درس اوّل : هندسه تحلیلی

بحث هندسه‌ی تحلیلی یکی از بحث های مهم و کاربردی در ریاضیات است. به کمک این بحث است که می توان معادلات جبری برای اشکال هندسی بیان نمود و سپس آنها را بررسی و حل کرد.

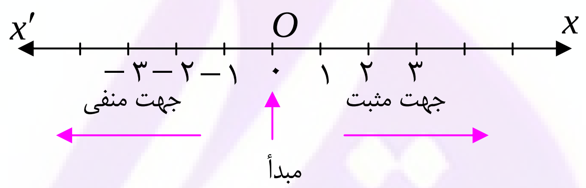
قسمت اوّل : محور اعداد حقیقی

محور اعداد حقیقی خط راستی است که روی آن

الف : نقطه ای به عنوان مبدأ

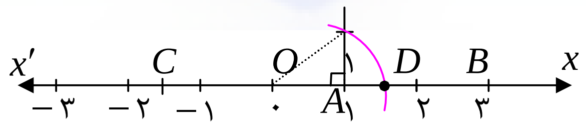
ب : واحدی برای اندازه گیری طول ها

ج : جهتی به عنوان جهت مثبت، اختیار شده باشد. مانند محور $x'ox$ در شکل زیر



بدیهی است که هر نقطه روی محور را می توان با یک عدد حقیقی نشان داد و هر عدد حقیقی متناظر با یک نقطه روی محور است. به عبارتی دیگر بین مجموعه ای اعداد حقیقی و مجموعه ی نقاط روی محور تناظر یک به یک قرار دارد.

عدد حقیقی متناظر با هر نقطه روی محور را **طول** آن **نقطه** می نامند. به عبارت دیگر طول هر نقطه روی یک محور عددی است جبری که قدرمطلق آن برابر با فاصله ی آن نقطه تا مبدأ محور است.



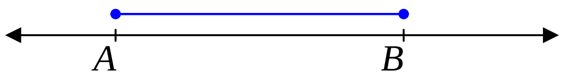
طول هر نقطه مانند A روی محور اعداد حقیقی را با x_A نمایش می دهند.

$$x_A = OA$$

در شکل فوق داریم:

$$x_O = ۰ \quad و \quad x_A = ۱ \quad و \quad x_B = ۳ \quad و \quad x_C = -\frac{۳}{۲} \quad و \quad x_D = \sqrt{۲}$$

اگر A و B دو نقطه روی محور باشند، بدیهی است که **طول یا اندازه‌ی پاره خط** AB برابر قدر مطلق تفاضل طول های این دو نقطه است.



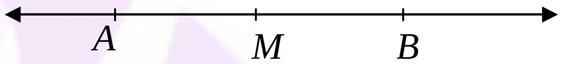
$$AB = |x_B - x_A|$$

در صورتی که نقطه‌ی M **وسط** پاره خط AB باشد. می توان نوشت :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

استدلالی که برای اثبات درستی این تساوی ارائه می شود به صورت زیر است.

$AM = MB$



$$\rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \rightarrow ۲x_M = x_A + x_B \rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

تمرین ۱ : اگر دو نقطه‌ی A و B روی یک محور باشند و $x_A = ۵$ و $x_B = -۳$ در این صورت:

الف : اندازه‌ی پاره خط AB را تعیین کنید.

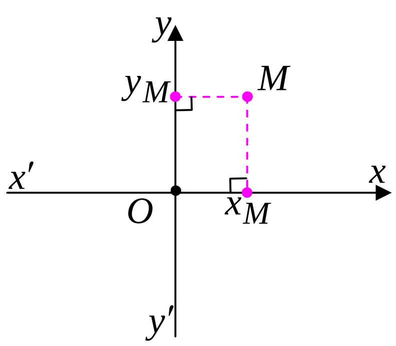
ب : طول نقطه‌ی M وسط پاره خط AB را به دست آورید.

تمرین ۲ : اگر سه نقطه‌ی C و B و A روی یک محور چنان قرار دارند که نقطه‌ی B وسط پاره خط AC بوده و $x_A = ۲$ و $x_B = ۳m + ۲$ و $x_C = m + ۱$ باشد، مقدار m را تعیین کنید.

***

قسمت دوّم : دستگاه محور های مختصات (دستگاه مختصات دکارتی)

دو محور $x'ox$ و $y'oy$ که در یک صفحه قرار دارند، یک دستگاه مختصات به وجود می آورند، هرگاه این دو محور بر هم عمود باشند و در نقطه ی O (مبدأ مشترک) متقاطع باشند.



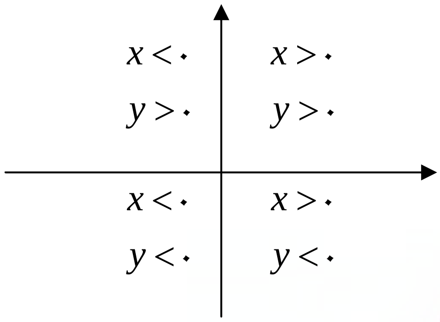
محور افقی ($x'ox$) را محور طول ها و محور قائم ($y'oy$) را محور عرض ها می نامند.

بدیهی است که هر نقطه روی صفحه ، مانند M با دو عدد حقیقی

مشخص می شود. تصویر نقطه‌ی M روی محور طول ها را طول (x_M) و تصویر نقطه‌ی M روی محور عرض ها را عرض (y_M) می نامند.

$$M\left|\begin{matrix} x_M \\ y_M \end{matrix}\right. \qquad \text{یا} \qquad M(x_M , y_M)$$

طول و عرض نقطه را مختصات نقطه می نامند.



نتیجه : دستگاه مختصات قائم صفحه را به چهار ناحیه (ربع) تبدیل می کند.علامت مختصات هر نقطه با توجه به ربعی که در آن قرار دارد، به صورت زیر است.

همچنین:

الف : هر نقطه که روی محور طول ها قرار دارد، عرض آن صفر است و برعکس

ب : هر نقطه که روی محور عرض ها قرار دارد، طول آن صفر است و برعکس

ج : نقطه‌ی تقاطع دو محور که مبدأ مختصات نام دارد، طول و عرض آن صفر است.

تمرین ۳ : نقطه‌ی $P(۲m-۱, m+۳)$ داده شده است. مقدار m را چنان بیابید که :

الف : نقطه‌ی P روی محور طولها قرار گیرد.

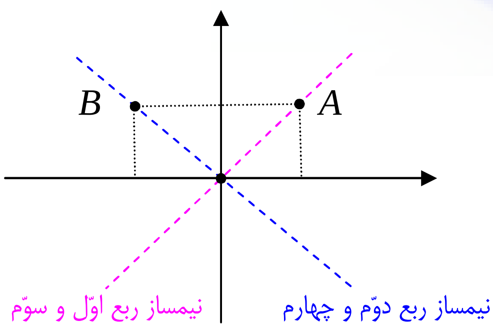
ب : نقطه‌ی P روی محور عرض ها قرار گیرد.

تمرین ۴ : نقطه‌ی $P(۲k-۱, k+۱)$ در ناحیه‌ی دوّم دستگاه مختصات قرار دارد. حدود k را تعیین کنید.

توجه :

۱ : تمام نقاطی که روی نیمساز ربع اوّل و سوّم دستگاه مختصات واقعند، دارای طول و عرض مساوی هستند.

۲ : تمام نقاطی که روی نیمساز ربع دوّم و چهارم دستگاه مختصات واقعند، دارای طول و عرض قرینه هستند.



تمرین ۵ : نقطه‌ی $P(۲m-۶, m-۳)$ داده شده است. مقدار m را چنان بیابید که :

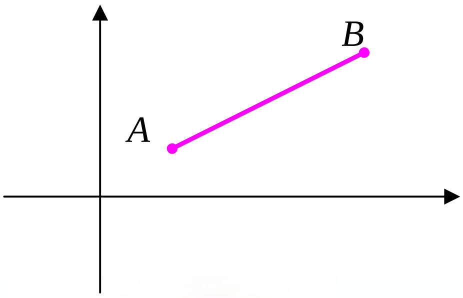
الف : نقطه‌ی P روی نیمساز ربع اوّل و سوّم قرار گیرد.

ب : نقطه‌ی P روی نیمساز ربع دوّم و چهارم قرار گیرد.

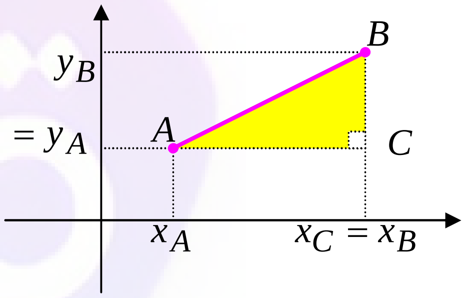
اندازه‌ی پاره خط در دستگاه محور های مختصات

اگر B و A دو نقطه روی صفحه باشند، در این صورت اندازه‌ی (طول) پاره خط AB به صورت زیر است.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$



برای مطالعه : برای اثبات درستی این موضوع از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می شود.



$$AB^2=AC^2+BC^2$$

$$AC=|x_C-x_A|=|x_B-x_A|$$

$$BC=|y_B-y_C|=|y_B-x_A|$$

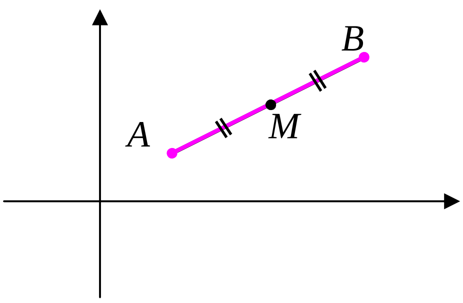
$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$

$$\rightarrow AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

***

مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط

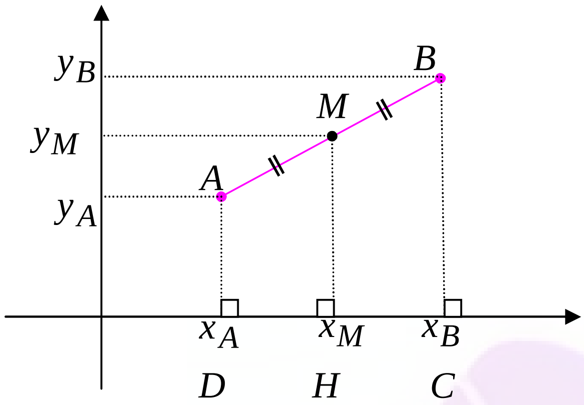
اگر B و A دو نقطه روی صفحه باشند و نقطه‌ی M نقطه‌ی وسط (میانی) پاره خط AB باشد. در این صورت مختصات نقطه‌ی M به شکل زیر است.



$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

برای مطالعه : برای اثبات این موضوع می توان به شکل زیر استدلال کرد.

اگر B و A دو نقطه روی صفحه باشند و نقطه‌ی M نقطه‌ی وسط (میانی) پاره خط AB در نظر گرفته شود. در این صورت می توان گفت که چون نقطه‌ی M وسط پاره خط AB از متوازی الاضلاع $ABCD$ می باشد و MH موازی دو قاعده رسم شده است (هر سه بر محور x عمودند). پس بنابر قضیه‌ی خطوط موازی (تالس) می توان نوشت :



$$\frac{DH}{HC}=\frac{AM}{MB}\xrightarrow{AM=MB}\frac{DH}{HC}=۱\rightarrow DH=HC$$

$$\rightarrow x_M-x_A=x_B-x_M\rightarrow ۲x_M=x_A+x_B\rightarrow x_M=\frac{x_A+x_B}{۲}$$

و به همین ترتیب ثابت می شود.

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

تمرین ۶ : دو نقطه‌ی $A(۳,-۷)$ و $B(-۱,-۴)$ داده شده اند.

الف) طول پاره خط AB را تعیین کنید.

ب) مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB را به دست آورید.

تمرین برای حل :

۷ : اگر $A(۱,۰)$ و $B(-۲,۳)$ دو رأس مقابل مربعی باشند. مساحت مربع را محاسبه کنید

۸ : نقاط $A(-۳,۰)$ و $B(۶,۱۰)$ و $C(۰,۶)$ سه رأس یک مثلث می باشند.اندازه‌ی میانه‌ی[1] وارد بر ضلع BC را تعیین کنید.

۹ : اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,-۱)$ و $C(۲,-۲)$ سه رأس مثلثی باشند، نوع مثلث را تعیین کنید.

[1]. در هر مثلث، میانه، پاره خطی است که وسط یک ضلع را به رأس مقابل آن وصل می کند.

۱۰ : اگر $A(۴,۰)$ و $B(۲,-۲\sqrt{۳})$ و مبدأ مختصات سه رأس مثلثی باشند، ابتدا نوع مثلث را تعیین کنید و سپس مساحت و محیط آن را تعیین کنید.

۱۱ : اگر $A(۲,۳)$ و $B(-۱,۰)$ و $C(-۵,۴)$ سه رأس مثلثی باشند، ابتدا نوع مثلث را تعیین کنید و سپس مساحت آن را تعیین کنید.

یادآوری : مساحت هر مثلث متساوی الاضلاع بـه ضلـع a برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ است.

۱۲ : دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای، نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ هستند.

الف) اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه‌ی $P(۷,۳)$ بر روی محیط دایره قرار دارد؟ چرا؟

***

رابطه‌ی بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع

در هر متوازی الاضلاع مجموع طول های دو رأس روبرو با مجموع طول های دو رأس روبروی دیگر برابر است.

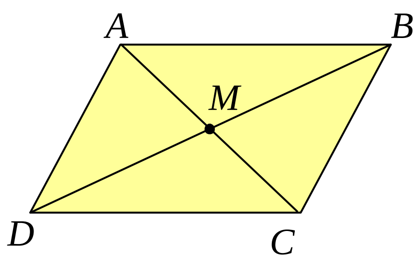
$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

به همین ترتیب مجموع عرض های دو رأس روبرو با مجموع عرض های دو رأس روبروی دیگر برابر است.

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

برای مطالعه : برای اثبات این مطلب می توان از موضوع هندسی زیر استفاده کرد.

با توجه به اینکه در متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می کنند. لذا می توان نوشت:



نقطه‌ی M وسط پاره خط AC $\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_C}{۲}$

نقطه‌ی M وسط پاره خط BD $\Rightarrow x_M = \frac{x_B + x_D}{۲}$

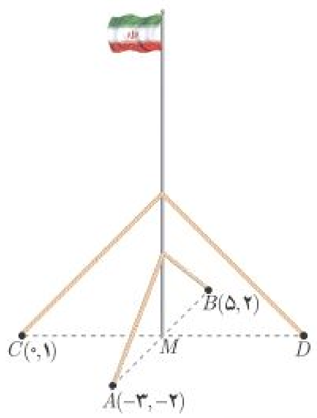
$$\Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D$$

و به همین ترتیب داریم :

$$\Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D$$

تمرین ۱۳: اگر $A(-۱,۲)$ و $B(۳,۴)$ و $C(۲,۰)$ مختصات سه رأس متوالی از متوازی الاضلاع $ABCD$ باشند، مختصات رأس D را تعیین کنید.

تمرین ۱۴: یک میله‌ی پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری فاصله‌ی هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی مقابل آن تا پای میله می باشد، مختصات نقطه‌ی D را به دست آورید.



تمرین ۱۵: مقادیر m و n را طوری تعیین کنید که نقاط زیر به همین ترتیب رئوس متوازی الاضلاع باشند.

$$A(۱,n+۳) \text{ و } B(n-۱,۲m) \text{ و } C(۳,۱) \text{ و } D(۳m,-۱)$$

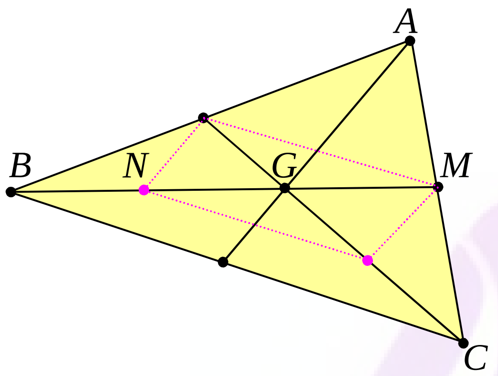
***

مختصات مرکز ثقل مثلث (نقطه ی برخورد میانه های مثلث)

اگر نقطه‌ی G محل تقاطع میانه های مثلث ABC [2] باشد. در این صورت می توان نوشت:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳} \quad و \quad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}$$

برای مطالعه : اگر G نقطه‌ی برخورد میانه های مثلث ABC باشد. ثابت می شود که نقطه‌ی برخورد میانه های مثلث به فاصله‌ی $\frac{۱}{۳}$ طول هر میانه از وسط ضلع مقابل و به فاصله‌ی $\frac{۲}{۳}$ طول هر میانه از رأس نظیر آن میانه است.



N نقطه‌ی وسط پاره خط BG $\Rightarrow x_N=\frac{x_B+x_G}{۲}$

G نقطه‌ی وسط پاره خط MN $\Rightarrow x_G=\frac{x_N+x_M}{۲}$

M نقطه‌ی وسط پاره خط AC $\Rightarrow x_M=\frac{x_A+x_C}{۲}$

$$\Rightarrow x_G=\frac{\frac{x_B+x_G}{۲}+\frac{x_A+x_C}{۲}}{۲}\Rightarrow ۲x_G=\frac{x_A+x_B+x_C+x_G}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴x_G=x_A+x_B+x_C+x_G\Rightarrow ۳x_G=x_A+x_B+x_C$$

$$\Rightarrow x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{۳}$$

و به همین ترتیب ثابت می شود.

$$\Rightarrow y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{۳}$$

تمرین ۱۶ : اگر $A(-۲,۳)$ و $B(۴,-۱)$ و $C(-۸,۴)$ سه رأس مثلثی باشند.مختصات محل تلاقی میانه های مثلث را به دست آورید.

[2] محل تقاطع میانه های هر مثلث را مرکز ثقل مثلث نیز می نامند.

شیب خط

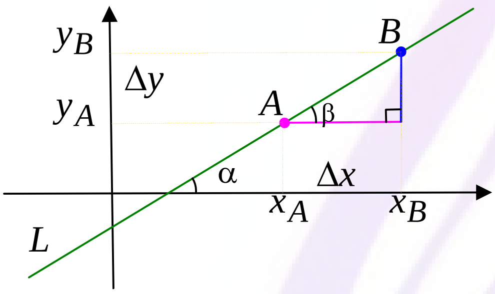
اگر B و A دو نقطه از خط L باشند. شیب (ضریب زاویه) خط L به صورت زیر تعریف می شود.

$$m_L = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

بنابر قضیه‌ی خطوط موازی واضح است که $\angle\alpha = \angle\beta$. همچنین بنابر بر تعریف تانژانت زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه می توان نوشت.

$$m_L = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan(\beta) = \tan(\alpha)$$

لذا شیب هر خط ، تانژانت زاویه ای است که آن خط با جهت مثبت محور x ها می سازد.



نتیجه : با این تعریف واضح است که

الف : شیب محور طولها و هر خط موازی آن ، برابر صفر است.

ب : شیب محور عرضها و هر خط موازی آن ، تعریف نشده است.

ج: شیب نیمساز ربع اوّل و سوّم برابر ۱ و شیب نیمساز ربع دوّم و چهارم برابر ۱− است.

تمرین ۱۷ : شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی $A(۵,-۴)$ و $B(۳,۰)$ را به دست آورید.

تمرین ۱۸ : خطی با محور طولها در جهت مثبت زاویه‌ی ۳۰ درجه تشکیل می دهد. شیب این خط را بنویسید.

تمرین ۱۹ : ثابت کنید که سه نقطه‌ی $A(-۴,۲)$ و $B(-۲,۰)$ و $C(۱,-۳)$ روی یک خط راست واقع اند.

***

معادله‌ی خط

هر رابطه‌ی خطی بین طول و عرض تمام نقاط خط را معادله‌ی خط می نامند.

مثال : دو نقطه‌ی $A(۳,۷)$ و $B(۱,۳)$ را در نظر بگیرید. به کمک تعیین رابطه‌ی طول و عرض این دو نقطه، معادله‌ی خط AB را بنویسید.

حل : با کمی دقت معلوم می شود که اگر ابتدا طول هر کدام از این دو نقطه را دو برابر و سپس با عدد یک جمع کنیم، عرض نقطه به دست می آید. لذا رابطه‌ی موجود (معادله‌ی خط) به صورت زیر است.

$$y = ۲x + ۱$$

تمرین۲۰ : نمودار خط مثال قبل را رسم کنید.

تذکر : به طور کلی معادله‌ی هر خط به صورت زیر است.

$$y = mx + n$$

در این معادله که آن را **معادله‌ی استاندارد خط** نیز می نامند،عدد m (ضریب x) را شیب و عدد n را عرض از مبدأ[3] می نامند.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $(۲,۷)$و $(۵,۳)$ می گذرد.

حل :

روش اوّل: ابتدا شیب خط را تعیین می کنیم.

$$m = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{۷ - ۳}{۲ - ۵} = \frac{۴}{-۳}$$

و چون معادله‌ی خط به صورت $y = mx + n$ می باشد، پس :

$$y = \frac{-۴}{۳}x + n$$

اکنون برای تعیین مقدار n مختصات یکی از نقاط داده شده را در این معادله جایگزین می کنیم.

$$(۲,۷) \xrightarrow{y=\frac{-۴}{۳}x+n} ۷ = \frac{-۴}{۳}(۲) + n \to n = \frac{۲۹}{۳}$$

در نهایت معادله‌ی خط را به صورت زیر به دست می آوریم.

[3]. محل تلاقی هر خط با محور عرض ها را عرض از مبدأ می نامند.

$$y = mx + n \to y = -\frac{۴}{۳}x + \frac{۲۹}{۳}$$

روش دوّم: چون معادله‌ی خط به صورت $y = mx + n$ می باشد. مختصات دو نقطه‌ی داده شده را در این معادله جایگزین می کنیم.

$$\begin{cases} ۵m + n = ۳ \\ ۲m + n = ۷ \end{cases} \to (-۱) \times \begin{cases} ۵m + n = ۳ \\ ۲m + n = ۷ \end{cases} \to \begin{cases} -۵m - n = -۳ \\ ۲m + n = ۷ \end{cases}$$

$$\to -۳m = ۴ \to m = \frac{۴}{-۳} \; , \; n = \frac{۲۹}{۳}$$

لذا معادله‌ی خط مطلوب به شکل زیر است.

$$y = mx + n \to y = -\frac{۴}{۳}x + \frac{۲۹}{۳}$$

نتیجه : معادله‌ی هر خط که گذرا از مبدأ مختصات به صورت $y = mx$ است.

تمرین ۲۱ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و شیب آن ۳ − باشد.

***

روش های تعیین معادله‌ی خط

واضح است که از هر نقطه بی شمار خط می گذرد ، ولی فقط یک خط با شیب معین از هر نقطه مـی گـذرد. اگر خطی با شیب m گذرا از نقطه‌ی $A(x_۰, y_۰)$ در نظر گرفته شود. می توان معادله‌ی خط را بـه صـورت زیر نوشت:

$$y = m(x - x_۰) + y_۰$$

تمرین ۲۲ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $P(-۲,۱)$ بگذرد و شیب ۵- آن باشد.

تمرین۲۳ : معادله‌ی خط را بنویسید که از نقطه‌ی $P(۳,-۱)$ بگذرد و با محور طول هـا در جهـت مثبـت زاویه‌ی ۶۰ درجه تشکیل دهد.

تمرین ۲۴ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی (۲,۷) و (۵,۳) می گذرد.

حل :

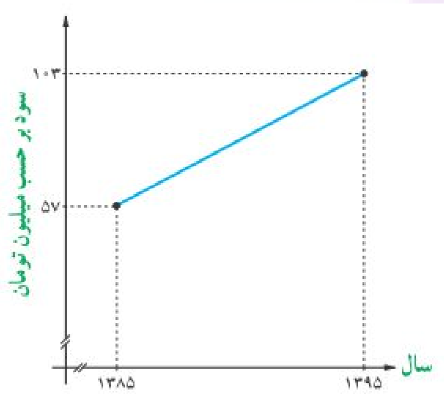
$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۷-۳}{۲-۵}=\frac{۴}{-۳}$$

$$y=m(x-x_۱)+y_۱\rightarrow y=-\frac{۴}{۳}(x-۵)+۳\rightarrow y=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۰}{۳}+۳=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۲۹}{۳}$$

توجه : از هر دو نقطه فقط یک خط می گذرد. لذا برای رسم نمودار خط کافی است ، دو نقطه از نمودار آن خط را تعیین کنیم.

تمرین ۲۵ : نمودار خط $y=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را رسم کنید.

تمرین ۲۶ : سود سالانه‌ی یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ الی ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است.



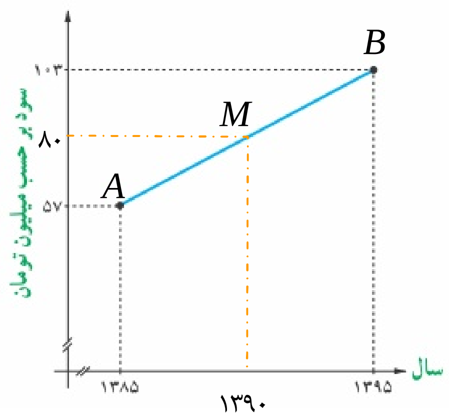
الف : میانگین سود سالانه‌ی این شرکت در دهه‌ی مورد نظر چقدر بوده است؟

ب: در کدام سال، مقدار سود سالانه، با میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ : اگر سود سالانه در طول یک دهه‌ی آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه‌ی شرکت چقدر باشد؟

حل :

الف:



$$x_M=\frac{۱۳۸۵+۱۳۹۵}{۲}=۱۳۹۰$$

و

$$y_M=\frac{۵۷+۱۰۳}{۲}=۸۰\quad (\text{سود متوسط})$$

ب: ابتدا معادله‌ی خط AB را می نویسیم.

$$m_{AB}=\frac{۱۰۳-۵۷}{۱۳۹۵-۱۳۸۵}=\frac{۲۳}{۵}$$

$$y=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷$$

$$y=۸۰\xrightarrow{y=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷}۸۰=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷\rightarrow ۲۳=\frac{۲۳}{۵}x-۶۳۷۱$$

$$\rightarrow ۶۳۷۱=\frac{۲۳}{۵}x\rightarrow ۳۱۹۷۰=۲۳x\rightarrow x=\frac{۳۱۹۷۰}{۲۳}=۱۳۹۰$$

پ :

$$y=\frac{۲۳}{۵}(x-۱۳۸۵)+۵۷\xrightarrow{x=۱۴۰۵}y=\frac{۲۳}{۵}(۱۴۰۵-۱۳۸۵)+۵۷=۱۴۹$$

***

معادله‌ی کلی خط

برای هر خط می توان معادله ای به صورت زیر نوشت:

$$ax + by + c = 0$$

واضح است که این معادله را می توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

پس شیب خط برابر $m = \frac{-a}{b}$ و عرض از مبدأ آن $n = -\frac{c}{b}$ است. توجه داشته باشید که عرض نقطه تلاقی خط با محور عرض ها را عرض از مبدأ می نامند.

نتیجه : معادله‌ی برخی از خطوط مهم به صورت زیر است.

ردیف	عنوان	معادله	شیب
۱	محور طول ها	$y = 0$	$m = 0$
۲	محور عرض ها	$x = 0$	تعریف نمی شود.
۳	نیمساز ربع اوّل و سوّم	$y = x$	$m = 1$
۴	نیمساز ربع دوّم و چهارم	$y = -x$	$m = -1$

تمرین۲۷ : معادله‌ی خطی به صورت $6x + 2y - 4 = 0$ است.

الف: شیب و عرض از مبدأ این خط را به دست آورید.

ب : محل تقاطع این خط با محور های مختصات را تعیین کنید.

ج : نمودار خط را رسم کنید.

تمرین۲۸ : نمودار هر یک از خطوط زیر را رسم کنید.

الف) $y = -2x + 1$ پ) $y = -2$ ث) $y = \frac{1}{3}x$

ب) $2x + 3y = 6$ ت) $x = \frac{3}{2}$

تمرین ۲۹ : مقدار k را طوری تعیین کنید که شیب خط به معادله‌ی زیر برابر ۲− باشد.

$$kx + (k - 2)y = -3k$$

***

تمرین برای حل :

۳۰ : مقدار k را طوری تعیین کنید که سه نقطه‌ی $A(-۳,۰)$ و $B(k+۱,-۲)$ و $C(۳,۲)$ روی یک خط راست واقع باشند.

۳۱ : معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه‌ی $A(۲,-۱)$ و $B(۳,۲)$ را بنویسید.

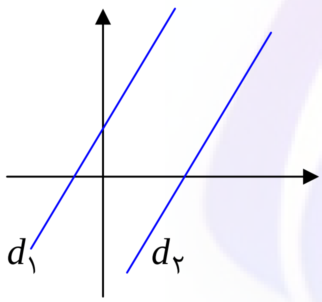
۳۲ : معادله‌ی خطی را بنویسید که محور طولها را در نقطه‌ای به طول ۳ و محور عرض ها را در نقطه‌ای بـه عرض ۲ قطع کند.

۳۳ : نقاط $A(۱,۲)$ و $B(-۳,۲)$ و $C(۰,-۱)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله‌ی میانـه‌ی وارد بـر ضـلع BC را بنویسید.

***

رابطه‌ی بین شیب های خطوط موازی

دو خط موازیند، اگر و تنها اگر شیب های مساوی داشته باشند.



$$m_۱ = m_۲ \leftrightarrow d_۱ \parallel d_۲$$

تمرین ۳۴ : نشان دهید که دو خط به معادلات زیر موازیند.

$$y=-۲x+۳ \quad \text{و} \quad ۶x+۳y=۵$$

تمرین ۳۵ : معادلات دو خط زیر را در نظر بگیرید.

$$x-۴y=-۲ \quad \text{و} \quad ۲x+y=۵$$

الف) ثابت کنید که این دو خط متقاطع هستند.

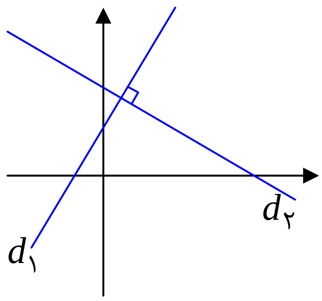
ب) مختصات نقطه‌ی تقاطع این دو خط را تعیین کنید.

ج) نمودار هر دو خط را رسم کنید و نقطه ی تقاطع آنها را تعیین کنید.

تمرین ۳۶ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطـه‌ی $P(-۱,۳)$ بگـذرد و مـوازی بـا خـط بـه معادلـه‌ی $۲x+y=۳$ باشد.

***

رابطه‌ی بین شیب های دو خط عمود بر هم



دو خط بر هم عمودند، اگر و تنها اگر حاصل ضرب شیب های آنها برابر ۱- باشد. به عبارتی دیگر اگر شیب خطی عکس و قرینه ی شیب دیگری باشد، آن دو خط بر هم عمودند.

$$m_1 \times m_2 = -1 \leftrightarrow d_1 \perp d_2$$

تمرین۳۷ : نشان دهید که دو خط به معادلات زیر بر هم عمودند.

$$3x - 4y = -2 \qquad \text{و} \qquad y = -\frac{4}{3}x + 1$$

تمرین۳۸ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و بر خط به معادله‌ی $x + 3y = 4$ عمود باشد.

تمرین برای حل :

۳۹ : نقاط $A(4,0)$ و $B(1,3)$ و $C(0,-2)$ سه رأس یک مثلث هستند. معادله‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC را بنویسید.

۴۰ : معادله‌ی خطی را بنویسید که محور طول ها را در نقطه ای به طول ۲ قطع کند و موازی خط به معادله‌ی $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ باشد.

۴۱ : معادله‌ی خطی را بنویسید که محور عرض ها را در نقطه ای به عرض ۲ قطع کند و عمود بر خط به معادله‌ی $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ باشد.

۴۲ : نقاط $A(5,1)$ و $B(10,4)$ و $C(7,9)$ سه رأس از مربع $ABCD$ می باشند.

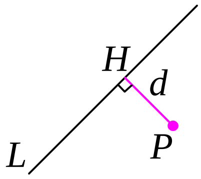
الف: معادله‌ی اضلاع AB و DC و BC را بنویسید.

ب : مختصات نقطه‌ی D را تعیین کنید.

ج : مربع را رسم کنید.

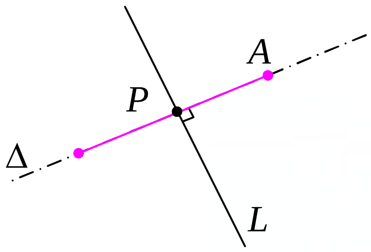
د : مساحت و محیط مربع را به دست آورید.

فاصله‌ی نقطه تا خط



فاصله‌ی هر نقطه خارج یک خط، برابر طول پاره خطی از که از نقطه بر خط عمود رسم می شود. بدیهی است که فاصله‌ی هر نقطه، روی خط تا آن خط برابر صفر است.

مثال : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۷,۵)$ را از خط L به معادله‌ی $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.



حل : چون شیب خط L برابر $-\frac{۴}{۳}$ است، پس هر خط عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادله‌ی خط Δ گذرنده از A و عمود بر L را می نویسیم.

$$\Delta : y=\frac{۳}{۴}x+h$$

و چون نقطه‌ی $A(۷,۵)$ روی خط Δ قرار دارد، داریم :

$$۵=\frac{۳}{۴}(۷)+h \rightarrow h=-\frac{۱}{۴}$$

لذا معادله‌ی خط Δ به صورت زیر است.

$$\Delta : y=\frac{۳}{۴}x+h \rightarrow y=\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۴} \rightarrow ۳x+۴y=۱$$

اگر معادلات دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطه‌ی P، محل برخورد این دو خط به دست می آید.

$$\begin{array}{l} L: \\ \Delta: \end{array}\begin{cases} ۴x+۳y=۱۸ \\ ۳x-۴y=۱ \end{cases} \rightarrow x=۳ \ , \ \ y=۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

واضح است که طول پاره خط AP جواب مسئله است.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=\sqrt{۲۵}=۵$$

همانطور که مشاهده می کنید، این روش برای حل مسئله، روشی نسبتاً طولانی است. می توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد.

فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_۰,y_۰)$ از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۷,۵)$ را از خط L به معادله‌ی $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.

حل :

$$۴x+۳y=۱۸\rightarrow ۴x+۳y-۱۸=۰$$

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{(۴)^۲+(۳)^۲}}=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{(۴)^۲+(۳)^۲}}=\frac{۲۵}{\sqrt{۲۵}}=۵$$

نتیجه : فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $ax+by+c=۰$ به شکل زیر است.

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

تمرین ۴۳ : فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۱,-۱)$ تا خط به معادله‌ی $۳x-۴y=-۳$ را به دست آورید.

تمرین ۴۴ : نقاط $A(۳,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(۰,-۳)$ سه رأس یک مثلث هستند.

الف : اندازه‌ی ارتفاع وارد بر ضلع BC را به دست آورید.

ب : مساحت مثلث را حساب کنید.

❋❋❋

توجه : اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ و $C(x_۳,y_۳)$ سه رأس مثلثی باشند، می توان مساحت مثلث را به کمک رابطه‌ی زیر محاسبه کرد. ثابت می شود که قدر مطلق عدد حاصل برابر مساحت مثلث است.

$$S=\frac{۱}{۲}\times\begin{vmatrix} x_۱ & x_۲ & x_۳ & x_۱ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ & y_۴ \end{vmatrix}$$

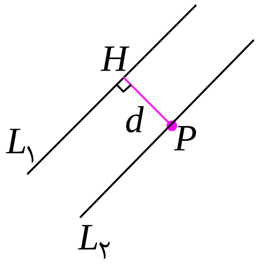
$$-\quad -\quad -\quad +\quad +\quad +$$

مثال: نقاط $A(۳,۲)$ و $B(-۲,۳)$ و $C(۰,-۳)$ سه رأس یک مثلث هستند. مساحت مثلث را به دست آورید.

حل :

$$\rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times\begin{vmatrix} ۳ & -۲ & ۰ & ۳ \\ ۲ & ۳ & -۳ & ۲ \end{vmatrix}=\frac{۱}{۲}(۹+۶+۰+۴+۰+۹)=۱۴$$

فاصله‌ی بین دو خط موازی



فاصله‌ی دو خط موازی ، طول پاره خطی است که از هر نقطه ی واقع بر یکی بر دیگری عمود رسم می شود. بدیهی است که فاصله‌ی دو خط منطبق بر هم برابر صفر است.

فاصله ی دو خط موازی به معادلات :

$$L_1 : ax + by + c_1 = 0 \quad و \quad L_2 : ax + by + c_2 = 0$$

به صورت زیر است.

$$d = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

تمرین۴۵ : فاصله‌ی بین دو خط موازی زیر را تعیین کنید.

$$4x + 3y + 7 = 0 \quad و \quad 4x + 3y - 8 = 0$$

تمرین ۴۶ : اگر $A(6,3)$ و $B(7,0)$ دو رأس مجاور یک مستطیل باشند و معادله‌ی ضلع CD از این مستطیل به صورت $3x + y = 1$ باشد. مساحت مستطیل را به دست آورید.

تمرین برای حل :

۴۷ : یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3,0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

۴۸ : فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1,-4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر۴ است. مقدار k را به دست آورید.

۴۹ : فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد دو خط به معادلات $2y - x + 1 = 0$ و $y + x - 4 = 0$ را از خط d به معادله‌ی $7x - 24y - 2 = 0$ را تعیین کنید.

۵۰ : خط L به معادله‌ی $3x - 4y = 0$ بر دایره ای به مرکز $W(2,-1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.[4]

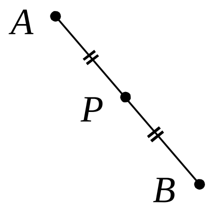
۵۱ : فاصله‌ی بین دو خط موازی زیر را تعیین کنید.

$$6x - 8y - 7 = 0 \quad و \quad 3x - 4y + 1 = 0$$

---

[4]. توجه داشته باشید که شعاع دایره بر خط مماس در نقطه‌ی تماس عمود است.

قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه ای دیگر



نقطه‌ی B را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی P گویند، هرگاه نقطه‌ی P وسط پاره خط AB باشد.

برای مطالعه : با توجه به این تعریف اگر $P(\alpha,\beta)$ باشد، در این صورت، واضح است که

$$x_P=\frac{x_A+x_B}{۲}\to\alpha=\frac{x_A+x_B}{۲}\to x_A+x_B=۲\alpha\to x_B=۲\alpha-x_A$$

$$y_P=\frac{y_A+y_B}{۲}\to\beta=\frac{y_A+y_B}{۲}\to y_A+y_B=۲\beta\to y_B=۲\beta-y_A$$

لذا مختصات نقطه‌ی B قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی $P(\alpha,\beta)$ به صورت زیر است.

$$\begin{cases}x_B=۲\alpha-x_A\\ y_B=۲\beta-y_A\end{cases}$$

نتیجه : مختصات نقطه‌ی B قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به مبدأ مختصات به شکل زیر است.

$$\begin{cases}x_B=-x_A\\ y_B=-y_A\end{cases}$$

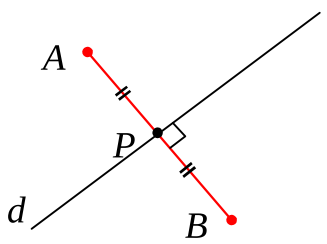
تمرین ۵۲ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۳,۲)$ را نسبت به نقطه ی $P(۳,۰)$ به دست آورید.

تمرین ۵۳ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۵,-۲)$ را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

***

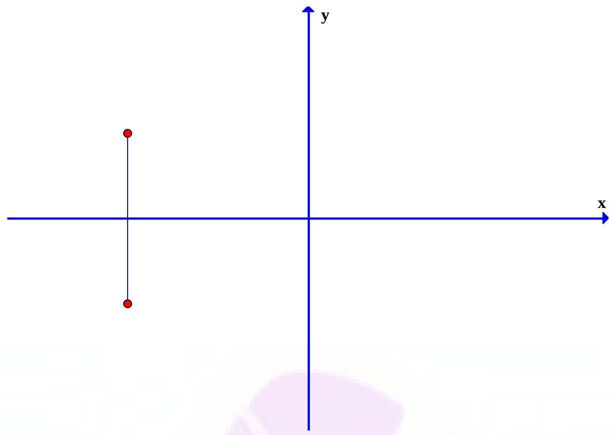
قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک

نقطه‌ی B را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به خط d گویند، هرگاه خط d عمود منصف پاره خط AB باشد.

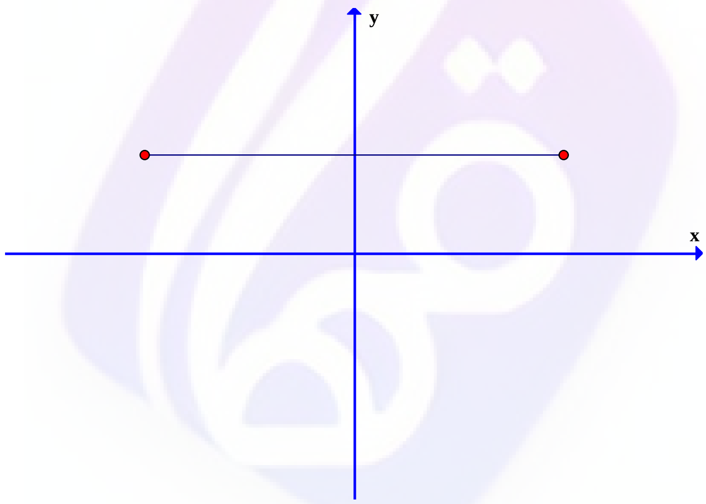


نتیجه :

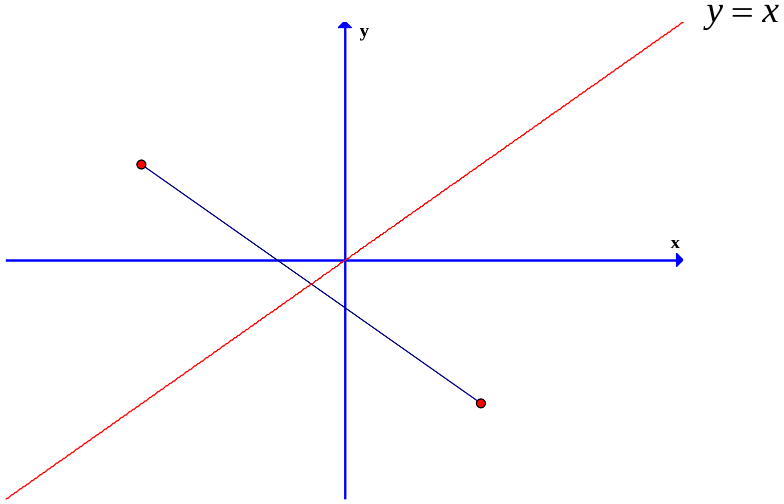
۱ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ , y_\circ)$ نسبت به محور طول ها (خط $y=\cdot$) به صورت $B(x_\circ ,-y_\circ)$



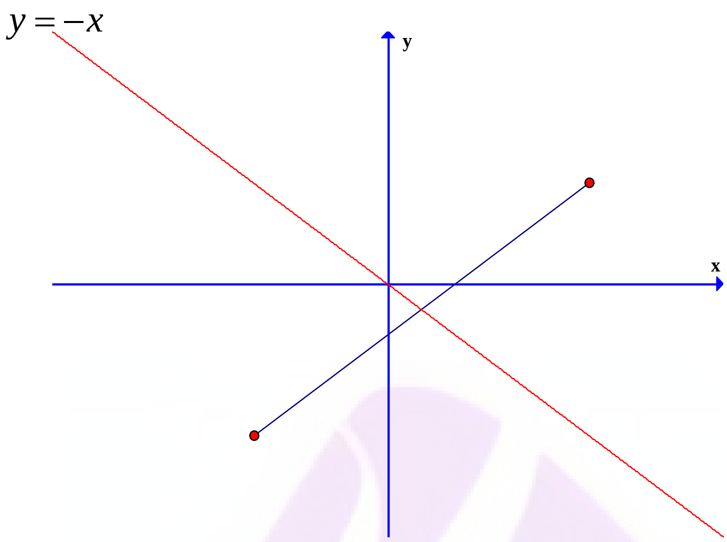
۲ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ , y_\circ)$ نسبت به محور عرض ها (خط $x=\cdot$) به صورت $B(-x_\circ , y_\circ)$



۳ : قرینه‌ی نقطه‌ی $a(x_\circ , y_\circ)$ نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوّم (خط $y=x$) به صورت $B(y_\circ , x_\circ)$



۴ : قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x_{\circ},y_{\circ})$ نسبت به نیمساز ربع دوّم و چهارم (خط $y=-x$) به صورت $B(-y_{\circ},-x_{\circ})$



تمرین۵۴ : نقطه‌ی $A(۲,-۳)$ داده شده است. بازتاب این نقطه را در حالت های مختلف زیر بدست آورید.

الف : نسبت به محور x ها   ب : نسبت به محور y ها

ج : نسبت به محور $y=x$ د : نسبت به محور $y=-x$

حل:

الف: $A(۲,-۳)\to B(۲,۳)$

ب: $A(۲,-۳)\to B(-۲,-۳)$

ج: $A(۲,-۳)\to B(-۳,۲)$

د: $A(۲,-۳)\to B(۳,-۲)$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

درس دوّم : معادلات و توابع درجه ی دوّم

در این درس ابتدا با بحث های تکمیلی پیرامون معادله و تابع درجه‌ی ۲ و آشنا و سپس با معرفی نقطه‌ی ماکزیمم و مینیمم و مفهوم صفر تابع درجه‌ی دوّم، می توان بسیاری از مسائل ریاضیات را بررسی و حل کرد.

قسمت اوّل : یادآوری معادله‌ی درجه‌ی ۲

در سال گذشته با معادله‌ی درجه‌ی ۲ آشنا شده اید. حتماً به یاد دارید که برای حل این معادله روش های متفاوتی وجود دارد. روش تجزیه و روش کلاسیک (کلی) را به خاطر دارید. بهتر است قبل از ورود به بحث این دو روش را در قالب مثال یادآوری کنیم.

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۲x^۲+۵x-۳=۰$$

حل به روش تجزیه :

$$۲x^۲+۵x-۳=۰ \to \frac{۱}{۲}(۲x-۱)(۲x+۶)=۰ \to (۲x-۱)(x+۳)=۰$$

$$\to \begin{cases} ۲x-۱=۰ \to x=\frac{۱}{۲} \\ x+۳=۰ \to x=-۳ \end{cases}$$

حل به روش کلاسیک : $c=-۳$ و $b=۵$ و $a=۲$

$\Delta=b^۲-۴ac=(۵)^۲-۴(۲)(-۳)=۲۵+۲۴=۴۹$ معادله دوریشه‌ی حقیقی دارد.

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۵)+\sqrt{۴۹}}{۲(۲)}=\frac{-۵+۷}{۴}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(۵)-\sqrt{۴۹}}{۲(۲)}=\frac{-۵-۷}{۴}=\frac{-۱۲}{۴}=-۳$$

یادآوری : هر معادله به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ که در آن $a\neq ۰$ ، یک درجه‌ی دوّم است. یک روش حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم به صورت زیر است. این روش را روش کلی یا روش کلاسیک می نامند.

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوّم به این روش به ترتیب زیر عمل می کنیم.

۱) با نوشتن معادله به صورت استاندارد ، ضرایب معادله یعنی c و b و a را مشخص می کنیم. (ضریب $x^{۲}$ را a، ضریب x را b و عدد ثابت را c می گیریم.)

۲) مبین معادله یعنی $\Delta = b^{۲} - ۴ac$ را محاسبه می کنیم.

۳) با توجه به علامت Δ تعداد و مقدار ریشه ها را به کمک حالت های زیر تعیین می کنیم.

اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله دارای دو ریشه است. مقدار این ریشه ها را از تساوی های زیر محاسبه می کنیم.

$$x_{۱} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \qquad \text{و} \qquad x_{۲} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادله دارای فقط یک ریشه (ریشه‌ی مضاعف[1]) است. مقدار این ریشه را از تساوی زیر محاسبه می کنیم.

$$x = \frac{-b}{۲a}$$

اگر $\Delta < ۰$ باشد، معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

تمرین ۱ : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $۳k^{۲} = ۱۳k + ۱۰$ ب) $r^{۲} + ۲k + ۵ = ۰$ ج) $۹u^{۲} + ۱۲u + ۴ = ۰$

***

قسمت دوّم : حل معادلات به روش تغییر متغیر

گاهی لازم می شود برای حل یک معادله از روش تغییر متغیر استفاده کرد. در این روش متغیر جدید را طوری در نظر می گیریم که روش حل معادله‌ی به دست آمده را می دانیم. با حل این معادله می توان ریشه های معادله‌ی اوّلیه را نیز به دست آورد.

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^{۴} - ۳x^{۲} - ۱۰ = ۰$$

حل : کافی است قرار دهیم، $x^{۲} = t$. لذا خواهیم داشت:

[1]. ریشه ی مکرر مرتبه ی دوّم

$t^{۲} - ۳t - ۱۰ = ۰$

$$(t - ۵)(t + ۲) = ۰ \to \begin{cases} t = ۵ \to x^{۲} = ۵ \to x = \pm\sqrt{۵} \\ t = -۲ \to x^{۲} = -۲ \quad \text{غ م} \end{cases}$$

تمرین برای حل : معادله های زیر را حل کنید.

۲) $x^{۴} - ۱۳x^{۲} + ۳۶ = ۰$ ۳) $(x^{۲} - ۳)^{۲} - ۳x^{۲} + ۱۱ = ۰$ ۴) $۴^{x} - ۱۲(۲^{x}) + ۳۲ = ۰$

***

قسمت سوّم : مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی درجه‌ی ۲

گاهی به جای تعیین مقدار ریشه های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ ، تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه هـای آن اهمیت دارد. مجموع و حاصل ضرب ریشه های هر معادله‌ی درجه‌ی ۲ بـه شـکل $ax^{۲} + bx + c = ۰$ از رابطه های زیر به دست می آید.

مجموع ریشه ها $S = x_{۱} + x_{۲} = \frac{-b}{a}$

حاصل ضرب ریشه ها $P = x_{۱} \times x_{۲} = \frac{c}{a}$

تمرین۵ : بدون حل معادله ، مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$۳x^{۲} + ۵x - ۱ = ۰$$

برای مطالعه : روابط به مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله‌ی درجه‌ی ۲ را می توان به صورت زیـر اثبات کرد.

$$S = x_{۱} + x_{۲} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲b}{۲a} = \frac{b}{a}$$

$$P = x_{۱} \times x_{۲} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{۴a^{۲}} = \frac{(-b)^{۲} - (\sqrt{\Delta})^{۲}}{۴a^{۲}}$$

$$= \frac{b^{۲} - \Delta}{۴a^{۲}} = \frac{b^{۲} - (b^{۲} - ۴ac)}{۴a^{۲}} = \frac{۴ac}{۴a^{۲}} = \frac{c}{a}$$

تمرین برای حل :

۶ : بدون حل معادله و فقط با استفاده از S و P و Δ در مورد وجود و علامت ریشه های معادله‌ی $۵x^۲-۷x-۵=۰$ بحث کنید.

***

قسمت چهارم : تشکیل معادله‌ی درجه‌ی ۲

با معلوم بودن مجموع و حاصل ضرب ریشه های یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ می توان آن معادله را تعیین کرد.

اگر S مجموع و P حاصل ضرب ریشه های این معادله باشند. می توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$x^۲-Sx+P=۰$$

تمرین ۷ : معادله‌ی درجه‌ی دوّمی بنویسید که مجموع ریشه های آن ۱/۵− و حاصل ضربشان ۷− باشد.

برای مطالعه : اثبات این معادله به صورت زیر است.

$$ax^۲+bx+c=۰\xrightarrow{\div a}x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=۰\rightarrow x^۲-(-\frac{b}{a})x+\frac{c}{a}=۰$$

$$\rightarrow x^۲-Sx+P=۰$$

تمرین برای حل :

۸ : معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ ریشه های آن باشند.

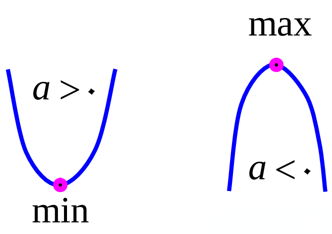
۹ : معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}$ و $\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$ ریشه های آن باشند.

۱۰ : اندازه‌ی طول و عرض مستطیلی را به دست آورید که محیط آن ۱۱ سانتی متر و مساحت آن ۶ سانتی متر مربع باشد.

***

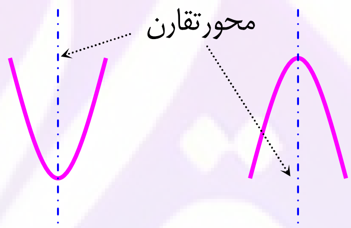
قسمت پنجم : یاد آوری تابع درجه ۲ (سهمی)

در سال گذشته به یاد دارید که هر تابع درجه‌ی ۲ دارای معادله ای به صورت $y=ax^{۲}+bx+c$ (کـه در آن $a\neq ۰$ است.) می باشد. نمودار چنین توابعی یک منحنی رو به بالا یا رو به پایین می باشد. این منحنی را سهمی می نامند. نمودار هر سهمی دارای بالاترین یا پایین ترین نقطـه می باشد که آن را رأس سهمی می نامند.



الف : اگـر $a>۰$ باشـد نمـودار سـهمی رو بـه بـالا (دارای مـی نـیمم) و اگر $a<۰$ باشد، نمودار سهمی رو به پایین (دارای ماکزیمم)است.

ب : نمودار سهمی دارای یک محور تقارن است که معادله‌ی آن بصورت $x=\frac{-b}{۲a}$ می باشد و همواره موازی محور y ها است.



همچنین معادله‌ی محور تقارن سهمی نیز بصورت $x=\frac{-b}{۲a}$ می باشد.

برای رسم نمودار سهمی کافی است که علاوه بر رأس سهمی دو نقطه را چنان انتخاب کنیم که طـول یکـی بیشتر و طول دیگری کمتر از طول رأس سهمی باشد.

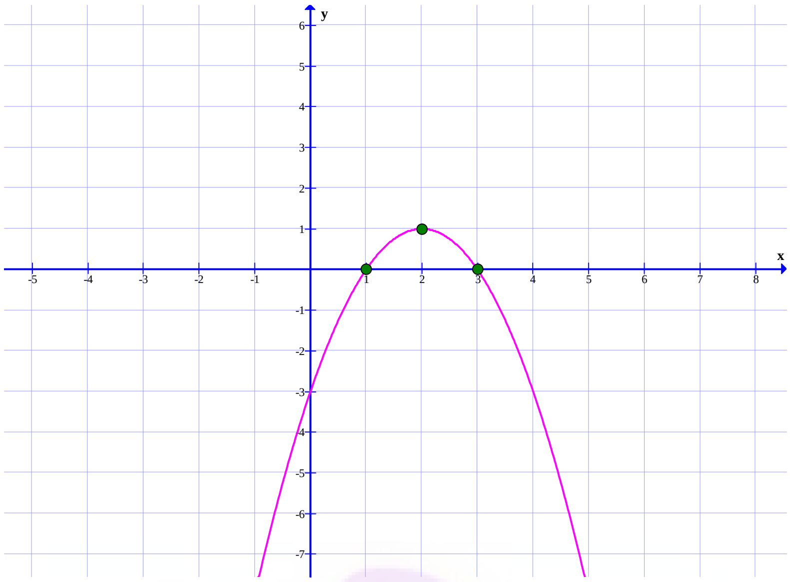
مثال : نمودار سهمی به معادله‌ی $y=-x^{۲}+۴x-۳$ را رسم کنید.

حل : ابتدا طول رأس سهمی را تعیین می کنیم.

$$x=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲$$

حل جدول زیر را تکمیل می کنیم.

x	۱	۲	۳
y	۰	۱	۰



***

تمرین ۱۱: نمودار معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $y = x^{۲} - ۲x - ۳$

ب) $y = -(x-۳)^{۲} + ۱$

ج) $y = -۴x^{۲} + ۸x + ۱$

تمرین ۱۲: ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^{۲} + ۲x + ۳$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل : چون $a = -۱$ منفی است. پس سهمی رو به پایین است. لذا سهمی دارای نقطه‌ی ماکزیمم است.

$$x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(-۱)} = ۱$$

همچنین بیشترین مقدار تابع به ازای $x = ۱$ می باشد.

$$f(۱) = -(۱)^{۲} + ۲(۱) + ۳ = ۴$$

تذکر : در این تمرین نقطه‌ی $(۱,۴)$ رأس سهمی و مقدار ماکزیمم نمودار سهمی برابر ۴ می باشد.

تمرین برای حل :

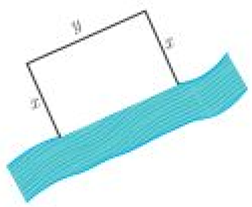
۱۳ : مقدار m را چنان بیابید که $x=۲$ طول رأس سهمی به معادله‌ی $y=mx^{۲}+(m-۱)x+۱$ باشد.

۱۴ : کمترین مقدار تابع $f(x)=۳x^{۲}-۱۲x+۵$ را تعیین کنید.

۱۵ : بیشترین مقدار تابع $f(x)=-x^{۲}+۴x+۱$ را محاسبه کنید.

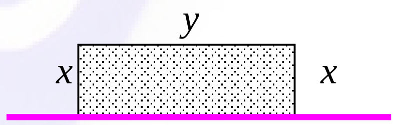
۱۶ : اگر $۳x+۵y=۱۵۰$ مقدار y و x را طوری بیابید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

حل چند تمرین کاربردی :



۱۷ : قرار است در کنار یک رودخانه ، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده کشی شود. اگر تنها هزینه‌ی نصب ۱۲۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم. بیشترین مساحت ممکن این محوطه را تعیین کنید.

حل :



$$y+۲x=۱۲۰ \rightarrow y=۱۲۰-۲x$$

مساحت مستطیل $S=xy$

$$S(x)=x(۱۲۰-۲x) \rightarrow S(x)=۱۲۰x-۲x^{۲}$$

تابع به دست آمده ، یک تابع درجه‌ی دوّم است و در آن $a=-۲<۰$ می باشد. پس تابع دارای بیشترین مقدار است. بیشترین مقدار را به روش زیر تعیین می کنیم.

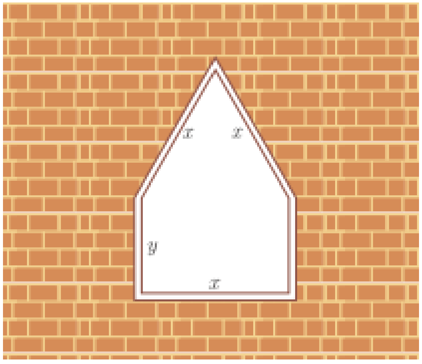
$$x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲۰}{۲(-۲)}=۳۰$$

$$S(۳۰)=۱۲۰(۳۰)-۲(۳۰)^{۲}=۳۶۰۰-۱۸۰۰=۱۸۰۰\ m^{۲}$$

توجه : مقدار مساحت را پس از تعیین مقدار x نیز می توان به شکل زیر به دست آورد.

$$y=۱۲۰-۲(۳۰)=۶۰$$

$$S=xy=(۳۰)(۶۰)=۱۸۰۰\ m^{۲}$$



۱۸ : یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

حل : با توجه به شکل داریم :

$$P = ۴ \rightarrow ۳x + ۲y = ۴ \rightarrow y = ۲ - \frac{۳}{۲}x$$ محیط پنجره

از آنجا که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است (چرا؟) ، پس می توان نوشت:

$$S = x.y + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$ مساحت پنجره

حال اگر به جای y معادل آن را بر حسب x قرار دهیم. داریم :

$$S = x.(۲ - \frac{۳}{۲}x) + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ = ۲x - \frac{۳}{۲}x^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ = \frac{\sqrt{۳} - ۶}{۴}x^۲ + ۲x$$

این تابع ، یک تابع درجه‌ی ۲ (سهمی) است و دارای ماکزیمم است (چرا؟). لذا داریم.

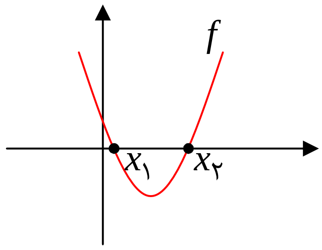
$$x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۲}{۲(\frac{\sqrt{۳} - ۶}{۴})} = \frac{۲}{\frac{۶ - \sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲}{۴ - \sqrt{۳}} = ۰/۹۴ \ m$$

$$y_{\max} = ۲ - \frac{۳}{۴}x = ۲ - \frac{۳}{۴}(۰/۹۴) = ۰/۵۹ \ m$$

توجه : پنجره‌ی موضوع این تمرین، زمانی بیشترین نوردهی دارد که بزرگترین مساحت را داشته باشد.

***

قسمت ششم : صفرهای تابع درجه ۲ (سهمی)



$f(x_1)=f(x_2)=0$

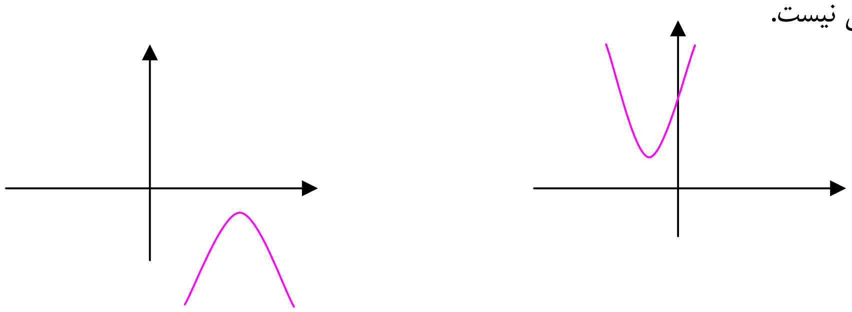
همانطور که می دانیم ، نمودار هر تابع درجه‌ی ۲ ، یک سهمی است و دارای معادله ای به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ است. بنابراین ممکن است محور طول ها را در یک یا دو نقطه قطع کند و یا اینکه محور طولها را هیچ قطع نکند. طول نقطه‌ی تقاطع نمودار سهمی با محور طول ها را صفر تابع می نامند. بدیهی است که در این نقطه مقدار تابع (عرض نقطه) برابر صفر است. بنابر این ، صفر تابع f همان ریشه‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ است.

نتیجه : بر اساس مفهوم فوق می توان نتیجه گرفت که :

الف : نمودار سهمی محور طولها را در دو نقطه قطع می کند. بنابراین معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.

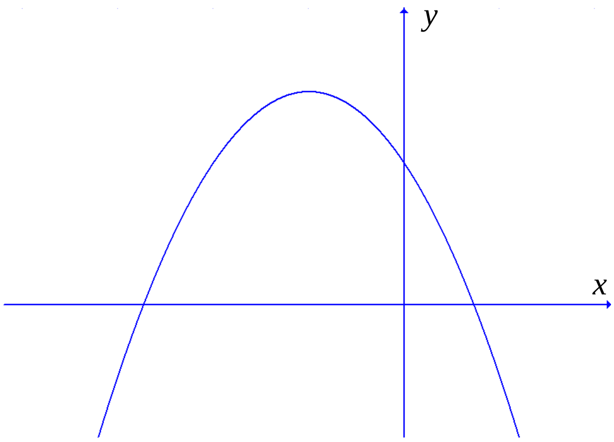
ب : نمودار سهمی بر محور طولها مماس است. بنابراین معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است.

ج : نمودار سهمی محور طولها را در دو نقطه قطع نمی کند. بنابراین معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.



حل چند تمرین :

۱۹ : نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می باشد. تعداد ریشه های معادله‌ی $f(x)=۰$ و علامت a و b و c را تعیین کنید.



حل : نمودار محور طول ها را در دو نقطه‌ی مجزا قطع کرده است. لذا معادله‌ی $f(x)=۰$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.

نمودار سهمی رو به پایین است، لذا $a<۰$

دو ریشه مختلف العلامه اند و قدر مطلق ریشه‌ی منفی از ریشه‌ی مثبت بیشتر است. لـذا مجمـوع ریـشه هـا منفی است. پس :

$$S<۰\rightarrow\frac{-b}{a}<۰\rightarrow\frac{b}{a}>۰\xrightarrow{a<۰}b<۰$$

چون دو ریشه مختلف العلامه اند. لذا حاصل ضرب آنها منفی است. پس :

$$P<۰\rightarrow\frac{c}{a}<۰\xrightarrow{a<۰}c>۰$$

توجه :

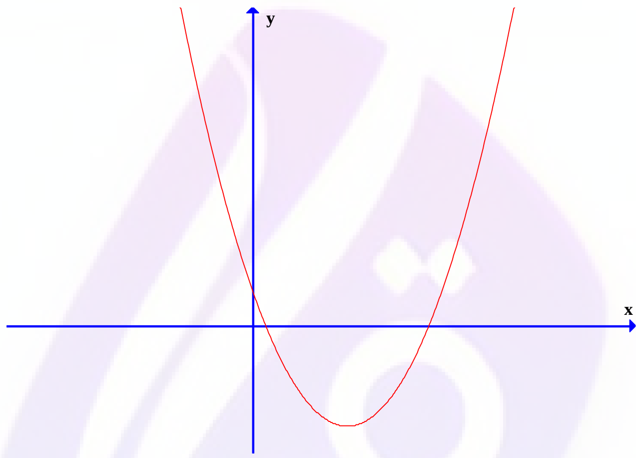
الف : به روش دیگری می توان علامت b را نیز تعیین کرد. در این روش طول رأس سـهمی را در نظـر مـی گیریم. مثلاً در این تمرین با توجه به نمودار معلوم است که طول رأس سهمی منفی است. لذا :

$$\frac{-b}{۲a}<۰\rightarrow\frac{b}{۲a}>۰\xrightarrow{a<۰}b<۰$$

ب : به روش دیگری نیز می توان علامت c را تعیین کرد. با توجه به اینکه تابع محور y ها را در نقطه‌ی $(\cdot,c)$ قطع می کند، لذا می توان به توجه به نقطه‌ی تقاطع نمودار با محور y ها ، علامت c را تعیین کرد. در تمرین فوق ، از روی نمودار واضح است که محل تقاطع نمودار با محور عرض ها (مقدار c) بالای محور x ها است. پس $c>\cdot$

***

۲۰ : نمودار زیر، نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ می باشد. تعداد ریشه های معادله‌ی $f(x)=\cdot$ و علامت a و b و c را تعیین کنید.



حل : نمودار محور طول ها را در دو نقطه‌ی مجزا قطع کرده است. لذا معادله‌ی $f(x)=\cdot$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است.

