leftarrow A_۱ = A_۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow AT = AC$ (۱)

با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث BEC می‌توان نوشت: ($AD \parallel EC$)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AT} \xrightarrow[\text{طبق (۱)}]{\substack{(۰/۲۵)\\ AT=AC}} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (۰/۵)$$

۵ در مثلث AMC و نیمساز MP داریم: (۰/۲۵) (۱) $\frac{MC}{MA} = \frac{AP}{PC}$

در مثلث AMB و نیمساز MQ داریم:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{QB}{AQ} \ (۲)\ (۰/۲۵)$$

در رابطه (۲) می‌توانیم به جای MB ، MC را جایگزین کنیم، چون M وسط ضلع BC است.

$$\frac{MC}{MA} = \frac{QB}{AQ} \ (۳)\ (۰/۲۵)$$

با مقایسه ۱ و ۳ داریم:

$$\frac{QB}{AQ} = \frac{AP}{PC} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{طبق عکس}} QP \parallel BC \ (۰/۲۵)$$

۶ نسبت تشابه برابر است با $\frac{۲}{۳} = \frac{۶}{۹}$ (۰/۵) می‌دانیم نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه همانند نسبت تشابه است. (۰/۵)

$$\frac{\overset{۲۴}{\cancel{(۱۰+۸+۶)}}}{x} = \frac{۲}{۳} \rightarrow x = \frac{\overset{۱۲}{\cancel{۲۴}} \times ۳}{۲} = ۳۶ \ (۰/۵)$$

۷ چون $DE \parallel BC$ ، پس $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{۳}{۷}$ (۰/۵)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{۳}{۷} \xrightarrow[(۰/۵)]{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{AE}{AC - AE} = \frac{۳}{۷ - ۳} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{۳}{۴} \quad (۱)\ (۰/۵)$$

چون دو مثلث در رأس D مشترک‌اند و قاعده‌های آنها بر روی یک خط قرار گرفته است.

$$\frac{S_{\underset{ADE}{\Delta}}}{S_{\underset{DEC}{\Delta}}} = \frac{AE}{EC} = \frac{۳}{۴}$$

بنا بر (۱) نسبت مساحت ها برابر با $\frac{۳}{۴}$ است.

۸ MNPC یک متوازی‌الاضلاع است، چون ضلع‌های روبه‌رو دو به دو موازی هستند. بنابراین $MN = PC = ۷$ (۰/۵) و آنها که $MN \parallel PC$ طبق قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{۵}{۱۱} = \frac{۷}{x} \Rightarrow x = \frac{\overset{۲/۲}{\cancel{۱۱}} \times ۷}{\underset{۱}{\cancel{۵}}} = ۱۵/۴ \quad (۰/۵)$$

$$BP = ۱۵/۴ - ۷ = ۸/۴ \ (۰/۵)$$

۹ نسبت تشابه برابر است با: $\frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۸}$ (۰/۵)

که همان نسبت، نسبت محیط است (۰/۵) و نسبت مساحت‌ها برابر است با: $\frac{۹}{۱۶} = (\frac{۳}{۴})^۲$ (۰/۵)

فصل ۳ چندضلعی‌ها

درس ۱ چندضلعی‌ها و ویژگی‌هایی از آنها

مفاهیم آموزشی

۱- هر چندضلعی از تعدادی پاره‌خط تشکیل شده است که:

الف) این پاره‌خط‌ها به طور متوالی همدیگر را قطع می‌کنند.

ب) هر پاره‌خط دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی قطع می‌کند.

ج) هر دو پاره‌خط که در یک نقطه مشترک هستند، روی یک خط قرار نمی‌گیرند. (یعنی در امتداد هم نیستند.)

۲- به هر یک از این پاره‌خط‌ها ضلع می‌گوییم.

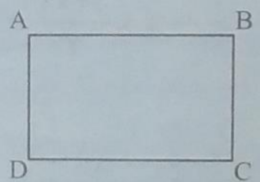
۳- به محل برخورد دو ضلع، رأس می‌گوییم.

۴- یک n ضلعی، n پاره‌خط یا همان n ضلع دارد.

۵- تعداد ضلع‌های یک nضلعی حداقل برابر با ۳ است. $(n \geq ۳)$

۶- دو ضلع را که در یک رأس مشترک باشند دو ضلع مجاور می‌گوییم.

مثال: شکل زیر یک چهارضلعی است که نقاط A، B، C و D رأس‌های آن و هر یک از پاره‌خط‌های AB، BC، DC و AD ضلع‌های آن بوده و AD و AB با هم و DC و BC با هم مجاور هستند.



۷- دو رأس را که توسط یک ضلع به هم متصل باشد دو رأس مجاور گوییم.

در مثال قبل A و B دو رأس مجاور، C و A دو رأس غیرمجاور هستند.

۸- در یک nضلعی به پاره‌خطی که دو رأس غیرمجاور را به هم وصل می‌کند، قطر می‌گویند.

۹- در هر nضلعی تعداد قطرها برابر است با: $\frac{n(n-۳)}{۲}$

مثال: تعداد قطرهای یک nضلعی برابر با ۹ است. تعداد ضلع‌های این شکل را محاسبه کنید.

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = ۹ \Rightarrow \begin{cases} n(n-۳) = ۱۸ \\ n(n-۳) = ۶ \times ۳ \Rightarrow n = ۶ \end{cases}$$

۱۰- حاصل‌جمع تعداد قطرها و ضلع‌های یک nضلعی برابر است با: $\frac{n(n-۱)}{۲}$

۱۱- nضلعی را محدب گوییم هرگاه با امتداد دادن یک ضلع آن، کل چندضلعی در یک طرف قرار گیرد، یعنی شکل را قطع نکند.

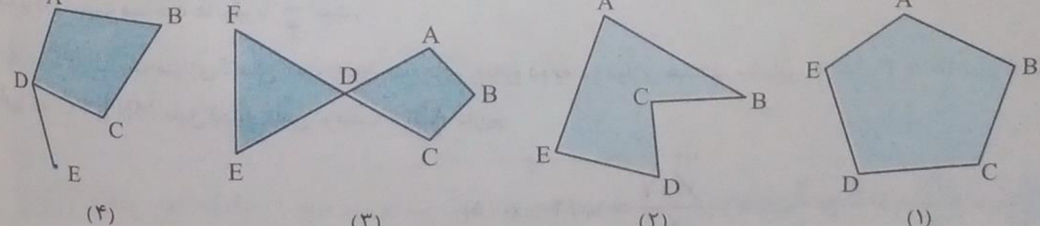
۱۲- تعریف دیگر برای nضلعی محدب: n ضلعی را محدب گوییم هرگاه تمام زاویه‌های آن کمتر از ۱۸۰° باشد.

۱۳- n ضلعی را مقعر گوییم هرگاه حداقل یک زاویه بیشتر از ۱۸۰° داشته باشد.

۱۴- nضلعی را مقعر گوییم هرگاه با امتداد دادن یک ضلع از آن، شکل به دو ناحیه تقسیم شود.

سؤال متن ۵۴

کدام‌یک از شکل‌های مقابل چندضلعی است و تعداد ضلع‌ها و رأس‌های آن چند تا است؟ برخی ضلع‌های مجاور هم و غیرمجاور هم را مشخص کنید.



(۱) (۲) (۳) (۴)

شکل (۱)، پنج ضلعی است. پنج ضلع و پنج رأس دارد. برخی از ضلع‌های مجاور عبارتند از: AB و AE / EA و ED / DC و DE و برخی از ضلع‌های غیرمجاور عبارتند از: AE و DC / DE و BC / AB و CD

شکل (۲) پنج‌ضلعی است. پنج ضلع و پنج رأس دارد. برخی از ضلع‌های مجاور عبارتند از: CB و CD / AB و AE / و برخی از ضلع‌های غیرمجاور عبارتند از: AB و CD / AE و BC / ED و AB / و ... .

شکل شماره (۳) و (۴) چندضلعی نیستند.

سؤال متن

55

یک چهارضلعی چند قطر دارد؟ ۲ قطر دارد.

n ضلعی $A_1A_2...A_n$ را در نظر می‌گیریم. از رأس A_1 ، $(n-3)$ قطر می‌توان رسم کرد.

با توجه به اینکه n رأس داریم،آیا می‌توان گفت تعداد قطرها در n ضلعی $n(n-3)$ است؟ خیر، چون با این عمل هر قطر دو بار شمارش می‌شود.

با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد.

$$n(n-3) \xRightarrow{n=4} 4(\cancel{4-3}^{\,1}) = 4$$

آیا جواب به‌دست آمده درست است؟ خیر

با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبهٔ قطرها می‌رسیم؟ باید تقسیم بر ۲ شود.

چرا این تغییر لازم است؟ چون هر قطر دو بار شمرده می‌شود. برای مثال قطری که بین A_1 و A_4 است یک بار برای A_1 و یک بار برای A_4 شمرده می‌شود.

در هر nضلعی تعداد قطرها $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

کار در کلاس

55

n نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبهٔ تعداد قطرهای n ضلعی به‌کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر $(n-1)$ پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با $\frac{n(n-1)}{2}$ پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرها و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

$\frac{n(n-1)}{2}$ در حقیقت حاصل جمع تعداد قطرها و تعداد ضلع‌های یک n ضلعی است، زیرا:

$$n+\frac{n(n-3)}{2}=\frac{2n+n^2-3n}{2}=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

ایستگاه یادگیری

چهارضلعی‌های مهم و ویژگی‌هایی از آنها:

۱- در یک چهارضلعی اگر ضلع‌ها مجاور نباشند، مقابل هستند. یعنی دو ضلع که رأس مشترک ندارند، مقابل به هم‌اند.

۲- متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که هر دو ضلع مقابل آن موازی هستند.

۳- مستطیل چهارضلعی است که همهٔ زاویه‌های آنها قائمه است.

۴- لوزی چهارضلعی است که هر چهار ضلع آن هم‌اندازه هستند.

۵- مربع چهارضلعی است که هر چهار ضلع آن هم‌اندازه و حداقل یک زاویهٔ آن قائمه است.

ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع:

۱- در هر متوازی‌الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم‌اندازه‌اند.

۲- هر چهارضلعی که ضلع‌های مقابل آن دوبه‌دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۳- در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند.

۴- هر چهارضلعی که هر دو زاویهٔ مجاور آن مکمل هم باشند، یک متوازی‌الاضلاع است.

۵- در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مقابل به هم، با هم برابرند.

۶- هر چهارضلعی که زاویه‌های مقابل آن با هم برابر باشد، یک متوازی‌الاضلاع است.

۷- در هر متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.

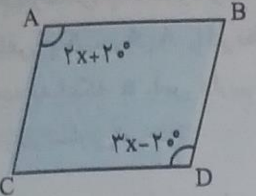
۸- هر چهارضلعی که قطرهایش منصف یکدیگر باشند یک متوازی‌الاضلاع است.

۹- هر چهارضلعی را که دو ضلع مقابل در آن دوبه‌دو موازی و هم‌اندازه باشند متوازی‌الاضلاع می‌نامیم.

با استفاده از ویژگی‌های بالا می‌توان بعضی از مقادیر مجهول در متوازی‌الاضلاع را پیدا کرد.

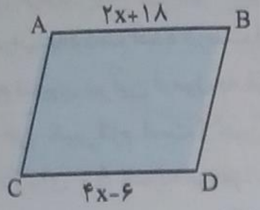
مثال: مقدار مجهول را در هر متوازی‌الاضلاع به دست آورید.

در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند:



$$۲x + ۲۰° = ۳x - ۲۰°$$
$$۲x - ۳x = - ۲۰° - ۲۰°$$
$$-x = - ٤۰° \Rightarrow x = ٤۰°$$

در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند.



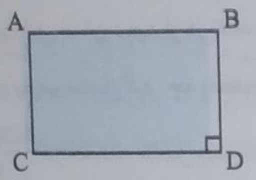
$$٤x - ٦ = ۲x + ۱۸$$
$$٤x - ۲x = ۱۸ + ٦ \Rightarrow ۲x = ۲٤ \Rightarrow x = ۱۲$$

کار در کلاس ۵۶

با توجه به تعریف‌های بالا درستی هر یک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید:

الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ABDC یک مستطیل است و با توجه به تعریف تمام زاویه‌های آن برابر با $۹۰°$ است.

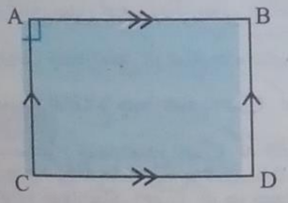


$$\left.\begin{array}{l}\angle A = ۹۰° \\ \angle C = ۹۰°\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{توازی خطوط}]{\text{طبق عکس قضیه}} AB \parallel CD \text{ و } AC \text{ مورب}$$

به‌همین صورت می‌توان ثابت کرد که $BD \parallel AC$ است. بنابراین در مستطیل ضلع‌های مقابل با هم موازی هستند، در نتیجه ABDC یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟

فرض کنیم ABCD یک متوازی‌الاضلاع است که AB مقابل به CD است. طبق تعریف این دو ضلع باید موازی باشند. پس:



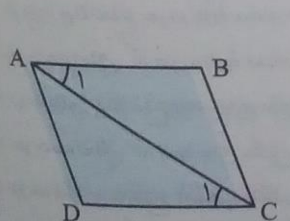
$$AB \parallel CD ,\ AC \text{ مورب} \xRightarrow{\angle A = ۹۰°} \angle C = ۹۰° \quad (۱)$$

همچنین AC و BD مقابل به هم و موازی‌اند، پس:

$$AC \parallel BD,\ CD \text{ مورب} \Rightarrow \angle D = ۹۰° \quad (۲)$$
$$(۱),(۲) \Rightarrow \angle B = ۹۰°$$

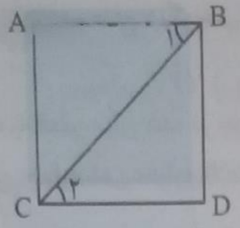
پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع (ض ض ض) **هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویهٔ $\angle C_۱$ و $\angle A_۱$ هم‌اندازه‌اند. در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند.**

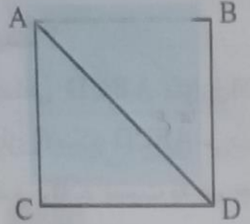


به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است. بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم اندازه باشند.

ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.



ABDC یک مربع است. مانند استدلال سؤال قبل عمل می‌کنیم. دو مثلث ABC و BCD به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت می‌شوند، در نتیجه $\angle B_1 = \angle C_2$ و از اینجا نتیجه می‌شود $AB \parallel CD$.

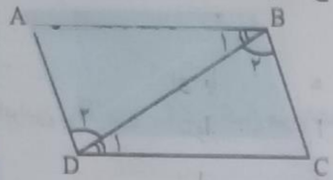


برای ادامه کار قطر AD را رسم کرده و ثابت می‌کنیم مثلث‌های ABD و ACD با هم هم‌نهشت هستند. (بنا به حالت (ض‌ض‌ض)) که می‌توان نتیجه گرفت $AC \parallel BD$.
ضلع‌های مقابل با هم موازی‌اند. در نتیجه، چهارضلعی موردنظر متوازی‌الاضلاع است.

۵۶

فعالیت ۱

متوازی‌الاضلاع ABCD را در نظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



$AB \parallel DC,\ BD$ مورب $\Rightarrow \angle D_1 = \angle B_1$

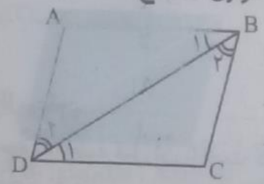
$AD \parallel BC, BD$ مورب $\Rightarrow \angle D_2 = \angle B_2$

دو مثلث ABD و CDB به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت‌اند. در نتیجه، $AD = BC$ و $AB = DC$.

۵۷

کار در کلاس

در فعالیت (۱) مشاهده کردیم که وقتی در هر متوازی‌الاضلاع ABCD یک قطر مثلاً قطر BD را رسم می‌کنیم، دو مثلث هم‌نهشت ABD و CDB پدید می‌آیند. حال پرسش این است، اگر در یک چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم کنیم و دو مثلث ΔABD و ΔCDB هم‌نهشت باشند، آیا چهارضلعی ABCD همواره متوازی‌الاضلاع است؟ بله اگر چنین است، آن را ثابت کنید و اگر نادرست است، مثال نقض بیاورید.

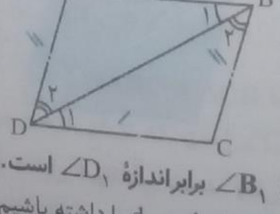


دو مثلث ABD و BDC با هم هم‌نهشت هستند. بنابراین $\angle D_1 = \angle B_1$ و $\angle B_2 = \angle D_2$ می‌شود با توجه به این برابری و با کمک عکس قضیهٔ توازی خطوط می‌توان نتیجه گرفت که $AD \parallel BC$ و $AB \parallel DC$ است. هر چهارضلعی که ضلع‌های مقابل آن دوبه‌دو موازی باشند، متوازی‌الاضلاع نام دارد.

۵۷

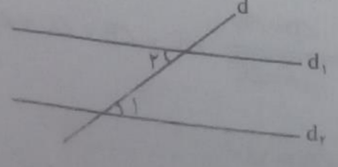
سؤال متن

در چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم می‌کنیم. به حالت (ض ض ض) $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$



از هم‌نهشتی این دو مثلث نتیجه می‌گیریم، اندازهٔ $\angle B_1$ برابر اندازهٔ $\angle D_1$ است. بنابراین ضلع AB موازی ضلع DC است.

از چه قضیه‌ای آن را نتیجه گرفته‌اید؟ اگر دو خط d_1 و d_2 را داشته باشیم و خطی مانند d آنها را طوری قطع کند که زاویهٔ (۱) و (۲) با هم برابر باشند، الزاماً d_1 موازی d_2 است.



موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع‌های AD و BC را چگونه نتیجه می‌گیرید؟

$\Delta ABD \cong \Delta CDB \Rightarrow \angle D_۲ = \angle B_۲$

با توجه به قضیه بیان شده در جواب قسمت قبل می‌توان نتیجه گرفت که: $AD \parallel BC$

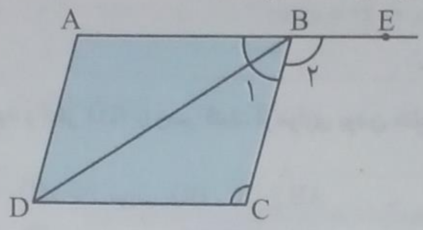
بنابراین چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت ۲ .... ۵۷

چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. با توجه به شکل، $\angle B_۲ = \angle C$ است؛ چرا؟

در متوازی‌الاضلاع ABCD می‌دانیم $AB \parallel CD$ ، و BC مورب است، پس $\angle B_۲ = \angle C$.

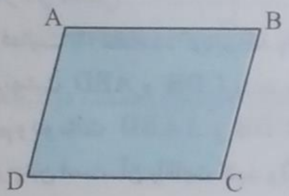
$\angle B_۱$ و $\angle B_۲$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ مکمل هستند.



بنابراین $\angle B_۱$ و $\angle C$ مکمل می‌باشند.

سؤال متن ۵۸

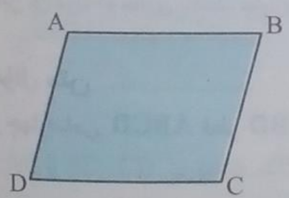
در چهارضلعی ABCD ، دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle C$ با هم مکمل‌اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع DC است. به همین ترتیب دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle A$ نیز مکمل‌اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع BC است، بنابراین چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.



سؤال متن ۵۸

با توجه به قضیهٔ قبل آن را ثابت کنید. می‌توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

ABCD متوازی‌الاضلاع است که در آن زاویه‌های مجاور مکمل هستند. یعنی می‌توانیم رابطه‌های زیر را داشته باشیم:



$$\angle B + \angle C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \angle B = ۱۸۰^\circ - \angle C \qquad (۱)$$

$$\angle D + \angle C = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \angle D = ۱۸۰^\circ - \angle C \qquad (۲)$$

با توجه به رابطهٔ (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$\hat{B} = \hat{D}$ که زاویه‌های مقابل متوازی‌الاضلاع هستند.

سؤال متن ۵۸

فرض کنیم در چهارضلعی ABCD هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و همچنین $\angle C$ و $\angle A$ هم‌اندازه‌اند. می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰° است. چگونه به کمک آن ثابت می‌کنید هر دو زاویهٔ مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل‌اند؟

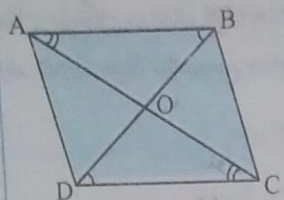
$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ۳۶۰^\circ \xrightarrow[\angle A = \angle C]{\angle D = \angle B} \angle C + \angle B + \angle C + \angle B = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲\angle C + ۲\angle B = ۳۶۰^\circ$$

$$۲(\angle C + \angle B) = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \angle C + \angle B = ۱۸۰^\circ$$

فعالیت ۳

۵۸

در متوازی‌الاضلاع ABCD ، دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن دو را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta COD$. چرا؟



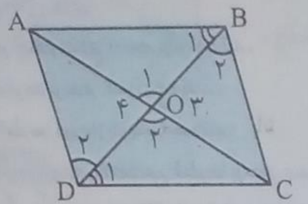
$$\left.\begin{array}{ll} \angle A = \angle C & AC, AB \parallel DC \text{ مورب} \\ \angle B = \angle D & BD, AB \parallel DC \text{ مورب} \\ AB = DC & \text{اضلاع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع برابرند.} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \Delta AOB \cong \Delta COD$$

بنابراین، $OD = OB$ و $OA = OC$. در نتیجه؛ قضیهٔ ۴: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

فعالیت ۴

۵۸

فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می‌دهید این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟ نقطه تقاطع را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta OCD$. چرا؟



$$\left.\begin{array}{l} \text{طبق فرض}\left\{\begin{array}{l} OB = OD \\ OA = OC \end{array}\right. \\ \angle O_1 = \angle O_2 \text{ متقابل به راس} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta AOB \cong \Delta OCD$$

اندازهٔ $\hat{B}_1$ برابر اندازهٔ $\angle D_1$ است. در نتیجه، ضلع AB موازی ضلع DC است. دو مثلث دیگر را در نظر بگیرید و به‌طور مشابه نشان دهید دو ضلع دیگر نیز موازی‌اند.

برای انجام این کار ثابت می‌کنیم ΔOAD و ΔOBC با هم متشابه هستند.

$$\left.\begin{array}{l} OB = OD \\ OA = OC \\ \angle O_3 = \angle O_4 \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta OBC \cong \Delta OAD \Rightarrow \angle D_2 = \angle B_2 \Rightarrow AD \parallel BC$$

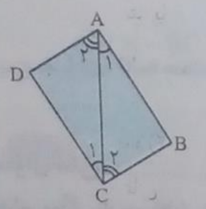
از آنجا که ضلع‌های روبه‌رو موازی هستند، پس ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.

فعالیت ۵

۵۹

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم‌اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD ، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.

اندازهٔ $\angle A_1$ با اندازهٔ $\angle C_1$ برابر است.



$$\left.\begin{array}{l} AB = DC \text{ طبق فرض} \\ AC \text{ ضلع مشترک} \\ AB \parallel CD, AC \text{ مورب} \quad \angle C_1 = \angle A_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta ABC \cong \Delta CDA$$

بنابراین، بنا بر حالت هم‌نهشتی (ض ز ض)، $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

در نتیجه اندازهٔ $\angle A_2$ برابر اندازهٔ زاویهٔ $\angle C_2$ است که از آن نتیجه می‌گیرید ضلع AD موازی ضلع BC است.

بنابراین، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

ایستگاه یادگیری

ویژگی‌های مستطیل:

۱- تمامی زاویه‌ها با هم برابر و $90°$ است.

۲- قطرها با هم برابرند.

۳- قطرها منصف یکدیگر هستند.

۴- ضلع‌های روبه‌رو، دو به دو با هم برابرند.

۵۹

هندسه

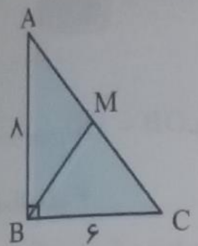
ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه:

۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.

۲- اگر در مثلثی اندازهٔ میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف اندازهٔ همان ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

مثال: در شکل زیر اندازهٔ BM را به دست آورید.

ابتدا AC را از رابطهٔ فیثاغورس به دست آورده و آن را بر ۲ تقسیم می کنیم.



$$AC^{۲} = ۸^{۲} + ۶^{۲} = ۶۴ + ۳۶$$

$$AC^{۲} = ۱۰۰ \Rightarrow AC = ۱۰ \quad BM = \frac{۱۰}{۲} = ۵$$

مثال: اندازهٔ یک ضلع از مثلثی ۸ و میانهٔ همان ضلع برابر ۴ است. این مثلث قائم‌الزاویه است.

ویژگی‌های لوزی:

۱- هر چهار ضلع با هم برابر هستند.

۲- قطرها بر هم عمود هستند.

۳- قطرها نیمساز زاویه‌ها هستند.

۴- اگر در متوازی‌الاضلاعی قطرها بر هم عمود باشند، آن متوازی‌الاضلاع لوزی است.

۵- اگر در یک متوازی‌الاضلاع قطرها نیمساز باشند، آن متوازی‌الاضلاع لوزی است.

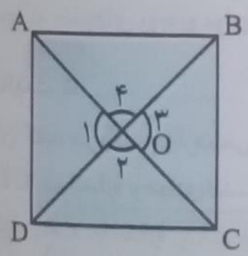
ویژگی‌های مربع:

۱- هر چهار ضلع و زاویه با هم برابر است.

۲- قطرها با هم برابر بوده و عمود منصف یکدیگر هستند.

۳- با رسم قطرهای مربع چهار مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به وجود می‌آید که همگی با هم هم‌نهشت هستند.

مثال: اندازهٔ زاویه‌های حاصل از برخورد قطرهای مربع را به دست آورید. ($\angle O_۱, \angle O_۲, \angle O_۳, \angle O_۴$)



$$\left.\begin{array}{l} OB = OD \\ OA = OA \text{ ضلع مشترک} \\ AB = AD \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta AOB \cong \Delta DOA \Rightarrow \angle O_۱ = \angle O_۴$$

به همین روش اثبات می‌شود که $\angle O_۳ = \angle O_۲$. از طرفی $\angle O_۴ = \angle O_۲$ و $\angle O_۳ = \angle O_۱$ زیرا متقابل به رأس‌اند و از آنجا که حاصل جمع این چهار زاویه برابر با ۳۶۰° است، پس:

$$۴\angle O_۱ = ۳۶۰ \Rightarrow \angle O_۱ = ۹۰^\circ$$

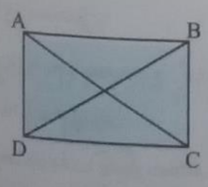
پس هر ۴ زاویه قائمه هستند.