نمودار سهمی رو به بالا است، لذا $a>\cdot$

دو ریشه هم علامت و مثبت می باشند. لذا مجموع آنها مثبت است. پس

$$S>\cdot\rightarrow\frac{-b}{a}>\cdot\rightarrow\frac{b}{a}<\cdot\xrightarrow{a>\cdot}b<\cdot$$

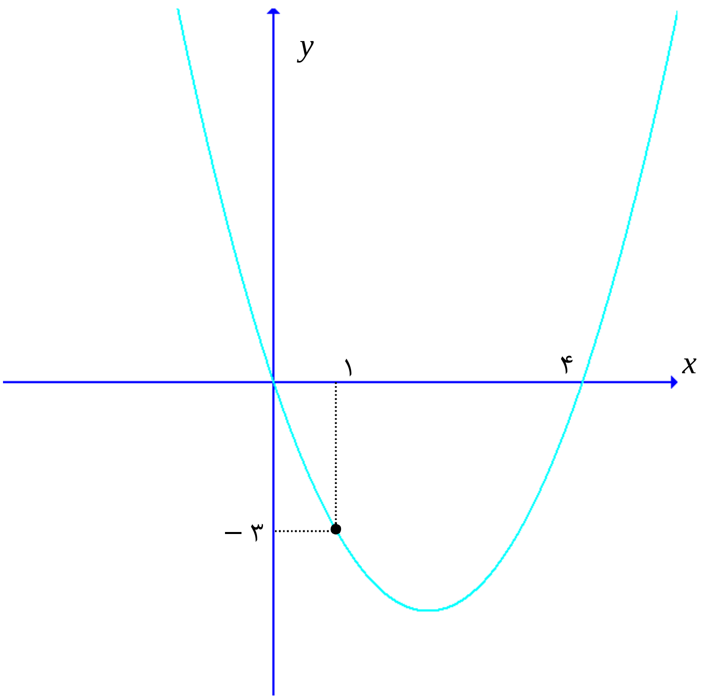
چون دو ریشه مثبت هستند، لذا حاصل ضرب آنها نیز مثبت است. پس

$$P>\cdot\rightarrow\frac{c}{a}>\cdot\xrightarrow{a>\cdot}c>\cdot$$

***

۲۱ : در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c$ داده شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آورید. ب : جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل : سه نقطه از نمودار تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A\left|\begin{matrix} ۰ \\ ۰ \end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^{2}+bx+c} ۰=a(۰)^{2}+b(۰)+c \rightarrow c=۰$$

$$B\left|\begin{matrix} ۱ \\ -۳ \end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^{2}+bx+c} -۳=a(۱)^{2}+b(۱)+c \rightarrow a+b+c=-۳$$

$$\xrightarrow{c=۰} a+b=-۳$$

$$C\left|\begin{matrix} ۴ \\ ۰ \end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^{2}+bx+c} ۰=a(۴)^{2}+b(۴)+c \rightarrow ۱۶a+۴b+c=۰$$

$$\xrightarrow{c=۰} ۱۶a+۴b=۰ \xrightarrow{\div ۴} ۴a+b=۰$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} a+b=-۳ \\ ۴a+b=۰ \end{cases} \rightarrow a=۱\ ,\ b=-۴$$

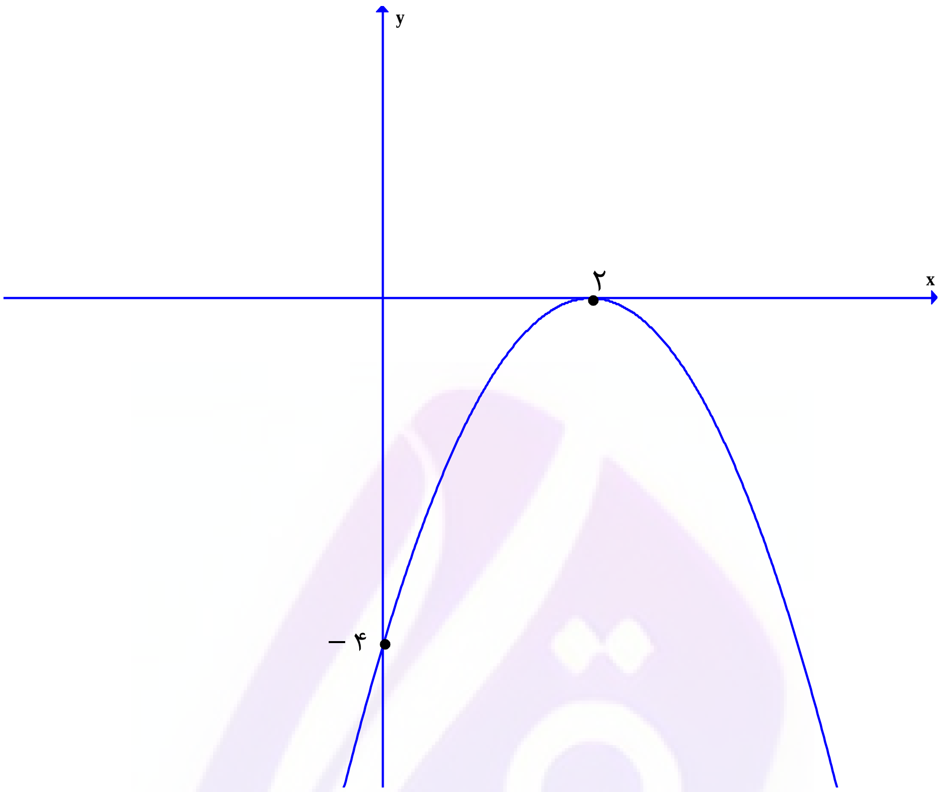
در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده ، به صورت زیر تشکیل می دهیم.

x	$-\infty$		۰		۴		$+\infty$
y		+	۰	-	۰	+	

۲۲ : در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داده شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آورید.

ب : جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل : دو نقطه از نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A\left|\begin{matrix}۰\\-۴\end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c} -۴=a(۰)^{۲}+b(۰)+c \rightarrow c=-۴$$

$$B\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c} ۰=a(۲)^{۲}+b(۲)+c \rightarrow ۴a+۲b+c=۰$$

$$\xrightarrow{c=-۴} ۴a+۲b=۴ \rightarrow ۲a+b=۲$$

نقطه‌ی B ماگزیمم تابع نیز می باشد. پس:

$$B\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{x_۰=\frac{-b}{۲a}} ۲=\frac{-b}{۲a} \rightarrow ۴a+b=۰$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

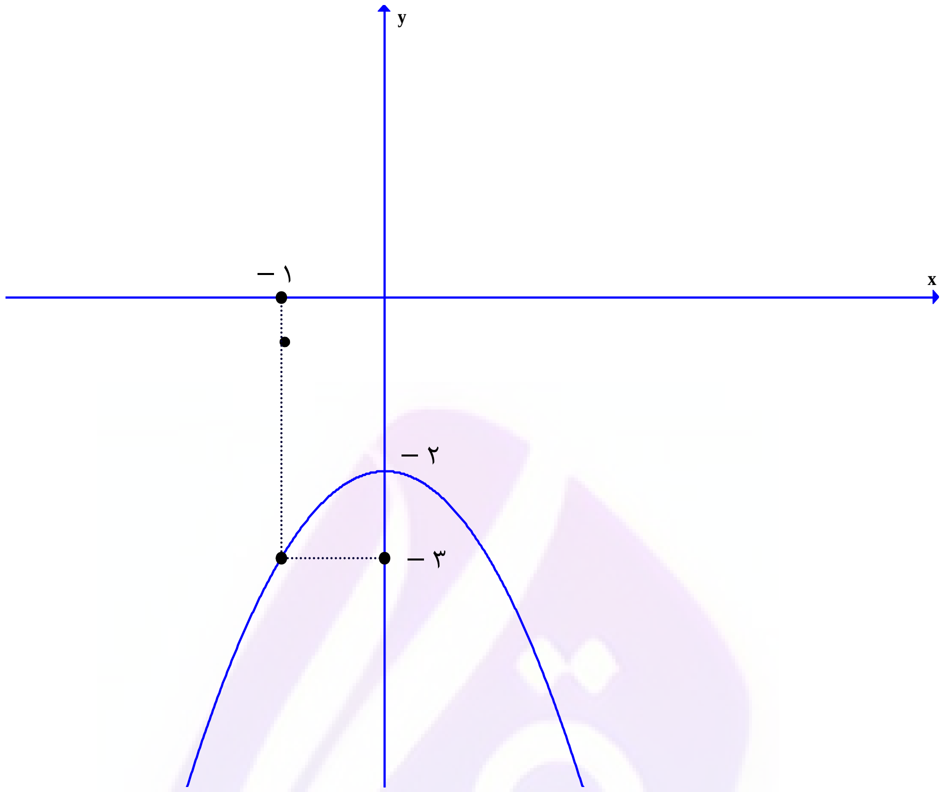
$$\begin{cases}۲a+b=۲\\۴a+b=۰\end{cases} \rightarrow a=-۱\,,\,b=۴$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده ، به صورت زیر تشکیل می دهیم.

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y		-	۰	-	

۲۳ : در شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ داده شده است.

الف : مقدار a و b و c را بدست آورید.
ب : جدول علامت $f(x)$ را تشکیل دهید.



حل : دو نقطه از نمودار تابع $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ معلوم است. لذا داریم.

$$A\left|\begin{matrix}۰\\ -۲\end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c} -۲=a(۰)^{۲}+b(۰)+c \rightarrow c=-۲$$

نقطه‌ی A ماگزیمم تابع نیز می باشد. پس:

$$A\left|\begin{matrix}۰\\ -۲\end{matrix}\right. \xrightarrow{x_{\circ}=\frac{-b}{۲a}} ۰=\frac{-b}{۲a} \rightarrow b=۰$$

$$B\left|\begin{matrix}-۱\\ -۳\end{matrix}\right. \xrightarrow{f(x)=ax^{۲}+bx+c} -۳=a(-۱)^{۲}+b(-۱)+c \rightarrow a-b+c=-۳$$

$$\xrightarrow{c=-۲} a-b=-۱$$

حال دستگاه زیر را حل می کنیم.

$$\begin{cases} a-b=-۱ \\ b=۰ \end{cases} \rightarrow a=-۱$$

در نهایت جدول تعیین علامت را با توجه به نمودار داده شده ، به صورت زیر تشکیل می دهیم. (چون محور طولها را قطع نمی کند پس تابع ریشه ندارد.)

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-$	$-$

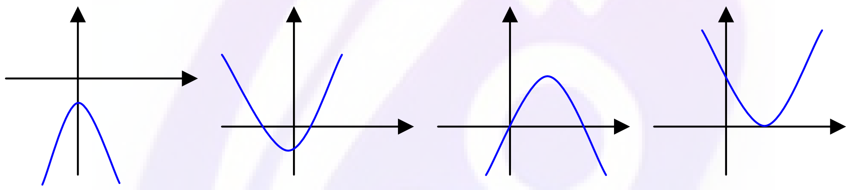
***

توجه ۱ : محل تقاطع نمودار سهمی به معادله ی $y = ax^{۲} + bx + c$ با محور عرضها مقدار c را نشان می دهد. لذا در هر سهمی که نمودار آن از مبدأ مختصات می گذرد ، $c = ۰$ است.

توجه۲ : اگر نمودار سهمی نسبت به محور y ها متقارن باشد، محور تقارن آن یعنی خط $x = \frac{-b}{۲a}$ روی محور y ها منطبق است. پس $x = ۰$ می باشد و در نتیجه $b = ۰$ است.

تمرین برای حل :

۲۴ : جدول زیر را با توجه به نمودار های داده شده کامل کنید. ($y = ax^{۲} + bx + c$)



(د) (ج) (ب) (الف)

	الف	ب	ج	د
علامت Δ				
علامت a				
علامت b				
علامت c				
تعداد صفر های تابع				

۲۵ : معادله‌ی مسیر حرکت یک توپ بعد از شوت آن، یک تابع درجه دو با ضابطه‌ی $y = -\frac{۱}{۴۰}x^{۲} + x$ است. در این معادله x مسافت طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.

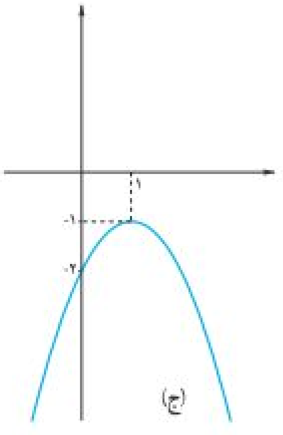
الف : حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

ب : تعیین کنید که حداکثر مسافت طی شده توسط این توپ چقدر است؟

ج : نمودار حرکت توپ را رسم کنید.

۲۶ : معادله‌ی یک سهمی به صورت $y = a(x-۱)(x-۲)$ است، مقدار a را چنان تعیین کنید که این سهمی محور عرض ها را در نقطه ای به عرض۴ قطع کند.

۲۷ : معادله‌ی سهمی مربوط به نمودار زیر را بنویسید.



***

تهیه کننده : جابر عامری   دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

درس سوّم : معادلات گویا و معادلات رادیکالی

در این درس به روش های حل معادلات گویا و معادلات رادیکالی می پردازیم. این دو نوع معادله بـه جهـت کاربردهای بسیار زیاد آنها از اهمیت خاصی برخوردارند.

قسمت اوّل : معادلات گویا

هر معادله که در آن متغیر معادله در مخرج کسر باشد، را یک معادله‌ی شامل عبارت گویا یا به اختصار معادله‌ی گویا می نامند. مانند معادلات زیر :

الف) $\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^۲-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$ ب) $\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^۲-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}$

برای حل چنین معادلاتی، ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج هـا را محاسـبه کـرده[1] و در تمـام کـسرها ضرب می کنیم. سپس معادله‌ی بدست آمده را حل می کنیم. در نهایت جوابی از معادله را می پذیریم که بـه ازای آن مخرج هیچ کسری صفر نشود[2].

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^۲-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}$$

حل: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج ها را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} A=x \\ B=x^۲-۲x=x(x-۲)\xrightarrow{\text{ک م م}}x(x-۲) \\ C=x-۲ \end{cases}$$

$$\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x^۲-۲x}=\frac{x-۴}{x-۲}\to \overset{\times x(x-۲)}{\frac{۵}{x}}-\overset{\times x(x-۲)}{\frac{۴}{x(x-۲)}}=\overset{\times x(x-۲)}{\frac{x-۴}{x-۲}}$$

$$\to ۵(x-۲)-۴=x(x-۴)\to ۵x-۱۰-۴=x^۲-۴x\to x^۲-۹x+۱۴=۰$$

$$\to (x-۷)(x-۲)=۰\to \begin{cases} x=۷ \\ x=۲ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

---

1. برای این کار ابتدا مخرج ها را تجزیه کرده و سپس حاصل ضرب عوامل مشترک و غیر مشترک با توان بیشتر را تعیین می کنیم.
2. اگر معادله‌ی گویا به صورت تساوی دو کسر بیان شده باشد. بهتر است، از خاصیت ضرب طرفین و وسطین استفاده کنیم.

تمرین برای حل : هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^{۲}-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$

۲) $\frac{x-۲}{x+۲}+\frac{x}{x-۲}=\frac{۸}{x^{۲}-۴}$

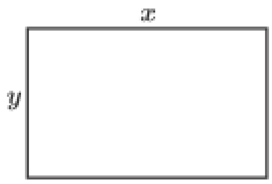
۳) $\frac{۳}{۲x}=\frac{x+۲}{x^{۲}-۳x}$

۴) $\frac{۱}{x^{۲}-۲x+۱}=\frac{۳}{x^{۲}-۲x+۳}$

۵) $\frac{n^{۲}-۲n+۲}{n^{۲}-۲n}-\frac{۱+n}{n}=\frac{n-۱}{n-۲}$

۶) $\frac{۲x}{x^{۲}-۱}+\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲-x}{x^{۲}-x}$

حل چند مسئله‌ی کاربردی :



۷ : مستطیل طلایی ، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن بـه طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند، می توان نوشت:

$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$$

نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می گویند.

حال اگر عرض مستطیل را برابر یک در نظر بگیریم، واضح است که مقدار x همان نسبت طلایی است. برای محاسبه ی مقدار x کافی است که معادله‌ی زیر را حل کنیم.

$$\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}\rightarrow x^{۲}=x+۱\rightarrow x^{۲}-x-۱=۰\xrightarrow{\Delta=۵}\begin{cases} x_{۱}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} \\ x_{۲}=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$

واضح است که جواب منفی قابل قبول است. عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ است بـه عـدد طلایی معروف است که از دوران باستان مورد توجه بوده است.

***

۸ : در یک مزرعه‌ی شالیکاری دو کارگر که با هم کار می کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می کنند. امّا اگر هر کدام به تنهایی کار می کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوّم این کار را تمام می کرد. هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می کنند.

حل : اگر کارگر اوّل در x روز کار را تمام می کند، پس کارگر دوّم همین کـار را در $x+15$ روز تمـام مـی کند. لذا

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+15}=\frac{1}{18}$$

$$\xrightarrow{\times 18x(x+15)=} 18(x+15)+18x=x(x+15)\rightarrow 18x+270+18x=x^2+15x$$

$$\rightarrow x^2-21x-270=0 \xrightarrow{\Delta=(-21)^2-4(1)(270)=441+1080=1521} \begin{cases} x_1=\dfrac{21+39}{2}=30 \\ x_2=\dfrac{21-39}{2}=-9 \end{cases}$$

بنابر ماهیت مسئله ریشه‌ی $x=-9$ قابل قبول نیست.

***

۹ : در یک مغازه‌ی ماهی های تزئینی، ماهی های شور در محلول آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می شوند. به علت تازه کار بودن کارگرها ، ۲۰۰ کیلو گرم آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند.

حل : فرض می کنیم به اندازه‌ی کافی موجود باشد و بتوانیم با اضافه کردن نمک کافی ، محلول را با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می کنیم که در محلول فعلی چند کیلو گرم نمک وجود دارد.

$$\frac{4}{100}\times 200=8 \quad \text{کیلو}$$

اگر x کیلوگرم نمک به ایـن محلـول بیفـزاییم، میـزان نمـک آب $8+x$ کیلـوگرم مـی شـود و وزن کـل محلول $200+x$ کیلوگرم می شود، پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم:

$$\frac{8+x}{200+x}=\frac{7}{100}$$

$$\frac{8+x}{200+x}=\frac{7}{100}\rightarrow 800+100x=1400+7x\rightarrow 93x=600\rightarrow x=\frac{600}{93} \quad \text{کیلو گرم}$$

۱۰ : خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین المللی امام خمینی(ره) متصل می کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه ها طی می کند. اگر در مسیر جنوب به شمال از سرعت متوسط قطار به میزان ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی تر از زمان رفت خواهد شد. مدت زمان رفت و برگشت این قطار را محاسبه کنید.

حل : با توجه به صورت مسئله واضح است که زمان رفت قطار برابر $\frac{۶۰}{v}$ و زمان برگشت آن $\frac{۶۰}{v-۱۰}$ است.

همچنین اختلاف زمانی رفت و برگشت نیم ساعت $(\frac{۱}{۲})$ می باشد. لذا می توان نوشت:

$$\frac{۶۰}{v-۱۰}-\frac{۶۰}{v}=\frac{۱}{۲}$$

اکنون این معادله را حل می کنیم.

$$\frac{۶۰}{v-۱۰}-\frac{۶۰}{v}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\times ۲v(v-۱۰)}۱۲۰v-۱۲۰(v-۱۰)=v(v-۱۰)$$

$$\to ۱۲۰v-۱۲۰v+۱۲۰۰=v^۲-۱۰v\to v^۲-۱۰v-۱۲۰۰=۰$$

$$\to (v-۴۰)(v+۳۰)=۰\to v=۴۰ \quad \text{و} \quad v=-۳۰\ (\text{غیر قابل قبول})$$

لذا بر اساس این مسئله معلوم می شود که زمان رفت قطار برابر $\frac{۶۰}{v}=\frac{۶۰}{۴۰}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$ ساعت و زمان برگشت آن ، برابر $\frac{۶۰}{v-۱۰}=\frac{۶۰}{۴۰-۱۰}=\frac{۶۰}{۳۰}=۲$ ساعت است.

۱۱ : دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود. یعنی میانگین هر آزمون او در پنج هفته‌ی اوّل به صورت زیر بود.

$$\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

او از هفته‌ی ششم به بعد در تمام آزمون ها امتیاز ۹ را کسب کرد. به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون هایش برابر ۸ شد. حساب کنید که از هفته‌ی ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره‌ی ۹ گرفته است؟

حل : ابتدا الگوی زیر را تشکیل می دهیم.

شماره‌ی آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	....	؟
امتیاز کسب شده			۳۶			۹	....	۹
میانگین			۷/۲				۹	

گیریم که آرمان در بعد از هفته‌ی پنجم در n آزمون شرکت کرده باشد. پس تعداد کل آزمون های آرمان برابر $n+۵$ می شود. از طرفی کل امتیاز های کسب شده توسط او برابر $۹n+۳۶$ خواهد شد. لذا میانگین کل امتیاز های آرمان می شود، $\frac{۹n+۳۶}{۵+n}$ که طبق مسئله برابر ۸ است. پس داریم.

$$\frac{۹n+۳۶}{۵+n}=۸ \to ۹n+۳۶=۴۰+۸n \to n=۴$$

یعنی آرمان بعد از هفته‌ی پنجم فقط در ۴ آزمون شرکت کرده است.

۱۲ : اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند، می توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟

حل : گیریم که ماشین سریعتر A و دیگری B باشد. اگر زمان انجام کار توسط ماشین A برابر t باشد، زمان انجام کار توسط ماشین B مساوی $۲t$ است. با توجه به صورت مسئله می توان نوشت:

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۲t}=\frac{۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\times ۴t} ۴+۲=t \to t=۶$$

زمان مورد نیاز برای ماشین A برای کار به تنهایی $\to t=۶$

زمان مورد نیاز برای ماشین B برای کار به تنهایی $\to ۲t=۲(۶)=۱۲$

۱۳ : علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله‌ی ادبی۱۶ صفحه ای را منتشر می کند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می انجامد. حساب کنید که اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت نیاز دارد؟

$$\frac{۱}{r}+\frac{۱}{۱۲۰}=\frac{۱}{۸۰}\xrightarrow{\times ۲۴۰r} ۲۴۰+۲r=۳r \to r=۲۴۰\ \text{min}$$

قسمت دوّم : معادلات رادیکالی

هر معادله که در آن متغیر معادله در زیر رادیکال (با فرجه‌ی دوّم) باشد، را یک معادله‌ی شامل عبارت اصم یا رادیکالی می نامند. مانند معادلات زیر :

الف) $1+\sqrt{x+2}=x-3$ ب) $2\sqrt{x}=\sqrt{3x+4}$

برای حل چنین معادلاتی ، در یک مرحله‌ی مناسب طرفین معادله را به توان ۲ می رسانیم تا یک معادله‌ی بدون رادیکال به دست آید. سپس این معادله را حل می کنیم. در نهایت جوابی از معادله را می پذیریم که

الف : به ازاء آن عبارت زیر رادیکال منفی نباشد. ب : معادله به ازای آن برقرار باشد.

مثال : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$1+\sqrt{x+2}=x-3$$

حل:

$$1+\sqrt{x+2}=x-3 \to \sqrt{x+2}=x-4 \to (\sqrt{x+2})^2=(x-4)^2$$

$$\to x+2=x^2-8x+16$$

$$\to x^2-9x+14=0 \to (x-7)(x-2)=0 \to \begin{cases} x=7 \\ x=2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱۴ : هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\sqrt{5m-1}+3=0$ ۴) $2\sqrt{3-2x}+x=3$

۲) $\sqrt{3x-5}=\sqrt{x-2}+1$ ۵) $\sqrt{15+\sqrt{2x-80}}=5$

۳) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$ ۶) $\dfrac{1}{\sqrt{u-3}}-\dfrac{2}{\sqrt{u}}=0$

۱۵ : عددی پیدا کنید که حاصل جمع آن با جذرش برابر۶ شود.

۱۶ : بدون حل، توضیح دهید که چرا معادله های زیر فاقد جواب حقیقی می باشند.

الف) $\sqrt{t}+2=0$ ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x-3}+1=0$ ج) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

۱۷: مقدار k را از تساوی مقابل حساب کنید. $v=\sqrt{\frac{۲k}{m}}$

۱۸ : معادله ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه های آن باشد. مسئله چند جواب دارد.

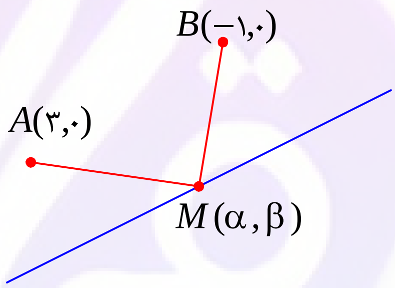
***

حل چند مسئله‌ی کاربردی

۱۹ : نقطه ای روی خط $y=۲x+۱$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(۳,۰)$ و $B(-۱,۰)$ به یک فاصله باشد.

حل : فرض کنیم که $M(\alpha,\beta)$ نقطه‌ی مورد نظر باشد. چون این نقطه روی خط $y=۲x+۱$ پس $\beta=۲\alpha+۱$

از طرفی



$$MA=MB$$

$$\rightarrow\sqrt{(x_A-x_M)^۲+(y_A-y_M)^۲}=\sqrt{(x_B-x_M)^۲+(y_B-y_M)^۲}$$

$$\rightarrow(۳-\alpha)^۲+(۰-\beta)^۲=(-۱-\alpha)^۲+(۰-\beta)^۲$$

$$\rightarrow ۹-۶\alpha+\alpha^۲+\beta^۲=۱+۲\alpha+\alpha^۲+\beta^۲\rightarrow ۹-۶\alpha=۱+۲\alpha\rightarrow\alpha=۱$$

$$\xrightarrow{\beta=۲\alpha+۱}\beta=۲(۱)+۱=۳$$

$$\therefore\quad M(۱,۳)$$

۲۰: دانش آموزان کلاس سن دبیر حسابان را از او پرسیدند. گفت : وقتی فرزندم به دنیا آمد، من ۳۰ سال داشتم و اکنون سن او جذر سن من است. حال شما سن من را حساب کنید؟

حل : اگر سن دبیر حسابان x باشد، سن فرزند او $x-۳۰$ خواهد بود. لذا می توان نوشت:

$$\sqrt{x}=x-۳۰$$

$$\to x=(x-۳۰)^{۲}\to x=x^{۲}-۶۰x+۹۰۰\to x^{۲}-۶۱x+۹۰۰=۰$$

$$\to (x-۳۶)(x-۲۵)=۰\to \begin{cases} x=۳۶ \\ x=۲۵ \end{cases}$$

که جواب $x=۲۵$ قابل قبول نیست. (چرا؟)

۲۱ : اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت. اگر $t=\sqrt{۱۰-\frac{h}{۵}}$ ، حساب کنید که این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار می گیرد.

حل :

$$t=\sqrt{۱۰-\frac{h}{۵}}\xrightarrow{t=۲}۲=\sqrt{۱۰-\frac{h}{۵}}\to ۴=۱۰-\frac{h}{۵}\to -۶=-\frac{h}{۵}\to h=۳۰\ \ m$$

***

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم « رشته ی علوم تجربی »

فصل ۲ : هندسه

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

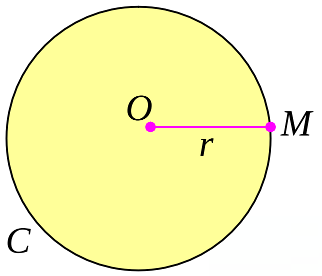
@mathameri

مهر ۱۳۹۶

درس اوّل : ترسیم های هندسی

آشنایی با مفاهیم هندسی برای یادگیری و درک عمیق دیگر مفاهیم ریاضیات مـوثر اسـت. در ایـن فـصل ، برخی از مفاهیم مقدماتی هندسه بررسی می کنیم.

قسمت اوّل : دایره



دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به یک فاصله باشند. نقطه‌ی ثابت را مرکز و فاصله‌ی ثابت را شعاع می نامند. دایره به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O,r)$ نمایش می دهند.

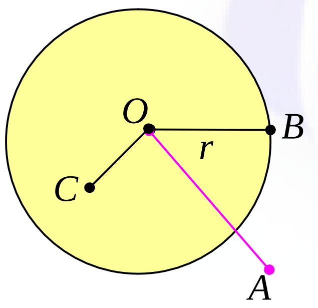
تمرین ۱ : دایره ای شعاع ۲ سانتی رسم کنید. سپس

الف : نقطه ای تعیین کنید که فاصله‌ی آن تا مرکز دایره ۳ سانتی متر باشد.

ب : نقطه ای تعیین کنید که فاصله‌ی آن تا مرکز دایره ۱/۵ سانتی متر باشد.

ج : نقطه ای تعیین کنید که فاصله‌ی آن تا مرکز دایره ۲ سانتی متر باشد.

نتیجه : هر دایره صفحه را به سه بخش مجزا تقسیم می کند.

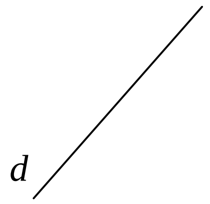


الف: نقاط خارج دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع بزرگتر است. ($OA > r$)

ب: نقاط روی دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره برابر شعاع است. ($OB = r$)

ج: نقاط داخل دایره: فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع کوچکتر است. ($OC < r$)

تمرین برای حل :



۲ : خط d در شکل مقابل را در نظر بگیرید. تمام نقاطی که به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از خط d هستند را مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل هایی را تشکیل می دهند؟

۳ : نقطه‌ی P به فاصله‌ی ۱ سانتی متر از خط d قرار دارد.

الف : تمام نقاطی که به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از نقطه‌ی P هستند را مشخص کنید.

ب : تمام نقاطی از خط d را که به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از P هستند را تعیین کنید.

۴ : پاره خط AB به طول ۵ سانتی متر در نظر بگیرید. سپس نقاطی را تعیین کنید که از A به فاصله‌ی ۴ سانتی متر و از B به فاصله‌ی ۵ سانتی متر باشند. (مسئله چند جواب دارد؟)

۵ : مثلثی رسم کنید که طول اضلاع آن ۴ و ۵ و ۷ سانتی متر باشند.

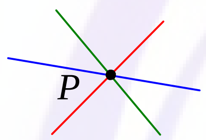
***

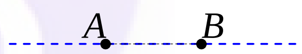
قسمت دوّم : مفهوم اصل :

هر واقعیت که بدیهی بوده و نیازمند استدلال نباشد را اصل می نامند. برای مثال به اصول زیر توجه کنید.

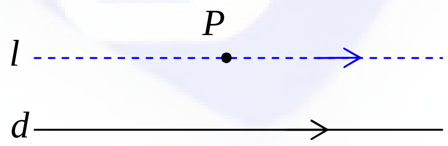
اصل۱ : از یک نقطه روی صفحه، چند خط می گذرد.

اصل ۲ : از هر دو نقطه‌ی متمایز روی صفحه فقط و فقط یک خط راست می گذرد.





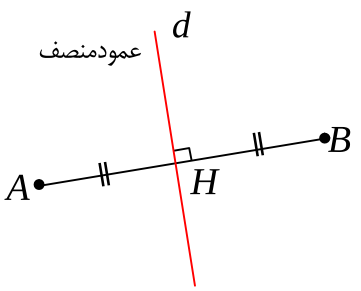
اصل ۳ : از هر نقطه‌ی خارج یک خط راست فقط و فقط یک خط راست موازی آن می توان رسم کرد.



***

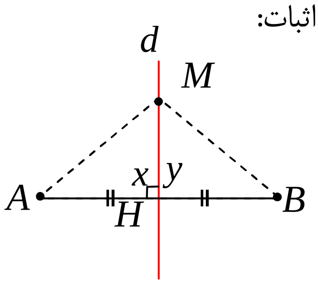
قسمت سوّم : عمود منصف پاره خط و خواص آن

هر خط که هم از نقطه‌ی وسط یک پاره خط بگذرد و هم عمود بر آن باشد را عمود منصف آن پاره خط می‌نامند.



تمرین۶ : ثابت کنید که هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط قرار دارد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

اثبات:

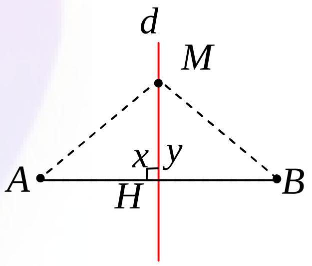


$$\left.\begin{array}{ll} MH = MH & \text{مشترک} \\ \angle x = \angle y = ۹۰^\circ & \\ AH = BH & \end{array}\right\} \to \underset{\text{(ض‌زض)}}{\overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}} \to MA = MB$$

***

تمرین۷ : اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد،آن نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

اثبات : از نقطه ی M خطی چنان رسم می‌کنیم که از نقطه ی وسط پاره‌خط AB بگذرد. پس:



$$\left.\begin{array}{ll} MA = MB & \text{طبق فرض} \\ MH = MH & \text{مشترک} \\ AH = BH & \end{array}\right\} \to \underset{\text{(ض ض ض)}}{\overset{\Delta}{AMH} \cong \overset{\Delta}{BMH}} \to \angle x = \angle y$$

از طرفی طبق اصل زاویه‌ی نیم صفحه، واضح است که $\angle x + \angle y = ۱۸۰^\circ$ پس:

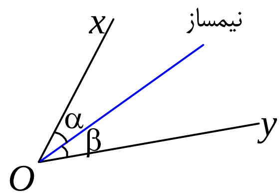
$$\angle x = \angle y = ۹۰^\circ \to d \perp AB$$

و چون $AH = BH$ و $d \perp AB$ پس d عمود منصف AB است.

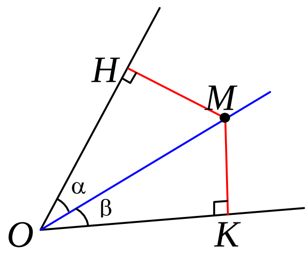
***

قسمت چهارم : نیمساز زاویه

تعریف : نیمساز زاویه خطی است که از رأس زاویه می‌گذرد و آن را به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم می‌کند.



$\angle\alpha = \angle\beta$



تمرین۸ : هرگاه نقطه‌ای از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشد آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.

فرض : $MH = MK$

حکم : $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

اثبات : دو مثلث OMH و OMK قائم‌الزاویه هستند پس

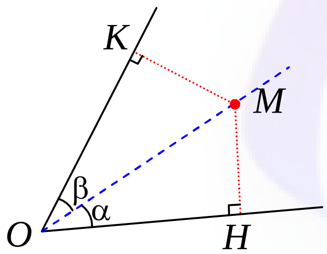
$$\left.\begin{array}{l} MH = MK \\ \text{مشترک} \quad OM = OM \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK} \rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

(وتر و یک ضلع)

تمرین۹ : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه ، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

حکم : $MK = MH$

اثبات : دو مثلث $\overset{\Delta}{OHM}$ و $\overset{\Delta}{OKM}$ قائم‌الزاویه هستند. پس :



$$\left.\begin{array}{l} \angle\alpha = \angle\beta \\ \text{وتر مشترک} \ OM = OM \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK} \rightarrow MH = MK$$

(وتر و یک زاویه ی حاده)

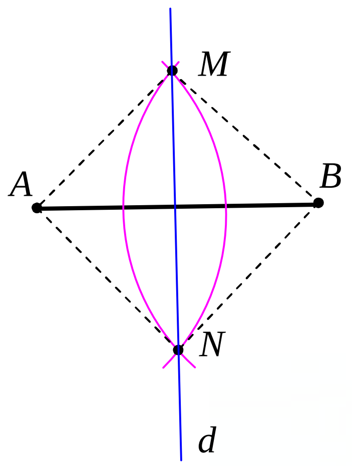
***

قسمت پنجم : آشنایی با چند ترسیم هندسی

گاهی برای حل مسائل مختلف لازم است از ترسیم های هندسی استفاده شود. بدین معنی که در اینگونه مسائل شکل هایی را رسم می کنیم که دارای ویژگی معینی باشند و بعد از ترسیم و با استفاده از ویژگی های شکل به پاسخ مسئله می رسیم. توجه داشته باشیم که ابزارهای مورد استفاده در اینگونه مسائل فقط خط کش

و پرگار[1] می باشند. از خط کش برای رسم خط راست و از پرگار برای رسم دایره با شعاع معین استفاده می شود.

۱ : روش رسم عمود منصف یک پاره خط



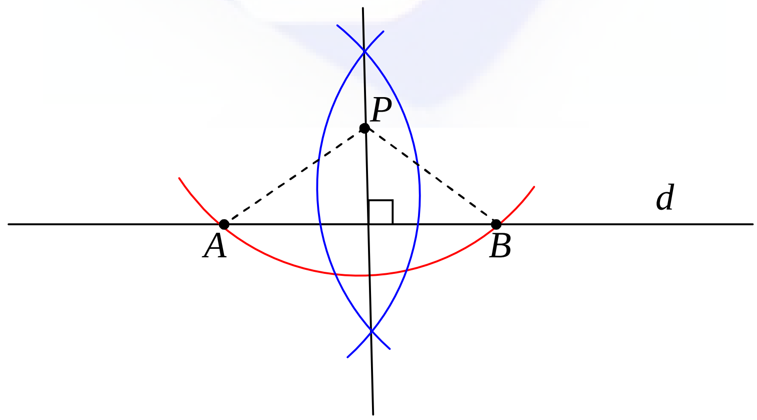
ابتدا پرگار را به اندازه ای باز می کنیم که شعاع آن از نصف طول پاره خط بیشتر باشد، سپس از دو سر پاره خط AB دو کمان با شعاع های مساوی رسم کرده تا این دو کمان همدیگر را در نقاط M و N قطع کنند. چون دو نقطه‌ی M و N از دو سر پاره خط AB به یک فاصله اند. پس روی عمود منصف AB قرار دارند. لذا خط گذرا از این دو نقطه یعنی d عمود منصف AB است.

تمرین ۱۰ : ابتدا یک پاره خط به طول ۴ سانتی متر بکشید، سپس به کمک خط کش و پرگار عمود منصف آن را رسم کنید.

***

۲ : رسم خطی عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه‌ی خارج آن

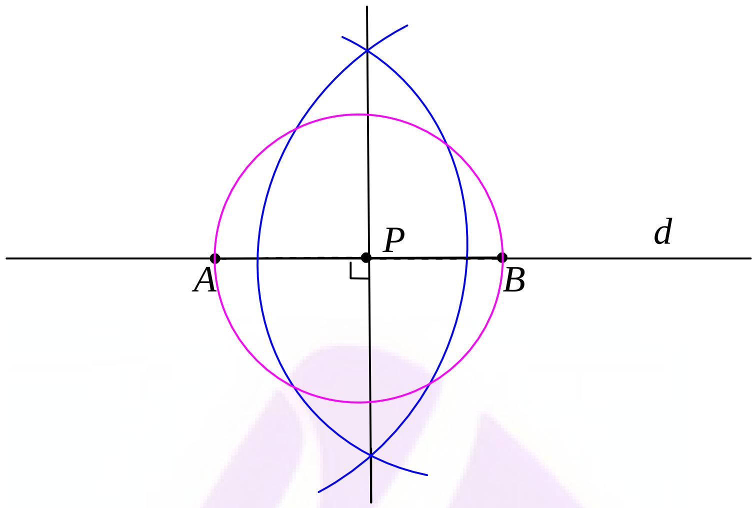
از نقطه‌ی P یک کمان را طوری رسم می کنیم که خط d را در نقاط A و B قطع کند. اکنون عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم که جواب مسئله است.



[1]. خط کش غیر مدرج فرض می شود، مگر آنکه اندازه ی پاره خط قید شود.

۳ : رسم خطی عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه‌ی روی آن

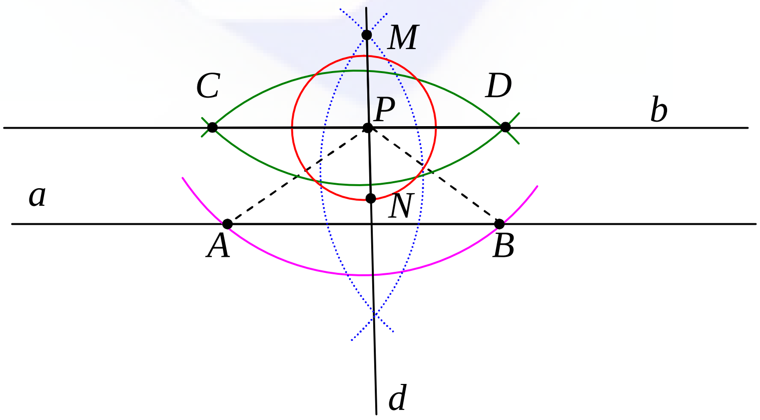
به مرکز نقطه‌ی P دایره ای رسم کرده تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. اکنون عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم که جواب مسئله است.



***

۴ : رسم خط موازی یک خط داده شده از یک نقطه‌ی خارج آن

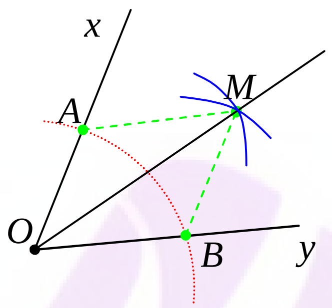
ابتدا از نقطه‌ی P واقع در خارج خط a یک خط مانند d عمود بر a رسم می کنیم. این خط از نقطه‌ی P می گذرد. اکنون از نقطه ی P واقع بر d خط b را عمود بر d رسم می کنیم. چون $d \perp a$ و $d \perp b$ پس $a \| b$ و لذا b جواب مسئله است.



***

۵ : رسم نیمساز یک زاویه

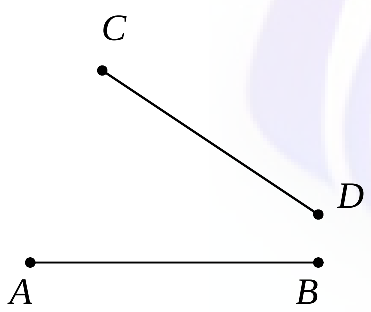
از رأس زاویه‌ی xOy یک کمان را طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند. اکنون از نقاط A و B دو کمان با شعاع مساوی رسم می کنیم که همدیگر را در نقطه ای مانند M قطع کنند. چون دو مثلث OAM و OBM به حالت (ض ض ض) همنهشت هستند. لذا $\angle AOM = \angle BOM$ یعنی OM نیمساز زاویه ی xOy می باشد و جواب مسئله است.



***

تمرین برای حل :

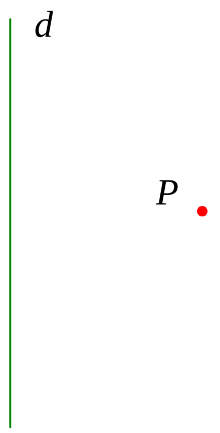
۱۱ : دو پاره خط AB و CD مطابق شکل مقابل داده شده اند. نقطه ای بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله و از دو نقطه‌ی C و D نیز به یک فاصله باشد.



۱۲ : مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمود منصف های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه‌ی برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۱۳ : مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمساز های دو زاویه‌ی این مثلث را رسم کنید و نقطه‌ی برخورد آنها را O بنامید. از نقطه‌ی O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمود ها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۱۴ : فرض کنید نقطه‌ی P به فاصله‌ی ۴ سانتی متر از خط d باشد. در هر مورد روش رسم یک مثلث متساوی الساقین که نقطه‌ی P یک رأس باشد را توضیح دهید.



الف) قاعده‌ی این مثلث بر خط d منطبق باشد.

ب) قاعده‌ی این مثلث بر خط d منطبق بوده و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.

ج) قاعده‌ی این مثلث بر خط d منطبق بوده و مساحت آن ۸ سانتی مترمربع باشد.

۱۵: سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست، در نظر بگیرید، سپس نقطه ای پیدا کنید که از این سه نقطه به یک فاصله باشد. (روش کار را توضیح دهید.)

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

درس دوّم : مقدمات استدلال و قضیه ی تالس

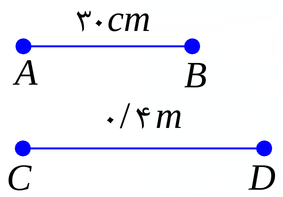
در این درس ابتدا با مفهوم نسبت و تناسب و همچنین استدلال و انواع آن آشنا می شویم. سپس با بیان ویژگی خطوط موازی و قضیه‌ی تالس و کاربردهای آن، این مفاهیم را به صورت دقیق بررسی می کنیم.

قسمت اوّل : نسبت و تناسب

نسبت دو کمیت کسری است که صورت و مخرج آن اندازه‌های آن دو کمیت برحسب یک واحد باشند.

مثلاً : کسر $\frac{a}{b}$ را نسبت a بر b گویند هرگاه b و a برحسب یک واحد باشند.

مثال : نسبت اندازه پاره خط AB بر پاره خط CD را با توجه به شکل مقابل بنویسید.



$$\frac{AB}{CD}=\frac{۳۰}{۴۰}=\frac{۳}{۴}$$

نتیجه : نسبت دو کمیت یک عدد حقیقی است و به واحد اندازه‌گیری آنها بستگی ندارد.

بیان تساوی دو نسبت را تناسب گویند.

مثلاً : تساوی دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ ، $b,d\neq ۰$ را یک تناسب گویند.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

در یک تناسب مانند تناسب فوق جملات d و a را طرفین (جملات کناری) و c و b را وسطین (جملات میانی) می‌نامند.

جملات میانی $\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad$ جملات کناری

خاصیت اصلی تناسب

در هر تناسب حاصل ضرب دو جمله‌ی کناری با حاصل ضرب دو جمله‌ی میانی آن برابر است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow ad=bc$$

اثبات : چون $b,d \neq 0$ پس $bd \neq 0$. حال کافی است دو طرف تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در bd ضرب کنیم.

خواهیم داشت :

$$bd\,(\frac{a}{b})=bd\,(\frac{c}{d}) \rightarrow ad=bc$$

خواص دیگر تناسب

۱ : در یک تناسب می‌توان جای دو جمله‌ی میانی و یا دو جمله‌ی کناری را عوض کرد و تناسب جدیدی به دست آورد. $(a,b,c,d \neq 0)$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{جابجایی جملات میانی}} \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{جابجایی جملات کناری}} \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow[\text{جابجایی جملات کناری}]{\text{جابجایی جملات میانی}} \frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

نتیجه: در یک تناسب می‌توان هر دو نسبت را معکوس کرد و تناسب جدیدی به دست آورد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \qquad (a,b,c,d \neq 0)$$

۲ : در یک تناسب از ترکیب نسبت در صورت (یا در مخرج) تناسبی جدید به وجود می‌آید. $(b,d \neq 0)$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت درمخرج}} \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

۳ : در یک تناسب ، نسبت مجموع صورتها به مجموع مخرجها برابر هر یک از نسبت‌های تناسب است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \rightarrow \frac{a+c}{b+d}=k \qquad (b,d \neq 0)$$

توجه : خاصیت ۳ برای چند نسبت مساوی نیز قابل تعمیم است.

تمرین ۱ : با توجه به خواص تناسب، در هر مورد جای خالی را کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۱۴}=\frac{۱۵}{۴۲}\rightarrow ۵\times .... = ۱۵\times ....$

ب) $۳\times ۴۰ = ۱۲\times ۱۰ \rightarrow \frac{۳}{....}=\frac{۱۲}{....}$

پ) $\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۱}{۳۰}\rightarrow \frac{۱۰}{۷}=....$

ت) $\frac{۶}{۱۱}=\frac{۱۸}{۳۳}\rightarrow \frac{۶}{۱۸}=.... \quad , \quad \frac{۳۳}{۱۱}=....$

ث) $\frac{۴}{۱۴}=\frac{۱۰}{۳۵}\rightarrow \frac{۱۸}{۱۴}=.... \quad , \quad \frac{۴}{۱۸}=....$

ج) $\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۲۴}\rightarrow \frac{-۷}{۱۲}=.... \quad , \quad \frac{۵}{-۷}=....$

تمرین ۲ : اگر $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}$ مقدار $\frac{a+b}{a-b}$ را به دست آورید.

حل :

$$\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{۳+۴}{۴}\rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{۷}{۴}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}\rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{۳-۴}{۴}\rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{-۱}{۴}$$

$$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{-۱}{۴}}\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=-۷$$

تمرین برای حل :

۳ : در هر مورد مقدار مجهول را بیابید.

الف) $\frac{x}{۳}=\frac{۹}{۱۰}$ ب) $\frac{y}{y+۲}=\frac{۳}{۴}$ ج) $\frac{z+۱}{z}=\frac{۴}{z}$ د) $\frac{۲a+۱}{۱۸}=\frac{۳۵}{b}=\frac{۵}{۲}$

۴ : محیط مستطیلی ۲۱۰ سانتی‌متر و نسبت طول به عرض آن $\frac{۴}{۳}$ است. مساحت این مستطیل را به دست آورید.

۵ : متناظر با تساوی زیر یک تناسب بنویسید.

$$۵x+y=۲x+۷y$$

۶ : اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ ، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

۷ : در هر مورد مقدار عددی $\frac{a}{b}$ را به دست آورید.

الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$

ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

***

قسمت دوّم : استدلال در ریاضی و هندسه

استدلال و انواع آن

عمل ارائه‌ی دلیل برای اثبات درستی یک گزاره به کمک دانسته های قبلی را استدلال می نامند. به طور کلی دو نوع استدلال وجود دارد.

الف: استدلال استقرایی :

روش نتیجه گیری کلی بر مبنای تعداد محدودی مشاهده را استدلال استقرایی می نامند.

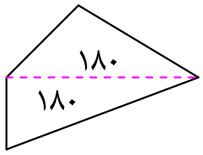
ب : استدلال استنتاجی :

روش نتیجه گیری کلی بر مبنای حقایق پذیرفته شده را استدلال استنتاجی می نامند.

***

مثال : رحمان وقتی در مورد مجموع زاویه های داخلی یک چهار ضلعی محدب با پژمان و پیمان صحبت می کرد. آنها گفتند مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰ درجه است و استدلالی که بکار بردند متفاوت بود.

استدلال پژمان : در تمام چهارضلعی هایی از قبیل مربع ، مستطیل ، لوزی ، متوازی الاضلاع با توجه به اینکه زاویه های مجاور مکمل یکدیگرند، مجموع زاویه های داخلی ۳۶۰ درجه است، لذا مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰ درجه است.



استدلال پیمان : با توجه به اینکه مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است. لذا با رسم یک قطر در هر چهارضلعی محدب می توان آن را به دو مثلث تبدیل کرد. لذا مجموع زاویه های داخلی چهارضلعی محدب برابر مجموع زاویه های داخلی این دو مثلث می باشد، در نتیجه برابر ۳۶۰ درجه است.

با توجه به تعریف ارائه شده برای انواع استدلال ، واضع است که استدلال پژمان استقرایی و استدلال پیمان استنتاجی است.(چرا؟)

تمرین ۸ : تفاوت های بین انواع استدلال را بنویسید.

حل:

استقرایی	از جزء به کل است.	متکی بر تعداد محدودی مشاهده است.	تجربی است.	نتایج آن احتمالی است.
استنتاجی	از کل به جزءاست.	متکی بر حقایق پذیرفته شده است.	منطقی است.	نتایج آن قطعی است.

توجه : چون استدلال استقرایی مبتنی بر تجربه بوده و تمام حالات ممکن را بررسی نمی کند پس نتایج بدست آمده از آن قطعی نیست ولی در استدلال استنتاجی نتایج بدست آمده همواره قطعی هستند، زیرا این استدلال مبتنی بر حقایق بوده و تجربی نمی باشد.

***

مثال نقض : نتایج بدست آمده از استدلال استقرایی قطعی نیستند و گاهی قابل رد هستند. برای رد یک نتیجه ی کلی که از استدلال استقرایی بدست می آید، ارائه‌ی یک مثال نقض کافی است. مثال نقض ، مثالی است که نشان می دهد یک نتیجه گیری کلی نادرست است.

مثال : گزاره‌ی زیر را در نظر بگیرید.

حاصل جمع هر دو عدد گنگ ، یک عدد گنگ است.

این گزاره درست نیست، زیرا اعداد $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند ولی حاصل جمع آنها برابر صفر است که یک عدد گویا می باشد.

$$(\sqrt{۲})+(-\sqrt{۲})=۰$$

تمرین۹ : با یک مثال نقض گزاره های زیر را رد کنید.

الف : مربع هر عدد بزرگتر یا مساوی آن عدد است.

ب : حاصل عبارت $p=x^{۲}+x+۴۱$ به ازاء اعداد طبیعی همواره یک عدد اوّل است.

حل:

الف: این گزاره نادرست است زیرا: $(۰/۵)^{۲}=۰/۲۵$ در حالی که $۰/۲۵ \ngeq ۰/۵$

ب: این گزاره نادرست است زیرا اگر عدد ۴۱ را به جای x قرار دهیم حاصل ۱۷۶۳ می شود که عدد اوّل نیست. (بر۴۱ بخش پذیر است.)

***

تمرین برای حل : برای رد درستی هر یک از گزاره های کلی زیر یک مثال نقض ارائه کنید.

۱۰ : از وصل کردن هر سه رأس یک هفت ضلعی منتظم،یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می گردد.

۱۱ : هر دو مثلث که مساحت های برابر داشته باشند، هم نهشت هستند.

۱۲ : در هر مثلث هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچکتر است.

۱۳ : همه‌ی اعداد اوّل فرد هستند.

۱۴ : هیچ عدد اوّل بزرگتر از ۱۲۷ وجود ندارد.

نتیجه : برای پذیرفتن درستی یک گزاره لازم است استدلال کرد و این استدلال باید استنتاجی باشد ولی برای رد درستی یک گزاره ارائه‌ی یک مثال نقض کافی است.

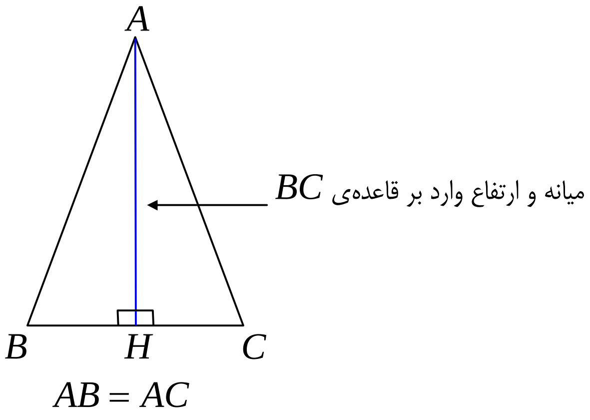
تمرین۱۵ : از دو گزاره‌ی زیر آنکه درست است، ثابت کنید و آنکه نادرست است با یک مثال نقض رد کنید.

الف : در هر مثلث میانه‌ی وارد بر یک ضلع از ارتفاع نظیر همان ضلع بزرگتر است.

ب : در هر مثلث ، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور آن است.

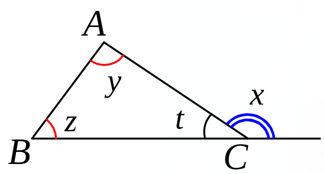
حل:

الف: این گزاره نادرست است، زیرا در مثلث متساوی الساقین[1] میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند و لذا با هم مساویند.



ب: این گزاره درست است. برای اثبات آن از تعریف زاویه‌ی خارجی و همچنین مجموع زاویه های داخلی استفاده می کنیم.

$$\left.\begin{array}{r} x+t=۱۸۰ \\ y+z+t=۱۸۰ \end{array}\right\} \rightarrow x+t=y+z+t \rightarrow x=y+z$$



***

مفهوم قضیه

هر گزاره‌ی درست و کلی که به کمک استدلال استنتاجی بدست می آید را **قضیه** می نامند.

مثال:

۱ : در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

۲ : مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۳ : در هر مثلث مجموع اندازه های هر دو ضلع از اندازه‌ی ضلع سوّم بزرگتر است.

۴ : برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y همواره $\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$ است.

۵ : برای هر دو مجموعه‌ی A و B همواره $A-B=A\bigcap B'$

[1] . در مثلث متساوی الاضلاع میانه و ارتفاع تمام اضلاع بر هم منطبق هستند.

هر قضیه را می توان به صورت یک گزاره‌ی مرکب که به صورت ترکیب شرطی بیان می شود. بنابراین دارای دو قسمت می باشد:

الف) فرض (شرط) : آن قسمت از گزاره است که آن را می پذیریم.

ب) حکم (جواب شرط) : آن قسمت از گزاره است که باید درستی آن را نتیجه بگیریم.

بنابراین هر قضیه دارای الگویی به صورت زیر است.

قضیه : اگر .... آنگاه ....

فرض (p)　　　　حکم (q)

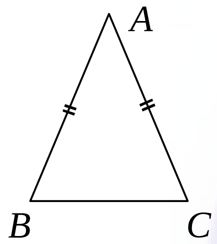
مثال : قضیه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

قضیه : در هر مثلث متساوی‌الساقین ، دو زاویه‌ی مجاور به قاعده مساویند.

گرچه این قضیه به ظاهر گزاره شرطی نیست ولی می‌توان به سادگی آن را به شکل زیر نوشت.

اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد آنگاه دو زاویه‌ی مجاور به قاعده آن مساویند.

فرض　　　　حکم



فرض : $AB = AC$

حکم : $\angle B = \angle C$

تمرین ۱۶ : قضیه‌های زیر را به صورت شرطی بیان کنید و فرض و حکم آنها را مشخص کنید.

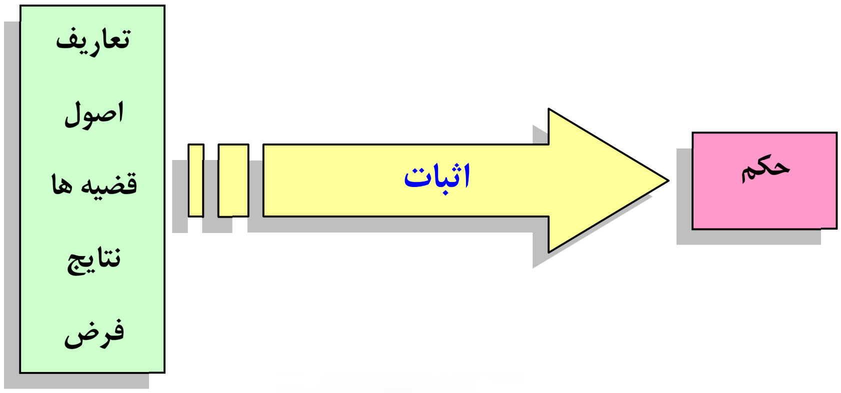
الف : هر دو زاویه‌ی متقابل به رأس مساویند.

ب : هر دو زاویه‌ی مساوی مکمل های مساوی دارند.

ج : مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

د : در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

قضیه ها در ریاضی و هندسه باید اثبات شوند، به عبارتی دیگر برای درستی آنها باید استدلال کرد. هر حرکت مرحله به مرحله و منطقی که به کمک استدلال استنتاجی، منجر به رسیدن به حکم قضیه شود را اثبات قضیه گویند.



بدیهی است که تشخیص فرض و حکم هر قضیه برای اثبات آن قضیه مهم است. اوّلین گام در اثبات هر قضیه تعیین فرض و حکم آن است. آخرین مرحله در اثبات هر قضیه رسیدن به حکم آن است.

***

قضیه‌ی عکس: اگر جای فرض و حکم یک قضیه را جابجا کنیم، یک گزاره‌ی شرطی جدید بدست می آید که آن را عکس قضیه می نامیم. عکس قضیه، ممکن است درست و ممکن است نادرست باشد. درصورتی که عکس یک قضیه درست باشد، آن را قضیه‌ی عکس می نامند.

مثال :

قضیه : اگر مثلثی متساوی الساقین باشد،آنگاه در آن دو زاویه ی مجاور به قاعده مساویند.

قضیه‌ی عکس : اگر در مثلثی دو زاویه مساوی باشند،آنگاه آن مثلث متساوی الساقین است.

در مثال فوق عکس قضیه‌ی داده شده، درست است و لذا خود یک قضیه می باشد. در مثال زیر عکس قضیه درست نیست.

مثال:

قضیه : اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند، آنگاه آن دو زاویه مساویند.

عکس قضیه : اگر دو زاویه مساوی باشند،آنگاه آن دو زاویه متقابل به رأس هستند.

تمرین۱۷ : عکس هر یک از قضیه های زیر را بنویسید.

الف) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند.

ب) اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

ج) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه‌ی آن نیز برابر خواهند بود.

***

قضیه‌ی دو شرطی : اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی خود یک قضیه‌ی شرطی باشد. به کمک یکی از الگو های زیر می توان آن دو قضیه را ترکیب کرد و به صورت یک قضیه بیان نمود. این قضیه را قضیه‌ی دو شرطی می نامند.

- اگر p آنگاه q و برعکس
- p اگر و تنها اگر q
- p شرط لازم و کافی است برای q

مثال :

قضیه: اگر مثلثی قائم الزاویه باشد،آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است.

قضیه‌ی عکس : اگر در مثلثی مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آنگاه آن مثلث قائم الزاویه است.

قضیه‌ی دو شرطی:

- اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است و برعکس.
- مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر باشد.
- قائم الزاویه بودن مثلث شرط لازم وکافی است برای اینکه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.

مثال : هر یک از قضیه های زیر دوشرطی هستند.

الف) دو ضلع از یک مثلث برابرند، اگر و تنها اگر زاویه های روبرو به این دو ضلع با هم برابر باشند.

ب) در مثلث متساوی الاضلاع ، یک پاره خط نیمساز است، اگر و تنها اگر میانه باشد.

تمرین برای حل : قضیه های زیر را در نظر بگیرید. سپس :

الف : عکس هر کدام را بنویسید.

ب : با ترکیب قضیه و عکس آن یک قضیه‌ی دو شرطی بیان کنید.

۱۸ : در هر مثلث ، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه‌ی روبرو به آنها نیز برابرند.

۱۹ : اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

۲۰ : در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

۲۱ : اگر دو دایره شعاع های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت های آنها نیز برابر هستند.

توجه : برای اثبات یک قضیه‌ی دوشرطی باید قضیه های تشکیل دهنده‌ی آن را جداگانه ثابت کرد. یعنی ابتدا فرض و حکم را تعیین می کنیم و قضیه را ثابت می کنیم. سپس با جابجا کردن فرض و حکم قضیه‌ی عکس را نیز اثبات کرد.

***

عکس نقیض یک قضیه : اگر فرض و حکم قضیه ای را جابجا و نقیض کنیم،گزاره‌ی حاصل همواره درست خواهد بود. این گزاره را قضیه‌ی عکس نقیض می نامند.

مثال :

قضیه: اگر مثلثی قائم الزاویه باشد،آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است.

قضیه‌ی عکس نقیض : اگر در مثلثی مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر نباشد، آنگاه آن مثلث قائم الزاویه نیست.

توجه : اثبات یک قضیه به معنی اثبات عکس نقیض آن می باشد و ضرورتی به اثبات عکس نقیض آن نیست.

***

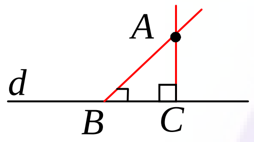
برهان خلف (اثبات غیر مستقیم)

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه نشان می دهیم که خلاف حکم آن درست نیست و سپس نتیجه می گیریم با این شرایط خود حکم درست است. این روش استدلال که نوعی استدلال استنتاجی است را برهان خلف یا اثبات غیر مستقیم می نامند.

روند کار در این روش بدین ترتیب است که ابتدا خلاف حکم را تشکیل می دهیم و آن را فرض خلف می نامیم، سپس استدلال خود را با تکیه بر این فرض ادامه می دهیم. در نهایت به خلاف فرض یا یک قضیه ی اثبات شده ی قبلی یا خلاف یک اصل (حقیقت) می رسیم. در آخر فرض خلف را باطل می کنیم و خود حکم رامی پذیریم.

***

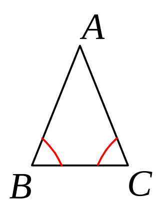
مثال ۱ : ثابت کنید که، از یک نقطه ی غیر واقع بر یک خط راست نمی توان بیش از خط بر آن عمود کرد.



اثبات به روش برهان خلف : فرض می کنیم که این حکم نادرست است و از یک نقطه‌ی دلخواه مانند A واقع بر خارج خط d می توان دو عمود بر آن رسم کرد. در این صورت یک مثلث تشکیل می شود که دو زاویه‌ی قائمه دارد. لذا مجموع زاویه های داخلی این مثلث بیش از ۱۸۰ درجه خواهد شد و این غیر ممکن است. پس فرض خلف نمی تواند درست باشد و حکم درست است.

***

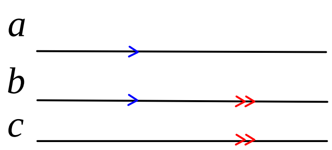
مثال ۲ : ثابت کنید که، اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $\angle B \neq \angle C$



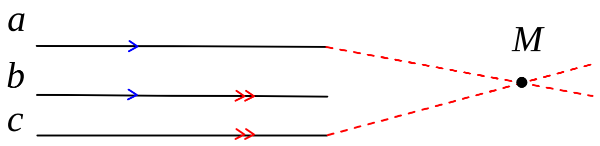
اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که $\angle B = \angle C$ باشد. یعنـی مثلـث ABC دو زاویه‌ی مساوی دارد. بنابراین مثلث متساوی الساقین است. لذا $AB = AC$ و ایـن خلاف فرض می باشد و نمی تواند درست باشد.

تمرین ۲۲ : ثابت کنید که هر دو خط که با خط سوّمی موازی باشند، خود با هم موازیند.

اثبات : در این مسئله از اینکه $b \| c$ و $a \| b$ می خواهیم ثابت کنیم. $a \| c$



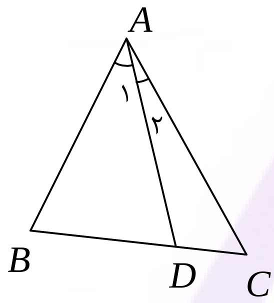
برای اثبات به روش برهان خلف عمل می کنیم. فرض کنیم که خط a موازی c نباشد. لذا این دو خط همدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کنند، در این صورت از نقطه‌ی M دو خط موازی b رسم شده است و این خلاف اصل توازی اقلیدس می باشد، پس $a \parallel c$



تمرین برای حل : به روش برهان خلف، گزاره های زیر را ثابت کنید.

۲۳: اگر n یک عدد طبیعی و $n^{۲}$ عددی فرد باشد، آنگاه n نیز فرد است.

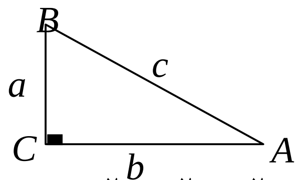
۲۴: فرض کنیم AD نیمساز زاویه‌ی A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آنگاه $AB \neq AC$



***

قسمت سوّم : قضیه‌ی فیثاغورس

در ادامه یکی از قضیه های اساسی در مورد مثلث قائم الزاویه معروف به قضیه ی فیثاغورس را بیان و اثبات می کنیم.



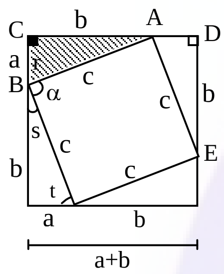
حکم: $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$

قضیه(قضیه‌ی فیثاغورس): در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر آن برابر است.

اثبات :

مرحله‌ی۱: مربعی به ضلع $a+b$ رسم می‌کنیم، سپس در این مربع چهار مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع b و a تشکیل می‌دهیم.

مرحله‌ی۲: بنا به حالت (ض‌زض) این چهار مثلث با همدیگر و با مثلث اصلی همنهشت هستند.



$$\left.\begin{array}{l} BC = AD \\ \hat{C} = \hat{D} = ۹۰^\circ \\ AC = DE \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{ADE}$$

(ض‌زض)

پس دارای وترهایی برابر c می‌باشند.

مرحله‌ی ۳: چهارضلعی حاصل از چهار وتر مربع است. زیرا

الف: چهارضلع مساوی دارد. ب: یک زاویه قائمة دارد.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{S}+\hat{t}=۹۰^\circ \\ \hat{r}=\hat{t} \end{array}\right\} \rightarrow \hat{S}+\hat{r}=۹۰^\circ \xrightarrow{\hat{r}+\hat{\alpha}+\hat{S}=۱۸۰^\circ} \hat{\alpha}=۹۰^\circ$$

مرحله‌ی۴ : طبق اصل مجموع مساحت‌ها می‌توان نوشت:

مساحت ۴ مثلث همنهشت + مساحت مربع کوچک = مساحت مربع بزرگ

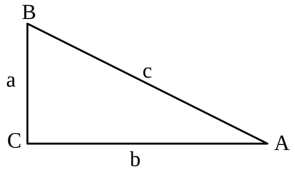
$$(a+b)^{۲}=c^{۲}+۴(\frac{۱}{۲}a.b)$$

$$\rightarrow a^{۲}+۲ab+b^{۲}=c^{۲}+۲ab \rightarrow a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

***

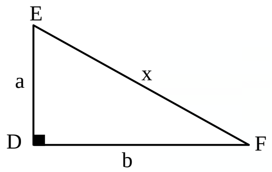
قضیه (عکس قضیه‌ی فیثاغورس) :

اگر در مثلثی مربع بزرگترین ضلع با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر برابر باشد آن مثلث قائم‌الزاویه و زاویه روبرو به ضلع بزرگتر قائمه است.