سؤال متن ۵۹

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی‌الاضلاع که مستطیل نباشد برقرار نیست؟ از آنجا که مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است، می‌توان به قائمه بودن زاویه‌های مستطیل اشاره کرد که در هر متوازی‌الاضلاع دلخواه برقرار نیست.

در مورد مربع چطور؟ برابری هر چهار ضلع که در هر متوازی‌الاضلاع دلخواه برقرار نیست.

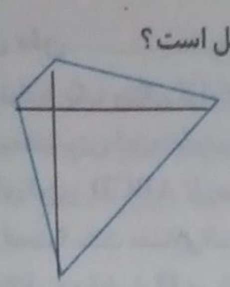
در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت AC = BD؟ این هم‌نهشتی را نشان دهید. باید هم‌نهشتی دو مثلث ACD و BCD را نشان دهیم.



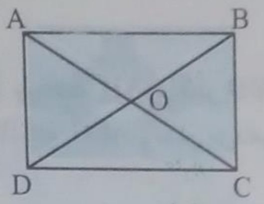
$$\left.\begin{array}{l} BC = AD \\ DC \quad \text{مشترک} \\ \angle D = \angle C = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta ADC \cong \Delta BDC \Rightarrow AC = BD$$

بنابراین در هر مستطیل قطرها با هم برابرند.

اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟
خیر، مثلاً دو قطر چهارضلعی زیر برابرند، امّا این چهارضلعی مستطیل نیست.



اگر این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن با هم برابرند. دو مثلث (۱) ΔABC و ΔBAD بنا به حالت (ض ض ض) با هم هم‌نهشت هستند و به همین صورت دو مثلث (۲) ΔADC و ΔBDC بنا به حالت (ض ض ض) با هم هم‌نهشت می‌شوند.

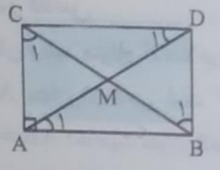


هم‌چنین ثابت می‌شود (۳) ΔBDC و ΔBAD بنا به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند. از (۱) و (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت که چهار مثلث با هم هم‌نهشت هستند و از طرفی $\angle D = \angle A = \angle C = \angle B$ و از آنجا که مجموع زاویه‌های داخلی یک چهارضلعی برابر با 360° است، پس داریم: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$. متوازی‌الاضلاع با زاویه‌های قائمه را مستطیل می‌گوییم.

فعالیت ۶

ویژگی مهمی در مثلث قائم‌الزاویه. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانهٔ وارد بر وتر است در نظر می‌گیریم. روی نیم‌خط AM نقطه D را چنان در نظر می‌گیریم که $AM = MD$.

چرا چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است؟ به راحتی می‌توان ثابت کرد که $\Delta MDC \cong \Delta MAB$ (بنا بر حالت (ض ز ض)) و در نتیجه $\angle D_1 = \angle A_1$. از اینجا با استفاده از عکس قضیه توازی خطوط نتیجه می‌شود $AB \parallel CD$ (۱) و به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد دو مثلث ΔAMC و ΔMDB به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند و در نتیجه $\angle B_1 = \angle C_1$ پس $CA \parallel DB$ (۲). از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



چرا این چهارضلعی مستطیل است؟ ABDC یک متوازی‌الاضلاع است و ΔABC در رأس A قائمه است، پس زاویهٔ مقابل به $\angle A$ که $\angle D$ است برابر با 90° می‌شود. می‌دانیم در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های مجاور با هم مکمل هستند. در نتیجه $\angle B = \angle C = 90^\circ$ و متوازی‌الاضلاعی که زاویه‌های آن 90° باشد، مستطیل است.

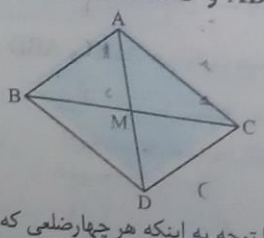
در مورد قطرها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ قطرها منصف یکدیگر و با هم برابر هستند.

اندازهٔ AM چه رابطه‌ای با اندازهٔ BC دارد؟ آن را بیان کنید. AM نصف BC است یعنی $AM = \frac{1}{2}BC$.

در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر نصف اندازهٔ وتر است.

سؤال متن

در مثلث ABC، AM میانهٔ وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{2}$. روی نیم‌خط AM نقطهٔ D را چنان در نظر می‌گیریم که $MD = AM$. آیا می‌توانید نتیجه بگیرید $AD = BC$ و قطرهای AD و BC منصف یکدیگرند؟



$$\left.\begin{aligned} AM &= \frac{BC}{2} \\ AM &= \frac{AD}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} \rightarrow BC = AD$$

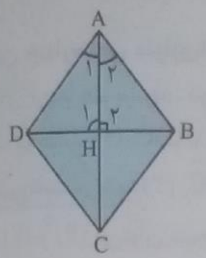
پس قطرها برابر و منصف یکدیگرند.

چگونه نتیجه می‌گیرید $\angle A$ قائمه است؟ از آنجا که قطرها برابر و منصف‌اند و با توجه به اینکه هر چهارضلعی که در آن قطرها برابر و منصف باشند یک مستطیل است، می‌توان نتیجه گرفت که زاویهٔ $\angle A$ قائمه است.

سؤال متن ۶۱

آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟
عمودمنصف بودن قطرها و برابر بودن ضلع‌ها

قطرهای لوزی ABCD را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است. قطرها منصف یکدیگرند. ΔABD چه نوع مثلثی است؟ مثلث متساوی‌الساقین چون $AD = AB$ (ویژگی لوزی)



نقطهٔ تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD ، AH چه پاره‌خطی است؟
AH نقش میانهٔ وارد بر ضلع BD را دارد.

چرا پاره‌خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟ برای پاسخ به این سؤال هم‌نهشتی دو مثلث ABH و ADH را نشان می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{ll} AH & \text{مشترک} \\ AB = AD & \text{(تساوی اضلاع لوزی)} \\ HD = HB & \text{(میانه بودن AH)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta AHD \cong \Delta AHB$$

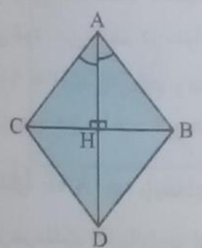
$$\xrightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}} \begin{cases} \angle H_1 = \angle H_2 & (1) \\ \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow \text{AH نیمساز} \end{cases}$$

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \xrightarrow[(1)]{\text{با توجه به}} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

در هر لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند و قطرها روی نیمساز زاویه‌ها هستند.

کار در کلاس ۶۱

۱- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن برهم عمود باشند، لوزی است.



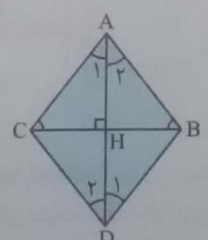
ABDC متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن بر هم عمودند. می‌دانیم که $AC = BD$ و $AB = DC$ (خاصیت متوازی‌الاضلاع) از طرفی قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، پس:
$AH = HD$ و $CH = BH$.
پس مثلث $\Delta AHB \cong \Delta AHC$ (بنا به‌حالت (ض ز ض)) و از آن نتیجه می‌شود که $AC = AB$.
در نتیجه، چهار ضلع با هم برابر است و متوازی‌الاضلاع با ضلع‌های برابر همان لوزی است.

۲- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویهٔ آن باشد، لوزی است.

ABDC یک متوازی‌الاضلاع است که قطر AD نیمساز زاویه‌های D و A است. می‌خواهیم ثابت کنیم که ABDC یک لوزی است. برای انجام این کار کافی است ثابت شود که چهار ضلع AB و BD و AC و CD با هم برابر هستند.

چون ABDC یک متوازی‌الاضلاع است پس الزاماً $\begin{cases} AB = DC \\ AC = BD \end{cases}$ (۱)

دو مثلث ABD و ADC هم‌نهشت هستند زیرا:



$$\left.\begin{array}{r} \text{AD ضلع مشترک} \\ \angle A_1 = \angle A_2 \text{ طبق فرض AD نیمساز} \\ \angle D_1 = \angle D_2 \text{ طبق فرض AD نیمساز} \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ز ض ز})} \Delta ADC \cong \Delta ABD \Rightarrow \begin{cases} DC = DB \\ AC = AB \end{cases} \quad (۲)$$

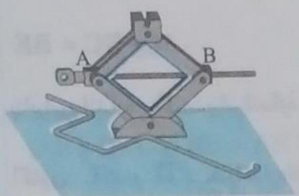
با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت که $AB = DC = DB = AC$ یعنی ABDC متوازی‌الاضلاعی است که چهارضلعش با هم برابر است پس ABDC یک لوزی است.

اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.

مستطیلی که ضلع‌هایش با هم برابر باشد یک مربع است.

لوزی که زاویه‌های آن قائمه باشد یک مربع است.

مستطیل و لوزی که قطرهایشان با هم برابر و عمودمنصف باشند، تشکیل مربع می‌دهند.



در شکل یک جک اتومبیل را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟

بله، زمانی که فاصلهٔ بین B و A با ارتفاع جک یکسان باشد، شکل مربع است.

اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز با هم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، را هنگام بسته شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

موقع بستن جک کاملاً بازوها روی هم قرار نمی‌گیرند، چون یکی زیاد باز می‌شود و دیگری کمتر باز می‌شود و موقع جمع کردن جک جای زیادتری خواهد گرفت.

ایستگاه یادگیری

ویژگی‌های ذوزنقه:

۱- چهارضلعی‌ای که فقط دو ضلع آن موازی است ذوزنقه نام دارد.

۲- در ذوزنقه متساوی‌الساقین ۲ ساق با هم برابرند.

۳- در ذوزنقه متساوی‌الساقین قطرها با هم برابرند.

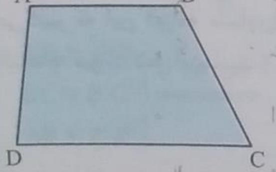
۴- اگر قطرها در یک ذوزنقه با هم برابر باشند، آن ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

۵- ذوزنقه را قائم‌الزاویه گوییم، اگر یکی از ساق‌ها عمود بر قاعده باشد.

۶۲

سؤال متن

هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی‌اند، قاعده و هر یک از دوضلع غیرموازی را ساق می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB و CD و قاطع‌های BC و AD در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



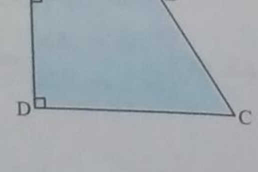
$\angle C + \angle B = ۱۸۰^\circ$ مکمل‌اند.

$\angle A + \angle D = ۱۸۰^\circ$ مکمل‌اند.

زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ مکمل هستند. همچنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ مکمل هستند.

اگر در یک ذوزنقه اندازه‌های دو ساق برابر باشند، آن را ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک ذوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر قاعدهٔ دیگر نیز عمود است، چرا؟

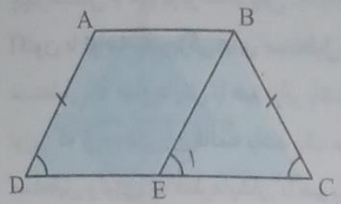


چون دو قاعده با هم موازی هستند و می‌دانیم خطی که به یکی از خطوط موازی عمود شود بر دیگری نیز عمود است.

فعالیت ۷ ۶۲

ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ را که در آن $AD = BC$ است، در نظر می‌گیریم. از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی $ABED$ متوازی‌الاضلاع است. زیرا $AB \parallel DE$ و $AD \parallel BE$.

چرا دو زاویهٔ $\angle D$ و $\angle E_1$ هم‌اندازه‌اند؟



$AD \parallel BE$, خط مورب $DC \Rightarrow \angle D = \angle E_1$

$BC = BE$ چرا؟

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \text{ طبق فرض مساله} \\ ABED \Rightarrow AD = BE \text{ متوازی الاضلاع} \end{array}\right\} \Rightarrow BC = BE$$

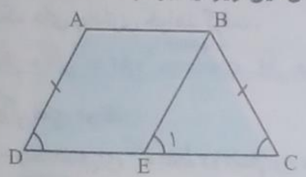
بنابراین اندازهٔ $\angle E_1$ برابر اندازهٔ $\angle C$ است.

اکنون $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. چرا؟

$$\left.\begin{array}{l} \angle D = \angle E_1 \\ \angle E_1 = \angle C \end{array}\right\} \Rightarrow \angle D = \angle C$$

سؤال متن ۶۲

در هر ذوزنقه متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند. آیا عکس این ویژگی نیز درست است؟



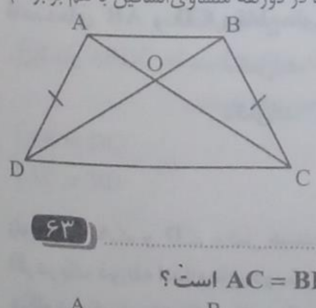
فرض کنید در ذوزنقه $ABCD$ دو زاویهٔ $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. از B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در E قطع کند. از اینکه $\angle D$ و $\angle E_1$ نیز هم‌اندازه‌اند، پس دو زاویهٔ C و E_1 هم‌اندازه‌اند و در نتیجه $BC = BE$.

سؤال متن ۶۳

به کمک ویژگی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می‌شود. آن را ثابت کنید.

«در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند و برعکس.» ابتدا اثبات می‌کنیم که اگر ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین باشد، آنگاه قطرهایش با هم برابرند. برای این منظور هم‌نهشتی دو مثلث ΔACD و ΔBCD را نشان می‌دهیم.

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \text{ (دو ساق برابر در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین‌اند.)} \\ DC \text{ ضلع مشترک} \\ \angle D = \angle C \text{ (دو زاویهٔ مجاور قاعده در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با هم برابرند.)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض زض)}} \Delta ADC \cong \Delta BDC \Rightarrow AC = BD$$

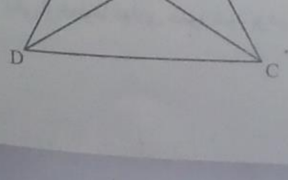


حال فرض کنیم ذوزنقه‌ای داریم که قطرهای آن برابر است. ثابت می‌کنیم که این ذوزنقه متساوی‌الساقین است. (در فعالیت ۸ اثبات به صورت کامل آمده است.)

فعالیت ۸ ۶۳

در ذوزنقهٔ $ABCD$: $AD = BC$. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث نتیجه می‌گیرید $AC = BD$ است؟

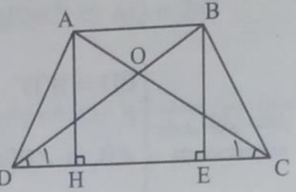
از هم‌نهشتی دو مثلث ΔDAC و ΔDBC بنا به حالت (ض زض) می‌توان نتیجه گرفت.



اما اثبات عکس آن نیاز به تفکر بیشتر دارد. فرض کنیم $DB = AC$. آیا می‌توانید در شکل مقابل دو مثلث هم‌نهشت پیدا کنید که از آن $AD = BC$ یا مساوی بودن اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به قاعده نتیجه شود؟ برای انجام این کار باید ابتدا ارتفاع‌ها رسم شود.

با کمی دقت مشاهده می‌کنید چنین دو مثلثی ظاهراً وجود ندارند، اما یک ویژگی در مسئله هست که از آن هنوز استفاده نکرده‌ایم. دو قاعدهٔ ذوزنقه موازی‌اند یا رأس‌های A و B از قاعدهٔ CD به یک فاصله‌اند. با رسم دو ارتفاع AH و BE و هم‌نهشتی دو مثلث ΔAHC و ΔBED تساوی اندازه‌های دو زاویه را نتیجه بگیرید. به کمک آنها هم‌نهشتی دو مثلث ΔADC و ΔBCD نتیجه می‌شود و به حل مسئله منجر خواهد شد.

ابتدا ثابت می‌کنیم که ΔBED و ΔAHC با هم هم‌نهشت هستند.



$$\left.\begin{matrix} BE = AH \ \text{چون}\ (AB \parallel DE) \\ DB = AC \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{(وتر و یک ضلع)}} \Delta AHC \cong \Delta BED \Rightarrow \angle C_1 = \angle D_1$$

حال ثابت می‌کنیم که دو مثلث ΔADC و ΔBDC با هم هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{matrix} AC = BD \\ DC \ \text{مشترک} \\ \angle D_1 = \angle C_1 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta BDC \cong \Delta ADC \Rightarrow \left\{\begin{matrix} BC = AD \\ \angle C = \angle D \end{matrix}\right.$$

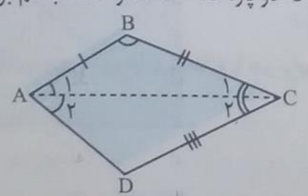
تمرین ۶۳

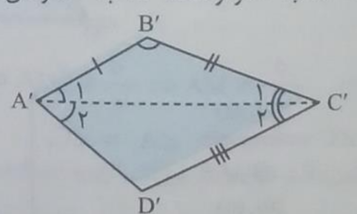
۱- در کدام nضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟ در ۵ ضلعی‌ها.

$$\frac{n(n-3)}{2} = n \Rightarrow \cancel{n}(n-3) = 2\cancel{n} \ \ (n \neq 0 \ \text{می‌دانیم}) \Rightarrow n - 3 = 2 \Rightarrow n = 2 + 3 = 5$$

۲- در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

ابتدا از نقطهٔ A به C و از نقطهٔ A' به C' وصل می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که دو پاره‌خط $A'C'$ و AC با هم برابر هستند.





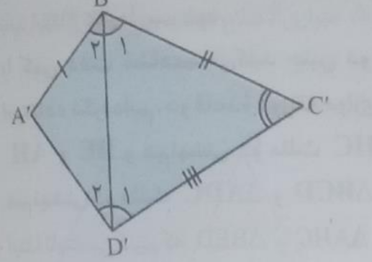
$$\left.\begin{matrix} \angle B = \angle B' \\ BC = B'C' \\ AB = A'B' \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \left\{\begin{matrix} AC = A'C' \\ \angle C_1 = \angle C'_1 \\ \angle A_1 = \angle A'_1 \quad (1) \end{matrix}\right. \xRightarrow{\text{چون}\ \angle C = \angle C'} \angle C_2 = \angle C'_2$$

حال ثابت می‌کنیم دو مثلث ΔADC و $\Delta A'D'C'$ هم‌نهشت هستند:

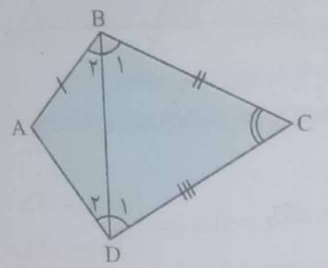
$$\left.\begin{matrix} AC = A'C' \\ DC = D'C' \\ \angle C_2 = \angle C'_2 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta A'D'C' \cong \Delta ADC \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \angle A_2 = \angle A'_2 \quad (2) \\ AD = A'D' \ \text{برابری ضلع چهارم} \\ \angle D = \angle D' \Rightarrow \text{برابری زاویه} \end{matrix}\right.$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} \left.\begin{matrix} \angle A_1 = \angle A'_1 \\ \angle A_2 = \angle A'_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \angle A_1 + \angle A_2 = \angle A'_1 + \angle A'_2 \Rightarrow \angle A = \angle A'$$

اگر $\angle B' = \angle B$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟ ابتدا از B به D و هم‌چنین از نقطهٔ B' به D' وصل می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} BC = B'C' \\ DC = D'C' \\ \angle C = \angle C' \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta BDC \cong \Delta B'D'C'$$



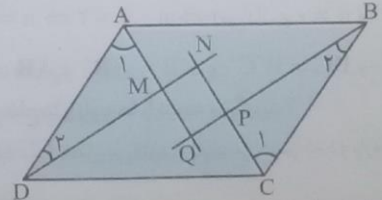
$$\xRightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}} \left\{\begin{array}{l} BD = B'D' \\ \angle B_1 = \angle B'_1 \xRightarrow{\angle B = \angle B' \text{ چون}} \angle B_2 = \angle B'_2 \\ \angle D_1 = \angle D'_1 \xRightarrow{\angle D = \angle D' \text{ چون}} \angle D_2 = \angle D'_2 \end{array}\right.$$

حال دو مثلث ΔABD و $\Delta A'B'D'$ را در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} \angle B_2 = \angle B'_2 \\ \angle D_2 = \angle D'_2 \\ BD = B'D' \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ز ض ز)}} \Delta ABD \cong \Delta A'B'D' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \angle A = \angle A' \\ AB = A'B' \\ AD = A'D' \end{array}\right.$$

برابری بقیهٔ ضلع‌ها با هم و زاویه‌ها با هم اثبات شد.

۳- از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است. اگر ABCD مستطیل باشد، نشانه دهید چهارضلعی MNPQ مربع است.



چون زاویه‌های روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع با هم برابرند، پس:

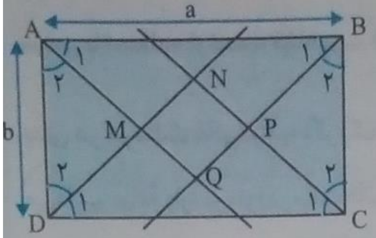
$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle C \underset{\text{نیمسازند}}{\xRightarrow{CN,\,AQ}} \angle A_1 = \angle C_1 \\ \angle B = \angle D \underset{\text{نیمسازند}}{\xRightarrow{DN,\,BQ}} \angle B_2 = \angle D_2 \\ AD = BC \text{ اضلاع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ز ض ز)}} \Delta AMD \cong \Delta BPC \underset{\text{متناظر}}{\xRightarrow{\text{برابر اجزای}}} \angle P = \angle M$$

از طرفی می‌دانیم که $\angle B + \angle C = 180^\circ$ طبق خاصیت متوازی‌الاضلاع، پس حاصل‌جمع نصف آنها برابر با 90° می‌شود، یعنی $\angle B_2 + \angle C_1 = 90^\circ$.

بنابراین $\angle P = \angle M = 90^\circ$. به همین ترتیب در دو مثلث ΔAQB و ΔDNC می‌توان ثابت کرد که $\angle N = \angle Q = 90^\circ$.

از برابری $\angle N$ و $\angle P$ نتیجه می‌شود که $MN \parallel QP$ و همچنین از برابری $\angle P$ و $\angle Q$ داریم، $NP \parallel MQ$، بنابراین در چهارضلعی MNPQ ضلع‌ها دوبه‌دو موازی هستند و زاویه‌ها برابر با 90° است. پس این چهارضلعی مستطیل است.

حال فرض کنیم ABCD یک مستطیل است که نیمسازهای آن رسم شده است، می‌خواهیم ثابت کنیم که MNPQ یک مربع است.



از آنجا که مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است و با توجه به قسمت قبل می‌دانیم که MNPQ یک مستطیل است، پس تنها کافی است که ثابت کنیم چهار ضلع با هم برابرند.

$$\left.\begin{array}{r} AB = DC \\ \angle B_۱ = \angle C_۱ \\ \angle A_۱ = \angle D_۱ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ز ض ز)}} \overbrace{\Delta AQB \cong \Delta DNC}^{\text{این دو متساوی‌الساقین هستند.}} \Rightarrow AQ = BQ \qquad (۱)$$

از طرفی چون $\angle A$ و $\angle B$ با هم برابر هستند پس نصف آنها نیز با هم برابر است یعنی $\angle A_۲ = \angle B_۲$. با همین استدلال می‌توان نوشت که $\angle D_۲ = \angle C_۲$.

بنابراین: $$\text{ضلع‌های مستطیل}\ \left.\begin{array}{r} AD = BC \\ \angle D_۲ = \angle C_۲ \\ \angle A_۲ = \angle B_۲ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ز ض ز)}} \Delta AMD \cong \Delta BPC \xRightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}} AM = BD \quad (۲)$$

(دقت شود این دو مثلث متساوی‌الساقین هستند.)

رابطهٔ (۱) را منهای رابطهٔ (۲) می‌کنیم.

$$AQ - AM = BQ - BD \Rightarrow QM = QP \quad (*)$$

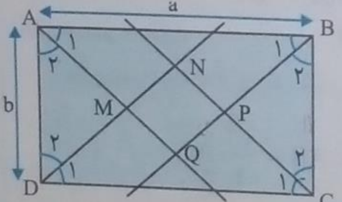
از طرفی چون MNPQ یک مستطیل است پس ضلع‌های روبه‌رو با هم دوبه‌دو برابر هستند یعنی:

$$\begin{cases} MQ = NP \\ MN = PQ \end{cases} \qquad (**)$$

با مقایسه دو رابطهٔ (*) و (**) می‌توان نتیجه گرفت که MQ=MN=PN=PQ و این یعنی MNPQ یک مربع است.

۴- در مسئلهٔ قبل، اگر اندازه‌های ضلع‌های مستطیل a و b باشند، اندازهٔ ضلع مربع را بر حسب a و b محاسبه کنید.

مثلث ΔAMD یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. بنا بر رابطهٔ فیثاغورث داریم:



$$AD^۲ = AM^۲ + MD^۲ \xRightarrow{AM=MD}$$

$$b^۲ = AM^۲ + AM^۲ \Rightarrow AM^۲ = \frac{b^۲}{۲} \Rightarrow AM = \frac{b}{\sqrt{۲}} \qquad (۱)$$

هم‌چنین مثلث ΔAQB نیز قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است، پس:

$$AB^۲ = AQ^۲ + BQ^۲ \xRightarrow{AQ=BQ} AB^۲ = ۲AQ^۲ \Rightarrow a^۲ = ۲AQ^۲ \Rightarrow AQ = \frac{a}{\sqrt{۲}} \quad (۲)$$

با توجه به رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

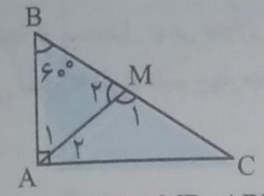
$$AQ - AM = \frac{a}{\sqrt{۲}} - \frac{b}{\sqrt{۲}} \Rightarrow MQ = \frac{a-b}{\sqrt{۲}}$$

۵- مثلث قائم‌الزاویهٔ ΔABC را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازهٔ $\angle C$ برابر ۳۰° است، در نظر می‌گیریم. میانهٔ وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMC و AMB چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{۲}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازهٔ یک زاویه ۳۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن نصف اندازهٔ وتر است.

سپس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید، $AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$.

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه ۶۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.

می‌دانیم میانهٔ وارد بر وتر (در مثلث قائم‌الزاویه) نصف وتر است، پس:



$$AM = \frac{۱}{۲}BC \xRightarrow{BM=MC} AM = BM = MC$$

پس در مثلث ΔAMC ، $AM = MC$ بوده و بنابراین متساوی‌الساقین است. در مثلث ABM، $AM = MB$ که می‌توان نوشت $\angle A_۱ = \angle B = ۶۰^\circ$. با توجه به این که اندازهٔ $\angle A_۱$ و $\angle B$ برابر با ۶۰° است اندازهٔ $\angle M_۲$ نیز برابر با ۶۰° است.

یعنی مثلث ABM مثلث متساوی‌الاضلاع است، پس: $AB = AM = BM = \frac{۱}{۲}BC$

یعنی ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است.

با توجه به رابطهٔ فیثاغورث داریم: $BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow AC^۲ = BC^۲ - AB^۲$

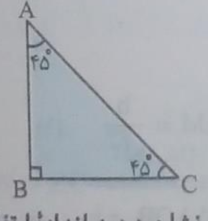
$$\xRightarrow{AB=\frac{۱}{۲}BC} AC^۲ = BC^۲ - (\frac{۱}{۲}BC)^۲ \Rightarrow AC^۲ = BC^۲ - \frac{۱}{۴}BC^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲ = \frac{۳}{۴}BC^۲ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$$

در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۶۰° برابر با $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۴۵° باشد و نشان دهید که اندازهٔ هر ضلع زاویهٔ قائمه در آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.

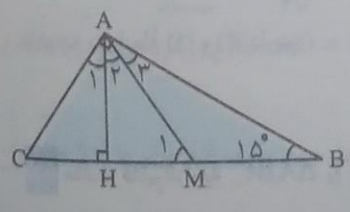
این مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. بنابراین $AB = BC$. رابطهٔ فیثاغورث را می‌نویسیم:



$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ \Rightarrow AC^۲ = AB^۲ + AB^۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = \frac{AC^۲}{۲} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{۲}} \xRightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{کسر را گویا}} AB = \frac{\sqrt{۲}}{۲}AC$$

۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۱۵° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازهٔ وتر است.



$$AM = \frac{۱}{۲}BC \qquad (۱)$$

AM میانهٔ وارد بر وتر است. بنابراین:

در مثلث ABC واضح است که اندازهٔ زاویهٔ C برابر با ۷۵° است. AH عمود وارد بر BC را رسم می‌کنیم.

در مثلث ΔAHC با توجه به اینکه $\angle H = ۹۰^\circ$ و $\angle C = ۷۵^\circ$ بنابراین: $\angle A_۱ = ۱۵^\circ \qquad (۲)$

در مثلث ΔAMB ، $AM=MB$ که می‌توان نتیجه گرفت:

$$\angle A_{۳} = \angle B = ۱۵^{\circ} \quad (۳)$$

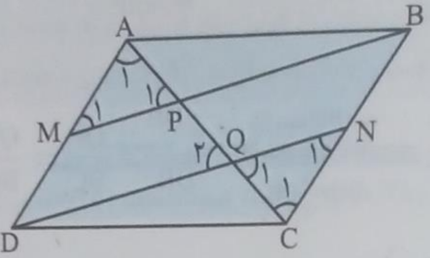
با توجه به رابطهٔ (۲) و (۳) اندازهٔ $\angle A_{۲}$ به‌دست می‌آید:

$$\angle A_{۱} + \angle A_{۲} + \angle A_{۳} = ۹۰^{\circ} \Rightarrow \angle A_{۲} = ۶۰^{\circ} \xRightarrow[\Delta AHM]{\text{در مثلث}} \angle M_{۱} = ۳۰^{\circ} \quad (۴)$$

با توجه به رابطهٔ (۴) (ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است.)

$$AH = \frac{۱}{۲}AM \xRightarrow{\text{با توجه به (۱)}} AH = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۴}BC \Rightarrow AH = \frac{۱}{۴}BC$$

۷- در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.



از هم‌نهشتی دو مثلث ΔADC و ΔACB بنا به حالت (ض ض ض) نتیجه می‌گیریم که (۱) $\angle A_{۱} = \angle C_{۱}$. همین‌طور می‌توان ثابت کرد دو مثلث ΔMAB و ΔNDC بنا به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند. بنابراین (۲) $\angle N_{۱} = \angle M_{۱}$.

حال ثابت می‌کنیم دو مثلث ΔQNC و ΔPAM با هم هم‌نهشت هستند.

$$\left.\begin{array}{r} AM = NC \text{ نصف ضلع‌های روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع} \\ \angle A_{۱} = \angle C_{۱} \text{ طبق (۱)} \\ \angle N_{۱} = \angle M_{۱} \text{ طبق (۲)} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ز ض ز)}} \Delta PAM \cong \Delta QNC \xRightarrow[\text{متناظر}]{\text{برابری اجزای}} AP = QC\ ,\ \angle P_{۱} = \angle Q_{۱} (*)$$

ازآنجا که $\angle Q_{۱}$ و $\angle Q_{۲}$ متقابل به رأس هستند می‌توان نوشت $\angle P_{۱} = \angle Q_{۲}$. با در نظر گرفتن خط AC به‌عنوان خط مورب و برابری دو زاویهٔ $P_{۱}$ و $Q_{۲}$ می‌توان نتیجه گرفت که $MB \parallel DN$.

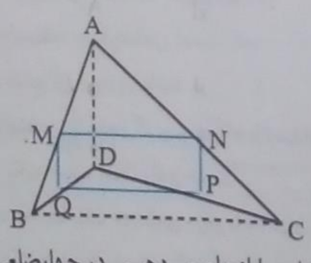
با توجه به قضیهٔ تالس، در مثلث ADQ می‌توانیم بنویسیم:

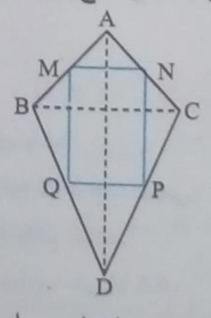
$$\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PQ} \xRightarrow{AM=MD} \frac{AP}{PQ} = ۱ \Rightarrow AP = PQ \quad (۱)$$

با مقایسهٔ رابطه (۱) و (*) می‌توانیم بنویسیم:

$$AP = PQ = QC$$

۸- ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.





چون بیان شده است هر چهارضلعی، برای چهارضلعی‌های محدب و مقعر اثبات را انجام می‌دهیم. در چهارضلعی ABDC، نقاط M و N و P و Q به ترتیب نقاط وسط ضلع‌های AB، AC، CD و BD هستند. همچنین قطرها را رسم می‌کنیم.

در مثلث ΔABC ، چون نسبت ایجاد شده روی AC و AB با هم برابر است، طبق عکس تالس (۱) $MN \parallel BC$ ؛

همچنین در مثلث BCD چون نسبت‌های ایجاد شده روی ضلع‌های DC و DB با هم برابرند، پس طبق عکس تالس: (۲) $QP \parallel BC$ ؛

با توجه به (۱) و (۲) و این نکته که «دو خط موازی با یک خط با هم موازی‌اند.» نتیجه می‌گیریم که $QP \parallel MN$.

با همین روش از مثلث ADC نتیجه می‌گیریم که $NP \parallel AD$ و بعد از مثلث ABD نتیجه می‌شود که $MQ \parallel AD$. در نتیجه $NP \parallel MQ$. بنابراین چهارضلعی MNPQ یک متوازی‌الاضلاع است.

این چهارضلعی چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟ اگر قطرها بر هم عمود باشند، متوازی‌الاضلاع به‌دست آمده لوزی است و اگر قطرها با هم برابر باشند، متوازی‌الاضلاع مستطیل است.

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟ با توجه به قضیه تالس می‌توانیم تناسب‌های زیر را بنویسیم. در مثلث ABD داریم:

$$MQ \parallel AD \Rightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{AD} \xRightarrow[BM=\frac{۱}{۲}BA]{M\ \text{وسط}\ AB}$$

$$\frac{\frac{۱}{۲}BA}{BA} = \frac{MQ}{AD} \Rightarrow \frac{MQ}{AD} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow MQ = \frac{۱}{۲}AD \xRightarrow[MQ=NP]{MNPQ\ \text{متوازی‌الاضلاع است.}} NP = \frac{۱}{۲}AD$$

در مثلث BCD داریم:

$$QP \parallel BC \xRightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{DQ}{DB} = \frac{QP}{BC} \xRightarrow[DQ=\frac{۱}{۲}DB]{Q\ \text{وسط}\ BD\ \text{است}} \frac{\frac{۱}{۲}DB}{DB} = \frac{QP}{BC} \Rightarrow \frac{QP}{BC} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow QP = \frac{۱}{۲}BC \xRightarrow{QP=MN} MN = \frac{۱}{۲}BC$$

$$\text{محیط چهارضلعی}\ MNPQ = MN + NP + PQ + QM = \frac{۱}{۲}BC + \frac{۱}{۲}AD + \frac{۱}{۲}BC + \frac{۱}{۲}AD = BC + AD$$

نتیجه می‌شود محیط متوازی‌الاضلاع با حاصل‌جمع قطرها برابر است.

ارزشیابی مستمر

۱- درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. (۰/۵ نمره)

الف) در هر متوازی‌الاضلاع هر دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند. ☐ درست ☐ نادرست

ب) در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازهٔ وتر است. ☐ درست ☐ نادرست

۲- جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب کامل کنید. (۰/۵)

الف) در هر لوزی قطرها .... یکدیگرند.

ب) در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین قطرها با هم ....

۳- گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (۰/۵)

الف) ذوزنقه چهارضلعی است که:

۱) دو ضلع آن موازی باشد. ۲) دو قطر آن موازی باشد.

ب) nضلعی را مقعر گوییم هرگاه با امتداد دادن یک ضلع آن از دو طرف بقیه نقاط چندضلعی:

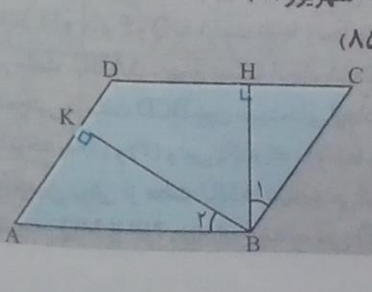
۱) در یک طرف خط واقع شوند. ۲) در دو طرف خط واقع شوند.

۴- تعداد قطرها یک nضلعی برابر با ۲۰ شده است. n را به‌دست آورید. (۱) (تهران - خرداد ۸۸)

۵- ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند. (۱) (یزد - شهریور ۹۲)

۶- چهارضلعی ABCD یک متوازی‌الاضلاع است. (۱) (اصفهان - خرداد ۸۵)

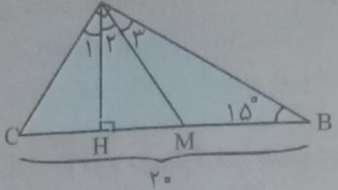
الف) دلیل تشابه دو مثلث ΔABK و ΔBHC را بنویسید.



ب) تناسب اضلاع متناظر دو مثلث را کامل کنید.

۷- دو قطر یک متوازی‌الاضلاع عمودمنصف یکدیگرند. ثابت کنید چهارضلعی یک لوزی است. (۱/۵) (تهران - خرداد ۹۰)

۸- با توجه به اینکه در مثلث ΔABC، AH ارتفاع وارد بر وتر است، اگر AM میانهٔ وارد بر وتر مثلث ABC باشد، اندازهٔ ارتفاع AH را به‌دست آورید. سپس مساحت $\overset{\Delta}{AMB}$ را محاسبه کنید. (۱/۵)



۹- چندضلعی را تعریف کرده و یک مثال برای چندضلعی محدب بیاورید. (۱)

۱۰- از به هم وصل کردن وسط‌های اضلاع مربعی به طول ضلع a، یک مربع جدید داخل مربع اولیه ایجاد شده است. مساحت و محیط مربع جدید را بر حسب a به‌دست آورید. (۱/۵) (تبریز - خرداد ۸۸)

پاسخ ارزشیابی مستمر

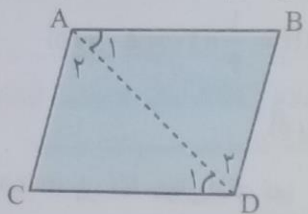
۱ الف) درست (۰/۲۵)، ب)نادرست (۰/۲۵) ۲ الف) عمودمنصف (۰/۲۵)، ب) برابرند (۰/۲۵) ۳ الف) گزینهٔ ۱ (۰/۲۵) ب) گزینهٔ ۲ (۰/۲۵)

۴

$$\underset{(۰/۵)}{\frac{n(n-۳)}{۲}} = ۲۰ \rightarrow n(n-۳) = ۴۰$$

$$n(n-۳) = ۸ \times ۵ \rightarrow n = ۸ \quad (۰/۵)$$

۵ ABCD یک متوازی‌الاضلاع است. نشان می‌دهیم: $\angle B = \angle C$ و $\angle A = \angle D$



قطر AD را رسم کرده و ثابت می‌کنیم $\angle C = \angle B$ است.

$$\left.\begin{array}{r} \text{مورب } AD,\ AB \parallel CD \Rightarrow \angle A_۱ = \angle D_۱ \\ \text{مورب } AD,\ AC \parallel BD \Rightarrow \angle A_۲ = \angle D_۲ \\ \text{مشترک } AD \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ز ض ز})} \Delta ACD \cong \Delta ABD \Rightarrow \angle C = \angle B \quad (۰/۵)$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $\angle A = \angle D$ است.

برای اثبات $\angle A = \angle D$ می‌توان از رابطهٔ زیر استفاده کرد:

$$\left.\begin{array}{l} \angle B = ۱۸۰^\circ - (\angle A_۱ + \angle D_۲) \\ \angle C = ۱۸۰^\circ - (\angle A_۲ + \angle D_۱) \end{array}\right\} \xRightarrow[\angle A_۲ = \angle D_۲]{\angle A_۱ = \angle D_۱} \angle B = ۱۸۰^\circ - (\angle A_۱ + \angle D_۱) = \angle C \Rightarrow \angle B = \angle C \quad (۰/۵)$$

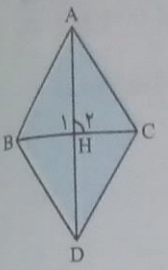
۶ الف) به حالت برابری سه زاویه متشابه‌اند.

$$\left.\begin{array}{r} \text{زاویه‌های روبه‌رو متوازی‌الاضلاع } \angle A = \angle C \\ \angle K = \angle H = ۹۰^\circ \\ \angle B_۱ = \angle B_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BHC \sim \Delta BKA \quad (۰/۵)$$

ب)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{HC} = \frac{BK}{BH} \quad (۰/۵)$$

۷ ABDC یک متوازی‌الاضلاع است که قطرهایش عمودمنصف هستند. نشان می‌دهیم دو مثلث ΔAHC و ΔABH هم‌نهشت‌اند.



$$\left.\begin{array}{r} AH \text{ مشترک} \\ BH = HC \\ \angle H_۱ = \angle H_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \Delta AHC \cong \Delta AHB \Rightarrow AC = AB \quad (۰/۵)$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $DC = BD$ (۲) و با در نظر گرفتن هم‌نهشتی ΔHCD و ΔAHC می‌توان به رابطهٔ (۳) $AC = CD$ رسید. با مقایسهٔ (۱) و (۲) و (۳) می‌توان نوشت: (۰/۵)

پس ABDC یک لوزی است. $AC = DC = BD = AB$ (۰/۵)

روش دوم: با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث نیز می‌توان اثبات کرد که وترها با هم برابرند.

۸ چون

$$\angle B = ۱۵^\circ \rightarrow \angle C = ۶۵^\circ \xRightarrow{\text{در مثلث } AHC} \begin{cases} \angle H = ۹۰^\circ \\ \angle C = ۶۵^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle A_۱ = ۱۵^\circ \quad (۱)$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABC میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است. $\Rightarrow AM = MB \xRightarrow[\text{مثلث متساوی‌الساقین}]{AMB} \angle A_۳ = ۱۵^\circ \quad (۲)$

$$\angle A_۱ + \angle A_۲ + \angle A_۳ = ۹۰^\circ \xRightarrow{\text{با در نظر گرفتن } (۱),(۲)} \angle A_۲ = ۶۰^\circ \xRightarrow{\text{در } \Delta AHM} \angle M_۲ = ۳۰^\circ \quad (۰/۵)$$

می‌دانیم ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° نصف وتر است. $AH = \frac{۱}{۲} AM \quad (*)$

از طرفی $AM = \frac{۱}{۲} BC \quad (**)$

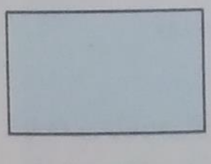
$$(*),(**) \rightarrow AH = \frac{۱}{۴} BC \xRightarrow{BC=۲۰} AH = \frac{۱}{۴} \times ۲۰ = ۵ \quad (۰/۵)$$

$$\Delta AMB \text{ مساحت} = \frac{۱}{۲}(۱۰ \times ۵) = ۲۵ \quad (۰/۵)$$

۹ چندضلعی: شکلی است که شامل n $(n \geq ۳)$ پاره‌خط متوالی است که:

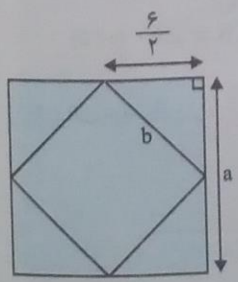
۱) هر پاره‌خط دقیقاً دو پاره‌خط را در نقاط ابتدایی و انتهایی‌اش قطع می‌کند.

۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند روی یک خط نباشند. (۰/۵)



چندضلعی محدب (۰/۵)

۱۰



$$b^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{a}{۲})^۲ \Rightarrow b^۲ = \frac{a^۲}{۴} + \frac{a^۲}{۴} \quad (۰/۵)$$

$$b^۲ = \frac{a^۲}{۲} \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}a}{۲} \quad (۰/۵)$$

$$S = b^۲ = (\frac{\sqrt{۲}a}{۲})(\frac{\sqrt{۲}a}{۲}) = \frac{a^۲}{۲} \quad (۰/۵)$$

$$\text{محیط } P = ۴b = ۴(\frac{\sqrt{۲}a}{۲}) = ۲\sqrt{۲}a \quad (۰/۵)$$

دانش آموزان عزیز برای مطالعهٔ آزمون پایانی دی‌ماه به انتهای بخش هندسه کتاب، قسمت آزمون پایانی مراجعه کنید.

مفاهیم آموزشی

۱- مساحت مربع به ضلع a برابر با $a^۲$ است.

۲- مساحت مستطیل به طول a و عرض b برابر با a.b است.

۳- مساحت متوازی‌الاضلاع به قاعدهٔ a و ارتفاع h برابر با a.h است.

۴- مساحت مثلث به طول قاعدهٔ a و ارتفاع h برابر با $\frac{a\,h}{۲}$ است.

۵- مساحت لوزی به قطرهای a و b برابر با $\frac{a\,b}{۲}$ است.

۶- مساحت ذوزنقه به اندازهٔ ضلع‌های قاعده a و b و ارتفاع h برابر است با: $\frac{h}{۲}(a+b)$.

۷- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ و ارتفاع آن نیز برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است.

۸- در هر چهارضلعی که قطرها بر هم عمود باشند، مساحت برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو قطر.

۹- یک ۶ ضلعی منتظم به ضلع a از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به‌دست می‌آید، بنابراین مساحت آن برابر است با:

$$۶(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}) = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال: مساحت مربع برابر با ۲۵ است. مطلوب است محاسبهٔ طول قطرهای آن:

اگر طول قطرها را a بگیریم، با توجه به ویژگی مربع و (برابری قطرها و عمود بودن آنها) با توجه به نکتهٔ (۸) داریم:

$$\frac{a.a}{۲} = ۲۵ \Rightarrow a^۲ = ۵۰ \Rightarrow a = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$$

مثال: مساحت یک لوزی به طول قطرهای ۴ و ۵ با مساحت یک مربع برابر است. طول قطرمربع را به‌دست آورید.

$$\underbrace{\frac{۴\times۵}{۲}}_{\text{مساحت لوزی}} = \underbrace{\frac{a^۲}{۲}}_{\text{مساحت مربع}} \Rightarrow a^۲ = ۲۰ \Rightarrow a = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

مثال: مساحت یک ۶ ضلعی منتظم برابر با $۲۴\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ هر ضلع آن را به‌دست آورید.

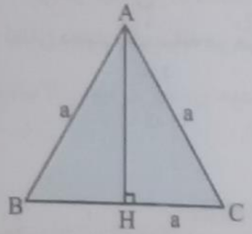
$$\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲} = ۲۴\sqrt{۳} \Rightarrow \cancel{۳}a^۲\cancel{\sqrt{۳}} = ۲\times\cancel{۲۴}\times\cancel{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = ۴$$

۶۵

کار در کلاس

فرض کنیم اندازهٔ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟ ثابت می‌کنیم ΔAHB و ΔAHC با هم هم‌نهشت هستند.



$$\left.\begin{array}{l} AB = AC = a \\ \angle B = \angle C = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(وتر و یک‌زاویه تند)}} \Delta ABH \cong \Delta ACH$$

درنتیجه اجزای متناظرشان برابرند از جمله: BH = CH و این یعنی AH میانه است.

به‌کمک قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$.

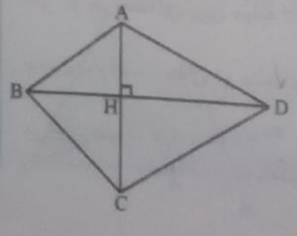
$$AH^۲ = a^۲ - (\frac{۱}{۲}a)^۲ = a^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲ = \frac{۳}{۴}a^۲ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S = \frac{۱}{۲}(AH.BC) \to S = \frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a.a) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

۶۵

فعالیت

درچهارضلعی ABCD دو قطر AC و BD برهم عمودند.



$$S_{ADB} = \frac{۱}{۲}AH.BD$$

$$S_{DBC} = \frac{۱}{۲}HC.BD$$

با جمع این دو مساحت داریم:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD\ (AH + HC) = \frac{1}{2}BD\ .\ AC$$

بنابراین، در هر چهارضلعی که دو قطر آن به هم عمود باشد، مساحت برابر است با، نصف حاصل‌ضرب دو قطر.

ایستگاه یادگیری

کاربردهایی از مساحت:

۱- اگر وسط سه ضلع یک مثلث را به هم وصل کنیم، درون مثلث چهار مثلث هم‌نهشت به وجود می‌آید که هم مساحت هستند.

۲- با رسم میانهٔ در یک مثلث، دو مثلث به وجود می‌آید که با هم، هم مساحت هستند.

۳- اگر هر ۳ میانهٔ یک مثلث را رسم کنیم، ٦ مثلث به وجود می‌آید که مساحت معادل دارند.

مثال: ۳ میانهٔ یک مثلث رسم شده‌اند و مساحت یکی از قسمت‌ها برابر b شده است. مساحت کل شکل را به دست آورید.

پاسخ: از آنجا که با رسم میانه‌ها ٦ مثلث هم‌مساحت به وجود می‌آید، داریم:

$$٦ \times b = ٦b$$

مثال: مثلث ΔABC به مساحت a مفروض است.

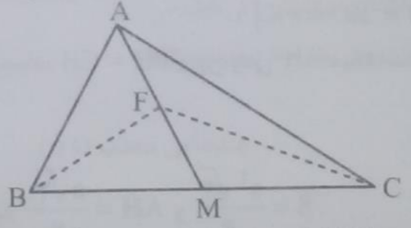
الف) ابتدا وسط هر ضلع آن را به‌صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم که ٤ مثلث با مساحت‌های مساوی به‌دست می‌آید و مساحت هر یک از آنها برابر است با: $\frac{a}{٤}$

ب) بار دوم هر ۳ میانهٔ آنها را رسم می‌کنیم که ٦ مثلث هم مساحت به‌دست می‌آید و مساحت هر یک از آنها برابر است با: $\frac{a}{٦}$

نسبت مساحت مثلث حالت (۱) به مثلث حالت (۲) برابر است با: $\frac{\frac{a}{٤}}{\frac{a}{٦}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

کار در کلاس

نشان دهید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.



باید اثبات کنیم که دو مثلث ΔABM و ΔAMC هم‌مساحت هستند. قبلاً بیان شد که اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعده‌های روبه‌روی این رأس بر روی یک خط راست قرار گیرند، نسبت مساحت این دو مثلث برابر نسبت دو قاعده است؛ یعنی $\frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \frac{MB}{MC}$ و از آنجا که M وسط BC است و $BM = MC$ داریم:

$$\frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = ١ \Rightarrow S_{ABM} = S_{AMC}$$

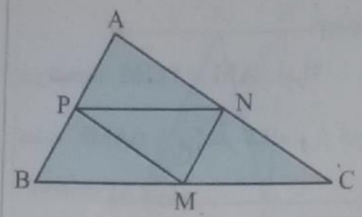
اگر F هر نقطه‌ای روی میانهٔ AM به جز نقطهٔ M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$؟ چرا؟

بله، برقرار است. چون دو مثلث ایجاد شده در رأس F مشترک هستند، بنابراین $\frac{S_{FMC}}{S_{FBM}} = \frac{MC}{MB}$ و از آنجا که $MB = MC$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$S_{FBM} = S_{FMC}$$

فعالیت ۶۶

M و N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC مطابق شکل می‌باشند. پاره‌خط PN موازی ضلع BC است و پاره‌خط PM موازی ضلع AC است. چرا؟



از آنجا که P و N به ترتیب وسط AB و AC هستند، پس:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AN}{NC}\xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه تالس}} PN \parallel BC$$

با همین استدلال داریم:

$$\frac{BP}{PA}=\frac{BM}{MC}\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{طبق عکس قضیه}} PM \parallel AC$$

بنابراین چهارضلعی PNCM متوازی‌الاضلاع می‌باشد، در نتیجه $\Delta MNP \cong \Delta NMC$ چرا؟

$$\left.\begin{array}{l} MN = MN \ \text{مشترک} \\ \text{ضلع‌های مقابل در متوازی‌الاضلاع}\begin{cases} PN = MC \\ PM = NC \end{cases} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \Delta MNP \cong \Delta NMC \qquad (***)$$

به همین ترتیب برای بقیهٔ مثلث‌ها نیز می‌توان نشان داد که دو به دو هم‌نهشت‌اند.

$\Delta APN \cong \Delta MNP \cong \Delta BPM$

اثبات:

PNMB یک متوازی‌الاضلاع است زیرا:

$$\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{PB}\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{طبق عکس}} PN \parallel BC \Rightarrow PN \parallel BM \quad (۱)$$

$$\frac{NC}{AN}=\frac{MC}{MB}\xrightarrow[\text{تالس}]{\text{طبق عکس}} NM \parallel AB \Rightarrow NM \parallel BD \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که چهارضلعی PNMB چون ضلع‌های روبه‌رویش دو به دو با هم موازی هستند پس متوازی‌الاضلاع است.

حال ثابت می‌شود که $\Delta PBM \cong \Delta PNM$.

$$\left.\begin{array}{l} PM \ \text{ضلع مشترک} \\ \text{ضلع‌های مقابل در متوازی‌الاضلاع}\begin{cases} BP = MN \\ PN = BM \end{cases} \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \Delta PBM \cong \Delta PNM \quad (**)$$

در ادامهٔ کار ثابت می‌شود که ANMP یک متوازی‌الاضلاع است چون

$$\text{نتایج قسمت‌های قبل}\begin{cases} MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel AP \\ PM \parallel AC \Rightarrow PM \parallel AN \end{cases} \Rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع}\ ANMP$$

پس دو مثلث (*) $APN \cong PNM$ بنا به حالت (ض ض ض)

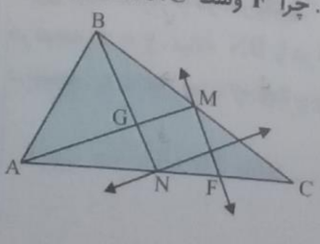
با مقایسه رابطهٔ * و ** و *** داریم:

$\Delta APN \cong \Delta BPM \cong \Delta MNP$

فعالیت ۶۷

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانهٔ مثلث را ثابت می‌کنید.