فرض : $a^2 + b^2 = c^2$

اثبات:مثلثی قائم الزاویه به نام DEF طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه‌ی قائمه ی آن b و a باشند.آنگاه داریم



$$a^2 + b^2 = x^2$$

و با مقایسه با فرض قضیه می‌توان نوشت

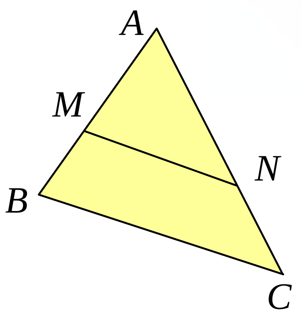
$$x^2 = c^2 \rightarrow x = c$$

لذا مثلث‌های ABC و DEF بنا به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند و چون زاویهD قائمه است پس زاویه متناظر آن یعنی زاویه C نیز قائمه است.

***

قسمت چهارم : خطوط موازی و قضیه‌ی تالس

قضیه (قضیه‌ی تالس) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند روی آنها پاره خطهای متناسب بوجود می‌آورد.

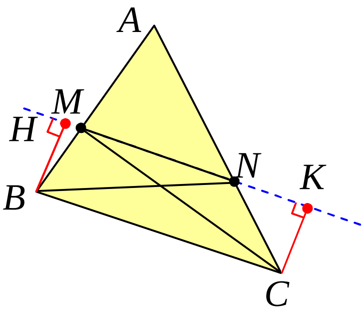


فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$

اثبات :

مرحله‌ی اوّل :



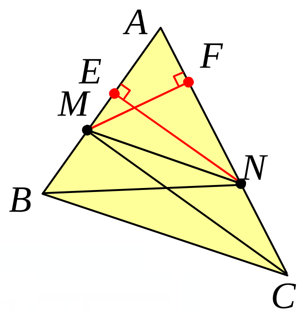
نقطه ی N را به B و همچنین نقطه‌ی M را به C وصل می‌کنیم.

دو مثلث MNB و MNC حاصل می‌شود که ارتفاع نظیر

ضلع MN در هر دو یکسان است. زیرا چهــارضلعی $BHKC$ مستطیل می‌باشد و در مستطیل اضلاع روبرو مساویند ($BH = CK$) . لذا طبق آنچه گفته شد داریم :

$$S_{\overset{\Delta}{MNB}} = \frac{۱}{۲} MN.BH = \frac{۱}{۲} MN.CK = S_{\overset{\Delta}{MNC}}$$

مرحله‌ی دوّم : از نقطه‌ی N بر ضلع AB پاره خط NE را عمود می‌کنیم. پس



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AM.NE}{\frac{۱}{۲} MB.NE} = \frac{AM}{MB}$$

مرحله‌ی سوّم : از نقطه‌ی M بر ضلع AC پاره خط MF را عمود می‌کنیم پس

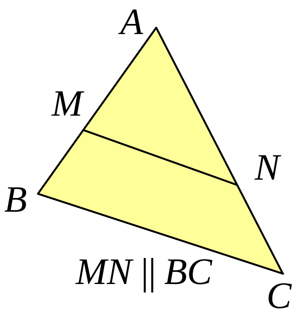
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}} = \frac{\frac{۱}{۲} AN.MF}{\frac{۱}{۲} NC.MF} = \frac{AN}{NC}$$

مرحله‌ی چهارم : طبق دو مرحله دوّم و سوّم داریم

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNB}}} = \dfrac{AM}{MB} \\[2ex] \dfrac{S_{\overset{\Delta}{AMN}}}{S_{\overset{\Delta}{MNC}}} = \dfrac{AN}{NC} \end{array}\right\} \xrightarrow{S_{\overset{\Delta}{MNB}} = S_{\overset{\Delta}{MNC}}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

***

نتیجه : رابطه‌ی تالس را می‌توان به صورت زیر نوشت.



$MN \parallel BC$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

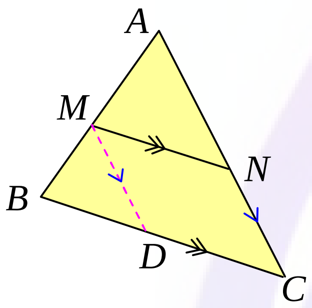
اثبات : کافی است نسبت را در مخرج ترکیب کنیم.

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\rightarrow\frac{AM}{AM+MB}=\frac{AN}{AN+NC}\rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

توجه : اگر رابطه‌ی تالس را به صورت $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$ بنویسیم، می‌گوییم، رابطه به صورت جزء به جزء نوشته شده است. در حالی که در حالت $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ رابطه را جزء به کل گویند.

***

قضیه (قضیه‌ی کلی تالس) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلث دیگری بوجود می‌آورد که اضلاع آن با اضلاع متناظر از مثلث اصلی متناسبند.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

اثبات : تناسب $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ (۱) طبق قضیه‌ی تالس بدیهی است. از طرفی اگر از نقطه‌ی M پاره‌خط MD را موازی AC رسم کنیم. با استفاده از قضیه‌ی تالس داریم :

$$MD \parallel AC \rightarrow \frac{BM}{AB}=\frac{BD}{BC}\rightarrow\frac{-BM}{AB}=\frac{-BD}{BC}$$

و با ترکیب نسبت در صورت می توان نوشت:

$$\frac{AB-BM}{AB}=\frac{BC-BD}{BC}\rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{DC}{BC}$$

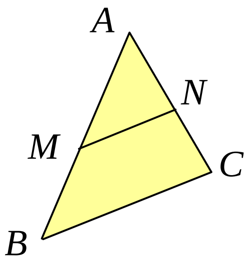
ولی چهارضلعی $MNCD$ متوازی الاضلاع است پس $MN=DC$ و لذا

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC} \qquad (۲)$$

حال طبق نتایج ۱ و ۲ به دست آمده می‌توان نوشت:

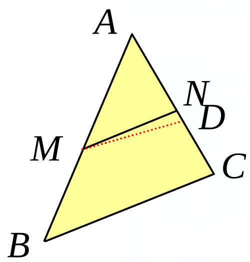
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

***



قضیه (عکس قضیه‌ی تالس) : اگر خطی دو ضلع مثلثی (یا امتداد آنها) را قطع کند و روی آنها پاره‌خط‌های متناسب پدید آورد، آن خط با ضلع سوّم مثلث موازی است.

فرض : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ حکم : $MN \parallel BC$



اثبات : (به کمک برهان خلف) گیریم که MN موازی BC نباشد. پس از نقطه‌ی M خط MD را چنان رسم می‌کنیم که موازی BC باشد و AC (یا امتداد آن را در نقطه‌ی D) قطع کند. حال طبق قضیه تالس داریم :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AD}{AC}$$

و با مقایسه با فرض می توان نوشت:

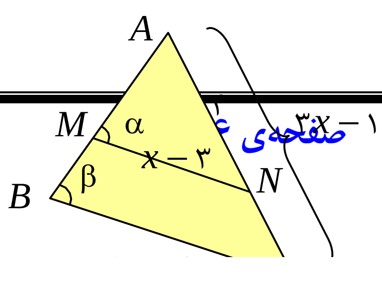
$$\frac{AN}{AC}=\frac{AD}{AC}$$

لذا :

$$AN=AD$$

و این وقتی ممکن است که نقطه‌ی D بر N منطبق باشد پس پاره‌خط MD بر MN منطبق می‌شود و چون $MD \parallel BC$ پس $MN \parallel BC$ و حکم ثابت است.

تمرین۲۵ : در شکل زیر زاویه های α و β مساویند. مقدار x را به دست آورید.



حل : چون زاویه های αو β لذا خطوط MN و BC موازیند. لذا قضیه‌ی تالس را می توان به صورت زیر نوشت:

$$MN \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

و چون اندازه های اضلاع AM و AB را نداریم. تناسب را به صورت زیر می نویسیم.

$$\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}\rightarrow \frac{۴}{۳x-۱}=\frac{x-۳}{۲x-۳}\rightarrow (x-۳)(۳x-۱)=۴(۲x-۳)$$

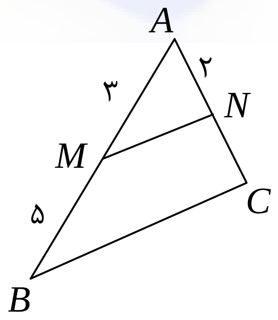
$$\rightarrow ۳x^{۲}-x-۹x+۳=۸x-۱۲\rightarrow ۳x^{۲}-۱۸x+۱۵=۰\xrightarrow{\div ۳} x^{۲}-۶x+۵=۰$$

$$\rightarrow (x-۵)(x-۱)=۰\rightarrow \begin{cases} x=۵ \\ x=۱ \end{cases}$$

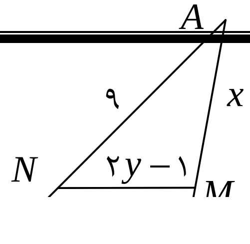
که با توجه به داده های مسئله جواب $x=۱$ قابل قبول نیست.

تمرین برای حل :

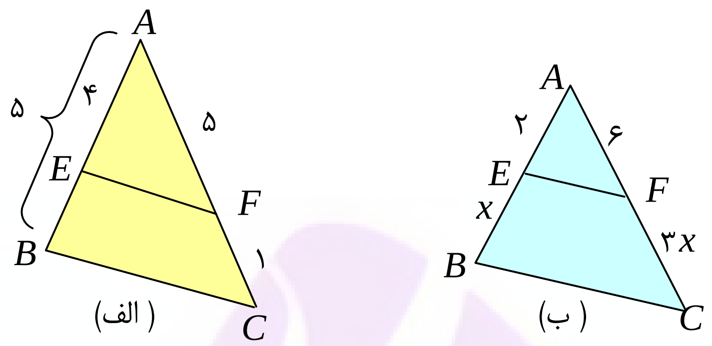
۲۶: در شکل زیر $MN \parallel BC$ ، اندازه های AC و NC را به دست آورید.



۲۷ : در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ، مقادیر x و y را به دست آورید.

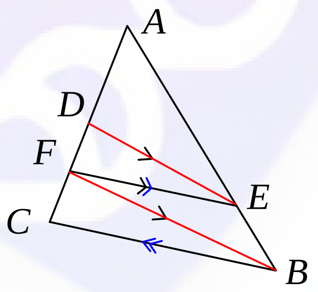


۲۸ : در کدام مورد $EF \parallel BC$ است؟



۲۹ : ثابت کنید، در هر مثلث پاره خطی که وسطهای دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوّم موازی و مساوی نصف آن است.

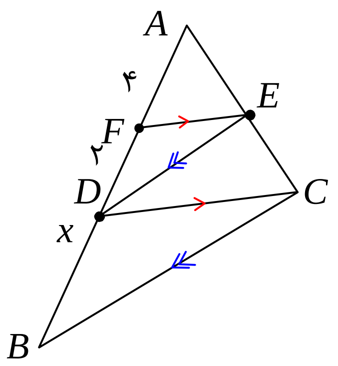
۳۰ : در شکل زیر $DE \parallel FB$ و $FE \parallel BC$ ثابت کنید که $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$



۳۱ : با توجه به شکل مقابل اگر $FE \parallel DC$ و $DE \parallel BC$

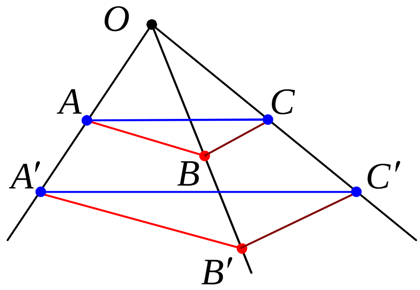
اولاً : ثابت کنید که $AD^{2} = AF . AB$

ثانیاً : مقدار x را به دست آورید.

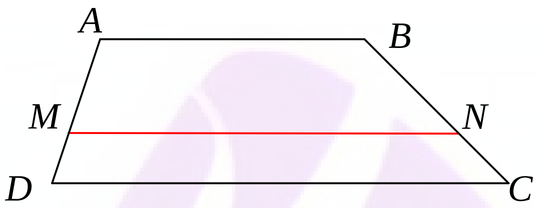


۳۲ : در شکل زیر $AB \parallel A'B'$ و $BC \parallel B'C'$ با استفاده از قضیه‌ی تالس و عکس آن ثابت کنید:

$AC \parallel A'C'$



۳۳ : در ذوزنقه‌ی زیر $MN \parallel AB \parallel CD$ ، ثابت کنید، $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$. (قضیه‌ی تالس در ذوزنقه)



***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

درس سوّم : تشابه مثلث ها

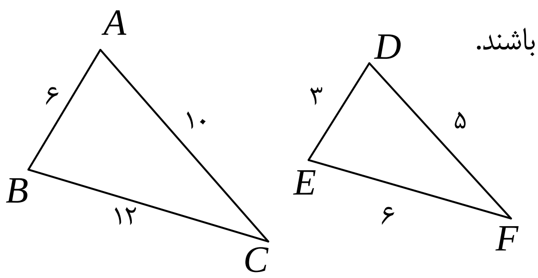
در این درس مفهوم تشابه دو مثلث را بررسی نموده و کاربردهایی را پیرامون آن بیان می کنیم.

قسمت اوّل : مفهوم تشابه دو مثلث

دو مثلث را متشابه گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند.

الف : زاویه‌های متناظر آنها مساوی باشند.

ب : اضلاع متناظر آنها متناسب باشند.

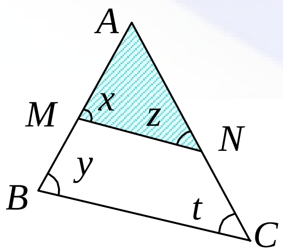


$$\left.\begin{array}{c}\angle A=\angle D,\angle B=\angle E,\angle C=\angle F\\ \dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AC}{DF}\end{array}\right\}\rightarrow \Delta(ABC)\sim\Delta(DEF)$$

در دو مثلث متشابه ، نسبت دو ضلع متناظر[1] را نسبت تشابه دو مثلث می نامند. در مثال فوق نسبت تشابه می‌تواند $k=\frac{۶}{۳}=۲$ یا $k=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ می باشد.

برای ورود به بحث تشابه مثلث ها ، لازم است ابتدا با قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث آشنا شویم.

قضیه (قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث ها) : اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود به طوری که دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را قطع کند، مثلثی بوجود می‌آورد که با مثلث اصلی متشابه است.



فرض : $MN \parallel BC$

حکم : $\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}$

اثبات : کافی است که نشان دهیم ، دو شرط مربوط به تعریف تشابه را برقرارند.

شرط اوّل(تساوی زاویه‌های متناظر) : زاویه‌ی A در دو مثلث مشترک است. از طرفی چون $MN \parallel BC$ پس $\angle z=\angle t$ و $\angle x=\angle y$. پس زاویه های نظیر مساویند.

---

[1]. اضلاع روبرو به زاویه های مساوی

شرط دوّم (تناسب اضلاع متناظر):

چون $MN \parallel BC$ پس طبق قضیه‌ی تالس داریم $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC}$. در نتیجه اضلاع متناسبند.

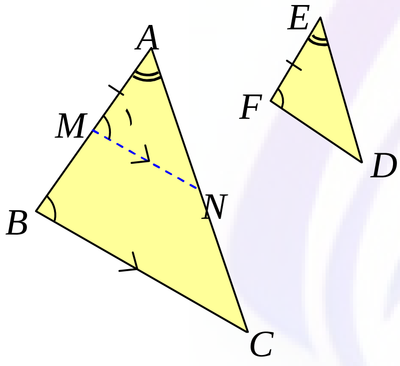
***

حال با توجه به قضیه‌ی اساسی تشابه دو مثلث ، می توان سه قضیه‌ی اصلی برای حالت های مختلف تشابه دو مثلث بیان کرد.

قضایای اصلی تشابه دو مثلث

قضیه‌ی ۱ : اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگری برابر باشند آن دو مثلث متشابهند.

(حالت تساوی دو زاویه)



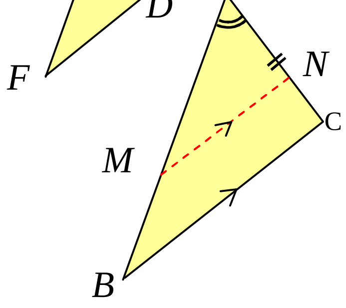
فرض : $\angle A=\angle E$ و $\angle B=\angle F$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{EFD}$

***

قضیه‌ی ۲ : اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگری برابر و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آنگاه آن دو مثلث متشابهند.

(حالت تناسب دو ضلع و تساوی زاویه های بین آنها)



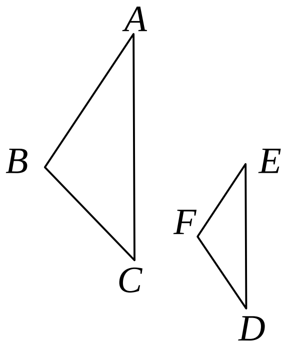
فرض : $\angle A=\angle E$ و $\frac{EF}{AB}=\frac{ED}{AC}$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{EFD}$

***

قضیه‌ی ۳ : هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.

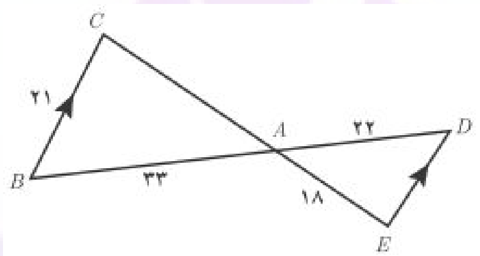
(حالت تناسب سه ضلع)



فرض : $\frac{EF}{AB}=\frac{ED}{AC}=\frac{DF}{BC}$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EFD}$

تمرین ۱: در شکل زیر $BC \parallel DE$ است. اندازه های پاره خط های DE و AC را به دست آورید.



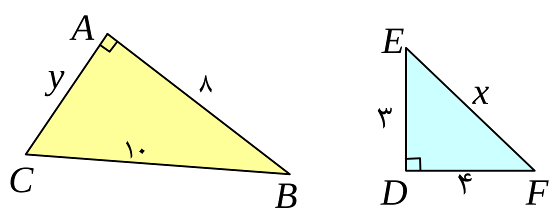
توجه : هنگام نوشتن نسبت اضلاع متناظر از دو مثلث متشابه لازم است به دو نکته‌ی زیر توجه نمود.

۱ : صورت‌ها مربوط به یک مثلث و مخرج‌ها مربوط به مثلث دیگر باشند.

۲ : دو ضلع در یک نسبت (کسر) قرار می‌گیرند، هرگاه روبرو به زاویه های مساوی باشند.

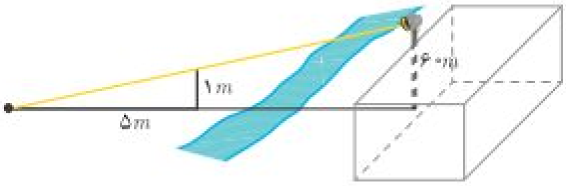
تمرین برای حل :

۲ : آیا دو مثلث قائم الزاویه‌ی زیر متشابهند؟ چرا؟

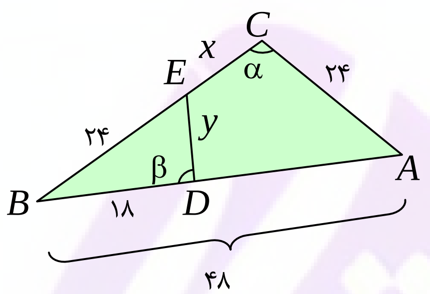


۳ : بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی کـه در طـرف دیگر رودخانه است، می خواهد فاصله‌ی خود را تا پایه‌ی نور افکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طـول

یک متر را روی زمین قرار می دهد و مشاهده می کند که طول سایه‌ی چوب برابر ۵ متر است. فاصله‌ی این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟

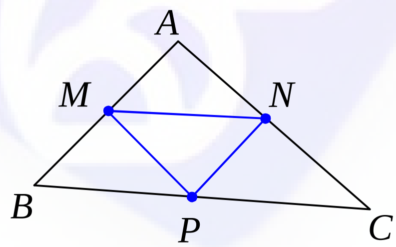


۴ : در شکل زیر $\angle\alpha = \angle\beta$ است. طول y و x را پیدا کنید.



۵ : در شکل زیر نقاط M و N و P وسط های اضلاع مثلث ABC می باشند. ثابت کنید:

$$\Delta(ABC) \sim \Delta(MNP)$$

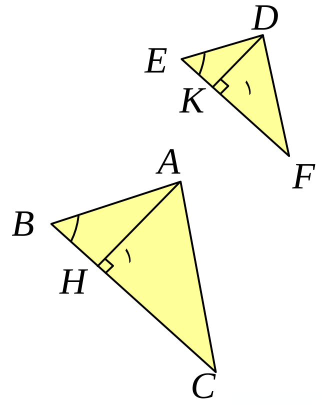


۶ : ثابت کنید که دو مثلث متشابه با یک مثلث، خود با متشابه اند. در مورد نسبت تشابه آنها چه مـی تـوان گفت؟ چرا؟

***

قسمت دوّم : قضایای محیط و مساحت مثلث های متشابه

قضیه : نسبت ارتفاع‌های متناظر از دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آن دو مثلث برابر است.



فرض: $\Delta(ABC) \sim \Delta(DEF)$ و $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{BC}{EF}=\dfrac{AC}{DF}=k$

حکم : $\dfrac{AH}{DK}=k$

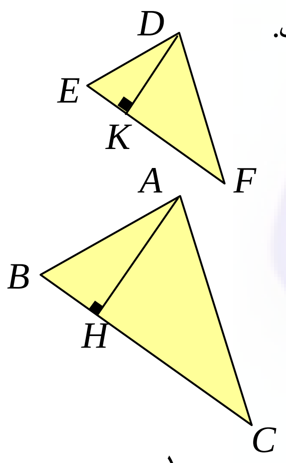
اثبات : چون دو مثلث ABC و DEF متشابهند، پس $\angle B=\angle E$

از طرفی $\angle H_{۱}=\angle K_{۱}=۹۰^{\circ}$ لذا

$$\Delta(ABH)\sim\Delta(DEK)\Rightarrow\frac{AB}{DE}=\frac{BH}{EK}=\frac{AH}{DK}$$

و چون $\dfrac{AB}{DE}=k$ پس $\dfrac{AH}{DK}=k$

قضیه : نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه با توان دوّم نسبت تشابه آنها برابر است.



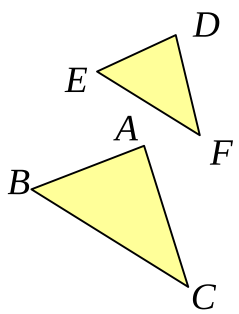
فرض : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{DEF}$ و $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}=k$

حکم : $\dfrac{S_{\Delta(ABC)}}{S_{\Delta(DEF)}}=k^{۲}$

اثبات : با توجه به قضیه‌ی قبل داریم :

$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEF}}}=\frac{\frac{۱}{۲}BC.AH}{\frac{۱}{۲}EF.DK}=\frac{BC}{EF}\cdot\frac{AH}{DK}=k.k=k^{۲}$$

قضیه : نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه با نسبت تشابه آنها برابر است.



فرض : $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{DEF}$ و $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}=k$

حکم : $\dfrac{P_{\Delta(ABC)}}{P_{\Delta(DEF)}}=k$

اثبات : با توجه به خواص تناسب داریم

$$\frac{P_{\underset{ABC}{\Delta}}}{P_{\underset{DEF}{\Delta}}}=\frac{AB+BC+AC}{DE+EF+DF}=\frac{k(DE)+k(EF)+k(DF)}{DE+EF+DF}$$

$$=\frac{k(DE+EF+DF)}{(DE+EF+DF)}=k$$

***

تمرین ۷ : نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه $\frac{۸۱}{۲۵}$ است، نسبت محیط‌های این دو مثلث را پیدا کنید.

حل :

نسبت محیط ها $k^{۲}=\frac{۸۱}{۲۵}\to k=\frac{۹}{۵}$

تمرین ۸ : اگر مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ با مثلثی دیگر به محیط ۱۸ متشابه باشد.

الف: مساحت مثلث دوّم را بدست آورید.

ب : اندازه‌ی اضلاع مثلث دوّم را محاسبه کنید.

حل: در مثلث اوّل، چون $۳^{۲}+۴^{۲}=۵^{۲}$ پس مثلث قائم الزاویه بوده و دوضلع زاویه‌ی قائمه‌ی آن ۳ و۴ می باشند. در نتیجه مساحت این مثلث برابر $\frac{۱}{۲}\times ۳\times ۴=۶$ است.

	ضلع اوّل	ضلع دوّم	ضلع سوّم	محیط	مساحت
مثلث اوّل	$a=۳$	$b=۴$	$c=۵$	$p=۱۲$	$S=۶$
مثلث دوّم	a'	b'	c'	$p'=۱۸$	S'

$$k=\frac{p}{p'}=\frac{۱۲}{۱۸}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\frac{S}{S'}=k^{۲}}\frac{S}{S'}=\frac{۴}{۹}\xrightarrow{S=۶}\frac{۶}{S'}=\frac{۴}{۹}\to S'=\frac{۶\times ۹}{۴}=\frac{۲۷}{۲}=۱۳/۵$$

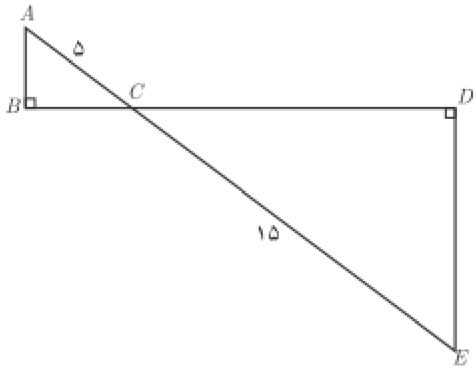
$$\frac{b}{b'}=k\to\frac{۴}{b'}=\frac{۲}{۳}\to b'=۶$$

$$\frac{a}{a'}=k\to\frac{۳}{a'}=\frac{۲}{۳}\to a'=۴/۵$$

$$\frac{c}{c'}=k\to\frac{۵}{c'}=\frac{۲}{۳}\to c'=۷/۵$$

تمرین برای حل :

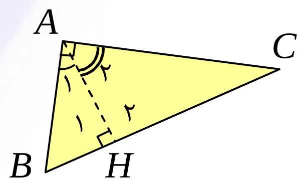
۹ : در شکل مقابل دو مثلث قائم الزاویه مشاهده می کنید. نسبت محیط ها و مساحت های آنها را به دست آورید.



***

قسمت سوّم : برخی روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه‌ی دیگر تبدیل می کند. این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابهند.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta(ABH): \angle A_1 + \angle B = 90^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = 90^\circ\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle C \\ \angle H_1 = \angle A = 90^\circ\end{array}\right\} \to \Delta(ABH) \approx \Delta(ABC) \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(ACH): \angle A_2 + \angle C = 90^\circ \\ \Delta(ABC): \angle B + \angle C = 90^\circ\end{array}\right\} \to \angle A_2 = \angle C$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_2 = \angle B \\ \angle H_2 = \angle A = 90^\circ\end{array}\right\} \to \Delta(ACH) \approx \Delta(ABC) \quad (2)$$

$$(1),(2) \to \Delta(ABH) \approx \Delta(ACH)$$

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر میانگین هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

$$\Delta(ABH) \approx \Delta(ACH) \to \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \to AH^2 = BH \times CH$$

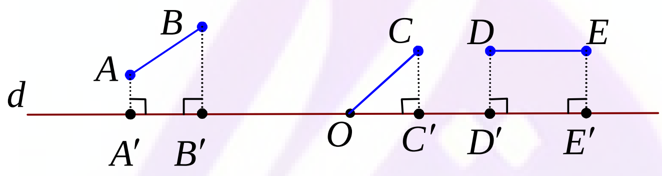
قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر، با حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث برابر است.

اثبات : کافی است مساحت مثلث قائم الزاویه را به دو شکل متفاوت محاسبه کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} S(ABC)=\frac{۱}{۲}(AB)(AC) \\ S(ABC)=\frac{۱}{۲}(AH)(BC) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{۱}{۲}(AH)(BC)=\frac{۱}{۲}(AB)(AC)$$

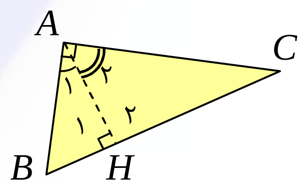
$$\rightarrow (AH)(BC)=(AB)(AC)$$

توجه : اگر AB پاره خط غیرمنطبق بر خط d باشد.تصویر پاره خط AB روی خط d پاره خطی است مانند $A'B'$ می‌باشد هرگاه $BB'\perp d$ و $AA'\perp d$ باشد.



قضیه : در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازه‌ی هر ضلع زاویه قائمه با حاصل ضرب اندازه‌ی وتر در اندازه‌ی تصویر همان ضلع بر وتر برابر است.

اثبات :



$$\Delta(ABH)\approx\Delta(ABC)\rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AH}{AC}=\frac{BH}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}\rightarrow AB^{۲}=BC\times BH$$

$$\Delta(ACH)\approx\Delta(ABC)\rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}=\frac{AH}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}\rightarrow AC^{۲}=BC\times CH$$

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است (قضیه‌ی فیثاغورس).

اثبات :

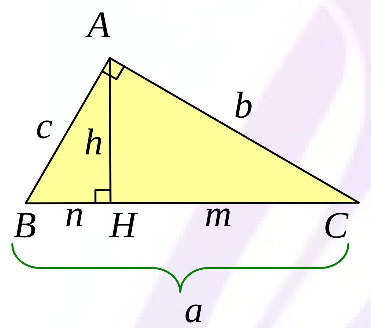
$$\left.\begin{aligned} AB^{۲} &= BC \times BH \\ AC^{۲} &= BC \times CH \end{aligned}\right\} \to AB^{۲} + AC^{۲} = BC \times BH + BC \times CH$$

$$\to AB^{۲} + AC^{۲} = BC(BH + CH) = BC \times BC = BC^{۲}$$

تمرین ۱۰ : با استفاده از محاسبه‌ی مساحت ، ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه، حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه با حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر برابر است.

***

برخی از روابط طولی مهم در هر مثلث قائم الزاویه



۱) $a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$

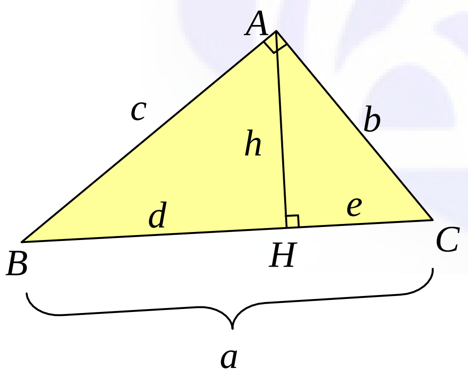
۲) $b^{۲} = a \times m$

۳) $c^{۲} = a \times n$

۴) $h^{۲} = m \times n$

۵) $a \times h = b \times c$

تمرین ۱۱ : در هر مورد با توجه به اطلاعات داده شده پیرامون مثلث قائم الزاویه‌ی شکل مقابل، ساده ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



الف) $h = ۵$ و $d = ۷$ و $e = ?$

ب) $d = ۵$ و $e = ۳$ و $b = ?$ و $c = ?$

ج) $c = ۸$ و $b = ۶$ و $h = ?$

حل :

الف :

$$h^{۲} = d \times e \to (۵)^{۲} = ۷ \times e \to e = \frac{۲۵}{۷}$$

ب :

$$b^{۲} = a \times e \to b^{۲} = ۸ \times ۳ \to b = ۲\sqrt{۶}$$

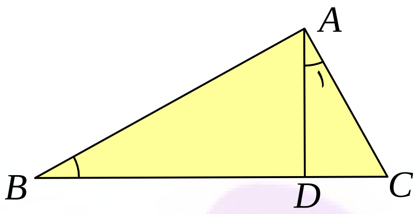
$$c^{۲} = a \times d \to c^{۲} = ۸ \times ۵ \to c = ۲\sqrt{۱۰}$$

ج :

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\rightarrow a^{۲}=(۶)^{۲}+(۸)^{۲}\rightarrow a=۱۰$$

$$a\times h=b\times c\rightarrow (۱۰)(h)=(۶)(۸)\rightarrow h=\frac{۲۴}{۵}$$

تمرین۱۲: در شکل روبرو $\angle A_{۱}=\angle B$ و $AC=۴$ و $BD=۶$. طول BC را به دست آورید.



حل : قرار می دهیم $BC=x$

$$\left.\begin{matrix}\angle A_{۱}=\angle B\\ \angle C=\angle C\end{matrix}\right\}\rightarrow \Delta(ADC)\approx\Delta(ABC)\rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{CD}{AC}$$

$$\rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{AC}\rightarrow\frac{۴}{x}=\frac{x-۶}{۴}\rightarrow x^{۲}-۶x=۱۶\rightarrow x^{۲}-۶x-۱۶=۰$$

$$\rightarrow (x-۸)(x+۲)=۰\rightarrow x=۸\ ,\ x=-۲$$

جواب $x=-۲$ غیر قابل قبول است.

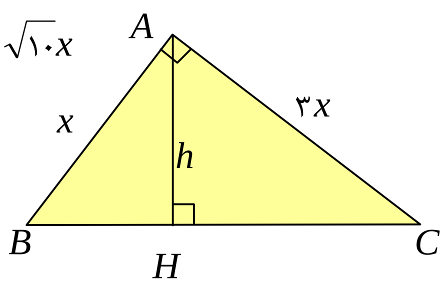
تمرین۱۳ : در یک مثلث قائم الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت ۱و۳ و مساحت آن۶۰ واحد مربع است.

اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر چقدر است؟

حل :

$$BC^{۲}=AB^{۲}+AC^{۲}=x^{۲}+۹x^{۲}=۱۰x^{۲}\rightarrow BC=\sqrt{۱۰}x$$

$$S=۶۰\rightarrow\frac{(x)(۳x)}{۲}=۶۰\rightarrow x^{۲}=۴۰\rightarrow x=۲\sqrt{۱۰}$$



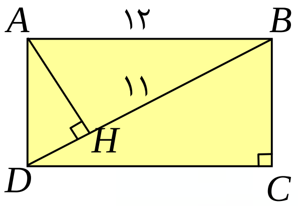
می دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر با حاصل ضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه برابرند. پس :

$$(AH)(BC)=(AB)(AC)\to h(\sqrt{۱۰}x)=(x)(۳x)$$

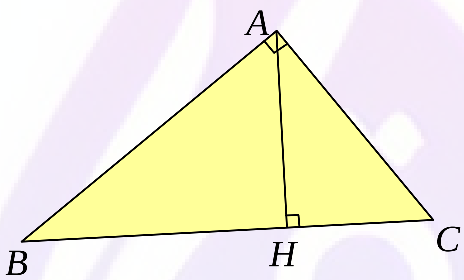
$$\to h=\frac{۳x}{\sqrt{۱۰}}\xrightarrow{x=۲\sqrt{۱۰}}h=\frac{۳(۲\sqrt{۱۰})}{\sqrt{۱۰}}=۶$$

تمرین برای حل :

۱۴ : درشکل مقابل، مستطیلی به طول ۱۲ داده شده است. با توجه به انـدازه هـای داده شـده ، طـول قطـر مستطیل و اندازه‌ی عرض مستطیل را به دست آورید.



۱۵ : در مثلث قائم الزاویه زیر، در هر حالت ، اندازه‌ی پاره خط خواسته شده را به دست آورید.



الف) $BC=۱۰$ و $BH=۹$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

ب) $AC=۵$ و $CH=۲$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$

پ) $AB=۸$ و $AC=۶$ و $BC=?$ و $AH=?$

ت) $AB=۱۲$ و $AH=۶$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$

***

تهیه کننده : جابر عامری   دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم « رشته ی علوم تجربی »

فصل ۳ : تابع

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

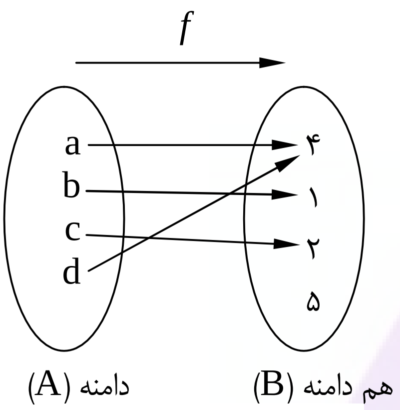
@mathameri

مهر ۱۳۹۶

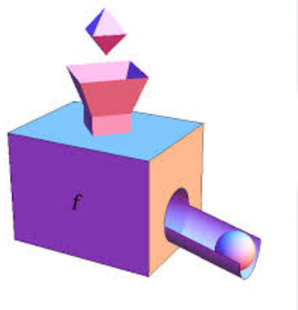
درس اوّل : تابع

آشنایی با مفهوم تابع به عنوان یکی از مفاهیم اساسی ریاضیات ، برای درک و فهم بسیاری مفاهیم دیگـر در ریاضیات و فیزیک و ... لازم و ضروری است. در سال قبل به صورت مقدماتی با این مفهوم را در پایه‌ی دهم آشنا شدید. در اینجا ضمن یادآوری آن ، موضوعات تکمیلی دیگری را معرفی می کنیم.

قسمت اوّل : یادآوری مفهوم تابع



هر رابطه که هر عضو مجموعه‌ی A را **دقیقاً** بـه یـک عـضو از مجموعه‌ی B نـسبت دهـد را یـک **تـابع** از مجموعـه‌ی A بـه مجموعه‌ی B می نامند.



یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای بین ایـن دو مجموعه است که در آن، بـه هـر عـضو از A دقیقـاً یـک عـضو از B نظیـر مـی شـود. در ایـن وضـعیت مجموعـه‌ی A را **دامنــه** و مجموعه‌ی B را **هم دامنه** یا مقصد تابع می نامند و می نویسند.

$$f : A \to B$$

در یاضیات، تابع را به روش های مختلفی نمایش می دهند. مهمترین این روش ها عبارتند از :

۱ : نمایش پیکانی

یک رابطه از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، که با **روش پیکانی** یا نمودار وِن نمایش داده می شود، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود. در این روش نمایش تابع، ممکن اسـت به یک یا چند عضو هم دامنه پیکانی وارد نشود، یا به بعضی از آنها یک یا چنـد پیکـان وارد شـود. هـر زیـر مجموعه از هم دامنه که به آن پیکان وارد شده است را **برد** تابع می نامند.

در تابع مثال فوق داریم.

دامنه $A = D_f = \{a,b,c,d\}$ هم دامنه $B = \{۱,۲,۴,۵\}$ برد $R_f = \{۱,۲,۴\}$

تذکر : مجموعه‌ی تمام عضو هایی که یک تابع روی آنها اثر می کند (که همگی در مجموعه‌ی A هستند.) را **دامنه** و مجموعه‌ی تمام عضوهایی از مجموعه‌ی B (هم دامنه) که متناظر با اعضای دامنه قرار می گیرند را **برد** آن تابع می نامند. معمولاً دامنه‌ی تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می دهند.

***

۲ : نمایش تابع توسط زوج های مرتب

مجموعه‌ای از زوج های مرتب[1] را در نظر می گیریم. اگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی موجود نباشند که مولفه های اوّل آنها برابر باشند، این مجموعه تابعی خواهد بود که درآن مولفه های اوّل، اعضای دامنه و مولفه های دوّم ، اعضای برد می باشند.

به عنوان مثال، تابعی که در مورد (۱) با روش پیکانی نمایش داده ایم. در واقع مجموعه‌ی زوج های مرتبی به صورت زیر را تشکیل می دهد.

$$f=\{(a,۴),(b,۱),(c,۲),(d,۴)\}$$

به طور کلی برای تابع f که از x به y تعریف شده است، می توان نوشت:

$$f=\{(x,y)\,|\,x\in D_f\,,y\in R_f\}$$

بنابراین در نمایش تابع به صورت **زوج مرتب**، اگر زوج های مرتب دارای مولفه های اوّل برابر باشند، باید مولفه های دوّم آن ها نیز برابر باشند[2].

تمرین ۱ : دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

$$f=\{(۳,۲),(۵,۸),(-۳,۲),(۲,۴),(۱,۲)\}$$

۳ : نمایش تابع از طریق ضابطه

برای تابع f که از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تعریف شده است. رابطه‌ای که هر x از A را به y متناظرش از B مرتبط می کند. **ضابطه** یا قانون تابع می گوییم و به صورت زیر نمایش می دهیم.

---

[1]. هر دو تایی به شکل (a,b) که محل قرار گرفتن اجزای آن مهم است را زوج مرتب می نامند. a را مؤلفه‌ی اوّل (طول) و b را مؤلفه‌ی دوّم (عرض) می نامند.

[2]. اگر چنین نباشد، مجموعه ی داده شده تابع نیست.

$$f : A \to B$$
$$y = f(x)$$

به عنوان مثال اگر تابع به هر عضو مجموعه‌ی $A = R$ مربع آن را نسبت دهد،در این صورت می توان نوشت.

$$f : R \to [۰,+\infty)$$
$$y = f(x) = x^۲$$

تذکر : خروجی هر عضو دامنه مانند x را با y یا $f(x)$ نمایش می دهند.

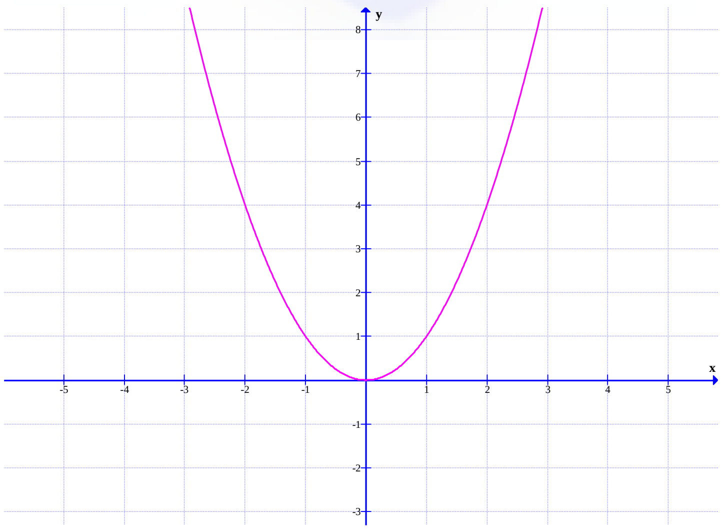
مثال الف : اگر گفته شود که تابع $f(x) = \frac{x+۱}{۲x-۶}$ داده شده است. نتیجه می گیریم که دامنه‌ی تابع باید $R - \{۳\}$ باشد.

مثال ب : اگر گفته شود که تابع $g(x) = \sqrt{۴ - x}$ داده شده است. نتیجه می گیریم که دامنه‌ی تابع باید $(-\infty,۴]$ باشد.

۴ : نمایش تابع به صورت هندسی (نمایش دکارتی)

اگر مجموعه ی f ، نمایش زوج های مرتب تشکیل دهنده ی یک تابع باشد، هر زوج مرتب مانند $(a,b) \in f$ یک نقطه از صفحه (در دستگاه مختصات دکارتی) را مشخص می کند. با تعیین محل تمام نقاط، نمودار (منحنی) تابع f پدید می آید.

برای مثال نمودار تابع $f(x) = x^۲$ به شکل زیر است. که قبلاً آن را سهمی نامیده ایم.



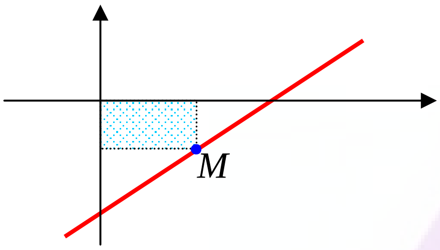
از دیدگاه هندسی،یک منحنی هنگامی نمایش یک تابع است که هر خط موازی محور عرضها آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط قائم)

تمرین۲ : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$ ب) $f(x)=\frac{1}{x}$ ج) $f(x)=|x|$

***

تمرین۳ : در شکل مقابل یک مستطیل به محور های مختصات وخط $2y+x=1$ محدود شده است، معادله‌ی تابعی را بنویسید که مساحت مستطیل را به x وابسته کند.

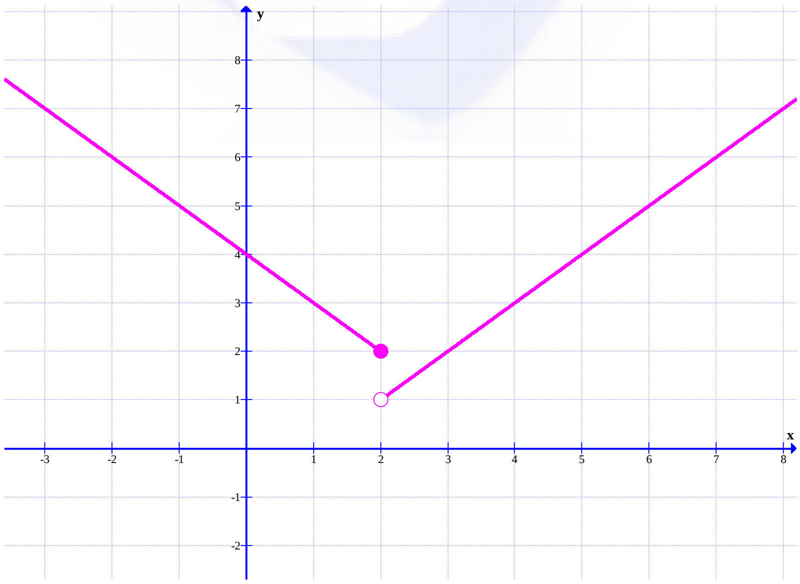


***

توجه: گاهی تابع را فقط با یک ضابطه تعریف می کنند، ولی گاهی لازم است که تابع را با چند ضابطه تعریف کرد. تابع زیر نمونه ای از یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x>2 \\ 4-x & x\leq 2 \end{cases}$$

نمودار این تابع نیز به شکل زیر است.



روش رسم این تابع را توضیح دهید؟

مثال۱: تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

$$D_f=\{x\in R \mid x\geq ۰\}\cup\{x\in R \mid x<۰\}=R$$

$$R_f=\{y\in R \mid y\geq ۰\}=[۰,+\infty)$$

مثال۲: تابع علامت یک تابع سه ضابطه ای است.

$$\text{sgn}(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$$

$$D_s=\{x\in R \mid x>۰\}\cup\{۰\}\cup\{x\in R \mid x<۰\}=R$$

$$R_s=\{۱,۰,-۱\}$$

تمرین۴ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ -۲x-۳ & x<۰ \end{cases}$$

❋❋❋

قسمت دوّم : آشنایی با برخی از انواع توابع

توابع دارای انواع مختلف می باشند، در اینجا به چند نوع اشاره می کنیم.

الف : تابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای بوده و $Q(x)$ غیرصفر باشد، را تابع گویا می نامند.

مثال: هر یک از توابع زیر، گویا هستند.

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۳x-۱}{x+۵} \quad و \quad f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۵-x^{۳}} \quad و \quad f(r)=\frac{۱-r}{۳r-۷} \quad و \quad f(k)=۵k-۱$$

همچنین هر یک از توابع زیر گویا نمی باشند. (چرا؟)

$$f(x)=\frac{۱-\sqrt{x}}{۲x-۹} \qquad و \qquad f(u)=\sqrt{۵u^{۲}+۳}$$

دامنه‌ی هر تابع گویا ، برابر مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بجز ریشه های مخرج آن است.

$$D_f=R-\{\text{ریشه های مخرج}\}$$

مثال : دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{۳x+۱}{x^{۲}-۵x}$ را تعیین کنید.

حل :

$$x^{۲}-۵x=۰ \rightarrow x(x-۵)=۰ \rightarrow x=۰ \quad , \quad x=۵$$

$$D_f=R-\{۰,۵\}$$

تمرین۵ : دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\frac{x+۳}{۲x-۱۰}$

ب) $f(x)=\frac{۵}{۴x^{۲}-۹}$

ج) $f(x)=\frac{۱-x}{x^{۳}-۹x^{۲}}$

د) $f(x)=\frac{۵x-۱}{۲۵+x^{۲}}$

تمرین۶ : معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $R-\{۳\}$ باشد.

ب : تابع رادیکالی

هر تابع به شکل $f(x)=\sqrt{P(x)}$ که در آن عبارت $P(x)\geq ۰$ باشد، را یک تابع رادیکالی می نامند.

مثال: هر یک از توابع زیر، رادیکالی هستند.

$$f(u)=\sqrt{۳-u} \qquad \text{و} \qquad f(x)=\sqrt{x^{۲}+۳x-۱}$$

همچنین هر یک از توابع زیر رادیکالی نمی باشند.(چرا؟)

$$f(r)=۵r^{۲}+۳ \qquad \text{و} \qquad f(x)=۲\sqrt{۵}x^{۳}+۲x+۱$$

دامنه‌ی هر تابع رادیکالی ، برابر زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که به ازای هر عضو آن زیر رادیکال منفی نشود.

$$D_f=\{x|P(x)\geq ۰\}$$

مثال : دامنه‌ی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\sqrt{x-۱}$$

حل :

$$x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱$$

تمرین۷ : دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

ج) $f(x)=\sqrt{۹-x^{۲}}$

الف) $f(x)=۱+\sqrt{۶-۳x}$

د) $f(x)=\dfrac{\sqrt{۲x-۶}}{x-۵}$

ب) $f(x)=\sqrt{۲x+۳}$

تمرین۸ : معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $[۱,+\infty)$ باشد.

تمرین۹ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

ب) $g(x)=۱+\sqrt{x-۳}$

الف) $f(x)=\sqrt{۲-x}$

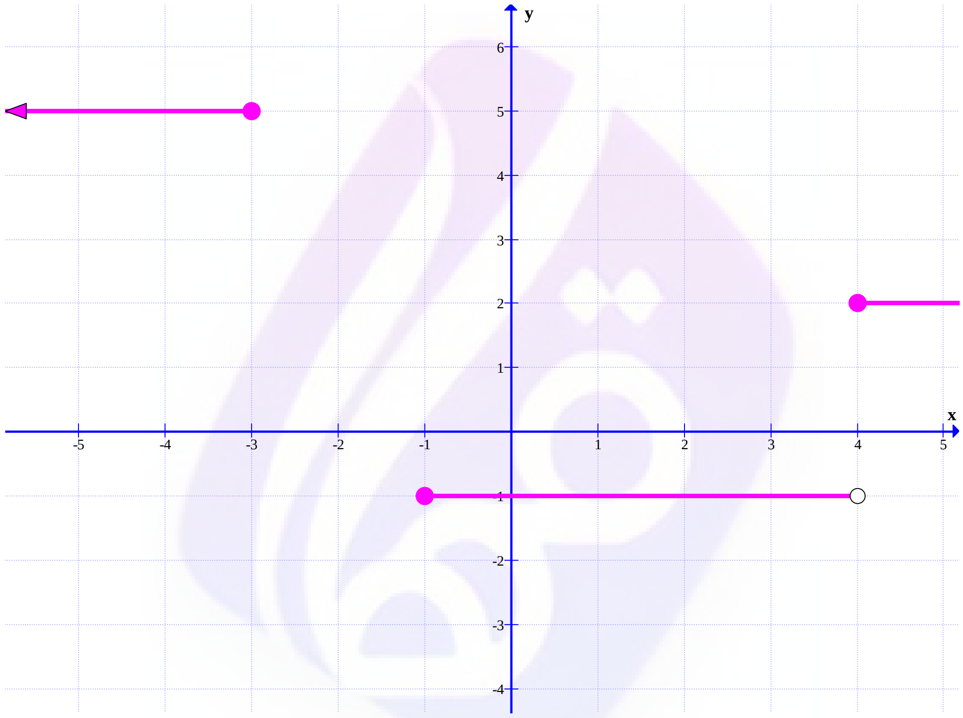
***

ج : تابع پله ای و تابع جزء صحیح

هر تابع که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه طوری تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد، را تابع پله ای می نامند. مانند تابع زیر

$$f(x)=\begin{cases} ۵ & x\le -۳ \\ -۱ & -۱\le x<۴ \\ ۲ & x\ge ۴ \end{cases}$$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است.



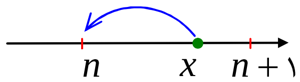
تمرین ۱۰ : در یک پارکینگ، هزینه‌ی پارک خودرو بر اساس مدت زمان توقف خودرو ، به این صورت محاسبه می شود.

$$f(t)=\begin{cases} ۳ & ۰\le t<۲ \\ ۴ & ۲\le t<۳ \\ ۵ & ۳\le t<۴ \\ ۶ & t\ge ۴ \end{cases}$$

این تابع نمونه ای از یک تابع پله ای است. نمودار این تابع را رسم کنید.

جزء صحیح و ویژگی های آن

اگر x یک عدد حقیقی باشد، آنگاه بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x را جزء صحیح x می نامند و آن را با نماد $[x]$ نمایش می دهند.



$$n \le x < n+۱ \to [x]=n$$

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱. $[۲/۳]=$ ۲. $[-۵]=$ ۳. $[-۵/۷]=$ ۴. $[\frac{۵}{۷}]=$ ۵. $[-\sqrt{۲}]=$

توجه ۱ : برای هر عدد حقیقی x داریم.

$$[x+k]=[x]+k \qquad (k \in Z)$$

توجه ۲ : برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$IF \ \ x \in Z \to [x]+[-x]=۰$$
$$IF \ \ x \notin Z \to [x]+[-x]=-۱$$

تمرین ۱۱: معادله‌ی $[x]+[x-۲]=۴$ را حل کنید.

حل:

$$[x]+[x-۲]=۴ \to [x]+[x]-۲=۴ \to ۲[x]=۶ \to [x]=۳ \to ۳ \le x < ۴$$

تمرین ۱۲: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $[x+۱]+[x+۲]=۵$ ۲) $[x+۱]+[x-۲]=۴$

حل۲:

$$[x+۱]+[x-۲]=۴ \to [x]+۱+[x]-۲=۴ \to ۲[x]=۵ \to [x]=\frac{۵}{۲}$$

غیر ممکن است، لذا معادله ریشه ندارد.

تابع $f(x)=[x]$ را تابع جزء صحیح می نامند. در واقع توابع جزء صحیح گونه‌ی خاصی از توابع پله ای می باشند. برای رسم نمودار تابع جزء صحیح ، در یک فاصله‌ی معین بازه هایی به شکل $[a,b)$ را طوری انتخاب می کنیم که جزء صحیح اعداد هر یک ، عدد صحیح مشخصی باشد.

مثال : نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۳)$ رسم کنید.

حل : فاصله‌ی $[-۲,۳)$ را طوری به بازه های کوچکتر تقسیم می کنیم. که جزء صحیح تمام اعضای هر بازه یکسان باشد.

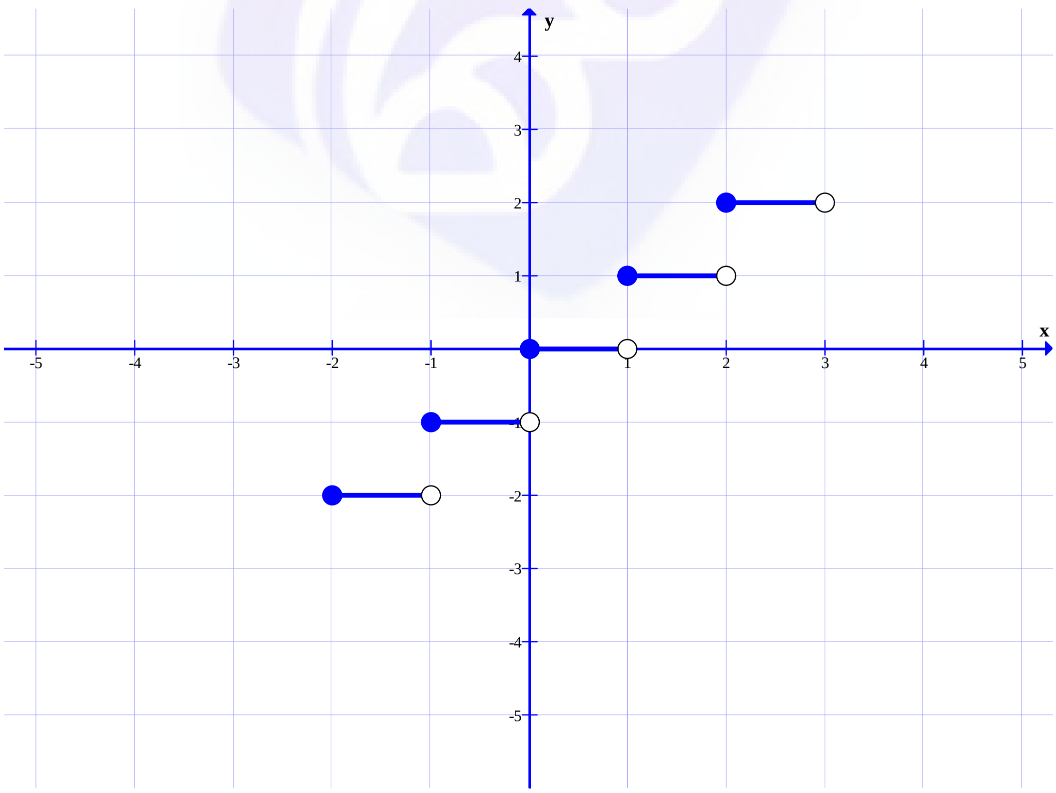
$$-۲\le x<-۱ \xrightarrow{f(x)=[x]} y=-۲$$

$$-۱\le x<۰ \xrightarrow{f(x)=[x]} y=-۱$$

$$۰\le x<۱ \xrightarrow{f(x)=[x]} y=۰$$

$$۱\le x<۲ \xrightarrow{f(x)=[x]} y=۱$$

$$۲\le x<۳ \xrightarrow{f(x)=[x]} y=۲$$



تمرین برای حل :

۱۳ : تابعی گویا بنویسید که دامنه‌ی آن $R-\{۱\}$ باشد.

۱۴: معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $(۱,+\infty)$ باشد.

۱۵ : معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $(-\infty,۲]$ باشد.

۱۶ : نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ با دامنه‌ی $D_f=[-۵,۵]-\{۰\}$ را رسم کنید.

۱۷ : نمودار تابع $y=-۳+\sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

۱۸ : نمودار تابع $y=[x]+۲$ را در فاصله‌ی $[-۳,۳)$ رسم کنید.

۱۹ : نمودار تابع $y=[x+۱]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۳)$ رسم کنید.

***

قسمت سوّم : تساوی دو تابع

دو تابع f و g را مساوی گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) دامنه های هر دو تابع مجموعه های مساوی باشند. $(D_f=D_g)$

ب) به ازای هر x عضو دامنه مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشند. $(f(x)=g(x))$

به عبارتی دیگر، دو تابع مساوی هستند، هرگاه نمودار های آنها در یک دستگاه مختصات دقیقاً بر هم منطبق شوند.

مثال۱: دو تابع زیر مساوی نیستند زیر دامنه‌ی یکسان ندارند.

$$f(x)=x+۱ \qquad و \qquad g(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$$

$$D_f=R \quad و \quad D_g=R-\{۱\} \quad \Rightarrow \quad D_f\neq D_g$$

مثال۲ : دو تابع زیر مساوی نیستند، زیرا با اینکه دامنه‌ی یکسان دارند. ولی مقادیر نابرابر دارند.

$$f(x)=x^۲ \qquad و \qquad g(x)=|x|$$

$$D_f=D_g=R \quad و \quad f(x)\neq g(x)$$

مثال۳ : دو تابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=\sqrt{x^۲}$ بنابر تعریف فوق مساوی هستند. زیرا

اولاً : دامنه‌ی هر دو تابع مجموعه های مساوی هستند. $D_f=D_g=R$

ثانیاً : به ازای هر x عضو دامنه، مقادیر دو تابع برابر هستند. $g(x)=\sqrt{x^۲}=|x|=f(x)$

تمرین برای حل :

۲۰ : در هر مورد، تساوی دو تابع داده شده را بررسی کنید.

الف) $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\dfrac{x^۴-۱۶}{x^۲+۴}$

ب) $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x+۲}$

ج) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

۲۱ : دو تابع زیر مساویند. مقدار a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲+۳x+۲}{x+۱} & x\neq -۱\\ ۳a+۷ & x=-۱\end{cases} \quad و \quad g(x)=x+۲$$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

درس دوّم : تابع یک به یک و وارون یک تابع

در این درس ابتدا با مفهوم تابع یک به یک و سپس وارون تابع آشنا می شویم.

قسمت اوّل : تابع یک به یک

هر تابع که در زوج های مرتب متفاوت خود، مولفه های دوّم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می نامند.

برای مثال:

تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۹)\}$ یک به یک است.

تابع $g=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۵)\}$ یک به یک نیست.

تابع $h=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(۱,۵)\}$ یک به یک است.

برای تعیین یک به یک بودن تابع وقتی که معادله‌ی آن معلوم باشد، می توان از الگوی زیر استفاده کرد.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow x_۱=x_۲$$

مثال : یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=۳x-۵$ ب) $g(x)=۴-x^۲$

حل : کافی است الگوی فوق را بکار ببریم.

الف) $f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow ۳x_۱-۵=۳x_۲-۵\rightarrow ۳x_۱=۳x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$

لذا این تابع یک به یک است.

ب) $g(x_۱)=g(x_۲)\rightarrow ۴-(x_۱)^۲=۴-(x_۲)^۲\rightarrow (x_۱)^۲=(x_۲)^۲\not\rightarrow x_۱=x_۲$

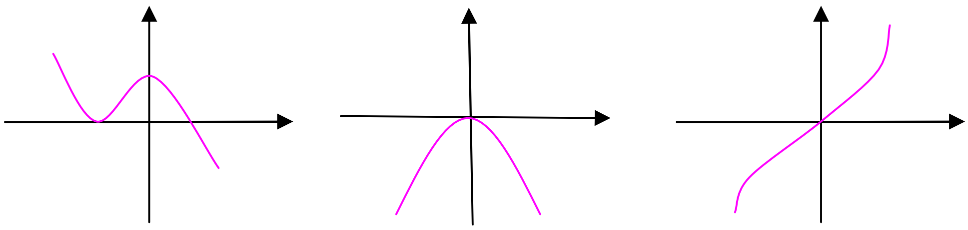
لذا این تابع یک به یک نیست.

توجه کنید در برخی از تساوی ها از قبیل موارد زیر نمی توان نتیجه گرفت که $a=b$

$a^۲=b^۲\not\rightarrow a=b$ و $|a|=|b|\not\rightarrow a=b$ و $[a]=[b]\not\rightarrow a=b$

برای تشخیص یک به یک بودن تابع وقتی که نمودار آن معلوم باشد، می توان از تعریف تابع یک به یک استفاده نمود. در واقع یک تابع یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور طول ها (xها) ، نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط افقی)

مثال : یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.



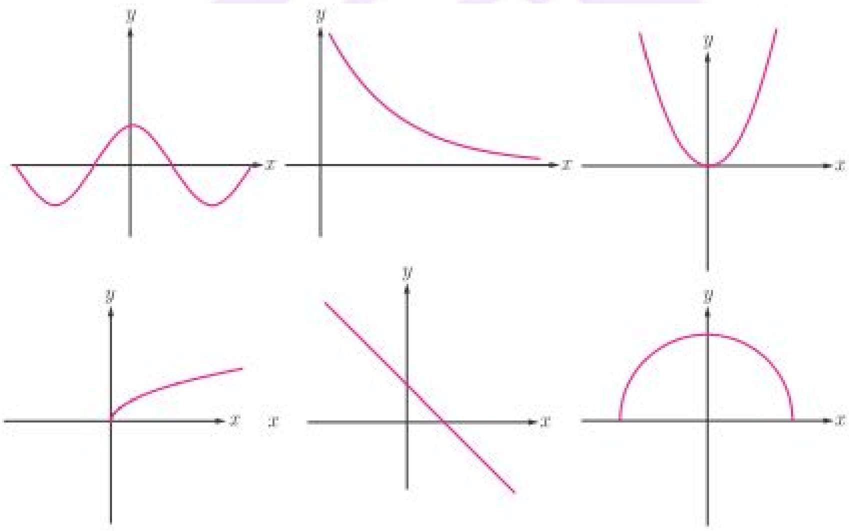
(الف) (ب) (ج)

حل: بنابر آزمون خط افقی معلوم می شود که توابع (الف) و (ب) یک به یک نیستند، ولی تابع (ج) یک به یک است.

تمرین برای حل:

۱ : اگر تابع $f=\{(-۲,۲),(m,۳),(-۱,۳),(۲m,a)\}$ یک به یک باشد، مقدار a را پیدا کنید.

۲ : کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.



۳ : ثابت کنید که هر تابع خطی غیر ثابت یک به یک است.

۴ : نشان دهید که تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{x+۱}$ یک به یک است.

۵ : با ذکر دلیل تعیین کنید که کدام یک از تابع های زیر یک به یک است.

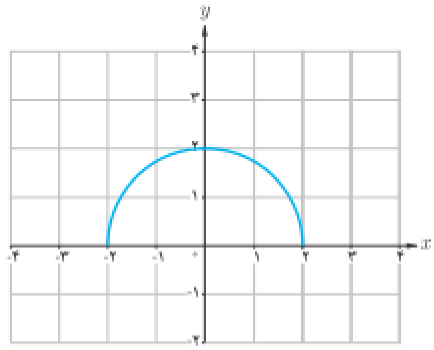
الف) $f(x)=۲[x]+۱$ ب) $g(x)=۲x^{۳}-۵$

۶ : آیا هر تابع درجه‌ی ۲ (سهمی) ، یک به یک است؟ چرا؟

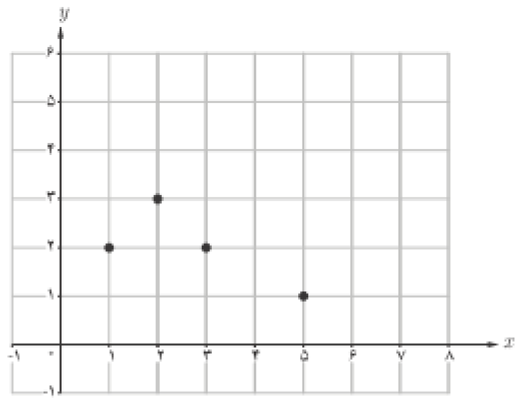
۷ : نمودار سهمی $f(x)=x^{۲}-۴x+۳$ را رسم کنید. به نظر شما با محدود کـردن دامنـه‌ی ایـن تـابع روی کدام یک از بازه های زیر می توان یک تابع یک به یک ساخت؟

الف) $[۰,۲]$ ب) $[۱,۴)$

۸ : با حذف بخشی از نمودار نیم دایره‌ی داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص کنید.



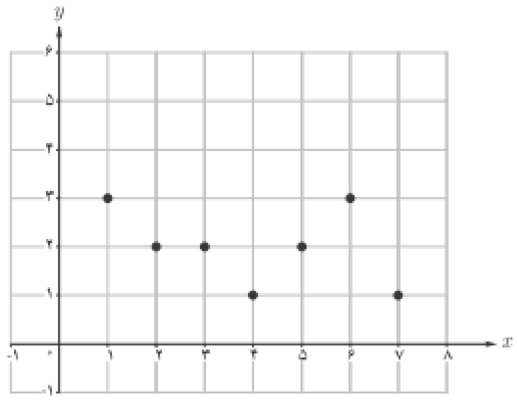
۱۰ : نمودار زیر را در نظر بگیرید.



الف : چرا این نمودار ، یک تابع یک به یک نیست؟

ب : با حذف تنها یک نقطه، نمودار را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید. به نظر شما مسئله چند جواب دارد؟

۱۱ : نمودار یک تابع به صورت زیر است.