دو میانهٔ AM و BN از Δ ABC را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطهٔ G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانهٔ BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟



MF موازی BN است. طبق قضیهٔ تالس $\frac{CF}{FN}=\frac{CM}{MB}$ و از آنجا که M نقطهٔ وسط C و B است پس CM = MB ، در نتیجه $\frac{CF}{FN}=۱$ و این یعنی CF = FN . پس F هم نقطه وسط پاره‌خط NC می‌شود.

N وسط ضلع AC است، بنابراین $AF = ۳NF$. چرا؟

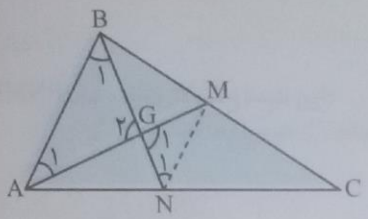
$$\left.\begin{array}{l} AN = NC \\ NC = ۲FC \end{array}\right\} \Rightarrow AN = ۲FC \quad (۱) \qquad \left.\begin{array}{r} \\ \\ NF = FC \quad (۲) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{با جمع}(۱),(۲)} \begin{array}{l} AN + NF = ۲FC + FC \\ AF = ۳FC \Rightarrow AF = ۳NF \end{array}$$

در نتیجه، $AM = ۳GM$. چرا؟

مثلث ΔAMF را در نظر گرفته و از آنجا که $GN \parallel MF$ است به تناسب $\frac{NF}{AF} = \frac{GM}{AM}$ می‌رسیم. حالا با توجه رابطهٔ $AF = ۳NF$ داریم:

$$\frac{GM}{AM} = \frac{NF}{۳NF} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow AM = ۳GM$$

بنابراین $GM = \frac{۱}{۳}AM$ و $AG = \frac{۲}{۳}AM$ و G بین A و M است، در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم‌خط AM است که $AG = \frac{۲}{۳}AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{۲}{۳}BN$. پس برای هر دو میانهٔ دلخواه نقطهٔ G با این ویژگی به‌دست می‌آید. در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.



به روش دیگر می‌توانید از M به N وصل کرده و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید. چون $AB = ۲MN$ ، پس $AG = ۲GM$ و $BG = ۲GN$. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.

چون M و N به ترتیب وسط BC و AC هستند، طبق عکس قضیهٔ تالس $MN \parallel AB$

$$\left.\begin{array}{r} \hat{G}_۱ = \hat{G}_۲ \ \text{متقابل به راس} \\ MN \parallel AB, BN \ \text{مورب} \ \hat{N}_۱ = \hat{B}_۱ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ز}} \Delta GMN \sim \Delta GBA$$

و از طرفی می‌دانیم $\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{BC} = \frac{۱}{۲}$ در نتیجه داریم:

$$BG = ۲GN, AG = ۲GM$$

بنابراین $GM = \frac{۱}{۳}AM$ و $AG = \frac{۲}{۳}AM$ ، A و G بین A و M است. در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم‌خط AM است که $AG = \frac{۲}{۳}AM$ است و متشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{۲}{۳}BN$. پس برای هر دو میانهٔ دلخواه نقطهٔ G با این ویژگی به‌دست می‌آید. در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.

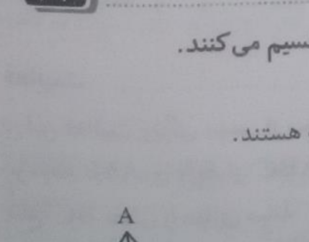
سؤال متن ۶۷

با رسم سه میانهٔ مثلث نشان دهید، سه میانهٔ مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.

بنا بر فعالیت قبلی (۱) $S_{BGM} = S_{MGC} = x$ چرا؟

چون این دو مثلث در رأس G مشترک هستند و قاعده‌هایی برابر دارند، بنابراین هم‌مساحت هستند.

به همین ترتیب برای بقیه نیز برقرار است.

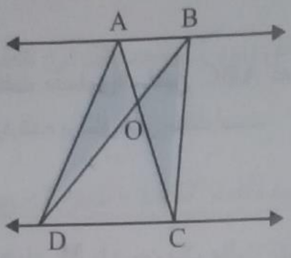


اکنون میانهٔ AM را در نظر بگیرید. $۲z + x = ۲y + x$

در نتیجه $y = z$. میانهٔ BN را در نظر بگیرید. $۲z + y = ۲x + y$

در نتیجه، $z = x$. پس، $z=x=y$ یعنی این ۶ مثلث هم‌مساحت هستند.

ویژگی ۳: فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند، به طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم $S_{ADC} = S_{BDC}$.
چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟



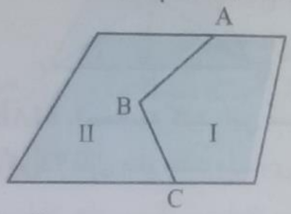
$$S_{ADC} = S_{BDC} \xrightarrow[\text{را کم می‌کنیم}]{\text{از طرفین } S_{ODC}}$$

$$S_{ADC} - S_{ODC} = S_{BDC} - S_{ODC} \xrightarrow{\text{با توجه به شکل}}$$

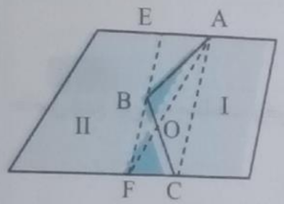
$$S_{OAD} = S_{BOC}$$

یک مسئله ۶۸

در شکل دو مزرعهٔ I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به طوری‌که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟



ایدهٔ این عمل بر اساس مسئلهٔ قبلی است. از A به C متصل کرده و از B موازی AC رسم کنید تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می‌تواند مرز AF باشد؟ چرا؟ البته می‌تواند مرز EC نیز باشد.



محل برخورد AF با BC را O می‌نامیم. با توجه به شکل کافی است نشان دهیم که $S_{OFC} = S_{OAB}$.
(چون قاعده‌هایی برابر دارند و رأس‌هایشان روی خط‌هایی موازی با قاعده است.)

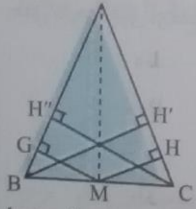
$$S_{FAC} = S_{BAC}$$

$$S_{FAC} - S_{OAC} = S_{BAC} - S_{OAC} \Rightarrow S_{OFC} = S_{ABO}$$

چون این دو ناحیه، هم‌مساحت هستند، بنابراین مساحت زمین‌ها عوض نشده است.

فعالیت ۶۸

در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است. نقطهٔ دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C در نظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به‌ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMC} و S_{AMB} را بنویسید.



$$S_{AMB} = \frac{1}{2}AB.MG$$

$$S_{AMC} = \frac{1}{2}AC.MH$$

مساحت مثلث ΔABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید. چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH'$ (BH' ارتفاع وارد بر AC)

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH''$ (CH'' ارتفاع وارد بر AB)

رابطهٔ بین مساحت‌ها:

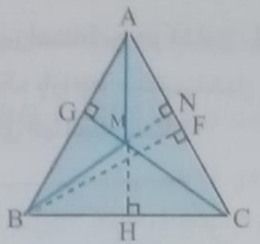
$$S_{ABC} = S_{AMB} + S_{AMC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} AC.BH' = \frac{۱}{۲} AB.MG + \frac{۱}{۲} AC.MH \xRightarrow{AB=AC}$$

$$AC.BH' = AC(MG+MH) \Rightarrow BH' = MG+MH$$

در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعدهٔ BC از دو ضلع دیگر برابر ارتفاع وارد شده بر ساق‌های مثلث است.

فعالیت ۶۸

نقطهٔ دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازهٔ a در نظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید.



مساحت سه مثلث MAC و MBC و MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت ΔABC چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a در نظر می‌گیریم.

$$S_{MAC} = \frac{۱}{۲} MN.AC = \frac{۱}{۲} a.MN$$

$$S_{MBC} = \frac{۱}{۲} MH.BC = \frac{۱}{۲} a.MH$$

$$S_{MBA} = \frac{۱}{۲} MG.AB = \frac{۱}{۲} a.MG$$

حاصل‌جمع این سه مساحت برابر با مساحت ABC است. یعنی داریم:

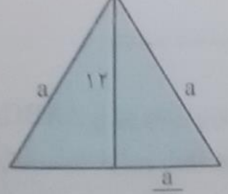
$$S_{MAC} + S_{MBC} + S_{MBA} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} a(MN+MH+MG) = \frac{۱}{۲} a.BF$$

$$MN+MH+MG = BF \xRightarrow[\text{برابر هستند.}]{\text{ارتفاع‌ها با هم}} (BN = AH = CG)$$

مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع آن مثلث متساوی الاضلاع است.

اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطهٔ M درون مثلث از سه ضلع برابر ۲، ۴ و ۶ باشد. اندازهٔ ضلع مثلث را محاسبه کنید.

طبق نتیجهٔ فوق ارتفاع این مثلث برابر است با ۱۲ و از آنجا که در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع همان میانه است، پس داریم:



$$a^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + (۱۲)^۲$$

$$a^۲ - \frac{a^۲}{۴} = ۱۴۴$$

$$\frac{۳a^۲}{۴} = ۱۴۴ \Rightarrow a^۲ = \frac{\overset{۴۸}{\cancel{۱۴۴}} \times ۴}{\underset{۱}{\cancel{۳}}} = ۱۹۲$$

$$a = \sqrt{۱۹۲} = ۸\sqrt{۳}$$

ایستگاه یادگیری

نقاط شبکه‌ای و مساحت:

۱) یک صفحه را به‌طوری نقطه‌بندی می‌کنیم که فاصلهٔ هر دو نقطهٔ متوالی عمودی یا افقی برابر با یک واحد باشد. این نقاط را نقاط شبکه‌ای می‌نامیم.

۲) به چندضلعی که رئوس آن روی نقاط شبکه‌ای قرار گیرد، چندضلعی شبکه‌ای می‌گوییم.

۳) به نقاط شبکه‌ای که روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی قرار می‌گیرد نقاط مرزی می‌گوییم و تعداد آنها را با b نمایش می‌دهیم.

۴) به نقاطی که درون یک چندضلعی قرار می‌گیرد نقاط درونی گفته و با نماد i نشان می‌دهند.

۵) مساحت یک چندضلعی (در مواردی که به‌صورت تقریبی است) را می‌توان با توجه به تعداد نقاط درونی و مرزی آن به صورت زیر محاسبه کرد:

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i$$

۶) یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل سه نقطهٔ مرزی می‌تواند داشته باشد.

۷) یک چندضلعی شبکه‌ای می‌تواند اصلاً نقطهٔ درونی نداشته باشد.

مثال: چندضلعی دارای ۴ نقطهٔ مرزی و ۱۲ نقطهٔ درونی است. مساحت آن را به دست آورید.

$$b = ۴ \,,\, i = ۱۲ \Rightarrow S = \frac{۴}{۲} - ۱ + ۱۲ \Rightarrow S = ۱ + ۱۲ = ۱۳$$

مثال: مساحت یک شکل برابر با ۱۸ است. اگر تعداد نقاط درونی آن ۱۰ باشد، نقاط مرزی آن را به دست آورید.

$$i = ۱۰ \Rightarrow S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \Rightarrow ۱۸ = \frac{b}{۲} - ۱ + ۱۰ \Rightarrow ۱۸ = \frac{b}{۲} + ۹ \Rightarrow \frac{b}{۲} = ۹ \Rightarrow b = ۱۸$$

فعالیت ۶۹

۱- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

حداقل ۳ نقطه می‌تواند داشته باشد. چون حداقل تعداد ضلع‌های یک چندضلعی ۳ تا است.

۲- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ درونی می‌تواند داشته باشد؟

حداقل صفر، یعنی شامل هیچ نقطهٔ درونی نباشد.

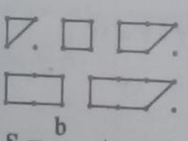
۳- در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است، یعنی $i = ۰$ و تعداد نقاط مرزی $b = ۳, ۴, ۵, ...$.

جدول زیر را با محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

$i = ۰ \,,\, b = ۳, ۴, ۵, ...$

تعداد نقاط مرزی i	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$	۳

چه رابطه‌ای بین مساحت و تعداد نقاط مرزی وجود دارد؟



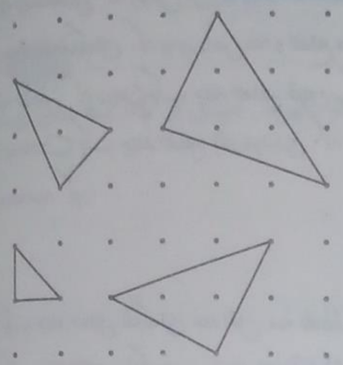
$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + ۰$$

رابطهٔ روبه‌رو را می‌توان نتیجه گرفت:

۴- اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه‌داشته و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای $b = ۳$ باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید.

(نتیجه‌گیری $S = \frac{b}{۲} - ۱ + ۰$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید را در نظر داشته باشید.)

تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{۲} - ۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
S	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۹}{۲}$	$\frac{۱۱}{۲}$



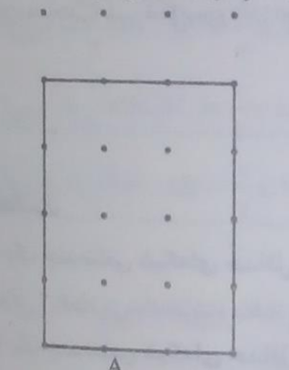
با تکمیل جدول بالا و مقایسهٔ اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای چه ارتباطی با تعداد نقاط مرزی و درونی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب ظاهر می‌شوند.

با توجه به جدول بالا می‌توان گفت که برای به‌دست آوردن مساحت می‌توان از رابطهٔ روبه‌رو استفاده کرد:

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i$$

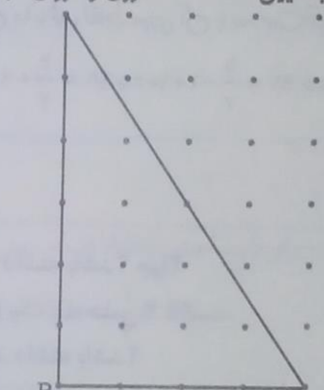
کار در کلاس ۷۱

۱- چندضلعی‌های A، B، C و D را در شکل‌های زیر در نظر بگیرید. ابتدا به روش‌های هندسی که از قبل می‌دانید مساحت آنها را محاسبه کنید و سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



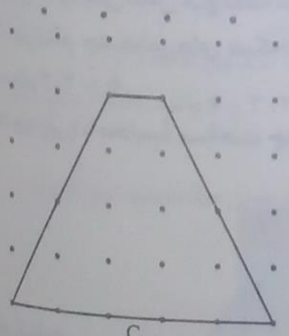
A

$۳ \times ۴ = ۱۲$



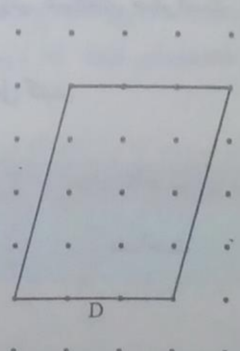
B

$\frac{۶ \times ۴}{۲} = ۱۲$



C

$\frac{\overset{۶}{\cancel{(۵+۱)}} \times ۴}{۲} = ۱۲$



D

$۳ \times ۴ = ۱۲$

چندضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونی i	۶	۷	۸	۹
مساحت	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

کار در کلاس

۷۱

اگر فاصلهٔ نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد یک برگ درخت را روی یک صفحهٔ شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به‌طور تقریبی محاسبه کنید. واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.

$b = ۴۴ \qquad i = ۴۵$

$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \Rightarrow S = \frac{۴۴}{۲} - ۱ + ۴۵$

$S = ۲۱ + ۴۵ = ۶۶$

تمرین

۷۲

۱- در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

a را بزرگ‌ترین قطر در نظر می‌گیریم. بنابراین $a = ۳b$ از طرفی در لوزی داریم: (بنا به رابطهٔ فیثاغورس)

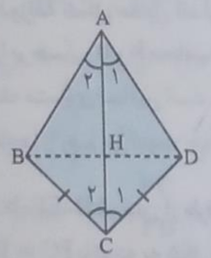
$(\frac{a}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ = (۲\sqrt{۱۰})^۲ \qquad (\frac{۳b}{۲})^۲ + (\frac{b}{۲})^۲ = ۴۰ \Rightarrow \frac{۱۰b^۲}{۴} = ۴۰ \Rightarrow b^۲ = \frac{۴ \times ۴۰}{۱۰}$

$b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = \sqrt{۱۶} = ۴ \qquad a = ۱۲$

مساحت برابر است با:

$\frac{a.b}{۲} = \frac{۴ \times ۱۲}{۲} = \frac{۴۸}{۲} = ۲۴$

۲- در چهارضلعی ABCD مطابق شکل AB=AD و BC=CD است.
آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهار ضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle\hat{A}$ و $\angle\hat{C}$ اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.



$\left.\begin{array}{l} AB = AD \\ BC = BD \\ AC \text{ مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADC} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \\ \hat{C}_۱ = \hat{C}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$ قطر AC نیمساز زوایای A و C هم هست.

حال ثابت می‌کنیم دو مثلث $\overset{\Delta}{AHD}$ و $\overset{\Delta}{AHB}$ با هم هم‌نهشت هستند.

$\left.\begin{array}{l} AH \text{ مشترک} \\ AB = AD \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AHB} \cong \overset{\Delta}{AHD} \Rightarrow \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ \\ BH = HD \end{array}\right\} \Rightarrow$ قطر AB در کایت ABCD عمود منصف قطر دیگر (BD) است.

از طرفی $\hat{H}_۱ + \hat{H}_۲ = ۱۸۰^\circ \Leftarrow$ می‌توان نتیجه گرفت که $\hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$

بنابراین دو قطر بر هم عمود هستند.

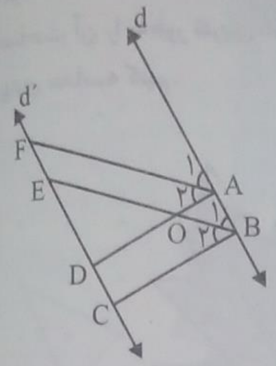
$\frac{\cancel{۶}^{۳} \times ۸}{\cancel{۲}_{۱}} = ۲۴$

نصف حاصل‌ضرب دو قطر برابر مساحت است.

۷۲

هندسه

۳- در شکل دو خط d و ′d موازی‌اند و ABCD و ABEF هم دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟



محل تقاطع AD با BE را O می‌نامیم.

باید ثابت کنیم که $\overset{\Delta}{BCE} \cong \overset{\Delta}{ADF}$ و از آنجا نتیجه بگیریم که هم‌مساحت هستند.

ابتدا ثابت می‌کنیم که $\angle A_۲ = \angle B_۲$ است.

$AD \parallel BC$, d مورب $\Rightarrow \angle A = \angle B$ (۱)

$FA \parallel EB$, d مورب $\Rightarrow \angle A_۱ = \angle B_۱$ (۲)

رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم. $\angle A - \angle A_۱ = \angle B - \angle B_۱ \xRightarrow{\text{با توجه به شکل}} \angle A_۲ = \angle B_۲$

حال به ادامهٔ اثبات می‌پردازیم.

$$\left.\begin{array}{ll} CD = AB & \text{ABCD ضلع‌های روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع} \\ AF = BE & \text{ABEF ضلع‌های روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع} \\ \angle A_۲ = \angle B_۲ & \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(ض ز ض)}} \overset{\Delta}{FAD} \cong \overset{\Delta}{EBC} \rightarrow S_{\overset{\Delta}{FAD}} = S_{\overset{\Delta}{EBC}}$$

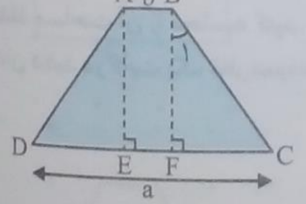
از طرفین مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OED}$ را کم کرده در نتیجه، خواهیم داشت: $S_{\overset{\Delta}{FAD}} - S_{OED} = S_{\overset{\Delta}{EBC}} - S_{OED}$

و به طرفین مساحت $\overset{\Delta}{AOB}$ را اضافه می‌کنیم: $S_{\overset{\Delta}{FAD}} - S_{\overset{\Delta}{OED}} + S_{\overset{\Delta}{AOB}} = S_{\overset{\Delta}{EBC}} - S_{\overset{\Delta}{OED}} + S_{\overset{\Delta}{AOB}}$

با توجه به شکل داریم: $S_{ABEF} = S_{ABDC}$

بنابراین اگر یک طرف برابر S باشد، طرف دیگر نیز همان مقدار S است.

۴- در ذوزنقهٔ شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده °۴۵ است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعدهٔ DC عمود کنید.



این ذوزنقه متساوی‌الساقین است، یعنی AD=BC.

ابتدا ارتفاع‌ها را رسم می‌کنیم. چهارضلعی حاصل، یعنی ABEF یک مستطیل است.

بنابراین AB=EF=b. پس از طرفی $\overset{\Delta}{BFC} \cong \overset{\Delta}{AED}$ (بنا به حالت وتر و یک ضلع)

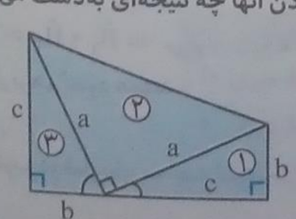
$\Leftarrow$ FC = DE با توجه به شکل مشخص است که:

$$DE + \overbrace{EF}^{b} + FC = a \Rightarrow DE + FC = a - b \Rightarrow DE = FC = \frac{a-b}{۲}$$

$\overset{\Delta}{BFC}$ یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. (زیرا $\hat{B}_۱ = ۴۵^\circ \Leftarrow \hat{C} = ۴۵^\circ$) داریم $BF = FC = \frac{a-b}{۲}$ که

همان ارتفاع است. بنا بر فرمول مساحت در ذوزنقه: $\dfrac{(a+b) \times (\frac{a-b}{۲})}{۲} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{۴} = \dfrac{a^۲ - b^۲}{۴}$

۵- مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟



مساحت ذوزنقه برابر است با:

$$\frac{\overbrace{(b+c)}^{\text{مجموع دو قاعده}}\overbrace{(b+c)}^{\text{ارتفاع}}}{۲} = \frac{۱}{۲}(b+c)^۲$$

مساحت ذوزنقه از روش دوم: حاصل جمع ۳ مساحت مثلث‌ها

$$\left.\begin{array}{l}(1)\dfrac{b.c}{2}\\[2mm](2)\dfrac{a.a}{2}\\[2mm](3)\dfrac{b.c}{2}\end{array}\right\}\quad \frac{1}{2}(2bc+a^2)\quad **$$

رابطهٔ * و ** را با هم مساوی قرار می‌دهیم:

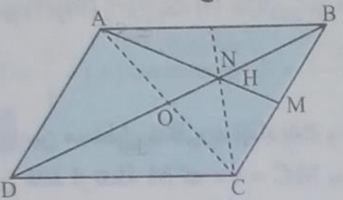
$$\cancel{\frac{1}{2}}(b+c)^2=\cancel{\frac{1}{2}}(2bc+a^2)$$

$$b^2+\cancel{2bc}+c^2=\cancel{2bc}+a^2$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2$$

که همان رابطهٔ فیثاغورس است.

۶- در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع می‌کند. نشان دهید.



$$S_{BMN}=\frac{1}{12}S_{ABCD}$$

ابتدا قطر AC را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با قطر BD، O می‌نامیم. می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع قطرها منصف هم‌اند. پس O نیز وسط AC و BO میانه وارد بر ضلع AC در مثلث ABC است. پس نقطهٔ H محل برخورد میانه‌هاست.

C را به N وصل کرده و امتداد می‌دهیم. می‌دانیم که با رسم میانه‌ها در یک مثلث، ۶ مثلث هم‌مساحت به‌وجود می‌آید، یعنی:

$$(1)\quad S_{NBM}=\frac{1}{6}S_{ABC}$$

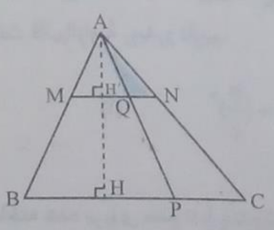
از طرفی قطر متوازی‌الاضلاع آن را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کند، پس داریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}S_{ABDC}\quad(2)$$

با توجه به رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$S_{NBM}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}S_{ABDC}\right)=\frac{1}{12}S_{ABDC}$$

۷- در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$، همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟



ابتدا ارتفاع وارد بر BC را رسم می‌کنیم و آن را HA می‌نامیم.

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}\ \text{و}\ \frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{PC}{PB+PC}=\frac{1}{3+1}\Rightarrow\frac{PC}{BC}=\frac{1}{4}$$

از آنجا که $BC \parallel MN$ داریم:

$$\Delta AMN\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}\quad(1)\ \Rightarrow\frac{AH'}{AH}=\frac{1}{3}$$

$$\Delta AQN\sim\Delta APC\Rightarrow\frac{AQ}{AP}=\frac{QN}{PC}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{3}\quad(2)$$

$$\frac{S_{AQN}}{S_{ABC}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\times AH'\times QN}{\cancel{\frac{1}{2}}\times AH\times BC}=\frac{AH'}{AH}\times\frac{QN}{BC}\xrightarrow{\frac{AH'}{AH}=\frac{1}{3}}\frac{1}{3}\times\frac{QN}{BC}\xrightarrow{QN=\frac{1}{3}PC\ \text{طبق (۲)}}\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{3}PC}{BC}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{PC}{BC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{36}$$

$$\frac{MQ}{MN}=\frac{3}{4}\Rightarrow MQ=\frac{3}{4}MN\xrightarrow{\frac{MN}{BC}=\frac{1}{3}}MQ=\frac{3}{4}\times(\frac{1}{3}BC)\Rightarrow MQ=\frac{1}{4}BC$$

باتوجه به شکل می‌توان نوشت:

$$S_{MAPB}=S_{ABP}-S_{AMQ}\qquad (1)$$

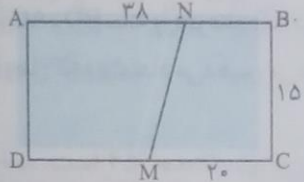
$$S_{ABP}=\frac{BP\times AH}{2}=\frac{\frac{3}{4}BC\times AH}{2}=\frac{3}{4}\times(\frac{BC\times AH}{2})=\frac{3}{4}S_{ABC}\quad (2)$$

$$S_{AMQ}=\frac{MQ\times AH'}{2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{4}BC\times\frac{1}{3}AH)=\frac{1}{12}(\frac{1}{2}BC\times AH)=\frac{1}{12}S_{ABC}\qquad (3)$$

مقادیر (۲) و (۳) را در رابطهٔ (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$S_{MQPB}=\frac{3}{4}S_{ABC}-\frac{1}{12}S_{ABC}=\frac{8}{12}S_{ABC}\Rightarrow\frac{S_{MQPB}}{S_{ABC}}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

۸- زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک می‌باشند مفروض است. این زمین فقط از نقطهٔ M که $MC=20$ به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه با مساحت‌های مساوی بین آن دو تقسیم شود.



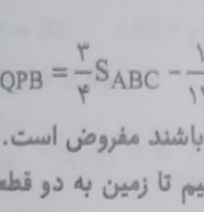
کل مساحت زمین برابر با $15\times 38=570$ است که الزاماً باید به هر شخص ۲۸۵ برسد، یعنی باید مساحت NBCM برابر با ۲۸۵ شود.

NBCM یک ذوزنقه است پس داریم:

$$\frac{(NB+20)\times 15}{2}=285\Rightarrow(NB+20)\times 15=570\Rightarrow NB+20=38\Rightarrow NB=18$$

البته با توجه به شکل و بدون محاسبه نیز می‌توان حدس زد، چون دو شکل باید هم‌مساحت باشند و ارتفاع یکی است. پس کافی بود قاعده‌ها برابر باشند، یعنی $DM=NB$.

۹- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویهٔ قائمه است.



با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو داریم:

$$c^2=a^2+b^2\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر } c^2}1=(\frac{a}{c})^2+(\frac{b}{c})^2\qquad (1)$$

چندضلعی ساخته شده بر روی ضلع c با چندضلعی ساخته شده بر روی ضلع a متشابه است و نسبت تشابه آنها برابر است با:

$$\frac{a}{c}\Rightarrow\frac{S_a}{S_c}=(\frac{a}{c})^2\quad (2)$$

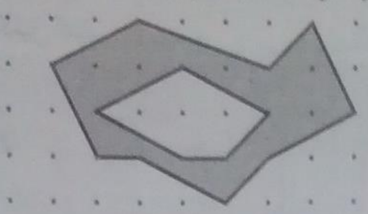
و به همین ترتیب

$$\frac{b}{2}\Rightarrow\frac{S_b}{S_c}=(\frac{b}{2})^2\quad (3)$$

با جایگذاری (۲) و (۳) در شمارهٔ ۱ داریم:

$$1=\frac{S_a}{S_c}+\frac{S_b}{S_c}\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } S_c}S_c=S_a+S_b$$

۱۰- با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید.



	شکل بیرونی	شکل داخلی
تعداد نقاط مرزی	$b = ۹$	۵
تعداد نقاط درونی	$m = ۱۳$	۳

$$S_{\text{بیرون}} = \frac{۹}{۲} - ۱ + ۱۳ = ۱۶/۵$$

$$\Rightarrow S_{\text{سایه‌زده}} = ۱۶/۵ - ۴/۵ = ۱۲$$

$$S_{\text{داخلی}} = \frac{۵}{۲} - ۱ + ۳ = ۴/۵$$

۱۱- یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحد می‌باشند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه کرده و آنها را مقایسه کنید.

مساحت مستطیل به طول و عرض m و n برابر است با: $m \times n$

محاسبه مساحت با روش دوم: با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$b = ۲(m + n)$ نقاط مرزی $\quad (۱)$

$i = (n - ۱)(m - ۱)$ نقاط درونی $\quad (۲)$

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \xrightarrow{\text{با جایگذاری } (۱)،(۲)} S = \frac{\cancel{۲}(m + n)}{\cancel{۲}} - ۱ + [(m - ۱)(n - ۱)]$$

$$= (\cancel{m} + \cancel{n})\cancel{-۱} + (mn - \cancel{m} - \cancel{n} \cancel{+۱}) = m.n$$

هر دو با هم برابر است.

دقت شود که اگر m واحد باشد، تعداد نقاط مرزی $m + ۱$ می‌شود و همین‌طور برای n واحد نقاط مرزی $n + ۱$ واحد است.

برای تعداد نقاط درونی داریم:

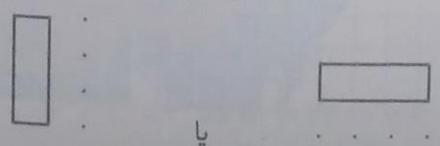
$$(m + ۱) - \underset{\text{نقاط روی مرز کم می‌شود.}}{\underset{\downarrow}{۲}} = m - ۱$$

۱۲- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی نظیر آن را نیز رسم کنید.

$$S = ۳ \Rightarrow \frac{b}{۲} - ۱ + i = ۳ \Rightarrow \frac{b}{۲} + i = ۴$$

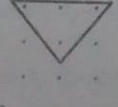
b	i
۲	۳
۴	۲
۶	۱
۸	۰
۰	۴

نقاط مرزی با بیشترین تعداد



یا

برای نقاط درون به تعداد ۴:



ویژگی‌های چهارضلعی‌های مهم در یک نگاه

جدول زیر را تکمیل کنید.

ذوزنقه متساوی‌الساقین	ذوزنقه	مربع	لوزی	مستطیل	متوازی‌الاضلاع	چهارضلعی / ویژگی
دو ساق روبه‌رو برابرند.	برابر نیستند.	هر چهارضلع	هر چهارضلع	هر دو ضلع مقابل	هر دو ضلع مقابل	مساوی بودن اندازهٔ ضلع‌ها
فقط دو قاعده	فقط دو قاعده	هر دو ضلع مقابل	هر دو ضلع مقابل	هر دو ضلع مقابل	هر دو ضلع مقابل	موازی بودن ضلع‌ها
کلاً وجود ندارد.	در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه	ضلع‌های مجاور بر هم عمودند.	به شرط مربع بودن	ضلع‌های مجاور بر هم عمودند.	به شرطی که مستطیل یا مربع باشد.	عمود بودن ضلع‌ها
$\hat{۲} = \hat{۱}$ $\hat{۴} = \hat{۳}$	-	هر چهار زاویه	زاویه‌های مقابل	هر چهار زاویه	زاویه‌های روبه‌رو	زاویه‌های با اندازه‌های برابر
$\hat{۳}$ و $\hat{۱}$ با هم $\hat{۴}$ و $\hat{۲}$ با هم زاویه‌های مقابل با هم	$\hat{۲} = \hat{۱}$ $\hat{۳} = \hat{۴}$	هر دو زاویهٔ مقابل و مجاور	هر دو زاویهٔ مجاور	هر دو زاویهٔ مقابل و مجاور	زاویه‌های مجاور	زاویه‌های مکمل
اندازه‌های مساوی دارند.	قطرها نامساوی	قطرها عمودمنصف و برابر	قطرها عمودمنصف و نامساوی	قطرها منصف هم برابر	قطرها منصف هم و نامساوی	وضعیت قطرها نسبت به هم

در شکل نقشهٔ ایران را مشاهده می‌کنید. می‌توانید با انتخاب واحدهای مناسب مساحت آن را به طور تقریبی پیدا کنید.

نقاط مرزی ۲۲

نقاط درونی ۱۲۵

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i$$

$$S = \underbrace{\frac{۲۲}{۲} - ۱}_{۱۰} + ۱۲۵ = ۱۳۵$$

ارزشیابی مستمر

۱- درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخّص کنید. (۰/۵ نمره)

الف) در هر چهارضلعی که قطرها بر هم عمود باشند، مساحت برابر است با حاصلضرب قطرها ☐ درست ☐ نادرست

ب) حداقل تعداد نقاط شبکه‌ای برای یک چندضلعی شبکه‌ای برابر با ۳ است. ☐ درست ☐ نادرست

۲- جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب کامل کنید. (۱)

الف) مساحت دو مثلث هم‌نهشت .... است.

ب) اگر دو مثلث قاعده‌های برابر داشته باشند، نسبت مساحت آنها برابر است با .... است.

۳- مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را حساب کنید. (۱/۵) (تبریز - خرداد ۸۵)

۴- مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین برابر با ۸ است. محیط این مثلث را به‌دست آورید. (۱/۵) (مدارس خارج از کشور - خرداد ۸۴)

۵- چندضلعی شبکه‌ای را تعریف کرده و مساحت چندضلعی زیر را به‌دست آورید. (۱)

۶- ثابت کنید که یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند. (۱/۵)

۷- اندازهٔ قطر لوزی ۱۲ و مساحت آن ۳۶ است. قطر دیگر لوزی و محیط لوزی را محاسبه کنید. (۱/۵) (خوزستان - خرداد ۹۰)

۸- فاصلهٔ M نقطهٔ داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از هر ضلع برابر با $۵\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}$ و $۲\sqrt{۳}$ است. محیط مثلث را محاسبه کنید. (۱/۵) (یزد - خرداد ۹۰)

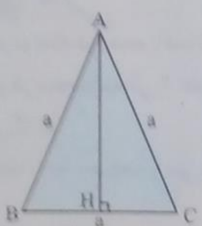
پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) نادرست (برابر با نصف حاصل ضرب آنهاست.) (۰/۲۵)، ب) درست (۰/۲۵)

۲ الف) با هم برابر است. (۰/۵) ، ب) نسبت اندازهٔ ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌ها (۰/۵)

۳ در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع همان میانه است.

ارتفاع را با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس محاسبه می‌کنیم:



(۰/۲۵)

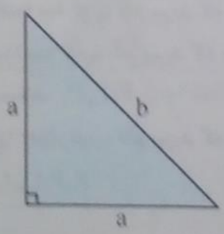
$$a^{۲} = (HA)^{۲} + (\frac{a}{۲})^{۲} \to (HA)^{۲} = a^{۲} - (\frac{a}{۲})^{۲} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (HA)^{۲} = a^{۲} - \frac{a^{۲}}{۴} = \frac{۳}{۴}a^{۲} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \quad (۰/۵)$$

مساحت برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a.a) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲} \quad (۰/۵)$$

۴



(۰/۲۵)

$$\Rightarrow \frac{a.a}{۲} = ۸ \quad (۰/۵)$$

طول هر ضلع زاویهٔ قائمه

$$a^{۲} = ۱۶ \Rightarrow a = ۴ \quad (۰/۲۵)$$

$$b^{۲} = ۴^{۲} + ۴^{۲} \Rightarrow b^{۲} = ۳۲ \Rightarrow b = \sqrt{۳۲} = ۴\sqrt{۲} \quad (۰/۲۵)$$

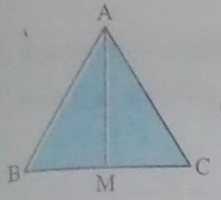
محیط: $۴ + ۴ + ۴\sqrt{۲} = ۸ + ۴\sqrt{۲}$ (۰/۲۵)

۵ چندضلعی که تمام رئوس آن روی نقاط شبکه‌ای قرار گیرد چندضلعی شبکه‌ای نام دارد. (۰/۵)

$$\begin{matrix} b = ۴ \\ i = ۱ \end{matrix} \Rightarrow S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \Rightarrow S = \frac{۴}{۲} - ۱ + ۱ \Rightarrow S = ۲ \quad (۰/۵)$$

۶ ABC یک مثلث است و M وسط ضلع BC.

از آنجا که این دو مثلث در رأس A مشترک هستند، پس:

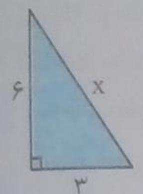


$$\frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} \overset{(۰/۵)}{=} \frac{MB}{MC} \xrightarrow{MB=MC} \frac{S_{AMC}}{S_{AMB}} = ۱ \Rightarrow S_{AMC} = S_{AMB} \ (۰/۵) \quad (۰/۵)$$

۷ قطر دیگر لوزی

$$S_{\text{لوزی}} = \frac{\text{حاصلضرب دو قطر}}{۲} \Rightarrow \frac{۱۲a}{۲} = ۳۶ \Rightarrow a = ۶ \ (۰/۵)$$

از آنجا که قطرها عمودمنصف هستند، اندازهٔ ضلع را با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس می‌توان حساب کرد.



$$x^۲ = ۶^۲ + ۳^۲ \Rightarrow x^۲ = ۳۶ + ۹ \Rightarrow x^۲ = ۴۵$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵} \ (۰/۲۵) \quad (۰/۲۵)$$

$$۴ \times ۳\sqrt{۵} = ۱۲\sqrt{۵} \ \text{محیط} \ (۰/۲۵)$$

۸ ارتفاع مثلث $۲\sqrt{۳} + \sqrt{۳} + ۵\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$

ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ (باتوجه به حل سؤال ۳) (۰/۵)

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۸\sqrt{۳} \overset{(۰/۵)}{\Rightarrow} a = ۱۶ \xrightarrow{\text{محیط}} ۳ \times ۱۶ = ۴۸ \ (۰/۵)$$

فصل ۴ تجسم فضایی

درس ۱ خط، نقطه و صفحه

مفاهیم آموزشی

۱- از هر دو نقطه در صفحه یا فضا فقط یک خط راست عبور می‌کند.

۲- در هر صفحه حداقل ۲ نقطه وجود دارد که در یک راستا قرار می‌گیرند.

۳- نقطه، خط و صفحه را نمی‌توان تعریف کرد.

۴- خط و صفحه از هر طرف امتدادپذیر هستند.

۵- از یک نقطه در صفحه یا فضا، بی‌شمار خط عبور می‌کند.

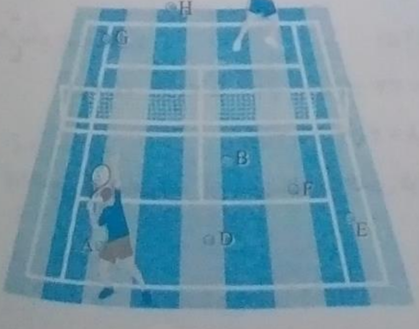
۶- از یک خط و یک نقطهٔ خارج آن فقط یک صفحه عبور می‌کند.

۷- دو خط موازی با یک خط با هم موازیند.

۸- دو خط عمود بر یک خط (در صفحه) با هم موازی‌اند.

کار در کلاس ۷۸

به این تصویر دقت کنید. توپ A داخل جیب یکی از بازیکن‌ها و توپ C روی راکت بازیکن دیگر است و بقیهٔ توپ‌های تنیس روی زمین افتاده‌اند.



الف) سه توپ نام ببرید که در یک راستا هستند. B, F, E

ب) سه توپ نام ببرید که در یک صفحه‌اند ولی هم‌راستا نیستند. F, E, D

ج) چهار توپ نام ببرید که همگی در یک صفحه نیستند.

E, F, C, A

ایستگاه

حالت‌های مختلف دو خط در صفحه و فضا:

۱- دو خط در صفحه یا متقاطع هستند یا موازی.

۲- دو خط در فضا نسبت به هم ۳ حالت دارند:

الف) در یک صفحه قرار دارند و همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. (متقاطع)

ب) در یک صفحه قرار دارند و همدیگر را قطع نمی‌کنند. (موازی)

ج) در یک صفحه قرار ندارند و همدیگر را قطع نمی‌کنند. (متنافر)

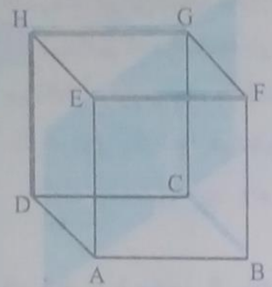
د) برای مشخص کردن یک خط در صفحه یا فضا حداقل به ۲ نقطه نیاز داریم.

هـ) از یک نقطهٔ خارج خط فقط یک خط موازی با آن خط می‌توان رسم کرد.

فعالیت ۷۹

مکعب روبه‌رو را در نظر بگیرید.

درهرمورد وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید و بنویسید که آیا می‌توان صفحه‌ای شامل آن دو در نظر گرفت؟



HG, EF: موازی، بله (صفحه HGFE)

HD, HG: متقاطع، بله (HGCD)

GC, EA: موازی، بله (صفحه‌ای به‌صورت EGCA می‌توان در نظر گرفت.)

FD, EC: متقاطع، بله (صفحه‌ای به‌صورت FEDC می‌توان در نظر گرفت.)

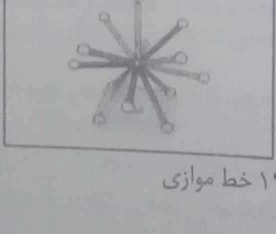
BC, HD: متنافر، خیر

AB, GD: متنافر، خیر

دو خط در فضا نسبت به هم متقاطع، موازی یا متنافر هستند.

کار در کلاس ۷۹

۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)

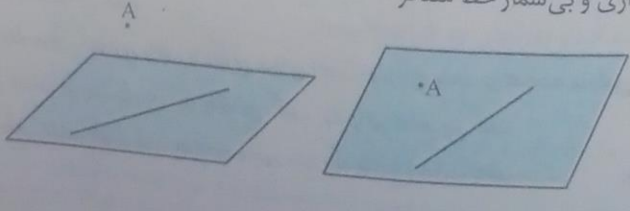


- در صفحه از هر نقطه چند خط می‌گذرد؟ بی‌شمار خط

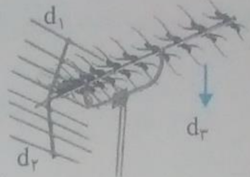
در فضا چطور؟ بی‌شمار خط

- در صفحه از یک نقطه غیرواقع بر یک خط، چند خط موازی آن خط می‌توان رسم کرد؟ ۱ خط موازی

در فضا چطور؟ یک خط موازی و بی‌شمار خط متنافر

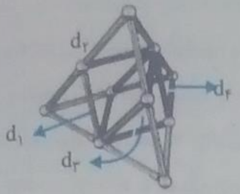


۲- در شکل‌های زیر در صورت وجود، به خطوط موازی، متقاطع و متنافر اشاره کنید.



خطوط d_1 و d_2 با هم موازی‌اند و همچنین با d_3 نیز موازی‌اند.

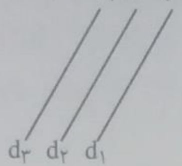
پاروها باهم موازی ولی با قایق متقاطع هستند.



d_2 و d_3 باهم موازی ولی d_1 با آنها متقاطع است. خط d_4 نیز با d_2 و d_3 متنافر است.

۳- دو خط موازی رسم کنید و آنها را d_1 و d_2 بنامید.

حال خط d_3 را موازی با d_2 رسم کنید. دو خط d_3 و d_1 نسبت به هم چه وضعی دارند؟ با هم موازی‌اند.



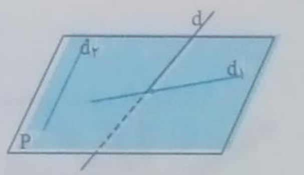
نتیجه ۱: در یک صفحه دو خط موازی با یک خط با هم موازی‌اند.

آیا در فضا نیز این نتیجه برقرار است؟ بله، دو خط موازی با یک خط در فضا با هم موازی‌اند.

۴- می‌دانیم که در صفحه دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند. آیا در فضا هم این رابطه برقرار است؟

خیر، الزاماً برقرار نیست. به خطوط مشخص شده در شکل دقت کنید، خط‌های d_1 و d_3 هر دو بر d_2 عمود هستند ولی با هم موازی نیستند. (متنافر هستند.)

۵- خط d با صفحهٔ P متقاطع است. خط‌های موجود در صفحهٔ P نسبت به خط d چه وضعیت‌هایی می‌توانند داشته باشند؟



متقاطع یا متنافر هستند. به خطوط d_1 و d_2 دقت شود، خط d_1 خط d را قطع می‌کند ولی خط d_2 با آن نقطه اشتراک نداشته و در یک صفحه قرار نگرفته است و با آن متنافر است.

ایستگاه یادگیری

حالت‌های مختلف خط و صفحه:

۱- خط و صفحه نسبت به هم:
- نسبت به هم متقاطع‌اند (همدیگر را قطع می‌کنند).
- برهم منطبق‌اند (خط داخل صفحه قرار می‌گیرد).
- موازی‌اند (همدیگر را قطع نمی‌کنند).

۲- از یک خط در فضا بی‌شمار صفحه می‌گذرد.

۳- از دو خط موازی فقط یک صفحه می‌گذرد.

۴- اگر صفحه‌ای با یکی از دو خط موازی، موازی باشد، با دیگری موازی است و یا آن خط در صفحه منطبق است.

۵- اگر d_1 و d_2 با هم موازی باشند، اگر صفحه‌ای d_1 را قطع کند، d_2 را نیز قطع می‌کند.

۶- اگر d_1 و d_2 دو خط متقاطع باشند، فقط یک صفحه وجود دارد که شامل هر دو باشد.

سؤال متن

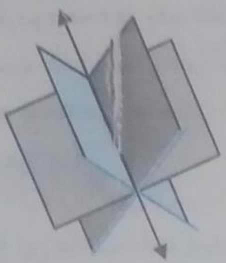
۸۰

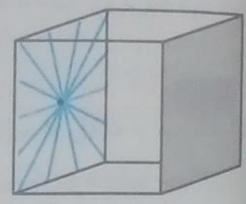
اگر خط و صفحه با هم اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم موازی هستند.
اگر خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند، نسبت به هم متقاطع هستند.
اگر خط و صفحه بی‌شمار نقطهٔ اشتراک داشته باشند خط بر صفحه واقع است.
خط و صفحه در فضا نسبت به هم متقاطع یا موازی هستند.
یا خط بر صفحه منطبق است.

کار در کلاس

۸۱

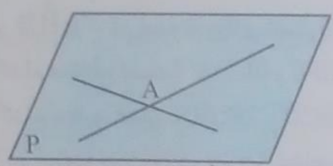
۱- به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از تصاویر کمک بگیرید.)
- از یک خط در فضا چند صفحه می‌گذرد؟ بی‌شمار صفحه
- از دو خط متقاطع چند صفحه می‌گذرد؟ یک صفحه



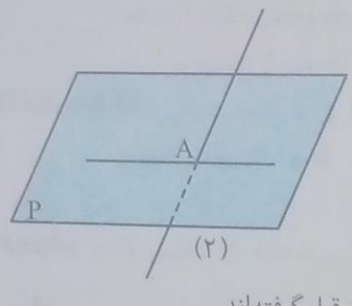



- از دو خط موازی چطور؟ یک صفحه
- از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه، چند خط موازی با آن صفحه می‌توان رسم کرد؟ بی‌شمار خط

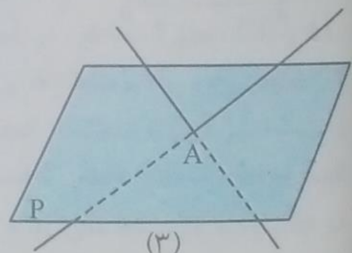
۲- دو خط در نقطهٔ A متقاطع‌اند و صفحهٔ P شامل نقطه A است. با توجه به شکل‌های زیر حالت‌های مختلف خطوط متقاطع و صفحهٔ P را بررسی کنید.



(۱)



(۲)



(۳)

۱) دو خط متقاطع هر دو بر روی یک صفحه قرار گرفته‌اند.
۲) یکی از خطوط بر روی صفحه منطبق است و خط دوم، خط و صفحه را قطع کرده است.
۳) دو خط بر صفحه منطبق نیستند و فقط در نقطهٔ برخورد با صفحه مشترک‌اند.

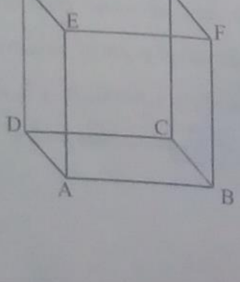
۳- دو خط d_1 و d_2 در فضا با هم موازی‌اند.

الف) اگر صفحه‌ای مثل P با یکی از این دو خط موازی باشد، نسبت به دیگری چه وضعی دارد؟ با خط دیگر موازی است یا آن خط بر صفحه منطبق است.

ب) اگر صفحهٔ P شامل یکی از این دو خط باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟ موازی است یا شامل خط دیگر نیز می‌شود.

ج) اگر صفحهٔ P با یکی از این خطوط متقاطع باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟ الزاماً متقاطع می‌شود.

۴- مسئلهٔ قبل را برای حالتی حل کنید که دو خط، متنافرند.



می‌توان از شکل روبه‌رو استفاده کرد و به‌راحتی به جواب‌ها رسید.
الف) متقاطع
ب) متقاطع یا موازی
ج) موازی یا منطبق یا متقاطع

ایستگاه یادگیری

۱- دو صفحه را موازی می‌گوییم هرگاه هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند، مثل سقف اتاق و کف آن.

۲- اگر دو صفحه با هم برخورد کنند (و منطبق نشوند)، محل برخورد آنها یک خط تشکیل می‌دهد که آن خط را فصل مشترک دو صفحه می‌گویند.

۳- دو صفحهٔ منطبق بر هم، در واقع یکی هستند.

٤- وضعیت دو صفحه نسبت به یکدیگر، دو صفحه با هم موازی یا متقاطع هستند.

۸۲

سؤال متن

اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراک نداشته باشند، نسبت به هم موازی هستند.

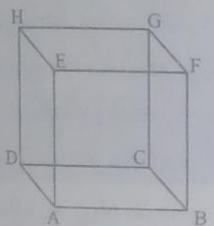
اگر دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم متقاطع هستند. خط راستی که اشتراک دو صفحهٔ متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود.

دو صفحه در فضا نسبت به هم متقاطع یا موازی هستند.

۸۲

کار در کلاس

به این مکعب دقت کنید:



الف) خط‌های GF و DA نسبت به هم چه وضعی دارند؟ موازی

HG و DC چطور؟ موازی

EF و GC چطور؟ متنافر

ب) هر خط با چند خط دیگر متقاطع است؟ ۴ خط

با چند خط موازی است؟ ۳ خط

با چند خط متنافر است؟ ۴ خط

ج) HD با کدام صفحه موازی است؟ GFBC و EFBA

با کدام متقاطع است؟ BCDA و HGFE

بر کدام منطبق است؟ HEAD و HGCD

د) دو صفحهٔ موازی و دو صفحهٔ متقاطع نام ببرید.

صفحهٔ موازی: EFBA , HGCD

صفحهٔ متقاطع : GCDH, HGFE

ایستگاه یادگیری

۱- خط d را بر صفحهٔ P عمود می‌گوییم، هرگاه آن را در نقطه‌ای مانند M قطع کند و به تمام خط‌های منطبق بر صفحهٔ P و گذرنده از M عمود باشد.

۲- خط عمود بر دو خط متقاطع روی یک صفحه، آن صفحه نیز عمود است.

۳- دو صفحهٔ عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.

٤- دو خط عمود بر یک صفحه، با هم موازی‌اند.

۵- اگر خطی بر یکی از صفحات موازی عمود باشد، بر دیگری نیز عمود است.

٦- از یک نقطه خارج صفحه، یک خط عمود بر آن صفحه می‌توان رسم کرد.

۷- خط d و صفحهٔ P با هم موازی‌اند، فقط یک صفحه مانند P′ وجود دارد که شامل خط d بوده و بر P عمود است.

۸- دو صفحهٔ P_1 و P_2 متقاطع و بر P_3 عمود هستند، فصل مشترک آنها نیز بر P_3 عمود است.

۹- خط d و d′ متنافر هستند، خطی را که بر هر دوی این خط‌ها عمود باشد **خط عمود مشترک** دو خط متنافر d و d′ می‌گویند.