الف : آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟

ب : اگر بخواهیم تعدادی از نقاط این نمودار را حذف کنیم و یک تابع یک به یک به دست آوریم، به نظر شما حداکثر چند نقطه می توان باقی بماند.

***

قسمت دوّم : تابع وارون (معکوس تابع)

اگر مؤلفه های اوّل و دوّم تمام زوج های مرتب تابعی را جابجا کنیم، دو حالت پیش می آید.

حالت اوّل) مجموعه‌ی جدید، تابع شود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر است و تابع جدیـد را را تابع معکوس می نامند. مانند :

$f=\{(۱,۷),(۳,۴),(۰,۹)\}$

$g=\{(۷,۱),(۴,۳),(۹,۰)\}$ تابع معکوس f

حالت دوّم) مجموعه‌ی جدید، تابع نشود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر نیست. مانند :

$f=\{(۱,۷),(۳,۴),(۹,۴)\}$

$g=\{(۷,۱),(۴,۳),(۴,۹)\}$

توجه داشته باشید که اگر تابع f معکوس پذیر باشد، معکوس آن را با $f^{-۱}$ نمایش می دهند.

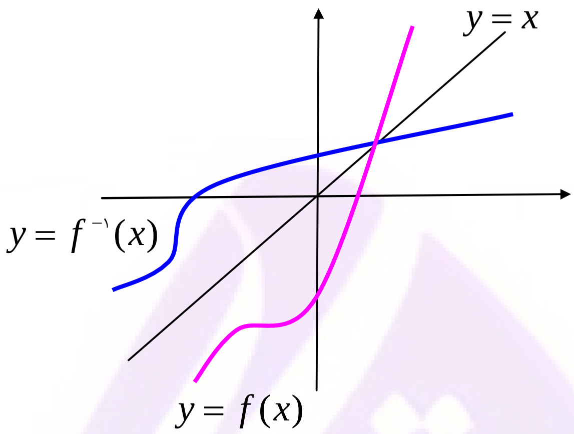
با توجه به مفهوم تابع معکوس به سهولت نتیجه می شود که:

الف) تابعی معکوس پذیر است، هرگاه یک به یک باشد.

ب) دامنه‌ی تابع f^{-1} برابر برد تابع f است. ($D_{f^{-1}} = R_f$)

ج) برد تابع f^{-1} برابر دامنه‌ی تابع f است. ($R_{f^{-1}} = D_f$)

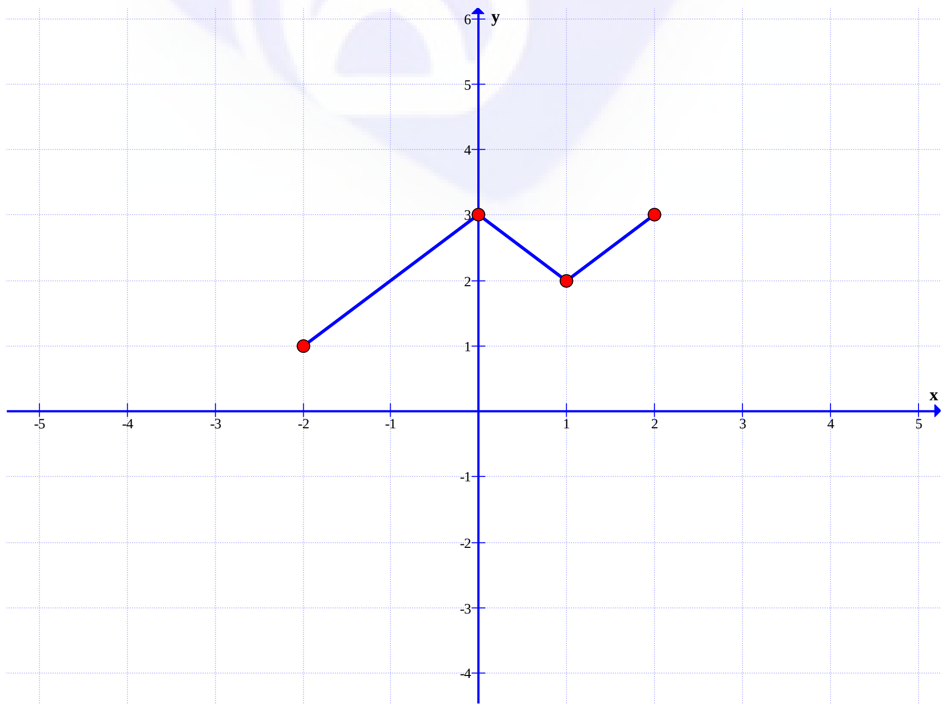
د) نمودار هر تابع معکوس پذیر با نمودار معکوس آن نسبت به خط نیمساز ربع اوّل وسوّم ($y = x$) متقارن هستند.



تمرین ۱۲ : وارون تابع $f = \{(۲,۳),(-۲,۱),(-۱,۲)\}$ را به دست آورید.

تمرین ۱۳ : نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید.

الف : نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.　　　　ب : آیا این تابع وارون پذیر است؟ چرا؟



تمرین برای حل:

تمرین ۱۴: کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر است. معکوس آن را در صورت وجود بنویسید.

الف) $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۵,۷),(-۲,۶)\}$

ب) $g=\{(۲,۵),(۰,۱),(۵,۷),(-۲,۱)\}$

قسمت سوّم : روش های تعیین ضابطه‌ی معکوس تابع

برای تعیین معکوس یک تابع معکوس پذیر که معادله‌ی آن معلوم باشد. دو روش متداول است.

روش اوّل) تعویض متغیر ها: در این روش به ترتیب زیر عمل می کنیم.

مرحله‌ی ۱) متغیر x را به y و برعکس تبدیل می کنیم.

مرحله‌ی ۲) متغیر y را بر حسب x محاسبه می کنیم.

مثال: ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow\sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳}\rightarrow ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$
$$\rightarrow ۲x_۱=۲x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$y=\sqrt{۲x-۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\sqrt{۲y-۳}\rightarrow x^۲=۲y-۳\rightarrow y=\frac{x^۲+۳}{۲}$$
$$\therefore\ f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

روش دوّم) بازگردانی اعمال: در این روش، ابتدا اعمال روی توابع را به ترتیب اوّلویت می نویسیم و سپس اعمال بازگشت هر یک را مشخص می کنیم. تابع حاصل، تابع وارون است.

مثال ۱ : ثابت کنید که تابع $f(x)=۲x+۱$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow ۲x_۱+۱=۲x_۱+۱\rightarrow ۲x_۱=۲x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$$

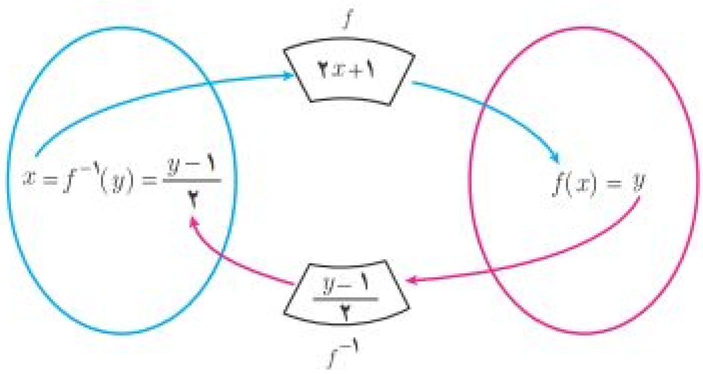
پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$x \xrightarrow{\times ۲} ۲x \xrightarrow{+۱} ۲x+۱ \to y$$

$$y \leftarrow \frac{x-۱}{۲} \xleftarrow{\div ۲} x-۱ \xleftarrow{-۱} x$$

$$f(x)=۲x+۱ \to f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}$$

مراحل کار را می توانید در نمودار زیر مشاهده نمایید.



مثال۲ : ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲) \to \sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳} \to ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$
$$\to ۲x_۱=۲x_۲ \to x_۱=x_۲$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$x \xrightarrow{\times ۲} ۲x \xrightarrow{-۳} ۲x-۳ \xrightarrow{root} \sqrt{۲x-۳} \to y$$

$$y \leftarrow \frac{x^۲+۳}{۲} \xleftarrow{\div ۲} x^۲+۳ \xleftarrow{+۳} x^۲ \xleftarrow{sqr} x$$

$$f(x)=\sqrt{۲x-۳} \to f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

تمرین ۱۵: وارون هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=x+۵$ پ) $f(x)=۲x+۳$

ب) $f(x)=۴x$ ت) $f(x)=\frac{۲}{۳}x-۴$

تمرین برای حل :

۱۶ : ضابطه‌ی وارون هر یک از توابع با ضابطه های زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{-۷x+۳}{۵}$

ب) $f(x)=\frac{۳}{۵}x+۴$

ج) $f(x)=۵x-۲$

د) $f(x)=-۲x+۳$

۱۷ : معکوس هر یک از توابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x)=۳x^{۲}+۱$

ب) $f(x)=۳x-۱$

ج) $f(x)=۲\sqrt[۳]{x-۱}$

د) $f(x)=۳|x|+۵$

❋❋❋

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

درس سوّم : اعمال روی توابع

در این درس اعمال رایج روی توابع را تعریف می کنیم و مسائلی را پیرامون آنها حل می کنیم.

قسمت اوّل : اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع باشند، در این صورت اعمال زیر را می توان روی دامنه‌ی مشترک آنها تعریف کرد.

۱ : جمع دو تابع

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$D_{f+g}=D_f \cap D_g$$

۲ : تفریق دو تابع

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$D_{f-g}=D_f \cap D_g$$

۳ : ضرب دو تابع

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

$$D_{f\times g}=D_f \cap D_g$$

۴ : تقسیم دو تابع

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x\in D_g \mid g(x)=0\}$$

مثال : اگر $f(x)=x^2+5x+6$ و $g(x)=x^2+3x$ ، تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $(f+g)(x)$

۲) $(f-g)(x)$

۳) $(g-f)(x)$

۴) $(f\times g)(x)$

۵) $(f^2)(x)$

۶) $(\frac{f}{g})(x)$

۷) D_{f+g}

۸) $D_{\frac{f}{g}}$

حل :

$۱)\ (f+g)(x)=(x^{۲}+۵x+۶)+(x^{۲}+۳x)$

$=x^{۲}+۵x+۶+x^{۲}+۳x=۲x^{۲}+۸x+۶$

$۲)\ (f-g)(x)=(x^{۲}+۵x+۶)-(x^{۲}+۳x)$

$=x^{۲}+۵x+۶-x^{۲}-۳x=۲x+۶$

$۳)\ (g-f)(x)=(x^{۲}+۳x)-(x^{۲}+۵x+۶)$

$=x^{۲}+۳x-x^{۲}-۵x-۶=-۲x-۶$

$۴)\ (f\times g)(x)=(x^{۲}+۵x+۶)\times(x^{۲}+۳x)$

$=x^{۴}+۳x^{۳}+۵x^{۳}+۱۵x^{۲}+۶x^{۲}+۱۸x=x^{۴}+۸x^{۳}+۲۱x^{۲}+۱۸x$

$۵)\ (g\times f)(x)=(x^{۲}+۵x+۶)\times(x^{۲}+۵x+۶)$

$=x^{۴}+۵x^{۳}+۶x^{۲}+۵x^{۳}+۲۵x^{۲}+۳۰x+۶x^{۲}+۳۰x+۳۶$

$=x^{۴}+۱۰x^{۳}+۳۷x^{۲}+۶۰x+۳۶$

$۶)\ (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{۲}+۵x+۶}{x^{۲}+۳x}=\frac{(x+۲)(x+۳)}{x(x+۳)}=\frac{x+۲}{x}$

$۷)\ D_{f+g}=D_f\cap D_g=R\cap R=R$

توابع f و g هر دو چند جمله ای می باشند. پس دامنه‌ی هر دو مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

$۸)\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g \mid g(x)=۰\}=R\cap R-\{۰,-۳\}=R-\{۰,-۳\}$

توجه داشته باشید که ریشه های مخرج $x=۰$ و $x=-۳$ تابع g می باشند.

$x^{۲}+۳x=۰\rightarrow x(x+۳)=۰\rightarrow x=۰\ ,\ x=-۳$

مثال : اگر $f=\{(۱,۷),(۳,-۴),(۲,۲)\}$ و $g=\{(۱,۶),(۳,۵),(۴,۱),(۲,۰)\}$، هر یک از موارد زیـر را تعیین کنید.

۱) D_f

۲) D_g

۳) D_{f+g}

۴) $f+g$

۵) $f-g$

۶) $f\times g$

۷) $D_{\frac{f}{g}}$

۸) $\frac{f}{g}$

حل :

۱) $D_f=\{۱,۳,۲\}$

۲) $D_g=\{۱,۳,۴,۲\}$

۳) $D_{f+g}=D_f+D_g=\{۱,۳,۲\}\bigcap\{۱,۳,۴,۲\}=\{۱,۲,۳\}$

اکنون برای تعیین توابع خواسته شده ، از روش تشکیل جدول استفاده می کنیم.

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	۴-	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	۱۳	۱	۲

۴) $f+g=\{(۱,۱۳),(۳,۱),(۲,۲)\}$

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	۴-	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	۱	۹-	۲

۵) $f-g=\{(۱,۱),(۳,-۹),(۲,۲)\}$

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	۴-	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$	۷۲	۲۰-	۰

۶) $f \times g = \{(۱,۷۲),(۳,-۲۰),(۲,۰)\}$

۷) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = ۰\} \{۱,۳,۲\} - \{۲\} = \{۱,۳\}$

x	۱	۳
$f(x)$	۷	-۴
$g(x)$	۶	۵
$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{۷}{۶}$	$\frac{-۴}{۵}$

۸) $\frac{f}{g} = \{(۱,\frac{۷}{۶}),(۳,\frac{-۴}{۵})\}$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $f = \{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۶),(۰,۶)\}$ و $g = \{(۱,-۱),(۲,۵),(-۱,۲),(۳,۰)\}$

در هر مورد دامنه‌ی تابع داده شده را تعیین و سپس آن را به صورت زوج مرتب بنویسید.

۱) $f + g$ ۳) $f.g$ ۵) $f^۲$

۲) $f - g$ ۴) $\frac{f}{g}$ ۶) $\sqrt{g}$

۲ : اگر $f(x) = x^۲ - x$ و $g(x) = x^۲ + ۲x - ۳$ باشد، عبارت های زیر را محاسبه کنید.

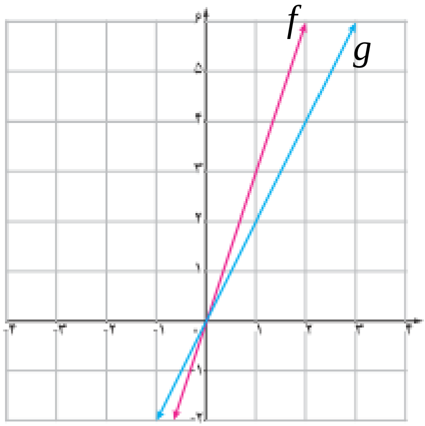
الف) $(f + g)(x)$ ب) $(\frac{f}{g})(x)$ ج) $(۲f - ۳g)(۲)$

۳ : اگر $u(x) = \sqrt{x} + ۱$ و $v(x) = x - ۱$ ، دامنه و ضابطه‌ی تابع $f(x) = (\frac{u}{v})(x)$ را تعیین کنید.

۴ : در شکل مقابل ، نمودار های دو تابع f و g رسم شده اند.

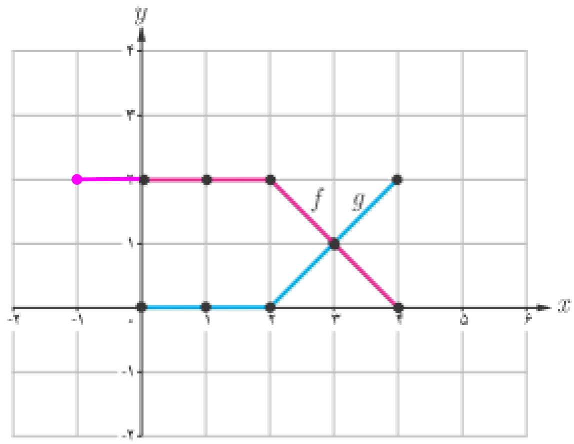
الف: ضابطه‌ی این دو تابع را بنویسید.

ب : ضابطه‌ی دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به دست آورید.



۵ : ثابت کنید که حاصل جمع و تفریق دو تابع خطی، خطی است.

۶ : در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.



۷ : اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۵),(۵,۷),(۷,۹),(۴,۴)\}$ باشد، تابع $۲f+f^{-۱}$ را با عضوهایش بنویسید.

***

قسمت دوّم : رسم نمودار توابع به کمک تبدیلات

گاهی لازم است نمودار یک تابع را به کمک نمودار تابع دیگری رسم کنیم. برای این کار از ویژگی های تبدیلات از قبیل انتقال یا بازتاب و ... استفاده می شود. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ که تابع اصلی نیز نامیده می شود، معلوم باشد در این صورت نمودار توابع جدید را به کمک نمودار تابع اصلی می توان رسم کرد. برای انجام این کار می توان از جدول زیر استفاده کرد. در این جدول a یک عدد مثبت فرض شده است.

تابع جدید	نحوه‌ی تبدیل		نتیجه
$y=f(x)+a$	طول نقاط ثابت می ماند.	به عرض نقاط a واحد اضافه می شود.	نمودار به اندازه‌ی a واحد بالا می رود.
$y=f(x)-a$	طول نقاط ثابت می ماند.	از عرض نقاط a واحد کم می شود.	نمودار به اندازه‌ی a واحد پایین می رود.
$y=af(x)$	طول نقاط ثابت می ماند.	عرض نقاط در a ضرب می شود.	اگر $0<a<1$ نمودار فشرده می شود. اگر $a>1$ نمودار کشیده می شود.
$y=f(x+a)$	عرض نقاط ثابت می ماند.	از طول نقاط a واحد کم می شود.	نمودار به اندازه‌ی a واحد به عقب می رود.
$y=f(x-a)$	عرض نقاط ثابت می ماند.	به طول نقاط a واحد اضافه می شود.	نمودار به اندازه‌ی a واحد به جلو می رود.
$y=f(ax)$	عرض نقاط ثابت می ماند.	طول نقاط در $\frac{1}{a}$ ضرب می شود.	اگر $0<a<1$ نمودار منبسط می شود. اگر $a>1$ نمودار منقبض می شود.

نتیجه :

۱ : نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور طول ها است.

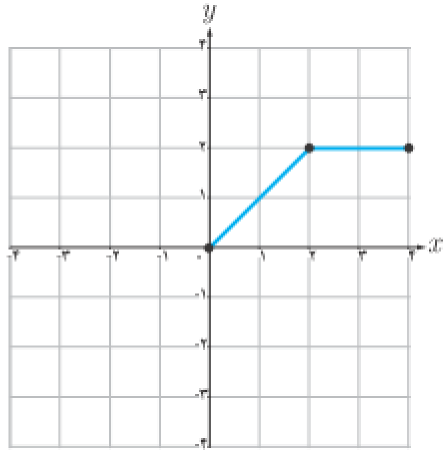
۲ : نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه‌ی نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور عرض ها است.

***

تمرین۸ : در شکل روبرو، نمودار تابع f داده شده است. در هر مورد نمودار تابع با ضابطه‌ی تعیین شده را رسم کنید.

الف) $y=f(x)+۲$ ج) $y=f(x-۱)$

ب) $y=-۲f(x)$ د) $y=f(۳x)$



تمرین برای حل :

۹ : با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=-|x|$ ب) $y=-|x-۲|$ ج) $y=۲|x+۱|$

۱۰ : با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=(x-۱)^۲$ ب) $y=x^۲+۳$

۱۱ : با استفاده از نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ ، نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۳\sqrt{x}$ ب) $y=-\sqrt{x-۲}$ ج) $y=۱-\sqrt{x-۳}$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم « رشته ی علوم تجربی »

فصل ۴ : مثلثات

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@mathameri

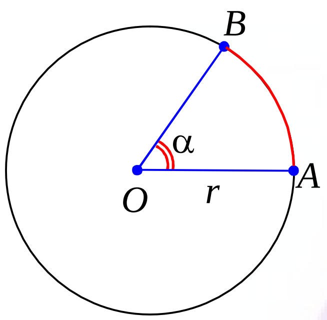
مهر ۱۳۹۶

درس اوّل : واحدهای اندازه گیری زاویه

در سالهای گذشته با مفهوم زاویه آشنا شده اید. به یاد می آورید که برای اندازه گیری زاویه از درجه استفاده می شود. در واقع درجه یکی واحدهای اندازه گیری زاویه است. استفاده از درجه در برخی موارد مشکلاتی را به همراه دارد، لذا از واحد های دیگر نیز استفاده می شود. در اینجا در پی آن هستیم که رادیان را به عنوان واحد دیگر اندازه گیری زاویه را معرفی نماییم. استفاده از رادیان در برخی مسائل، ضروری است.

قسمت اوّل : آشنایی با رادیان

یک رادیان برابر اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی از یک دایره است که طول کمان روبرو به آن زاویه، برابر شعاع دایره باشد.



$$\overset{\frown}{AB} = r \leftrightarrow \alpha = ۱ \ rad$$

تمرین ۱ : در یک دایره به شعاع ۵ سانتی متر، طول کمانی برابر ۱۰ سانتی متر می باشند. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبرو به این کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

تمرین۲ : در یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر، طول کمانی برابر ۱۲ سانتی متر می باشند. اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبرو به این کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

نتیجه۱ : اندازه‌ی یک زاویه بر حسب رادیان برابر خارج قسمت اندازه‌ی طول کمان روبرو به آن زاویه بر اندازه ی شعاع آن است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$

تمرین ۳ : نشان دهید که محیط یک دایره به شعاع r برابر ۲π رادیان است.

حل :

$$\frac{l}{r} = \frac{۲\pi \, r}{r} = ۲\pi \ \ rad$$

تمرین۴ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه مرکزی ۹۰ درجه (ربع دایره) چند رادیان است؟

حل :

$$\frac{۳۶۰}{۲\pi}=\frac{۹۰}{\alpha}\rightarrow\alpha=\frac{۲\pi\times۹۰}{۳۶۰}=\frac{\pi}{۲}\,rad$$

تمرین۵ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه مرکزی ۱۸۰ درجه (نیم دایره) چند رادیان است؟ چرا؟

تمرین۶ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۳۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین۷ : به کمک محیط دایره و با تشکیل تناسب، اندازه‌ی زاویه‌ی ۲۷۰ درجه را بر حسب رادیان به دست آورید.

نتیجه۲ : یک دایره (دوران کامل) برابر ۳۶۰ درجه و ۲π رادیان است.

تمرین برای حل :

۸ : اندازه‌ی زاویه های ۱۲۰ درجه و ۴۵ درجه را برحسب رادیان به دست آورید.

۹ : اندازه‌ی زاویه های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان را برحسب درجه به دست آورید.

۱۰ : اندازه‌ی یک زاویه‌ی مرکزی در یک دایره ۱/۵رادیان و طول کمان روبرو به آن زاویه ۹ سانتی متر است. اندازه‌ی شعاع دایره را بدست آورید.

۱۱ : حساب کنید که چه مدت طول می کشد تا عقربه‌ی دقیقه شمار ساعت به اندازه‌ی $۲/۵\pi$ رادیان دوران کند؟

***

قسمت دوّم : رابطه‌ی بین رادیان و درجه

نظر به اینکه یک دایره کمانی برابر ۳۶۰ درجه و ۲π می باشد. با تشکیل تناسب می توان، رابطه‌ی زیر بین اندازه‌ی زاویه بر حسب درجه و اندازه‌ی زاویه بر حسب رادیان بیان کرد.

$$\frac{D}{۳۶۰}=\frac{R}{۲\pi}$$

نتیجه : برای تبدیل واحد های اندازه‌ی زاویه از رابطه‌ی زیر استفاده می شود.

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$$

تمرین ۱۰ : اندازه‌ی زاویه ای ۳۰ درجه است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۱۱ : اندازه‌ی زاویه ای ۹۰− درجه است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب رادیان به دست آورید.

تمرین ۱۲ : اندازه‌ی زاویه ای $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان است، اندازه‌ی این زاویه را بر حسب درجه به دست آورید.

نتیجه : زاویه‌ای که اندازه‌ی آن یک درجه باشد، اندازه‌ی آن بر حسب رادیان برابر $\frac{\pi}{۱۸۰}$ است. بنابراین :

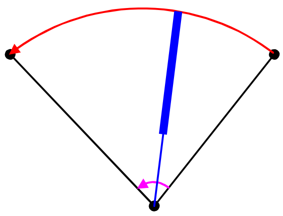
$\frac{\pi}{۱۸۰}$ رادیان = یک درجه

تمرین ۱۳ : طول برف پاک کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی متر است. فرض کنید برف پاکن، کمانی به اندازه‌ی ۱۲۰ درجه طی می کند.

الف : اندازه‌ی کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

ب : طول کمان طی شده توسط نوک برف پاکن چند سانتی متر است؟ ($\pi=۳/۱۴$)

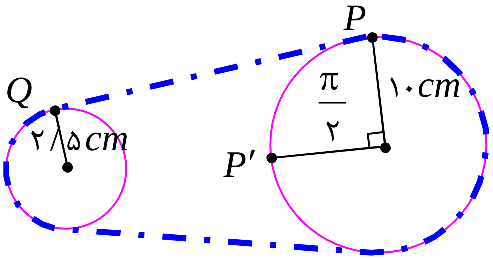
حل :



الف) $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\to\frac{۱۲۰}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}\to R=\frac{۲\pi}{۳}$

ب) $\theta=\frac{L}{r}$

$$\frac{۲\pi}{۳}=\frac{L}{۲۴}\to L=\frac{۲\pi\times۲۴}{۳}=۱۶\pi\approx۵۰/۲۴\ cm$$



تمرین ۱۴ : در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع های ۱۰ و ۲/۵ سانتی متر را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقره‌ی بزرگتر $\frac{\pi}{2}$ رادیان می چرخد، (یعنی نقطه‌ی P در موقعیت P' قرار می گیرد.) قرقره‌ی کوچکتر چند رادیان می چرخد؟ ($\pi \ rad = ۳/۱۴ \ rad$)

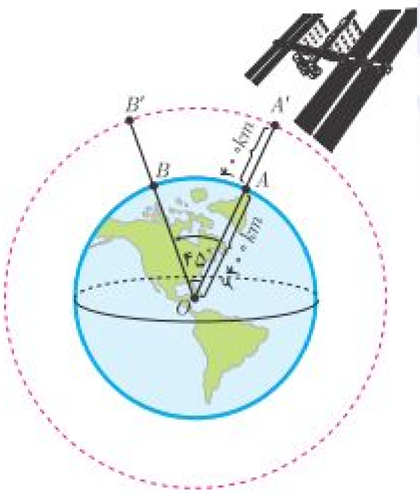
حل : ابتدا مسافتی را که نقطه‌ی P بر روی محیط قرقره‌ی بزرگتر طی می کند، به دست می آوریم.

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{PP'}}{R} \to \overset{\frown}{PP'} = R\theta = ۱۰ \times \frac{\pi}{۲} = ۵\pi = ۱۵/۷ \ cm$$

چون دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند، پس قرقره‌ی کوچکتر نیز ۵π سانتی متر حرکت می کند. برای این قرقره داریم:

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{۵\pi}{۲/۵} = ۲\pi \quad rad$$

بنابراین وقتی قرقره‌ی بزرگتر ربع دور می چرخد، قرقره‌ی کوچک تر یک دور کامل می چرخد و نقطه‌ی Q به مکان خود باز می گردد.



تمرین ۱۵ : ایستگاه فضایی بین المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصله‌ی تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره‌ی زمین قرار دارد. این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B که با مرکز زمین زاویه‌ی ۴۵ درجه می سازد، رصد می شود. تعیین کنید که این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' تا B' پوشش می دهد؟ شعاع تقریبی زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

حل :

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \to \frac{۴۵}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \to R = \frac{\pi}{۴} \to \angle\alpha = \frac{\pi}{۴} \quad rad$$

$$\alpha = \frac{L}{r} \to \frac{\pi}{۴} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۶۴۰۰ + ۴۰۰} \to \frac{\pi}{۴} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۶۸۰۰} \to \overset{\frown}{A'B'} = \frac{۶۸۰۰\pi}{۴} \approx ۵۳۳۸ \quad km$$

تمرین برای حل :

۱۶ : اندازه‌ی زاویه ای که عقربه‌ی ساعت شمار از ساعت ۱ بعد از ظهر تا ۳ بعد از ظهر حرکت می کند را برحسب درجه و رادیان بیان کنید.

۱۷ : اندازه‌ی زاویه ای $\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان است. اندازه‌ی این زاویه را برحسب درجه به دست آورید.

۱۸ : یک دایره‌ی مثلثاتی رسم کنید و روی آن زاویه های منطبق بر محور های مختصات را برحسب رادیان مشخص کنید.

۱۹ : جدول زیر را کامل کنید.

زاویه برحسب درجه	۱۳۵			۱۵
زاویه بر حسب رادیان		$-\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	

۲۰ : درستی یا نادرستی جملات زیر را بنویسید.

الف) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر، طول کمان روبرو به زاویه‌ی π رادیان، تقریباً برابر ۳/۱۴ سانتی متر است.

ب) انتهای کمان زاویه‌ی $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان ، در ربع دوّم دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد.

ج) اگر زاویه‌ی بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی برابر ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه‌ی قاعده‌ی این مثلث ، کوچکتر از اندازه‌ی هر یک از ساق های آن است.

د) زاویه های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۹}$ رادیان و $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان ، زاویه های یک مثلث را تشکیل می دهند.

***

جداول مقادیر نسبت های مثلثاتی تعدادی از زاویه ها

الف) زاویه های مهم

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$
	برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin		۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos		۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan		۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	نامعین
cot		نامعین	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

تمرین ۲۱ : مقدار عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A = ۲\sin\frac{\pi}{۶} + \tan\frac{\pi}{۴} - \sqrt{۳}\cos\frac{\pi}{۶} + ۴\sin\frac{\pi}{۲}$$

ب) زاویه های مرزی

زاویه	برحسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin		۰	۱	۰	-۱	۰
cos		۱	۰	-۱	۰	۱
tan		۰	نامعین	۰	نامعین	۰
cot		نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین

تمرین ۲۲ : مقدار عبارت زیر را تعیین کنید.

$$B = \sin\frac{\pi}{۲}\cos\pi - ۲\tan\frac{\pi}{۴} - \sqrt{۳}\tan ۲\pi + ۴\sin\frac{۳\pi}{۲}$$

***

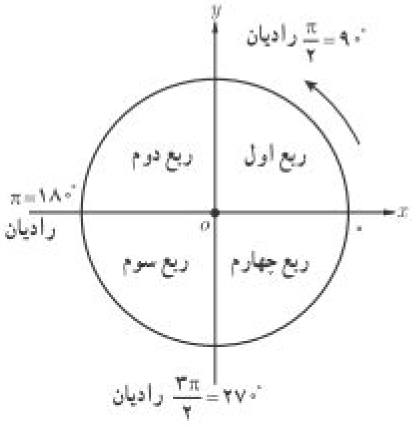
تهیه کننده : جابر عامری   دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

درس دوّم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

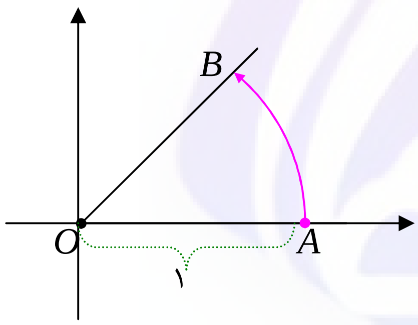
در این درس علاوه بر یادآوری تعدادی از روابط مثلثاتی سال قبل، روابط جدیدی نیز بین نسبت های مثلثاتی معرفی می نماییم.

قسمت اوّل : یادآوری تعدادی از روابط مثلثاتی



می دانید، دایره‌ای است که مرکز آن مبدأ مختصات و اندازه‌ی شعاع آن یک واحد طول باشد، را دایره‌ی مثلثاتی یا دایره‌ی استاندارد می نامند.

در هر دایره‌ی مثلثاتی برای تشکیل زاویه، نقطه‌ی A را مبدأ حرکت در نظر می گیرند. حال اگر نقطه‌ی A را حول مرکز دایره دوران دهیم تا نقطه‌ی B بدست آید، در این صورت زاویه ی AOB حاصل می شود.

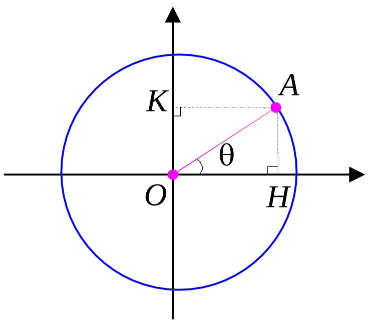


تذکر :

۱ : اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را مثبت و اگر درجهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را منفی در نظر می گیرند.

۲ : اگر نقط ی A دوران داده نشود، زاویه صفر می باشد. اگر نقطه‌ی A را به اندازه ی یک دور کامل دوران دهیم به محل اوّلیه‌ی خود بر می گردد. یک دوران کامل زاویه ای برابر ۳۶۰ درجه یا 2π را تشکیل می دهد.

تمرین ۱ : زاویه‌ی $\frac{3\pi}{4}$ رادیان ، در کدام ربع از دایره‌ی مثلثاتی قرار می گیرد؟ این زاویه را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید.



بر این اساس می توان نسبت های مثلثاتی را روی دایـره‌ی مثلثـاتی نیـز تعریف کرد.