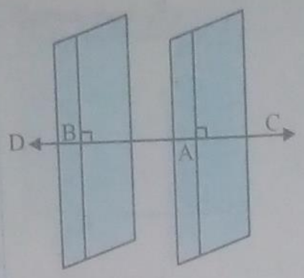
کار در کلاس

۸۳

می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی هستند؟

بله، دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند. (مطابق شکل (۱))



ب) آیا دو صفحهٔ عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی هستند؟

خیر، دو صفحهٔ متقاطع هم می‌توانند بر یک صفحه عمود باشند. (مطابق شکل (۲))

ج) دو صفحهٔ عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟

با هم موازی‌اند. (مطابق شکل (۴))

د) اگر خطی بر یکی از دو صفحهٔ موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟ بر دیگری نیز عمود است. (مطابق شکل (۴))

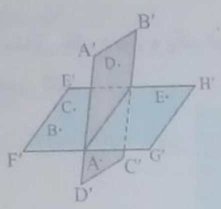
هـ) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید.

خط دوم نیز بر آن صفحه عمود است. (مطابق شکل (۳))

تمرین

۸۴

۱- با توجه به شکل به سؤالات پاسخ دهید:



الف) چند صفحه در شکل می‌بینید، نام ببرید.

۲ صفحهٔ متقاطع $A'B'C'D'$ و $E'F'G'H'$

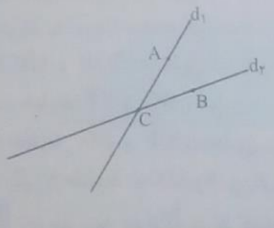
ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه‌اند. B, C, E

ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند. B, E, A, D

د) دو خط AB و CE نسبت به هم چه وضعی دارند؟ متنافر

AC و CE چطور؟ متقاطع، در نقطهٔ C همدیگر را قطع می‌کنند.

۲- خطوط d_1 و d_2 و نقاط A و B و C مانند شکل مقابل‌اند. صفحهٔ P را در حالت‌های زیر در نظر بگیرید و وضعیت نسبی آن را با هر یک از خطوط d_1 و d_2 بررسی کنید.



الف) صفحهٔ P شامل نقطهٔ C است.

دو حالت وجود دارد، خط‌های d_1 و d_2 بر صفحهٔ P منطبق باشند یا دو خط و صفحه با هم متقاطع.

ب) صفحهٔ P شامل نقاط A و C باشد ولی شامل B نباشد.

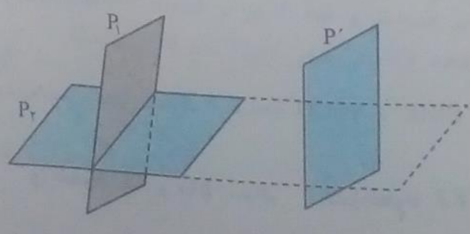
صفحهٔ P شامل خط d_1 است و با d_2 متقاطع است.

ج) صفحهٔ P شامل نقاط C و B و A است. دو خط منطبق بر صفحهٔ P هستند.

د) صفحهٔ P شامل خط d_1 و نقطهٔ B است. دو خط d_1 و d_2 منطبق بر صفحهٔ P هستند.

۳- دو صفحهٔ P_1 و P_2 را به گونه‌ای در نظر بگیرید که متقاطع باشند و خط d فصل مشترک آنها باشد. (در هر دو حالت الف و ب تصویر مناسب را رسم کنید).

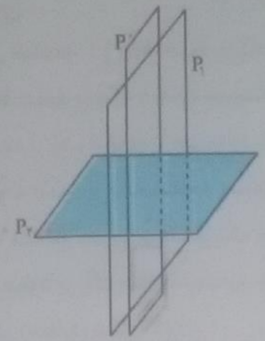
الف) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 موازی باشد، نسبت به P_2 چه وضعیتی خواهد داشت؟ صفحهٔ P' با صفحهٔ P_2 متقاطع خواهد بود. صفحهٔ P_1 و P_2 متقاطع و P_1 با P' موازی است.



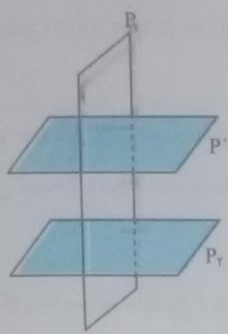
ب) اگر P' صفحه‌ای باشد که با P_1 متقاطع است، با P_2 چه وضعیتی می‌تواند داشته باشد؟

صفحهٔ P' با صفحهٔ P_2 می‌تواند موازی یا متقاطع باشد.

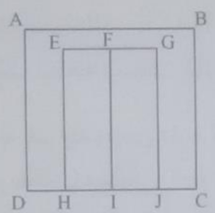
حالت متقاطع با P_2 :



حالت موازی با P_2 :



۴- شکل مقابل یک دیوار و یک در دولنگه که در دیوار قرار گرفته است نشان می‌دهد. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.



الف) وضعیت صفحات EFIH و ABCD و FGJI را دوبه‌دو نسبت به هم بررسی کنید.

EFIH و ABCD : منطبق　　　EFIH و FGJI : منطبق

(باتوجّه به تعریف صفحه که امتداد دارد می‌توان گفت که این دو صفحه بر هم منطبق هستند.)

ABCD و FGJI : منطبق

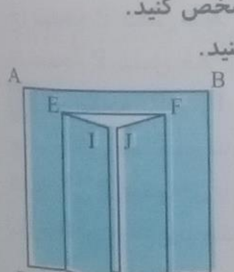
ب) خطوط FI و BC : موازی　　　**ج) خطوط FI و AB** : متقاطع

د) خطوط FG و EF : منطبق　　　**هـ) خطوط FG و HI** : موازی

و) یکی از خطوط (به دلخواه) و یکی از صفحات (به دلخواه): خط GJو صفحهٔ ABCD : منطبق

۵- تجسم کنید دو لنگهٔ در هرکدام 30° باز شده‌اند، وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحه‌های EIKH و ABCD و JFGL را دوبه‌دو نسبت به هم بررسی کنید.



EIKH و ABCD : متقاطع　　　JFGL و ABCD : متقاطع

EIKH و JFGL : متقاطع (چون صفحه امتدادپذیر است.)

ب) خط FJ و صفحهٔ EIKH : متقاطع

ج) خط JL و صفحهٔ EIKH : موازی

د) خط EH نسبت به هریک از صفحات

EH و EIKH : منطبق

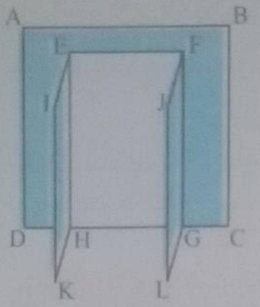
EX و ABCD : منطبق، با توجه به تصویر فصل مشترک دو صفحهٔ ABCD و EIHK است.

EH و JFGL : موازی

هـ) خطوط EI و JF : متقاطع　　**و) خطوط EI و FG** : متنافر　　**ت) خطوط FJ و BC** : متنافر

۶- تصور کنید دو لنگهٔ در هر کدام 90° باز شده‌اند. وضعیت خط‌ها و صفحه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وضعیت صفحات EIKH و ABCD و FGLJ را دوبه‌دو نسبت به هم بررسی کنید.



EIKH و ABCD : متقاطع (عمود)

EIKH و FGLJ : موازی

FGLJ و ABCD : متقاطع (عمود)

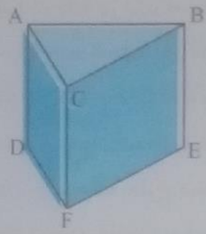
ب) خط FJ و صفحهٔ EIKH : موازی

ج) خط JL و صفحهٔ EIKH : موازی

د) خطوط EI و FJ : موازی

هـ) خطوط FJ و HK : موازی

۷- منشور سه پهلوی زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:



الف) سه جفت خط متمایز دوبه‌دو موازی نام ببرید.

(پاسخ پیشنهادی) AB, DE / CF, BE / DF, AC

ب) سه جفت خط متمایز دوبه‌دو متنافر نام ببرید.

(پاسخ پیشنهادی) BE, AC / AB, EF / DE, CB

ج) سه جفت خط دوبه‌دو متقاطع نام ببرید.

(پاسخ پیشنهادی) EF, DE / BE, BC / BC, AC

د) سه خط همرس نام ببرید.

(پاسخ پیشنهادی) BE, DE, FE

هـ) سه جفت خط و صفحهٔ موازی نام ببرید.

BC , DEF / FE , ABC / BE , ACFD

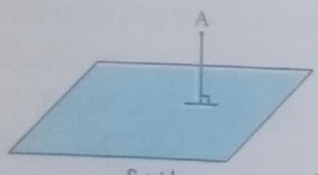
و) دو صفحهٔ موازی نام ببرید.

(پاسخ پیشنهادی) DEF , ABC

ز) سه صفحهٔ دوبه‌دو متقاطع نام ببرید.

(پاسخ پیشنهادی) BCFE, ABED, ADFC

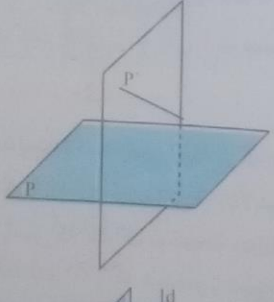
۸- از هر نقطهٔ غیرواقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟ فقط یک خط می‌توان عمود کرد.



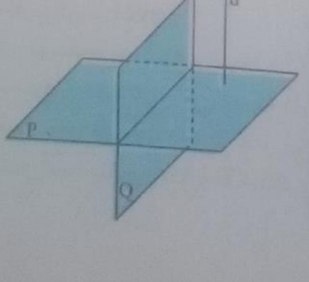
۹- از هر خط غیرواقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

الف) خط بر صفحه عمود باشد. بی‌شمار صفحه می‌توان رسم کرد.

ب) خط بر صفحه عمود نباشد. یک صفحه می‌توان رسم کرد.



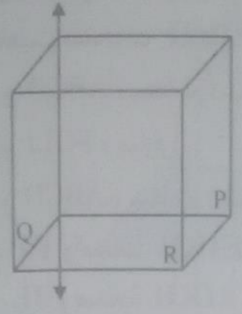
۱۰- دو صفحه P و Q بر هم عمودند و خط d نیز بر صفحهٔ P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟ خط d با صفحهٔ Q موازی است.



هندسه

۱۷- دو صفحهٔ متقاطع P و Q بر صفحهٔ R عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به صفحهٔ R چه وضعیتی دارد؟

فصل مشترک این دو صفحه، خط d است که بر صفحهٔ R است.



ارزشیابی مستمر

۱- درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. (۰/۵ نمره)

الف) دو خط در یک صفحه، یا موازی یا متقاطع هستند. ☐ درست ☐ نادرست

ب) اگر دو صفحه با هم نقطه اشتراکی نداشته باشند، نسبت به هم موازی هستند. ☐ درست ☐ نادرست

۲- جاهای خالی را با کلمه و یا عبارت‌های مناسب کامل کنید. (۰/۵)

الف) اگر خط و صفحه با هم نقطه اشتراک داشته باشند، نسبت به هم .... هستند.

ب) از یک نقطه خارج صفحه، .... خط عمود بر صفحه می‌توان رسم کرد.

۳- گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (۰/۵)

الف) اگر دو صفحه فقط در یک خط راست مشترک باشند، نسبت به هم .... هستند.

۱) متقاطع ۲) منطبق

ب) از یک خط در فضا، .... صفحه می‌گذرد.

۱) بی‌شمار ۲) یک

۴- فصل مشترک دو خط را تعریف کنید. (۰/۷۵)

۵- دو خط متنافر را تعریف کنید. (۰/۷۵)

۶- دو صفحه عمود بر هم را تعریف کنید. (۱)

چهار نقطهٔ D و C و B و A که بر یک صفحه واقع نیستند، مفروض هستند. ثابت کنید پاره‌خط‌های AB و CD متنافر هستند. (۲)

سه خط l_1 و l_2 و l_3 دوبه‌دو متقاطع هستند ولی همرس نیستند. ثابت کنید که این سه خط در یک صفحه قرار دارند. (۲) (خرداد ۹۰)

از نقطهٔ A خارج خط l، یک صفحهٔ عمود بر l می‌گذرانیم. ثابت کنید این صفحه یکتاست. (۱) (خرداد ۹۳)

ثابت کنید خطی که با یکی از دو صفحهٔ موازی، موازی است با دیگری هم موازی است. (۱) (شهریور ۹۳)

پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) درست (۰/۲۵)، درست (۰/۲۵) ۲ الف) متقاطع (۰/۲۵)، ب) یک (۰/۲۵)

۳ الف) گزینهٔ (۱) (۰/۲۵)، ب) گزینهٔ ۱ (۰/۲۵)

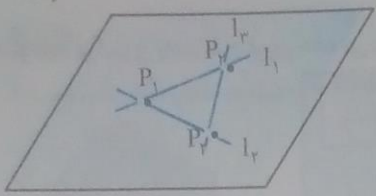
۴ خط راستی که اشتراک دو صفحهٔ متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود. (۰/۷۵)

۵ دو خط d و d′ را که همدیگر را قطع نمی‌کنند و هیچ صفحه‌ای هم وجود ندارد که شامل هر دوی آنها باشد، دو خط متنافر می‌گویند. (۰/۷۵)

۶ دو صفحه عمود بر هم هستند هرگاه هر کدام شامل خطی باشند که بر دیگری عمود است. (۱)

۷ برهان خلف: فرض می‌کنیم که AB و CD متنافر نباشند (۰/۵) در آن صورت یا متقاطع هستند و یا موازی که در هر دو صورت صفحه‌ای وجود دارد که شامل این دو پاره‌خط شود. (۰/۵) پس ۴ نقطه در یک صفحه قرار می‌گیرد که با فرض اولیه در تناقض است. بنابراین AB و CD متنافر هستند. (۱)

۸ چون ۳ خط دوبه‌دو متقاطع هستند، فرض می‌کنیم که P_1 و P_2 و P_3 نقاط برخورد باشند. (۰/۵) از طرفی این ۳ نقطه متمایز هستند و بر یک خط واقع نمی‌شوند (۰/۵) همچنین که از ۳ نقطه متمایز یک صفحه عبور می‌کند.(۰/۵) از هر خط دو نقطه‌اش روی این صفحه واقع است، بنابراین هر سه روی این صفحه قرار دارند.(۰/۵)



۹ فرض خلف: فرض می‌کنیم که از نقطهٔ A دو صفحهٔ P و P' وجود دارد که بر l عمود است. (۰/۲۵)
P بر L عمود است، تمام خطوط که از محل تلاقی P و l می‌گذرد نیز بر L عمودِ است و فقط یک خط در P وجود دارد که از A عبور کرده و بر l عمود می‌شود که آن را l_1 می‌نامیم.(۰/۲۵) از عمود بودن P' بر l نیز می‌توان نتیجه گرفت که خط دومی، مانند l_2 وجود دارد که از A عبور کرده و بر l عمود است. (۰/۲۵)
یعنی دو خط l_2 و l_1 از نقطهٔ A عبور کرده و بر l عمود شده‌اند که این متناقض است با اینکه «از یک نقطه خارج خط فقط یک عمود می‌توان بر آن رسم کرد.» پس P و P' یکی و بر هم منطبق‌اند. (۰/۲۵)

۱۰ فرض کنیم که صفحه‌های P و P' موازی‌اند و l با P موازی است. (۰/۲۵)
فرض خلف: صفحهٔ P' با خط l موازی نیست، بنابراین خط L ،صفحهٔ P' را قطع می‌کند، (۰/۲۵) چون «اگر خطی یکی از صفحات موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند»، خط l صفحهٔ P را نیز باید قطع کنند که خلاف فرض اولیه است. (۰/۲۵)
پس l، P' را قطع نکرده و با آن موازی است. (۰/۲۵)

درس ۲ تفکر تجسمی

مفاهیم آموزشی

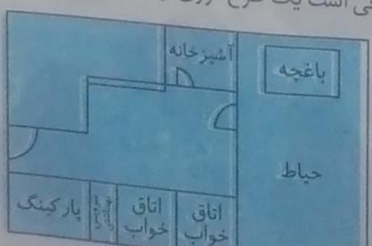
۱- هرگاه در تفکر به‌جای استفاده از عبارت‌ها، کلمات و یا شیوه‌های زبانی از تصاویر استفاده کردیم، این نوع تفکر را تفکر تجسمی می‌گویند.
۲- در تفکر تجسمی ۳ نما بیشتر از همه کاربرد دارد:
a) نمای بالا
b) نمای چپ
c) نمای روبه‌رو
۳- از تفکر تجسمی در صنعت برای تولید قطعات و طراحی آنها قبل از تولید استفاده می‌شود.

تفکر تجسمی ۸۷

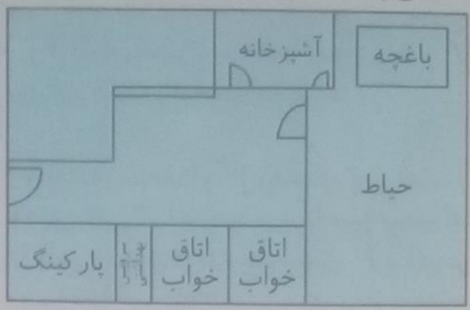
چهرهٔ پدر یا مادر خود را در ذهن تصور کنید. چه ویژگی‌هایی دارند؟ موهای سفید و چین‌هایی در صورت، قامت خمیده.
به نظر شما اگر ده سال جوان‌تر یا ده سال پیرتر بودند به چه شکل بودند؟ مسلماً، ده سال قبل موهای سفید و چین و چروک‌ها کمتر بوده ولی ده سال بعد بیشتر می‌شود.
در شکل روبه‌رو چند پرتقال روی میز چیده شده است؟
تقریباً

$$۶۵۰ = ۱ + (۲ \times ۲) + \ldots + (۱۱ \times ۱۱)(۱۲ \times ۱۲)$$

- سعی کنید برای دوستان توصیف کنید که خانه‌تان[1] به چه شکلی است؟ تصور کنید یک اتاق کمتر یا آشپزخانهٔ بزرگ‌تری داشتید. در این‌صورت خانهٔ جدید، چه شکلی می‌توانست داشته باشد؟
برای توصیف کلی خانه برای دوستان کافی است یک طرح فوری از خانه خود رسم کنید.



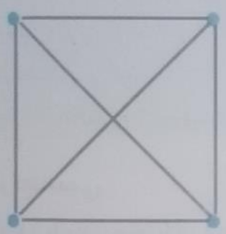
آشپزخانه بزرگ‌تری باشد طرح فوری خانه می‌تواند به شکل زیر باشد:



- در بسیاری از موارد مانندن آنچه در تصویر می‌بینید، لازم است تصویری از مسیر حرکتمان را ترسیم کنیم. شما هم طرح فوری مسیر خانه تا مدرسه را برای دوستتان رسم کنید:

در شکل روبه‌رو چه می‌بینید؟ یک چهار ضلعی که قطرهایش رسم شده است

اگر بدانید که این تصویر به یک جسم هندسی مربوط است که از بالا به آن نگاه شده است، چه جسم هندسی را تصور می‌کنید؟ هرم



سؤال متن

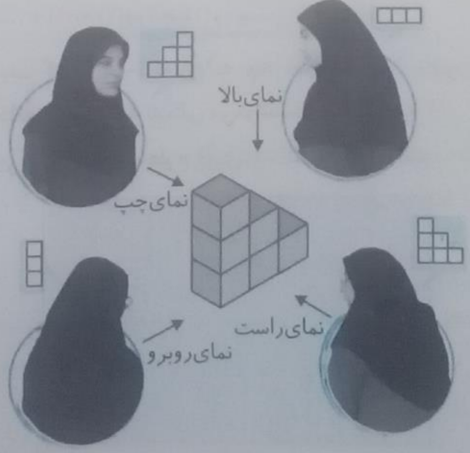
۸۸

- تصویر زیر چه چیزی را به شما نشان می‌دهد؟ بستگی به زاویهٔ دید دارد.

آیا می‌توان ادعا کرد که یکی از این تصاویر نسبت به بقیه کامل‌تر یا بهتر است؟ خیر

آیا می‌توان بدون چرخاندن شکل یا تغییر زاویهٔ دید، تمام این تصاویر را دید؟ خیر

آیا نمونه‌هایی شبیه به این موضوع را در زندگی واقعی دیده‌اید؟ بله، به‌طور مثال دیدن یک ساختمان که از زاویه‌های مختلف نماهای مختلف دارد.



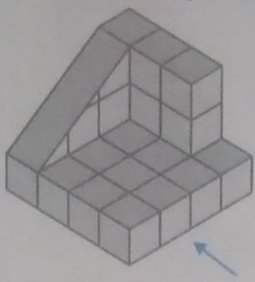
کار در کلاس ۸۹

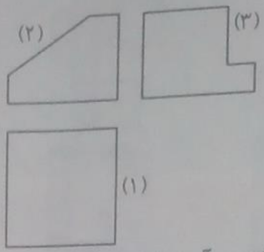
۱- شکل زیر از نماهای مختلف رسم شده است. مشخص کنید در هر تصویر از کدام جهت به شکل نگاه شده است؟

نمای بالا ← (۱)

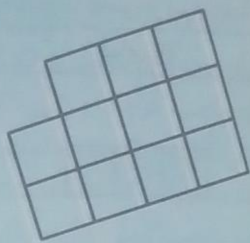
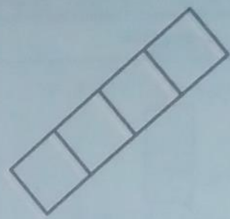
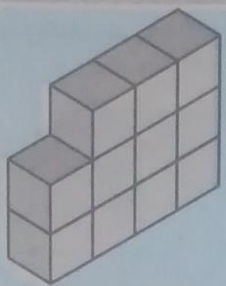
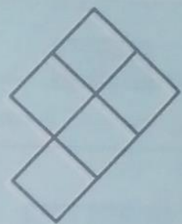
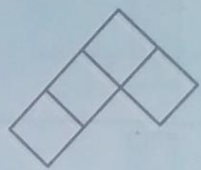
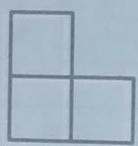
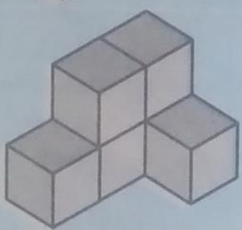
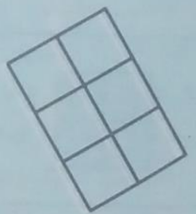
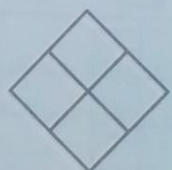
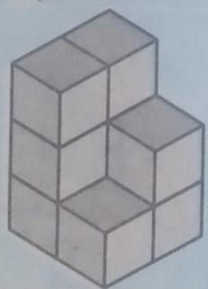
نمای روبه‌رو ← (۲)

نمای چپ ← (۳)



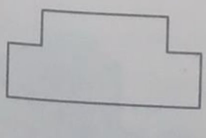


۲- سعی کنید از جهت‌های مختلف به هر شکل نگاه کرده و آن نما را رسم کنید.

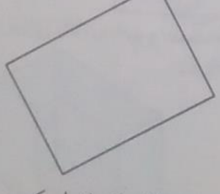
نمای روبه‌رو	نمای بالا	نمای چپ	
			
			
			

۳- دو مکعب مستطیل را روی هم قرار داده‌ایم. ابعاد مکعب مستطیل بالایی از مکعب مستطیل پایینی کمتر است.

تصویری از این دو مکعب مستطیل رسم کنید که نمای روبه‌رو و نمای بالا را نشان دهد.



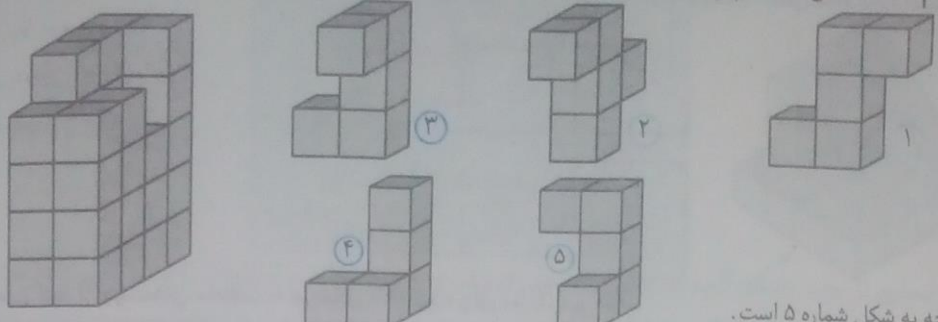
نمای روبه‌رو



نمای بالای که فقط مکعب پایین را نشان می‌دهد.

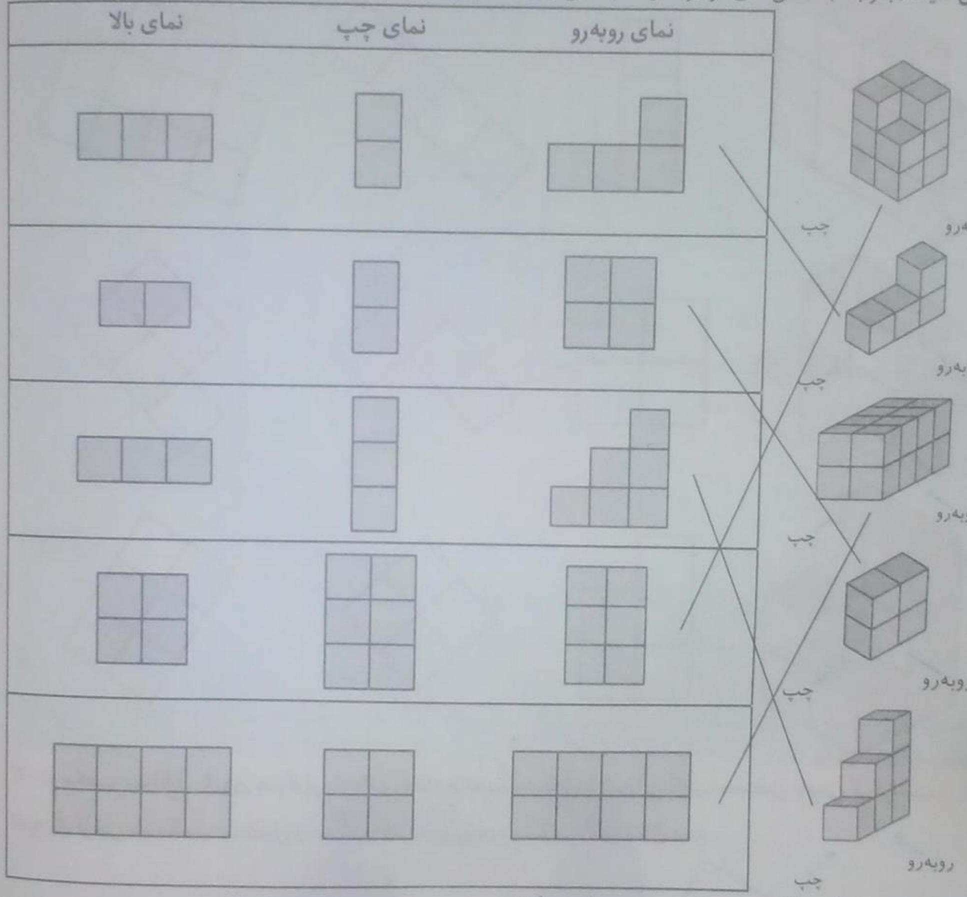
تمرین

۱- کدام قطعه، شکل سمت چپ را به یک مکعب مستطیل کامل تبدیل می‌کند؟

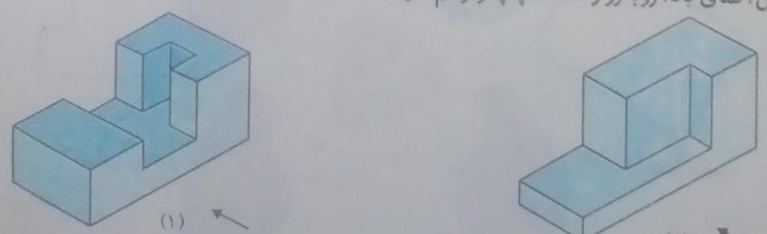


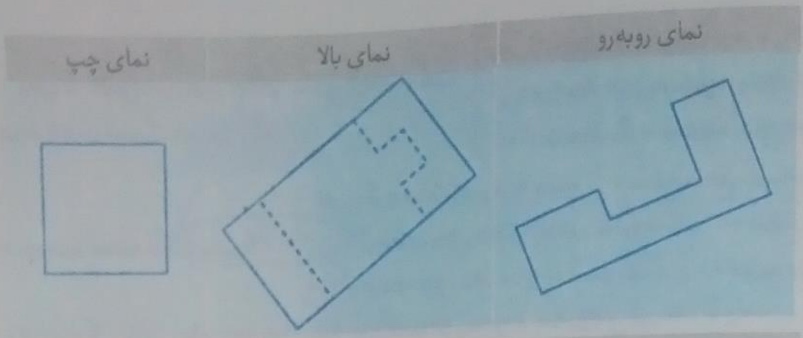
با توجه به شکل شماره ۵ است.

۲- نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید. (باتوجه به شکل‌های موجود در کتاب نمی‌توان به تمرین مربوطه پاسخ داد. لذا پاسخ ما به‌صورت زیر است:)

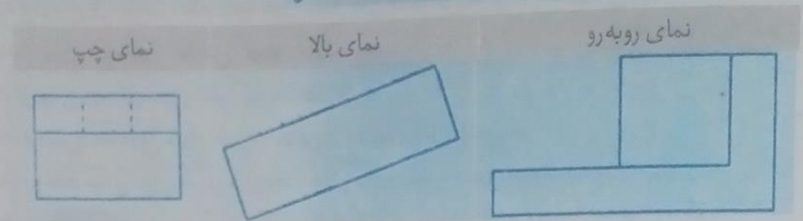


۳- در هر شکل، نمای بالا، روبه‌رو و سمت چپ را رسم کنید.



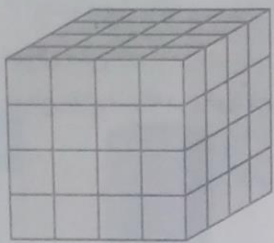


شکل شماره (۱)



شکل شماره (۲)

۴- تمام وجه‌های مکعبی را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم.



- چند مکعب کوچک در این شکل وجود دارد؟ ۶۴=۴×۱۶

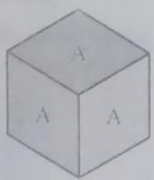
- چند مکعب، رنگ نشده است؟ ۸

- چند مکعب، رنگ شده است؟ ۵۶=۸-۶۴

- چند مکعب، فقط دو وجه رنگ شده دارد؟ ۲۴=۸+۱۶

- چند مکعب، سه وجه رنگ شده دارد؟ ۸ مکعب‌های واقع در گوشه

۵- روی تمام وجه‌های مکعب‌هایی حرف A نوشته شده است. ۸ تا از این مکعب‌ها را به شکل ستونی روی هم می‌چینیم. چند حرف A دیده می‌شود؟

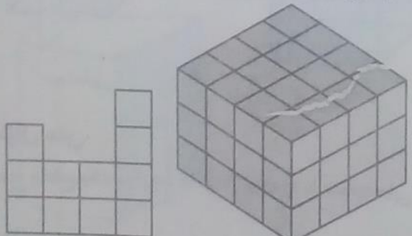


۸ کلمهٔ A در روبه‌رو
۸ کلمهٔ P در پشت
۸ کلمهٔ P در سمت چپ
۸ کلمهٔ P اما سمت راست
و یک کلمهٔ A از بالا و پایین

در کل ۳۴ = ۱×۲ + ۸×۴

۶- شکل سمت چپ از چند مکعب کوچک تشکیل شده است؟

حداقل چند تا و حداکثر چند مکعب باید برداشته شود تا نمای بالا به این شکل باشد؟



۴۸=۳×۱۶ مکعب کوچک وجود دارد.

حداقل ۱۵=۳×۵ مکعب و حداکثر ۳۷=۵+۲، ...

باید برداشته شود.

ایستگاه یادگیری

برش و دوران حول محور:

۱- شکل حاصل از برخورد یک صفحه با جسم هندسی را سطح مقطع می‌نامند.

۲- سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحهٔ افقی یک دایره است.

۳- سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحهٔ عمودی یک مستطیل است.

۴- سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحهٔ به‌طور مایل یک بیضی است.

۵- مخروط ناقص: از برخورد صفحهٔ موازی با قاعده یک مخروط قائم دو قسمت به وجود می‌آید:

الف) مخروط کوچک‌تر
ب) مخروط ناقص (بخش زیرین) که قاعده‌های آن دو دایره نامساوی است.

۶- در برخورد صفحه با یک مخروط

الف) اگر صفحه موازی قاعده باشد ← سطح مقطع دایره است.
ب) اگر صفحه مایل باشد و از قاعدهٔ مخروط نگذرد ← سطح مقطع بیضی است.
ج) اگر صفحه مایل باشد و از قاعدهٔ مخروط بگذرد ← سطح مقطع سهمی است.

۷- از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع های قائمه‌اش مخروط به دست می‌آید.

۸- از دوران دایره حول قطرش کره به دست می‌آید.

۹- از دوران نیم دایره حول قطر، کره به دست می‌آید.

۱۰- از دوران مستطیل حول طول یا عرض آن استوانه به دست می‌آید.

۱۱- دو خط موازی داریم. اگر یکی از آن‌ها را حول دیگری دوران دهیم، استوانه به دست می‌آید..

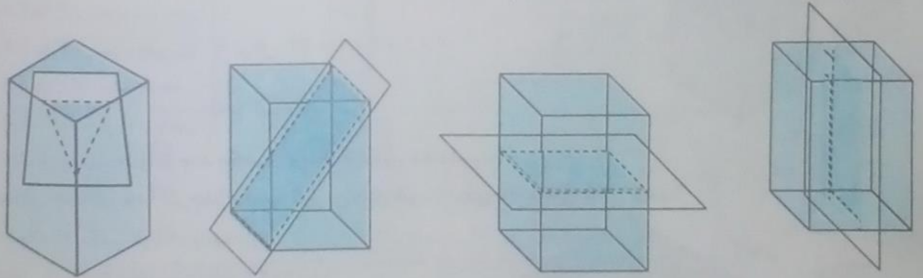
۱۲- دو خط متقاطع داریم. اگر یکی از آن‌ها را حول دیگری دوران دهیم، مخروط به دست می‌آید.

سؤال متن ۹۲

- سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحهٔ مایلی که از قاعدهٔ استوانه عبور نکند، به چه شکل است؟

مستطیل — بیضی — دایره

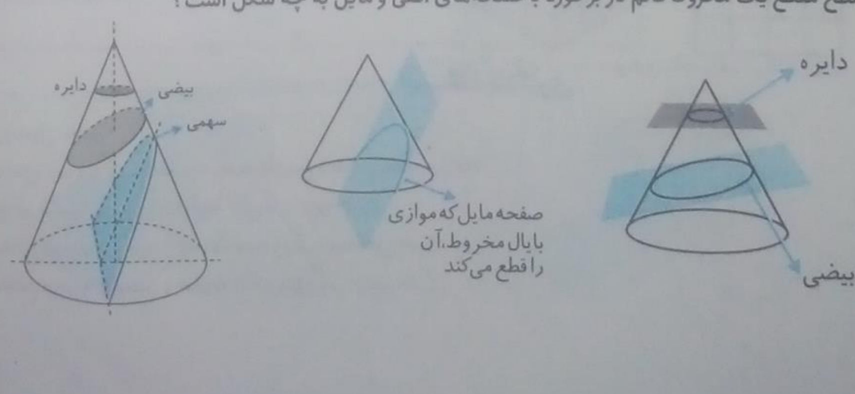
- سطح مقطع یک مکعب مستطیل با صفحه‌های قائم، افقی و مایل به چه شکل است؟



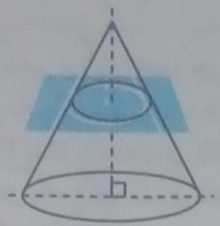
مستطیل — مستطیل — مستطیل — مثلث

سؤال متن ۹۳

سطح مقطع یک مخروط قائم در برخورد با صفحه‌های افقی و مایل به چه شکل است؟

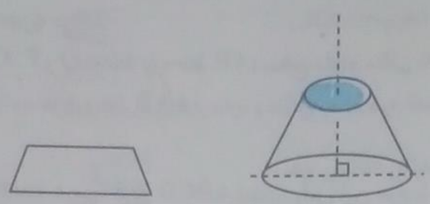


- مخروط قائمی را مطابق شکل با صفحه‌ای موازی قاعدهٔ آن برخورد داده‌ایم. این صفحه، مخروط را به دو بخش تقسیم می‌کند. بخش بالایی به چه شکل است؟ مخروط



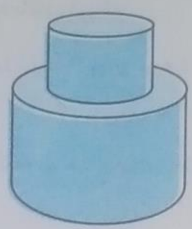
بخش زیرین را مخروط ناقص می‌نامند.

اگر صفحه‌ای به شکل عمودی مخروط ناقص را قطع کند سطح مقطع حاصل چیست؟ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

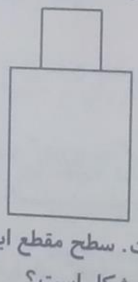


کار در کلاس ۹۳

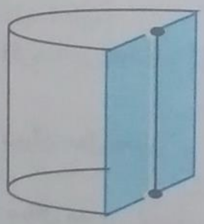
۱- دو استوانه را روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر دو این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟



دو مستطیل که روی هم قرار گرفته‌اند تقریباً به این صورت است.



۲- در شکل زیر نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌های افقی، عمودی و صفحهٔ مایلی که از قاعدهٔ استوانه عبور نکند، به چه شکل است؟



صفحهٔ افقی ← نیم‌دایره

صفحهٔ عمودی ← مستطیل

صفحهٔ مایل که از قاعدهٔ استوانه عبور نکند ← سهمی

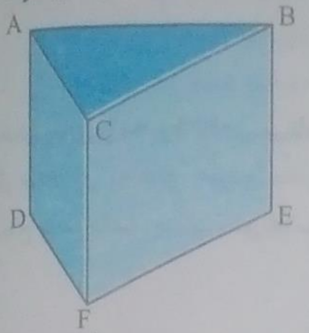
۳- سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ در چه صورت این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را خواهد داشت؟

سطح مقطع به صورت دایره است و زمانی بیشترین مساحت را خواهد داشت که صفحه از مرکز عبور کند.

۹۴

تمرین

۱- فرض کنید منشور زیر، یک قطعهٔ چوبی توپر باشد. این قطعهٔ چوبی را طوری اره می‌کنیم که از سه نقطهٔ مشخص عبور کند. در هر حالت مشخص کنید سطح مقطع به چه شکل است و منشور به چه شکل‌های فضایی تجزیه می‌شود؟

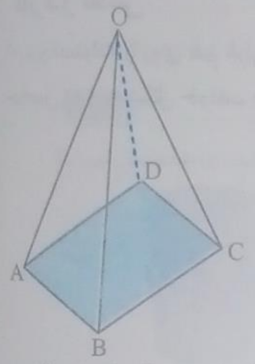


الف) M، N و P وسط پاره‌خط‌های BE، CF و AD سطح مقطع یک مثلث به اندازهٔ ABC و شکل به دو منشور مساوی تجزیه می‌شود.

ب) C، D و E سطوح مقطع یک مثلث به رئوس C, D, E است که شکل را به دو هرم تجزیه می‌کند.

ج) C، F و Q (وسط پاره‌خط AB) سطح مقطع مثلثی به رئوس Q و E و C است که Q وسط پاره‌خط AB قرار دارد و شکل به دو هرم تقسیم می‌شود.

۲- قاعدهٔ هرمی، مربع ABCD است. رأس این هرم را O نامیده‌ایم. سطح مقطع حاصل از برخورد صفحهٔ P را با این هرم در هر حالت مشخص کنید.

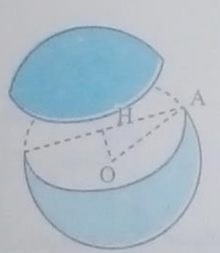


الف) صفحهٔ P بر ارتفاع هرم عمود باشد. مربع

ب) صفحهٔ P از O بگذرد و بر قاعدهٔ هرم عمود باشد. مثلث

ج) صفحهٔ P از O نگذرد ولی بر قاعدهٔ هرم عمود باشد. ذوزنقه

۳- صفحهٔ P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ O از صفحه ۳ سانتیمتر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟



با توجه به شکل می‌توان با استفاده از رابطهٔ فیثاغورث شعاع سطح مقطع (کره) را حساب کرد.

$$(OA)^۲ = (OH)^۲ + (AH)^۲ \rightarrow ۵^۲ = ۳^۲ + AH^۲ \rightarrow AH = ۴$$

$$\text{مساحت سطح مقطع } S = \pi r^۲ \rightarrow ۱۶\pi$$

۴- دو کره با شعاع‌های r و r' یک‌دیگر را قطع کرده‌اند. نقاط مشترک واقع بر روی هر دو کره روی چه شکلی قرار دارند؟ دایره

اگر همهٔ این نقاط را به مرکز یکی از دو کره وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ مخروط

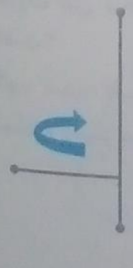
دوران حول محور

۹۵

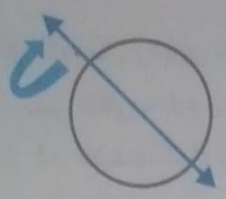
سؤال متن

- فرض کنید دو پاره‌خط بر هم عمودند و یکی را حول دیگری دوران داده‌ایم. چه شکل هندسی ساخته می‌شود؟

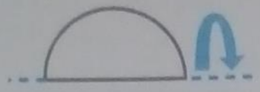
صفحه‌ای دایره شکل تشکیل می‌شود که خطی که حول آن دوران داده‌ایم بر مرکز آن عمود است.



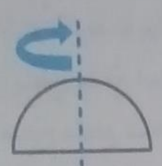
- دایره‌ای به شعاع r را حول یکی از قطرهای آن دوران داده‌ایم. شکل حاصل چیست؟ کره



- یک نیم‌دایره را حول قطر دوران می‌دهیم. شکل حاصل چه خواهد بود؟ کره

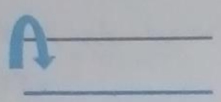


- اگر همین نیم‌دایره را حول شعاع عمود بر قطر داده شده دوران دهیم، چه شکلی ساخته می‌شود؟ نیم کره

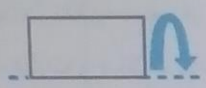


- اگر ربع یک دایره را حول شعاع مشخص شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟ نیم کره

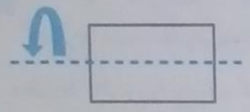
- دو خط موازی در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم چه جسم هندسی ساخته می‌شود؟ استوانهٔ تو خالی



- اگر یک مستطیل را حول طول یا عرض آن دوران دهیم چطور؟ استوانهٔ توپر



- اگر مستطیل را مطابق شکل، حول محور داده شده دوران دهیم، شکل حاصل چه خواهد بود؟ استوانهٔ توپر



تمرین ۹۶

۱- دو خط متقاطع را مطابق شکل در نظر بگیرید. اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم چه جسم هندسی ساخته می‌شود؟ مخروط

۲- در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

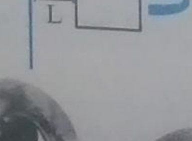
الف) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع آن: مخروط

ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع زاویهٔ قائمه: مخروط

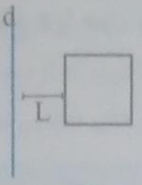
پ) دوران یک ذوزنقه قائم‌الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌ها: مخروط ناقص

ت) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول قاعده آن: شکلی شبیه به قسمت دایره‌ای شکل فرفرهٔ دو مخروط به هم چسبیده.

۳- مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.
شکلی شبیه به لاستیک ماشین



۴- شکل زیر را در نظر بگیرید. این شکل از دوران کدام شکل هندسی حول یک محور ساخته می‌شود؟ تصویر مناسبی برای آن رسم کنید.



این شکل‌ها حاصل از دوران شکل مانند شکل تمرین شمارهٔ ۳ است. یعنی شکلی به فرم روبه‌رو که مقدار L در حقیقت، شعاع دایرهٔ داخلی است.

ارزشیابی مستمر

۱- درست و نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. (۰/۵ نمره)

الف) سطح مقطع استوانه با یک صفحه افقی دایره است. ☐ درست ☐ نادرست

ب) سطح مقطع مکعب مستطیل با یک صفحه عمودی مربع است. ☐ درست ☐ نادرست

۲- جاهای خالی را با کلمات و یا عبارت‌های مناسب کامل کنید. (۰/۵)

الف) شکل حاصل از دوران نیم کره حول قطرش .... است.

ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع‌های زاویهٔ قائمه .... است.

۳- گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (۰/۵)

الف) از دوران دایره حول قطرش .... به‌دست می‌آید.

۱) کره   ب) بیضی

ب) در تفکر تجسمی از .... برای تفکر استفاده می‌کنیم.

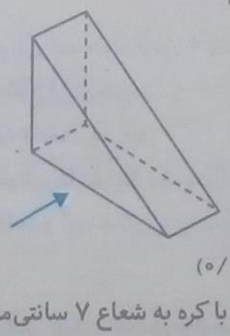
۱) عبارت و جملات زبانی   ۲) تصاویر

۴- نام شکل‌های سطح مقطع مخروط را در برخورد با صفحات افقی، صفحه مایلی که از قاعده بگذرد و صفحه مایلی که از قاعده نگذرد، بنویسید. (۱/۵)

۵- مخروط ناقص را تعریف کنید. (۱)

۶- مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول ضلع‌های a و b دوران داده‌ایم. نسبت حجم شکل‌های حاصل از این دوران را به دست آورید. (۲)

۷- نمای بالا، چپ و روبه‌رو را در شکل زیر رسم کنید. (۰/۷۵)



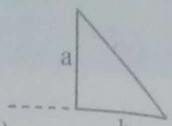
۸- سطح مقطع یک شکل را تعریف کنید. (۰/۷۵)

۹- مساحت شکل حاصل از برخورد صفحه P با کره به شعاع ۷ سانتی‌متر را به‌دست آورید. (فاصله صفحه تا مرکز کره ۴ سانتی‌متر است.) (۱/۵)

۱۰- مستطیلی داریم به طول a و عرض b . حجم حاصل از دوران حول طول و عرض آن را به‌دست آورید. نسبت حجم‌ها را محاسبه کنید. (۱)

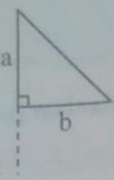
پاسخ ارزشیابی مستمر

۱ الف) درست (۰/۲۵)، ب) نادرست (۰/۲۵) ۲ الف) کره (۰/۲۵)، ب) مخروط (۰/۲۵) ۳ الف) گزینهٔ ۱ کره (۰/۲۵)، ب) گزینهٔ ۲ تصاویر (۰/۲۵) ۴ صفحه موازی قاعده ← دایره (۰/۵) صفحه مایلی که از قاعده بگذرد ← سهمی (۰/۵) صفحه مایلی که از قاعده نگذرد ← بیضی (۰/۵) ۵ از برخورد مخروط با صفحه افقی و موازی قاعده دو قسمت به‌وجود می‌آید که به قسمت پایین مخروط ناقص می‌گوییم. در حقیقت، مخروط ناقص دارای ۲ قاعدهٔ نامساوی است. (۰/۵)

۶


مخروط حاصل به ارتفاع b و شعاع قاعده a

$$V_۲ = \frac{۱}{۳} b(\pi a^۲) \quad (۰/۵)$$



حول ضلع a مخروطی حاصل می‌شود که ارتفاع آن a و شعاع قاعده b

$$V_۱ = \frac{۱}{۳} a(\pi b^۲) \quad (۰/۵)$$

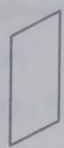
$$\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۳}} \cancel{a}(\cancel{\pi} b^{\cancel{۲}})}{\cancel{\frac{۱}{۳}} \cancel{b}(\cancel{\pi} a^{\cancel{۲}})} = \frac{b}{a} \quad (۰/۵)$$

۷

نمای بالا

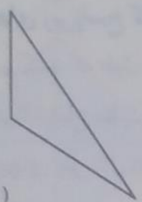
(۰/۲۵)

نمای چپ



(۰/۲۵)

نمای روبه‌رو



(۰/۲۵)

۸ شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود سطح مقطع آن نامیده می‌شود. (۰/۷۵)

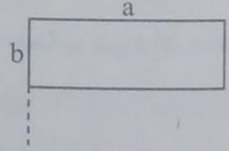
۹ شکل سطح مقطع، دایره است که شعاع آن از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$۷^۲ = ۴^۲ + x^۲ \xRightarrow{(۰/۵)} x^۲ = ۴۹ - ۱۶ \Rightarrow x^۲ = ۳۳ \Rightarrow x = \sqrt{۳۳}$$ شعاع دایره سطح مقطع (۰/۵)

مساحت دایره $= \pi r^۲ \Rightarrow$ مساحت سطح مقطع $= (\pi(\sqrt{۳۳})^۲ = ۳۳\pi$ (۰/۵)

۱۰

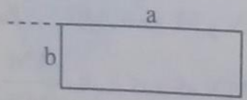
دوران حول b



استوانه به ارتفاع b و شعاع قاعدهٔ a

$$U_۲ = b(\pi a^۲) \quad (۰/۵)$$

دوران حول a



استوانه به ارتفاع a و شعاع قاعده b

$$U_۱ = a(\pi b^۲) \quad (۰/۵)$$

نسبت: $\frac{U_۱}{U_۲} = \frac{ab^۲\pi}{ba^۲\pi} = \frac{b}{a}$

سؤالات امتحانی

آزمون دی ماه (نوبت اول) — مدت: ...... — تاریخ: ......

الف) درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. ۰/۵

۱- از یک نقطه خارج خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد. ☐ درست ☐ نادرست

۲- هر دو مثلث متشابه، هم‌نهشت‌اند. ☐ درست ☐ نادرست

ب) جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب کامل کنید. ۰/۵

۳- فاصله هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن .... است.

۴- از یک نقطه خارج خط فقط .... خط عمود می‌توان به خط داده شده رسم کرد.

ج) گزینهٔ درست را انتخاب کنید. ۰/۵

۵- برای رسم یک خط متمایز داشتن .... کافی است.

الف) یک نقطه   ب) دو نقطه

۶- در مثلثی که $\hat{A} = 2\hat{B}$ و زاویهٔ $\hat{C} = 30^\circ$، زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟

الف) 50° ب) 100°

د) به سؤال‌های زیر پاسخ کامل دهید.

۷- مربعی رسم کنید که طول قطرهای آن برابر با ۴ سانتی‌متر است؟ ۱/۵

۸- ثابت کنید ۳ ارتفاع مثلث همرس‌اند. (تهران - خرداد ۹۴) ۲

۹- برای گزاره‌های زیر مثال نقض بیاورید. (تهران - خرداد ۸۷) ۱

الف) حاصل‌جمع دو عدد گنگ همیشه گنگ است.

ب) تمام عددهای حقیقی معکوس دارند.

۱۰- با استفاده از برهان خلف ثابت کنید: (تهران - خرداد ۹۰) ۱/۵

«از یک نقطه خارج خط فقط یک عمود می‌توان رسم کرد.»

۱۱- عکس قضیهٔ زیر را بنویسید. ۰/۵

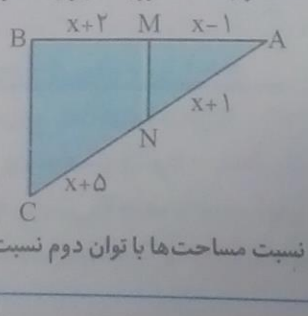
«اگر چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد آنگاه قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.»

۱۲- نقیض گزارهٔ «a مساوی b است.» را بنویسید. ۰/۵

۱۳- اگر در مثلث ABC نقطهٔ M و N طوری روی ضلع‌های AB و AC انتخاب شوند که داشته باشیم $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$، ثابت کنید که MN موازی BC است. (تبریز - خرداد ۸۷) ۲

۱۴- اگر $\frac{2}{3} = \frac{x}{y}$ باشد آن‌گاه حاصل $\frac{3y-3}{3x-2}$ را به‌دست آورید. (اهواز - خرداد ۸۸) ۱/۵

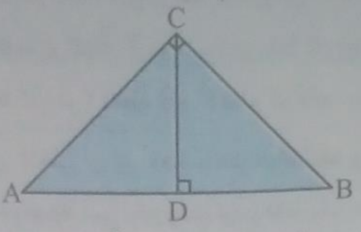
۱۵- در مثلث ABC پاره‌خط MN موازی BC است. به کمک قضیهٔ تالس مقدار x را به‌دست آورید. سپس نسبت محیط AMN به محیط ABC را به‌دست آورید. (تهران - خرداد ۸۶) ۲/۵



۲

۱۶- ثابت کنید در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با توان دوم نسبت تشابه برابر است. ۱/۵

۱۷- با توجه به شکل ثابت کنید که: $DC^{۲} = AD \times DB$ (تهران - خرداد ۸۴)



۲

۱۸- طول اضلاع یک مثلث به‌ترتیب ۶ و ۸ و ۹ است و طول کوچک‌ترین ضلع مثلث متشابه با آن برابر با ۸ است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید. (تهران خرداد – ۸۵)

پاسخ سؤالات امتحانی

۱ درست (۰/۲۵) ۲ نادرست (۰/۲۵) ۳ به یک فاصله (۰/۲۵) ۴ یک (۰/۲۵) ۵ گزینهٔ (ب) (۰/۲۵)

۶ گزینهٔ (ب) (۰/۲۵)

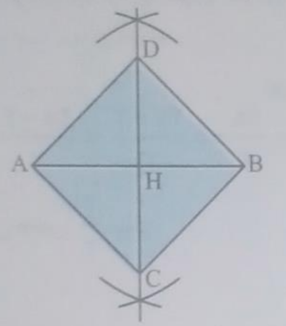
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$$

$$\hat{A} + \frac{۱}{۲}\hat{A} + ۳۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\hat{A} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = \frac{۱۵۰^\circ \times ۲}{۳} = ۱۰۰^\circ$$

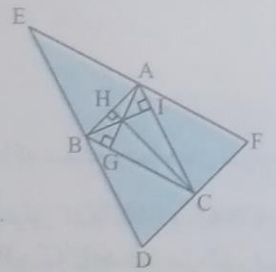
۷ در مربع قطرها عمودمنصف یکدیگر و برابر هستند. ابتدا پاره‌خط AB به‌طول ۴ سانتی‌متر را رسم کرده (۰/۵) و سپس عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم (۰/۵). محل برخورد عمودمنصف و AB را H می‌نامیم.

نقاط D و C را چنان اختیار می‌کنیم که $HD = HC = ۲$. (۰/۵).

نقاط A، B، C و D را به‌صورت متوالی به هم وصل می‌کنیم.



۸ مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته و از هررأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رسم می‌کنیم تا مطابق شکل مثلثی مانند DEF به‌وجود آید.



ازآنجا که $BC \parallel AF$ و $FC \parallel AB$ است بنابراین ABFC یک متوازی‌الاضلاع و درنتیجه:

$BC = AF (*)$ (۰/۵)

همچنین $BC \parallel AE$ و $BE \parallel AC$ ، بنابراین ACBE یک متوازی‌الاضلاع است که می‌توان نوشت:

$BC = AE \quad (**)$ (۰/۵)

از (*) و (**) می‌توان نتیجه گرفت که $AF = AE$ و این یعنی A نقطهٔ وسط EF است. (۰/۵)

با توجه به اینکه $\left.\begin{matrix} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG \perp EF$ لذا AG عمودمنصف EF است. به همین روش اثبات می‌شود که BJ و CH به‌ترتیب عمودمنصف‌های DE و DF هستند.

بنابراین ارتفاع‌های مثلث ABC روی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث EFD هستند و از آنجا که عمودمنصف‌ها همرسند، این ارتفاع‌ها نیز همرس می‌شوند. (۰/۵)

۹ الف)

$$\begin{matrix} \sqrt{۲} \in Q' \\ -\sqrt{۲} \in Q' \end{matrix} \rightarrow (\sqrt{۲}) + (-\sqrt{۲}) = ۰ \notin Q' \quad (۰/۵)$$

ب) عدد صفر معکوس ندارد، چون معکوس صفر $\frac{۱}{۰}$ می‌شود که تعریف نشده است. (۰/۵)

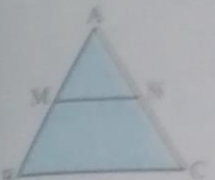
۱۰ خط d و نقطهٔ T روی خط d مفروض است.

فرض خلف: از نقطهٔ T دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم. (۰/۵) بنابراین این دو عمود خط d را در ۲ نقطهٔ B و C قطع کرده‌اند. بنابراین یک مثلث داریم که مجموع زاویه‌های داخلی آن از ۱۸۰° بیشتر خواهد شد و این امکان وجود ندارد. بنابراین از نقطهٔ T دو عمود نمی‌توان رسم کرد و فقط یک عمود می‌توانیم رسم کنیم. (۱)

۱۱ اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. (۰/۵)

۱۲ این طور نیست که ۵ مساوی ۸ باشد. یعنی ۵ مساوی ۸ نیست. (۰/۵)

۱۳ با توجه به مسئله، مثلث ABC را رسم می‌کنیم. (۰/۵)



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\overset{(۰/۵)}{\text{ترکیب در}}}\frac{AM}{MB+AM}=\frac{AN}{AN+NC}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\quad (۱)$$

دو مثلث AMN و ABC بنا به حالت متناسب بودن دو ضلع و برابری زاویهٔ بین، متشابه هستند (۰/۵). بنابراین داریم $\hat{M}=\hat{B}$ (۰/۵). با در نظر گرفتن خط AB به عنوان خط مورب و برابری $\hat{M}=\hat{B}$ می‌توان نتیجه گرفت که $MN \parallel BC$ است. (۰/۵)

۱۴

$$\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\text{معکوس طرفین}}\frac{y}{x}=\frac{۳}{۲}\xrightarrow[\text{در عددی ثابت ضرب کنیم}]{\text{می‌توان صورت و مخرج کسر را}}\frac{۳y}{۳x}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{۳y}{۳}=\frac{۳x}{۲}\Rightarrow\frac{۳y-۳}{۳}=\frac{۳x-۲}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۳y-۳}{۳x-۲}=\frac{۳}{۲}$$

حاصل همان $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۵

$$\frac{x-۱}{x+۲}\overset{(۱)}{=}\frac{x+۱}{x+۵}\Rightarrow(x-۱)(x+۵)=(x+۱)(x+۲)\quad(۰/۵)$$

$$\Rightarrow\cancel{x^۲}+۴x-۵=\cancel{x^۲}+۳x+۲\Rightarrow۴x-۳x=۲+۵\Rightarrow x=۷\quad(۰/۵)$$

$$AM=۶\ ,\ BM=۹\Rightarrow AB=۱۵$$

از آنجا که نسبت محیط همان نسبت تشابه است.

$$\frac{\text{محیط } AMN}{\text{محیط } ABC}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}\quad(۰/۵)$$

۱۶ فرض کنیم ABC و A′B′C′ دو مثلث متشابه که نسبت تشابه آنها k است. همچنین AH و A′H′ ارتفاع‌های وارد بر BC و B′C′ هستند. می‌دانیم نسبت بین ارتفاع‌ها در دو مثلث متشابه همان k می‌شود. (۰/۵)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}\overset{(۰/۵)}{=}\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}AH.BC}{\cancel{\frac{۱}{۲}}A'H'.B'C'}=\left(\frac{AH}{A'H'}\right).\left(\frac{BC}{B'C'}\right)=k.k=k^۲\quad(۱)$$

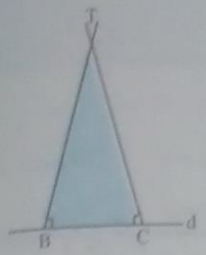
۱۷ در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر آن را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند. (۱) بنابراین داریم:

$$\Delta ADC\sim\Delta DCB\Rightarrow\frac{CD}{DB}=\frac{AD}{CD}\Rightarrow CD^۲=AD.DB\quad(۰/۵)$$

۱۸ نسبت تشابه برابر است با $\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۸}$ که همان نسبت بین محیط (۰/۵) است: محیط مثلث اول $۱۳+۸+۶=۲۷$

$$\frac{۲۷}{x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow x=\frac{۴\times\cancel{۲۷}^{۹}}{\cancel{۳}_{۱}}=۳۶\quad\text{محیط مثلث دوم}\quad(۰/۵)$$

۱۰ خط d و نقطهٔ T روی خط d مفروض است.

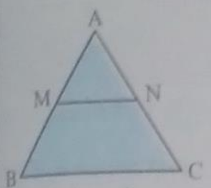


فرض خلف: از نقطهٔ T دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم. (۰/۵) بنابراین این دو عمود خط d را در ۲ نقطهٔ B و C قطع کرده‌اند. بنابراین یک مثلث داریم که مجموع زاویه‌های داخلی آن از °۱۸۰ بیشتر خواهد شد و این امکان وجود ندارد. بنابراین از نقطهٔ T دو عمود نمی‌توان رسم کرد و فقط یک عمود می‌توانیم رسم کنیم. (۱)

۱۱ اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. (۰/۵)

۱۲ این‌طور نیست که a مساوی b باشد، یعنی a مساوی b نیست. (۰/۵)

۱۳ با توجه به مسئله، مثلث ABC را رسم می‌کنیم: (۰/۵)



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\xRightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}\ (۰/۵)}\frac{AM}{MB+AM}=\frac{AN}{AN+NC}=\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\qquad (۱)$$

دو مثلث AMN و ABC بنا به حالت متناسب بودن دو ضلع (۱) و برابری زاویه با هم متشابه هستند (۰/۵). بنابراین داریم $\hat{M}=\hat{B}$ (۰/۵). با در نظر گرفتن خط AB به‌عنوان خط مورب و برابری $\hat{M}_۱=\hat{B}$ می‌توان نتیجه گرفت که $MN \parallel BC$ است. (۰/۵)

۱۴

$$\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}\xRightarrow{\text{معکوس طرفین}}\frac{y}{x}=\frac{۳}{۲}\xRightarrow[\text{در عددی ثابت ضرب کنیم.}]{\text{می‌توان صورت و مخرج کسر را}}\frac{۳y}{۳x}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\frac{۳y}{۳}\overset{(۰/۵)}{=}\frac{۳x}{۲}\Rightarrow\frac{۳y-۳}{۳}=\frac{۳x-۲}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۳y-۳}{۳x-۲}=\frac{۳}{۲}$$

حاصل همان $\frac{۳}{۲}$ است.

۱۵

$$\frac{x-۱}{x+۲}\overset{(۱)}{=}\frac{x+۱}{x+۵}\Rightarrow(x-۱)(x+۵)=(x+۱)(x+۲)\quad(۰/۵)$$

$$\Rightarrow\cancel{x^۲}+۴x-۵=\cancel{x^۲}+۳x+۲\Rightarrow۴x-۳x=۲+۵\Rightarrow x=۷\quad(۰/۵)$$

$AM=۶\ ,\ BM=۹\Rightarrow AB=۱۵$

از آنجا که نسبت محیط همان نسبت تشابه است.

$$\frac{\text{محیط } AMN}{\text{محیط } ABC}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}\quad(۰/۵)$$

۱۶ فرض کنیم ABC و A′B′C′ دو مثلث متشابه که نسبت تشابه آنها k است. همچنین AH و A′H′ ارتفاع‌های وارد بر BC و B′C′ هستند. می‌دانیم نسبت بین ارتفاع‌ها در دو مثلث متشابه همان k می‌شود. (۰/۵)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}\overset{(۰/۵)}{=}\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}AH.BC}{\cancel{\frac{۱}{۲}}A'H'.B'C'}=(\frac{AH}{A'H'}).(\frac{BC}{B'C'})=k.k=k^۲\quad(۱)$$

۱۷ در مثلث قائم‌زاویه ارتفاع وارد بر وتر آن را به دو مثلث متشابه تقسیم می‌کند. (۱) بنابراین داریم:

$$\Delta ADC\sim\Delta DCB\Rightarrow\frac{CD}{DB}=\frac{AD}{CD}\Rightarrow CD^۲=AD.DB\quad(۰/۵)$$

۱۸ نسبت تشابه برابر است با $\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴}$ که همان نسبت بین محیط (۰/۵) است: محیط مثلث اول $۲۷=۶+۸+۱۳$

$$\frac{۲۷}{x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow x=\frac{۴\times\cancel{۲۷}^{۹}}{\cancel{۳}_{۱}}=۳۶\ \text{محیط مثلث دوم}\quad(۰/۵)$$

سؤالات امتحانی

آزمون: خرداد ماه (نوبت دوم) مدت: .... تاریخ

الف) درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید. ۰/۵

۱- دو صفحه عمود بر هم هستند هرگاه هر کدام شامل خطی باشند که بر دیگری عمود است.

☐ درست ☐ نادرست

۲- مساحت یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

☐ درست ☐ نادرست

ب) جاهای خالی را با کلمه یا عبارت‌های مناسب پر کنید. ۰/۵

۳- در صفحه، دو خط موازی با یک خط ....

۴- اگر دو صفحه با هم نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند نسبت به هم .... هستند.

ج) گزینهٔ درست را انتخاب کنید. ۰/۵

۵- سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه افقی .... است.

الف) دایره ب) بیضی

۶- جسم حاصل از دوران نیم‌دایره حول قطرش:

الف) نیم‌کره ب) کره

د) به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

۷- هریک از عبارت‌های زیر را تعریف کنید. ۱/۵

الف) دو خط متنافر

ب) سطح مقطع ۱

ج) فصل مشترک ۱

۸- ربع دایره‌ای به شعاع a را حول شعاع دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.

۹- با رسم چندضلعی‌های محدب تا شش ضلعی و رسم قطرهای مربوط:

الف) جدول مقابل را کامل کنید. ۱/۵

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	n
تعداد قطرهای رسم شده از یک رأس	۰	۱			

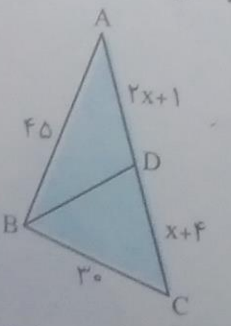
۱/۵

ب) به کمک استدلال استقرایی، رابطه‌ای برای تمام قطرهای nضلعی محدب بیابید. (کشوری - خرداد ۹۲)

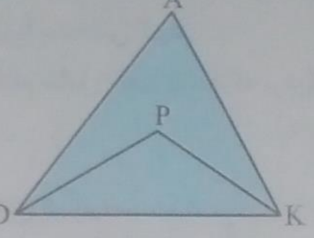
۱۰- با استدلال استنتاجی ثابت کنید که مجموع زاویه‌های داخلی یک nضلعی برابر با $(n-2)\times 180^\circ$ است. ۱/۵

(تهران - خرداد ۸۶)

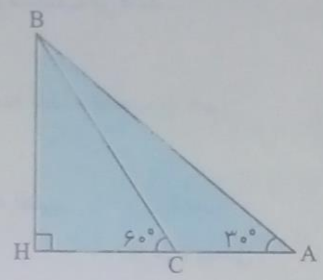
۱۱- در شکل زیر BD نیمساز زاویهٔ B از مثلث ABC است. با توجه به شکل اندازهٔ x را به‌دست آورید. سپس محیط مثلث را حساب کنید. (رودبار - دی ۹۱) ۱/۵



۱۲- نقطهٔ P را به دلخواه درون ΔDAK انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید زاویهٔ $\angle DPK$ از زاویهٔ $\angle DAK$ بزرگ‌تر است. (کرج - دی ۹۱)



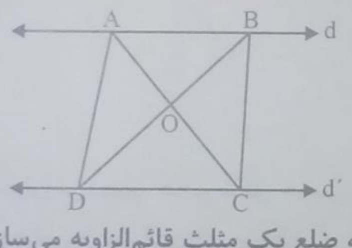
۱۳- در شکل روبه‌رو $\angle \hat{A} = ۳۰^\circ$ و $\angle C = ۶۰^\circ$ است. اگر طول AC برابر با ۵۰ متر باشد، طول AH را به‌دست آورید. (کرج - دی ۹۰)



۱۴- جملهٔ زیر را کامل کرده و اثبات کنید. (مرکزی - خرداد ۹۲)

در هر چهارضلعی محدب که دو قطرآن برهم عمود باشند مساحت برابراست با ....

۱۵- اگر دو خط d و ′d موازی باشند با توجه به شکل زیر اگر مساحت ΔOBC برابر S باشد، مساحت ΔOAD را برحسب S به دست آورید.



۱۶- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی ساخته شده روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی دو ضلع دیگر است. (یزد - خرداد ۹۰)

۱۷- مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای برابر با ۹ شده است. اگر نقاط درونی برابر با ۴ باشد نقاط مرزی را به دست آورید.

۱۸- خط d و نقطهٔ A غیرواقع برآن داده شده است. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ معلوم R باشد، با توجه به اندازهٔ R روی تعداد جواب‌های موجود بحث کنید. (کشوری - شهریور ۹۴)

۱۹- ثابت کنید در هر مثلث نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند. (هماهنگ کشوری - شهریور ۹۴)

۱ درست(۰/۲۵) ۲ نادرست (۰/۲۵) ۳ با هم موازی‌اند. (۰/۲۵) ۴ موازی(۰/۲۵) ۵ گزینهٔ الف (۰/۲۵)

۶ گزینهٔ ب (۰/۲۵) ۷ الف) دو خط متنافر: دو خط در فضا که نقطهٔ اشتراکی نداشته و هیچ صفحه‌ای هم وجود نداشته باشد که شامل هر دو باشد را دو خط متنافر می‌گویند. (۰/۵) ب) سطح مقطع: شکلی را که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع گویند. (۰/۵) ج) فصل مشترک: دو صفحه متقاطع در یک خط با هم مشترک هستند. خط رأسی که اشتراک دو صفحه متقاطع است، فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود. (۰/۵)

۸ شکل حاصل از دوران یک نیم کره است. (۰/۵)

$$\text{حجم کره } V = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \Rightarrow \text{حجم نیم کره} = (\frac{۴}{۳}\pi a^۳) \div ۲ = \frac{۲}{۳}\pi a^۳ \quad (۰/۵)$$

۹ الف)

تعداد ضلع‌ها	۳	۴	۵	۶	...	n
تعداد قطرهای رسم شده از یک رأس	۰	۱	۲ (۰/۲۵)	۳ (۰/۲۵)		n - ۳ (۰/۵)

ب) با توجه به جدول برای هر رأس $n - ۳$ قطر وجود دارد. (۰/۵) از طرفی کلا n رأس وجود دارد، پس تعداد قطرها برابر $n(n-۳)$ است (۰/۵) و چون قطرها با این روش دو بار شمرده می‌شود، پس تعداد قطرها برابر است با: $\frac{n(n-۳)}{۲}$ (۰/۵)

۱۰ فرض می‌کنیم یک n ضلعی داریم و می‌دانیم که مجموع هر زاویهٔ داخلی و خارجی برابر با ۱۸۰° است. بنابراین داریم:

$\angle A_۱ + \angle A'_۱ = ۱۸۰^\circ$ ($A_۱$ زاویهٔ داخلی و $A'_۱$ زاویهٔ خارجی معادل آن)

$\hat{A}_۲ + \hat{A}'_۲ = ۱۸۰^\circ$

$\hat{A}_۳ + \hat{A}'_۳ = ۱۸۰^\circ$ (۰/۲۵)

$\vdots$

$A_n + A'_n = ۱۸۰^\circ$ (۰/۲۵)

با هم جمع می‌کنیم: $\hat{A}_۱ + \hat{A}'_۱ + A_۲ + \hat{A}'_۲ + ... + \hat{A}_n + \hat{A}'_n = n \times ۱۸۰^\circ$ (۰/۲۵)

$$\Rightarrow (\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + ... + \hat{A}_n) + (\hat{A}'_۱ + \hat{A}'_۲ + ... + \hat{A}'_n) = n \times ۱۸۰^\circ \quad (۰/۲۵)$$

$$\xRightarrow[\text{برابر با } ۳۶۰^\circ \text{ درجه است.}]{\text{مجموع زاویه‌های خارجی}} (\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + ... + \hat{A}_n) = n \times ۱۸۰^\circ - ۳۶۰^\circ$$

$$\underbrace{\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ + ... + \hat{A}_n}_{\text{مجموع زاویه‌های داخلی}} = ۱۸۰^\circ(n-۲) \quad (۰/۵)$$

۱۱

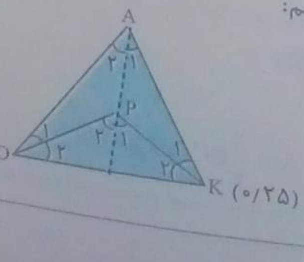
$$\frac{AB}{BC} \overset{(۰/۲۵)}{=} \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{\cancel{۴۵}^{\,۳}}{\cancel{۳۰}_{\,۲}} = \frac{۲x+۱}{x+۴} \overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} ۴x + ۲ = ۳x + ۱۲ \Rightarrow x = ۱۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\left.\begin{array}{l} AD = ۲۱ \\ DC = ۱۴ \end{array}\right. \Rightarrow AD + DC = ۳۵ \quad (۰/۲۵)$$

(۰/۲۵)

محیط برابر است با: $۴۵ + ۳۰ + ۳۵ = ۱۱۰$ (۰/۲۵)

۱۲ از A به P وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم:



(۰/۲۵)

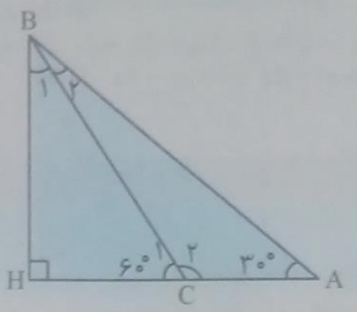
در مثلث ΔAPK ، $\angle P_1$ زاویهٔ خارجی است و می‌دانیم که اندازهٔ زاویهٔ خارجی با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور برابر است(۰/۲۵) یعنی: $\hat{A}_1+\hat{K}=\hat{P}_1$ (*) (۰/۲۵)

همین‌طور در مثلث APD داریم: $\hat{A}_2+\hat{D}=\hat{P}_2$ (**) (۰/۲۵)

با جمع روابط (*) و (**) داریم:

$$(\hat{A}_1+\hat{A}_2)+(\hat{K}_1+\hat{D}_1)=\hat{P}_1+\hat{P}_2 \Rightarrow \hat{A}+(\hat{K}_1+\hat{D}_1)=\hat{P} \xrightarrow{\text{از آن جا که } \hat{K}_1\hat{D}_1>0} \hat{A}<\hat{P}$$ (۰/۵) است.

۱۳



با توجه به مثلث BCA و اینکه $\hat{C}_1$ زاویهٔ خارجی است، بنابراین: $\hat{A}+\hat{B}_2=60 \Rightarrow \hat{B}_2=30^\circ$ (۰/۲۵)

بنابراین ΔBCA یک مثلث متساوی‌الساقین است که:

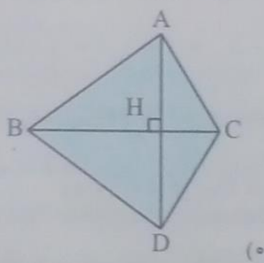
$BC=CA=50$ (*) (۰/۲۵)

در مثلث BAC چون $\hat{C}_1$ و $\hat{B}$ معلوم است $B_1=30^\circ$ می‌شود و از آنجا که مثلث قائم‌الزاویه است و ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 30° نصف وتر است، پس: $HC=\frac{BC}{2}=25$ (**) (۰/۲۵)

با توجه به (*) و (**): $AH=HC+AC=50+25=75$ (۰/۲۵)

۱۴ نصف حاصل‌ضرب دو قطر:

فرض می‌کنیم که ABCD یک چهارضلعی است که قطرهایش بر هم عمود است. (۰/۵)



(۰/۲۵)

با توجه به شکل مساحت مثلث‌های ΔABC و ΔBCD را نسبت به قاعدهٔ BC به‌دست می‌آوریم:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AH$ (*) (۰/۲۵)

$S_{BCD}=\frac{1}{2}BC.DH$ (**) (۰/۲۵)

روابط (*) و (**) را جمع می‌کنیم.

$$\underbrace{S_{ABC}+S_{BCD}}_{\downarrow}=\frac{1}{2}BC.AH+\frac{1}{2}BC.HD$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}BC(AH+HD)\Rightarrow S=\frac{1}{2}BC.AD$$ (۰/۲۵)

۱۵ دو مثلث ΔDBC و ΔDAC هم قاعده‌اند و رئوس آنها یعنی B و A روی خط موازی قاعده قرار دارند، (۰/۵) پس ارتفاع وارد بر DC در هر دو مثلث با هم برابر است، یعنی این دو مثلث هم‌مساحت هستند. (۰/۵)

$$S_{DAC} = S_{DBC} \xrightarrow[\text{از کم می‌کنیم}]{S_{DOC}\ \text{ازطرفین}} S_{DAC} - S_{DOC} = S_{DBC} - S_{DOC} \leftrightarrow S_{OAD} = S_{ABC}$$

۱۶ فرض C وتر مثلث قائم‌الزاویه باشد و a و b اندازهٔ دو ضلع زاویه قائمه

بنابراین:
$$c^{۲} = a^{۲} + b^{۲} \rightarrow ۱ = \frac{a^{۲}}{c^{۲}} + \frac{b^{۲}}{c^{۲}} \rightarrow ۱ = (\frac{a}{c})^{۲} + (\frac{b}{c})^{۲} \quad (*)$$

از آنجا که چندضلعی‌های ساخته شده با هم متشابه هستند و نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است:

$S_{۱} \rightarrow c$ چندضلعی ساخته شده روی ضلع

$S_{۲} \rightarrow a$ چندضلعی ساخته شده روی ضلع

$S_{۳} \rightarrow b$ چندضلعی ساخته شده روی ضلع

با توجه به مطالب بیان شده می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{S_{۲}}{S_{۱}} = (\frac{a}{c})^{۲} \ , \ \frac{S_{۳}}{S_{۱}} = (\frac{b}{c})^{۲} \qquad (۰/۵)$$

با توجه به رابطهٔ (۱) می‌توانیم بنویسیم:

$$۱ = \frac{S_{۲}}{S_{۱}} + \frac{S_{۳}}{S_{۱}} \Rightarrow ۱ = \frac{S_{۲} + S_{۳}}{S_{۱}} \Rightarrow S_{۱} = S_{۲} + S_{۳} \qquad (۰/۵)$$

۱۷
$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i \xrightarrow[(۰/۵)]{S=۹\ ,\ i=۴} ۹ = \frac{b}{۲} - ۱ + ۴ \Rightarrow ۹ = \frac{b}{۲} + ۳$$

$$\rightarrow ۶ = \frac{b}{۲} \Rightarrow b = ۱۲$$ تعداد نقاط مرزی (۰/۵)

۱۸ خط d و نقطهٔ A را به صورت زیر در نظر بگیریم:

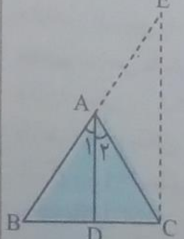
اگر فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط d را h در نظر بگیریم ۳ حالت وجود دارد: (۰/۲۵)

۱) $R < h$: کمان رسم شده به مرکز A خط d را قطع نمی‌کند، بنابراین جواب ندارد. (۰/۲۵)

۲) $R = h$: کمان رسم شده به مرکز A با خط d مماس است. بنابراین کمان خط را در یک نقطه قطع می‌کند. (۰/۲۵)

۳) $R > h$: کمان رسم شده به مرکز A خط d را در دو نقطه قطع می‌کند. (۰/۲۵)

۱۹ مطابق شکل، از نقطهٔ C خط راستی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.



از آن‌جا که AD نیمساز $\hat{A}$ است پس: $\hat{A}_{۱} = \hat{A}_{۲}$

$AD \parallel CE\ ,\ AC$ مورب $\Rightarrow \hat{A}_{۱} = \hat{E}$

$AD \parallel CE, BE$ مورب $\Rightarrow \hat{C} = \hat{A}_{۲}$

بنابراین $\hat{C} = \hat{E}$ و مثلث ACE متساوی‌الساقین است که در آن $AC = AE$. (۰/۵)

قضیهٔ تالس را برای مثلث BCE می‌نویسیم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} \xrightarrow{AE=AC} \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \qquad (۰/۵)$$