اگر نقطه‌ی $A(x_\circ , y_\circ)$ روی دایره‌ی استاندارد قرار گیرد. در این حالت می توان نوشت:

$$OA = r = ۱$$

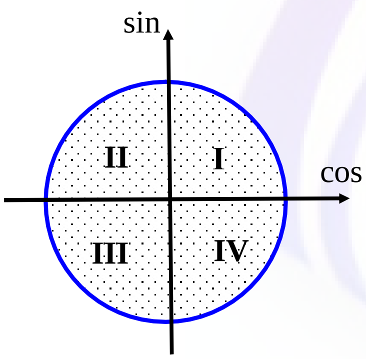
$$\sin\theta = \frac{y_\circ}{r} = \frac{y_\circ}{۱} = y_\circ \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{x_\circ}{r} = \frac{x_\circ}{۱} = x_\circ$$

$$\tan\theta = \frac{y_\circ}{x_\circ} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{و} \quad \cot\theta = \frac{x_\circ}{y_\circ} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

همچنین با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه‌ی OAH می توان نوشت:

$$x_\circ^{۲} + y_\circ^{۲} = r^{۲} \rightarrow \cos^{۲}\theta + \sin^{۲}\theta = ۱$$

به همین جهت است که محور طول ها را محور کسینوس ها و محور عرض ها را محور سینوس ها می نامند.



گاهی لازم می شود، که علامت نـسبت هـای مثلثـاتی را در نـواحی متخلف را داشته باشیم. با توجه به تعریف قبل می توان جدول زیر را برای تشخیص علامت نسبت های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی تنظیم نمود.[1]

	ربع اوّل	ربع دوّم	ربع سوّم	ربع چهارم
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

[1]. برخی برای حفظ کردن علامت های جدول ، به ترتیب نواحی و فقط برای خانه های مثبت نسبت های سینوس ، کسینوس و تانژانت ، از حروف کلمه ی **هستک** استفاده می کنند.

با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی ، می توان اتحاد های زیر را بیان نمود.

۱. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	۳. $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	۵. $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
۲. $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	۴. $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	۶. $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$

نتیجه : اگر α یک زاویه‌ی دلخواه باشد. در این صورت:

الف) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

ب) $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

ج) $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

د) $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

همچنین با توجه به تعاریف فوق واضح است که سینوس و کسینوس هر زاویه ، عددی است که در فاصله‌ی $[-1,1]$ قرار می گیرد.

$$-1 \le \cos\theta \le 1 \quad \text{و} \quad -1 \le \sin\theta \le 1$$

تمرین ۲ : اگر یک ضلع زاویه‌ی θ در ربع سوّم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ باشد. سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

تمرین ۳ : اگر $\cot\alpha = -2$ و $\cos\alpha > 0$ ، سایر نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α را تعیین کنید.

تمرین برای حل :

۴ : اگر $\cos x = -\dfrac{4}{5}$ و $\sin x > 0$ نسبت های مثلثاتی دیگر زاویه‌ی x را بیابید.

۵ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot\dfrac{\pi}{6} - \tan\dfrac{\pi}{3} \times \sin\dfrac{\pi}{4} =$

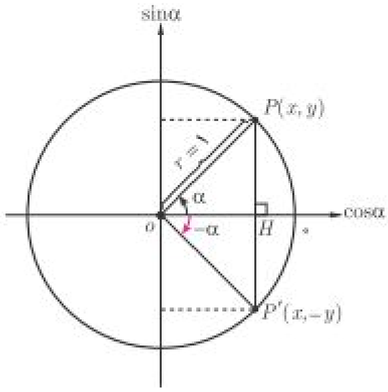
ب) $\dfrac{\tan^2(\frac{\pi}{6}) + \sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cot^2(\frac{\pi}{4}) - \cos^2(\frac{\pi}{3})} + \cos^2(75) + \sin^2(75) =$

***

قسمت دوّم : نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه

اگر αیک زاویه روی دایره‌ی مثلثاتی باشد، $-\alpha$ قرینه‌ی آن است. با توجه به شکل مقابل بین نسبت هـای مثلثاتی زاویه‌ی α و قرینه‌ی آن یعنـی $-\alpha$ رابطـه‌ی زیـر وجـود دارد.

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$$



تمرین۶ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۳۰- درجه را به دست آورید.

تمرین۷ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\cos(-\frac{\pi}{۳}) \times \cos(-\frac{\pi}{۶}) + \tan(-\frac{\pi}{۴}) =$

ب) $\dfrac{\cos(-۹۰^\circ) + \sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ) - \cos(-۳۶۰^\circ)} =$

ج) $\cot(-\frac{\pi}{۶}) + \tan(-\frac{\pi}{۳}) =$

د) $\cos(-۴۵^\circ) \times \cos(-۶۰^\circ) + \sin(-۴۵^\circ) \times \sin(-۶۰^\circ) =$

***

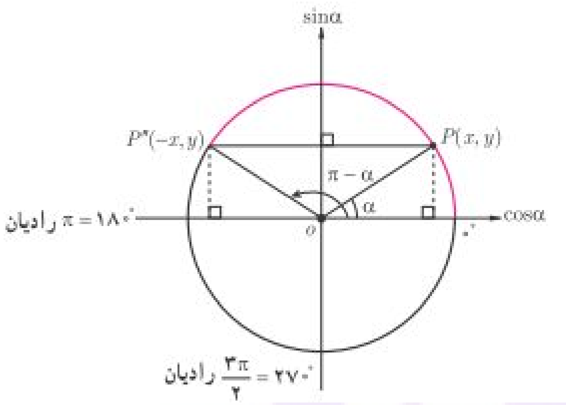
قسمت سوّم : نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل

دو زاویه را مکمل گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها ۱۸۰ درجه یا π رادیان[2] باشد. اگر β و α دو زاویه‌ی مکمل باشند، در این صورت می توان نوشت، $\alpha + \beta = \pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \pi - \alpha$$

بین نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α و مکمل آن یعنی β با توجه به شکل مقابل، می تـوان رابطـه‌ی زیـر را نوشت :

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$$



تمرین۸ : مکمل هر یک از زاویه های زیر را مشخص کنید.

الف) ۷۵° ب) ۲۵° ج) $\frac{\pi}{۱۲}$ د) $\frac{-\pi}{۴}$

تمرین ۹: حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\tan\frac{۲\pi}{۳} =$

ت) $\cot(-۱۲۰^\circ) =$

ب) $\cos\frac{۳\pi}{۴} =$

ث) $\cos(۱۳۵^\circ) =$

پ) $\sin ۱۲۰^\circ =$

تمرین۱۰ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را به دست آورید.

---

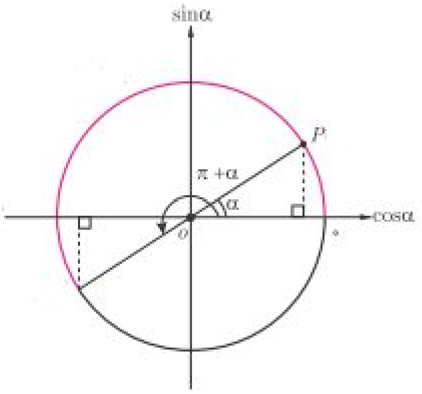
2. و به طور کلی مجموع آنها $۲k\pi + \pi$ رادیان باشند.

قسمت چهارم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف π رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها۱۸۰ درجه یا π رادیان شود. در این صورت می توان نوشت، $\beta - \alpha = \pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \pi + \alpha$$

لذا می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :



$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$
$$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$$
$$\cot(\pi + \alpha) = \cot(\alpha)$$

تمرین ۱۱ : مکمل هر یک از زاویه های زیر را مشخص کنید.

الف) ۷۵° ب) ۲۵° ج) $\frac{\pi}{۱۲}$ د) $\frac{-\pi}{۴}$

تمرین ۱۲ : حاصل هر یک از نسبت های مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\cot\frac{۵\pi}{۴} =$

ب) $\cos(-\frac{۴\pi}{۳}) =$

پ) $\sin ۲۲۵^\circ =$

ت) $\tan(۲۲۵^\circ) =$

ث) $\sin(-\frac{۷\pi}{۶}) =$

تمرین ۱۳ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی $\frac{۷\pi}{۶}$ رادیان را به دست آورید.

قسمت پنجم : نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم

دو زاویه را متمم گویند، هرگاه مجموع اندازه های آنها ۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان[3] باشد. اگـر β و α دو زاویـه‌ی متمم باشند، در این صورت می توان نوشت، $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲}$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = \frac{\pi}{۲} - \alpha$$

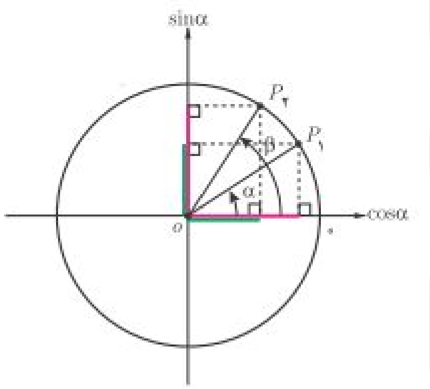
بین نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی α و متمم آن یعنی β با توجه به شکل مقابل، مـی تـوان رابطـه‌ی زیـر را نوشت :

$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cot(\alpha)$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \tan(\alpha)$$



تمرین ۱۴ : متمم زاویه های زیر را تعیین کنید.

الف) $\frac{\pi}{۷}$ ب) -۲۵°

تمرین ۱۵: اگر $\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}$، حاصل تساوی زیر را تعیین کنید.

$\cos(۷۵^\circ) =$

تمرین ۱۶ : تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\sin ۷۲^\circ = \cos(\quad)$ ب) $\tan\frac{۵\pi}{۱۴} = \cot(\quad)$

---

3. و به طور کلی مجموع آنها $\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi$ رادیان باشند.

قسمت ششم : نسبت های مثلثاتی زاویه های با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها۹۰ درجه یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود. در این صورت می توان نوشت، $\beta-\alpha=\frac{\pi}{۲}$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta=\frac{\pi}{۲}+\alpha$$

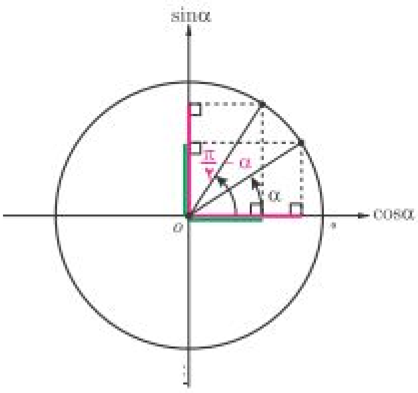
لذا می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\cos(\alpha)$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin(\alpha)$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot(\alpha)$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\tan(\alpha)$$



تمرین۱۷ : حاصل هر یک از نسبت مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

$$\sin(\frac{۲\pi}{۳})=$$

تمرین۱۸ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۳۵ درجه را به دست آورید.

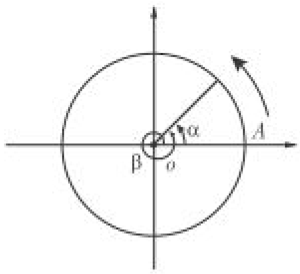
***

قسمت هفتم : نسبت های مثلثاتی با مجموع یا تفاضل 2π رادیان

اگر دو زاویه β و α طوری باشند که اختلاف آنها۳۶۰ درجه یا 2π رادیان شود. در این صورت می توان نوشت، $\beta - \alpha = 2\pi$ که از آن نتیجه می شود،

$$\beta = 2\pi + \alpha$$

لذا می توان رابطه‌ی زیر را نوشت :



$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin(\alpha)$$
$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$$
$$\cot(2\pi + \alpha) = \cot(\alpha)$$

تمرین۱۹ : حاصل هر یک از نسبت مثلثاتی زیر را تعیین کنید.

الف) $\sin(405^\circ) =$

ب) $\cos(\frac{5\pi}{3}) =$

***

نتیجه : بر اساس آنچه که تاکنون داشتیم می توان روابط دیگری را بررسی کرد که بـه طـور مختـصر ایـن روابط را به شکل زیر عنوان می کنیم.

الف) اگر زاویه‌ی مثلثاتی شامل مضرب های صحیح π باشد، نسبت مثلثاتی تغییر نمی کند.

ب) در نسبت های مثلثاتی سینوس وکسینوس می توان مضربهای زوج π را حذف کرد ولی اگر مـضربهای فرد π را حذف کنیم،باید پس از حذف یک علامت منفی جلوی نسبت مثلثاتی قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(3\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(3\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$$

ج) در نسبت های مثلثاتی تانژانت و کتانژانت تمام مضربهای صحیح π را می توان حذف کرد.

مثلاً:

$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cot(3\pi-\alpha)=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

د) در تمام نسبت های مثلثاتی می توان $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ را حذف کرد ولی پس از حذف باید:

۱. سینوس را به کسینوس و تانژانت را به کتانژانت تغییر داد و برعکس

۲. با فرض حاده بودن زاویه‌ی α، ربعی که زاویه‌ی مثلثاتی در آن واقع است را روی دایره‌ی مثلثاتی پیدا کرده و علامت نسبت مثلثاتی آنرا مشخص نموده و جلوی نسبت مثلثاتی جدید قرار دهیم.

مثلاً:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=+\cos\alpha$$ ربع دوّم

$$\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\sin\alpha$$ ربع سوّم

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=+\cot\alpha$$ ربع اوّل

توجه ۱ : اگر $n\in N$ آنگاه همواره داریم:

$$\tan(n\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad \sin(n\pi+\alpha)=(-1)^n\sin\alpha$$

$$\cot(n\pi+\alpha)=\cot\alpha \qquad \cos(n\pi+\alpha)=(-1)^n\cos\alpha$$

توجه۲ : با توجه به قواعد بالا همواره داریم.

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\tan\alpha \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha \qquad \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$

***

تمرین ۲۰: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $\tan ۱۲۰^\circ =$

۲) $\cos(۱۳۵^\circ) =$

۳) $\cot(۲۱۰^\circ) =$

۴) $\cos(-۱۵۰^\circ) =$

۵) $\sin(\frac{۱۳\pi}{۲} - \alpha) =$

۶) $\sin(\alpha - ۳\pi) =$

تمرین ۲۱ : تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt{۲}\sin(۱۳۵^\circ) + \cot(۳۰^\circ).\cos(۲۱۰^\circ) - \tan(-۱۳۵^\circ) = -\frac{۳}{۲}$$

۲۲ : در تساوی زیر به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

$$\sin(x) = \cos(۱۰^\circ + x)$$

حل : دو زاویه باید متمم همدیگر باشند. پس :

$$x + ۱۰ + x = ۹۰ \rightarrow ۲x = ۸۰ \rightarrow x = ۴۰$$

***

تمرین برای حل:

۲۳ : مقدار دقیق عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(\frac{۳\pi}{۴}) =$

ب) $\tan(\frac{۱۱}{۶}\pi) =$

ج) $\cos(\frac{۲۵\pi}{۳})$

۲۴ : نشان دهید که $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) + \cos(\pi - \theta) = ۰$

۲۵ : مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\tan(-۳۰^\circ)\cot(۱۵۰^\circ) - \tan(۱۳۵^\circ) =$

ب) $\dfrac{\sin(۲۴۰^\circ) \times \cos(۱۲۰^\circ) + \cos(-۲۷۰^\circ) \times \sin(۳۰^\circ)}{\cos(۲۲۵^\circ) \times \cos(-۱۳۵^\circ) + \tan(۴۵^\circ)} =$

۲۶ : حاصل $\tan(۲۰^\circ) + \tan(۴۰^\circ) + \tan(۶۰^\circ) + ... + \tan(۱۸۰^\circ)$ را به دست آورید.

۲۷ : حاصل $\frac{\sin(300^\circ)}{1-\cos(240^\circ)}$ را به دست آورید.

۲۸ : مقدار عددی عبارت مقابل را تعیین کنید.

$$A=\frac{\cos(240^\circ)+\sin(-150^\circ)}{\tan(-45^\circ)}$$

۲۹ : درستی تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف)

$$\sin(\frac{\pi}{2}+x)\times\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(x-2\pi)\times\sin(x-\pi)+\tan(-x)\times\tan(\frac{\pi}{2}+x)=1$$

ب) $3\sin(70^\circ)+\sin(55^\circ)+\cos(215^\circ)+2\cos(160^\circ)=\cos(20^\circ)$

۳۰ : رابطه‌ی زیر را ثابت کنید.

$$\sin(230^\circ)-2\sin(140^\circ)+\sin(410^\circ)+\cos(-50^\circ)+\sin(40^\circ)=0$$

۳۱ : آیا دو زاویه می توان یافت که سینوس یکسان داشته باشند؟ چرا؟ برای کسینوس چطور؟

۳۲ : درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin(840^\circ)=\sin(60^\circ)$

ب) $\cos(-324^\circ)=\cos(36^\circ)$

ج) $\tan(-1000^\circ)=\tan(80^\circ)$

د) $\sin(875^\circ)=\sin(155^\circ)$

۳۲ : در تساوی های زیر به جای x یک زاویه‌ی مناسب قرار دهید.

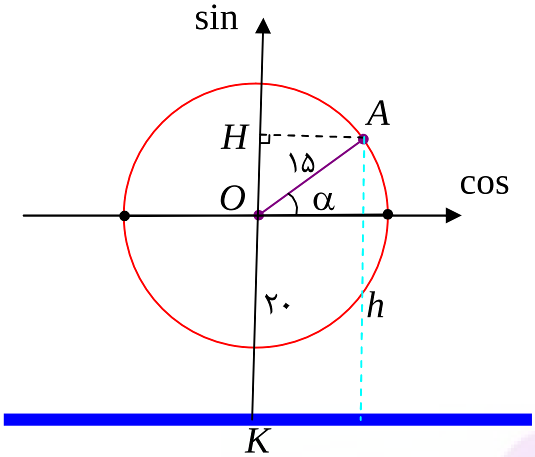
الف) $\sin(x)=\cos(20^\circ+x)$

ب) $\tan(x+\frac{\pi}{18})=\cot(\frac{2\pi}{9}+x)$

***

درس سوّم : توابع مثلثاتی

قبل از ورود به بحث، توابع مثلثاتی، مثال زیر را حل می کنیم.



یک شهر بازی چرخ و فلکی دارد که شعاع دایره‌ی آن ۱۵ متر است. فاصله‌ی مرکز دایره‌ی این چرخ و فلک تا سطح زمین ۲۰ متر است. واضح است که ارتفاع هر کابین مانند کابین A با تغییر زاویه‌ی α تغییر می کند و برای ارتفاع کابین می توان نوشت:

$$\sin\alpha = \frac{OH}{OA} \to OH = OA.\sin\alpha = ۱۵\sin\alpha$$

$$h = KH = OK + OH = ۲۰ + ۱۵\sin\alpha$$

$$\to h = ۲۰ + ۱۵\sin\alpha$$

هر تابع مشابه تابع فوق را یک **تابع مثلثاتی** می نامند. با توجه به این تابع به سئوالات زیر پاسخ دهید.

الف: ارتفاع کابین را وقتی که $\alpha = ۱۲۰^\circ$ را به دست آورید.

ب : مقدار حداقلی و مقدار حداکثری ارتفاع کابین را تعیین کنید.

ج : تعیین کنید، که زاویه‌ی α چقدر باشد تا ارتفاع کابین ۲۰ متر شود.

***

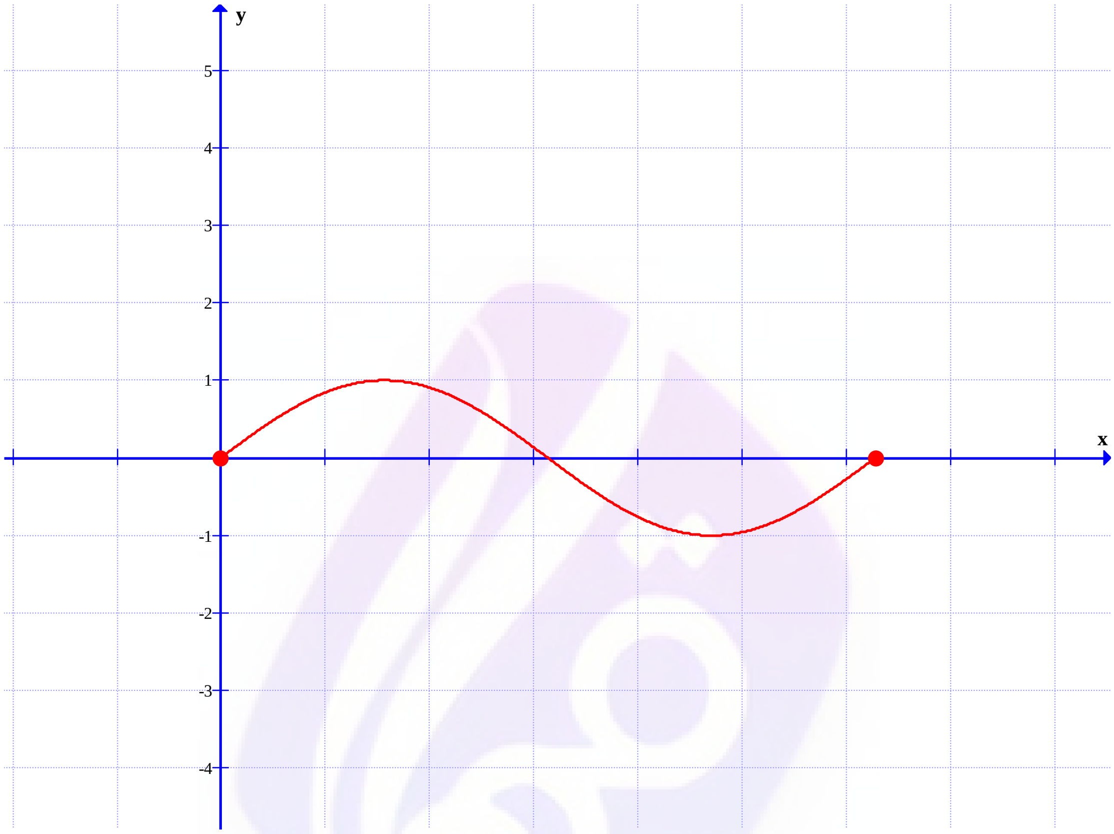
قسمت اوّل : توابع مثلثاتی

هر تابع شامل نسبت های مثلثاتی را تابع مثلثاتی می گویند. تابع هـای $f(x) = \cos x$ و $f(x) = \sin x$ ساده ترین تابع های مثلثاتی هستند. برای رسم نمودار چنین توابعی ساده ترین روش، انتخاب چند نقطه بـه کمک معادله و پیدا کردن آنها روی دستگاه مختصات (روش نقطه یابی) می باشد.

مثال ۱ : نمودار تابع $f(x) = \sin x$ را در فاصله‌ی $[۰, ۲\pi]$ رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه از نمودار تابع را به کمک معادله‌ی داده شده ، انتخاب می کنیم.

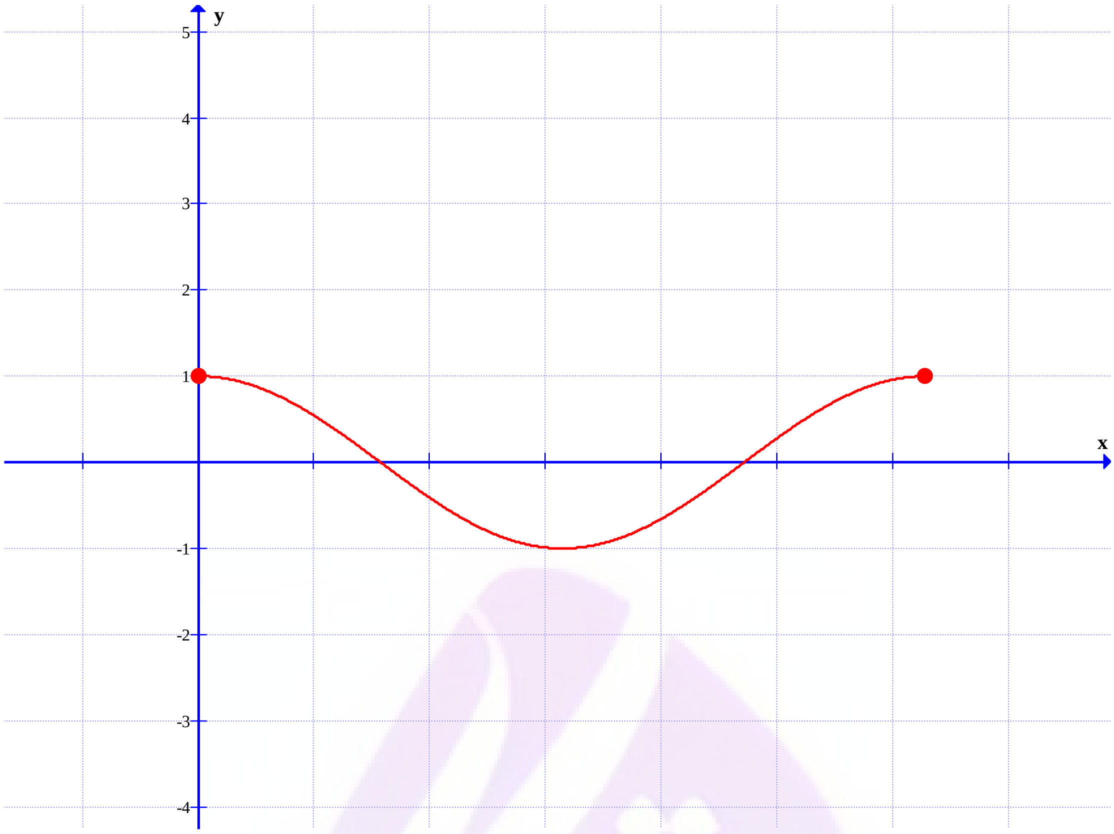
x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	۱	۰	-۱	۰



مثال ۲ : نمودار تابع $f(x)=\cos x$ را در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه از نمودار تابع را به کمک معادله‌ی داده شده ، انتخاب می کنیم.

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۱	۰	-۱	۰	۱



تمرین ۱ : نمودار تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ را در فاصله‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ رسم کنید.

***

قسمت دوّم : توابع مثلثاتی

در ادامه به بررسی خواص این توابع می پردازیم.

خاصیت ۱ : مقدار حداکثری ($\max$) تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ برابر ۱ و مقدار حداقلی ($\min$) آنها برابر ۱− می باشد.

خاصیت ۲ : دامنه‌ی تابع های $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آنها بازه‌ی $[-1,1]$ می باشد.

خاصیت ۳ : تابع $f(x)=\sin x$ از مبدأ مختصات می گذرد، ولی تابع $f(x)=\cos x$ از نقطه‌ی $(0,1)$ می گذرد.

خاصیت ۴ : این دو تابع متناوب هستند. یعنی در فواصل معینی نمودار آنها تکرار می شود. طول هر یک از این فاصله ها را دوره‌ی تناوب می نامند. دوره ی تناوب این دو تابع $T=2\pi$ می باشد.

تمرین ۲ : مقدار تابع $f(x)=۲\sin ۳x$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ بدست آورید.

تمرین ۳ : مقدار تابع $f(x)=-۲\sin(\pi-x)$ را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$ بدست آورید.

تمرین ۴ : مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$ را به دست آورید.

$$f(x)=-۱+\frac{۲}{\sqrt{۳}}\cos(۲x-\frac{\pi}{۲})$$

تمرین ۵ : مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=۳+۲\sin x$$

تمرین برای حل :

۶ : مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=۳-۵\cos x$$

۷ : مقدار حداکثری و حداقلی تابع زیر را بیابید.

$$f(x)=۷+۲\sin x$$

۸ : درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را تعیین کنید.

الف) حداکثر مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول های $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ است.

ب) حداقل مقدار تابع سینوس در نقاطی به طول های $x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}$ است.

۹ : درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را در مورد توابع $f(x)=\cos x$ و $f(x)=\sin x$ تعیین کنید.

الف) دامنه‌ی تابع سینوس مجموعه‌ی .... و برد آن مجموعه‌ی .... است.

ب) دامنه‌ی تابع کسینوس مجموعه‌ی .... و برد آن مجموعه‌ی .... است.

پ) مقدار تابع سینوس در طول های $(k\in Z)$ $x=k\pi$، برابر .... است.

ت) مقدار تابع کسینوس در نقاطی به طول های .... برابر با صفر است.

ج) حداکثر مقدار تابع کسینوس .... است که در نقاطی به طول های $(k\in Z)$ $x=۲k\pi$ است.

ح) حداقل مقدار تابع کسینوس .... است که در نقاطی به طول های .... به دست می آید.

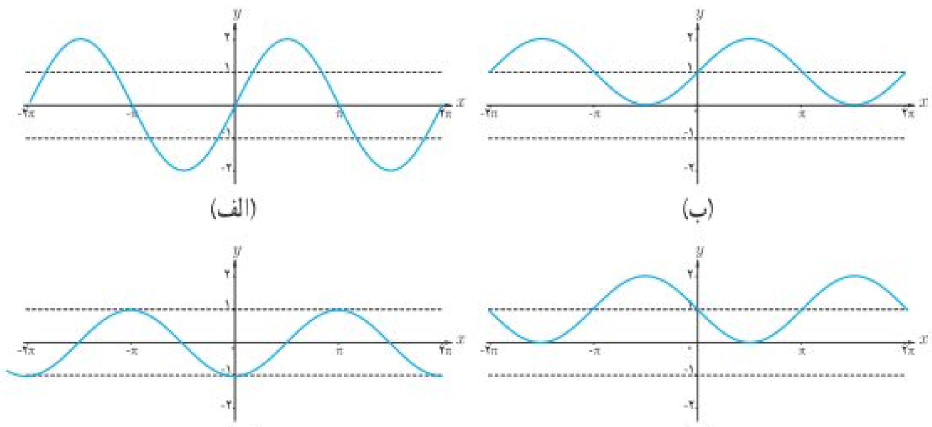
۱۰ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۳\cos x$ ب) $y=۱+\sin x$

ج) $y=۲\sin x-۱$ د) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

۱۱ : هر یک از نمودارهای زیر مربوط به کدام تابع است.

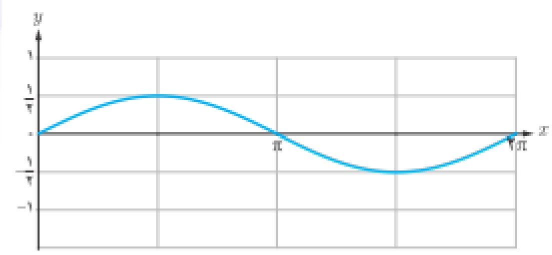
۱ $y=۲\sin x$ ۲ $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ ۳ $y=\sin x+۱$ ۴ $y=-\sin x+۱$



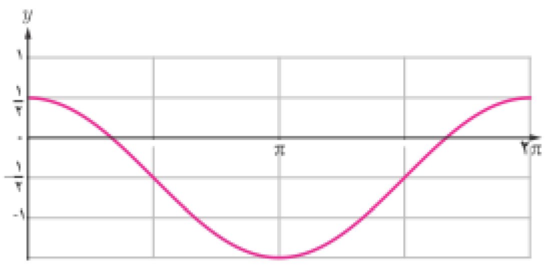
(الف) (ب) (پ) (ت)

۱۲ : با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام نادرست اند؟

الف : شکل زیر نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ را نشان می دهد.



ب : شکل زیر نمودار تابع $y=\cos x-\frac{۱}{۲}$ را نشان می دهد.



پ : برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = ۱ + \sin x$ کافی است، نمودار تابع سینوس را به انـدازه‌ی یـک واحد به موازات محور x ها انتقال دهیم.

ت : برای رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = -\cos x$ کافی است، نمودار تابع کسینوس را نسبت بـه محـور x ها قرینه کنیم.

***

تهیه کننده : جابر عامری   دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

ریاضی ۲

پایه‌ی یازدهم « رشته‌ی علوم تجربی »

فصل ۵ : توابع نمایی و لگاریتمی

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@mathameri

مهر ۱۳۹۶

درس اوّل : تعمیم توان رسانی

آشنایی با مفهوم تابع نمایی به عنوان یکی از انواع توابع در ریاضیات ، برای درک و فهم بسیاری مفاهیم دیگر در ریاضیات و فیزیک و از جمله شدت زلزله، شدت صدا، قدمت یک شیء و ... لازم و ضروری است. در اینجا ضمن یادآوری آن موضوعات تکمیلی دیگری را معرفی می کنیم.

قسمت اوّل : یادآوری قوانین توان رسانی و ریشه گیری

در سال های قبل ، با توان های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی و قوانین آنها آشنا شده اید. در اینجا چند رابطه در مورد توان و ریشه گیری را جهت یادآوری معرفی می کنیم.

۱ : توان صفر

$$\begin{cases} a^{\circ} = ۱ \\ a \neq ۰ \end{cases}$$

مثال: $۵^{\circ} = ۱$

***

۲ : توان یک

$$a^{۱} = a$$

مثال: $۵^{۱} = ۵$

***

۳ : توان منفی

$$\begin{cases} a^{-n} = \dfrac{۱}{a^{n}} \\ a \neq ۰ \end{cases}$$

مثال: $۵^{-۳} = \dfrac{۱}{۵^{۳}}$

***

۴ : توان کسری

$$\sqrt[n]{a^{m}} = a^{\frac{m}{n}}$$

اگر n زوج باشد، باید $a \geq ۰$ باشد.

مثال: $۵^{\frac{۲}{۳}} = \sqrt[۳]{۵^{۲}}$

***

۵ : توان توان

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

مثال: $(۵^۳)^۲ = ۵^{۳\times۲} = ۵^۶$

***

۶ : ضرب اعداد توان‌دار با پایه های مساوی

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال: $۵^۷ \times ۵^۲ = ۵^{۷+۲} = ۵^۹$

***

۷ : ضرب اعداد توان‌دار با توان های مساوی

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

مثال: $۵^۷ \times ۶^۷ = ۳۰^۷$

***

۸ : تقسیم اعداد توان‌دار با پایه های مساوی

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

مثال: $۵^۷ \div ۵^۳ = ۵^{۷-۳} = ۵^۴$

***

۹ : تقسیم اعداد توان‌دار با توان های مساوی

$$a^m \div b^m = (\frac{a}{b})^m$$

مثال: $۱۵^۷ \div ۵^۷ = ۳^۷$

***

۱۰ : هرگاه دو عدد توان‌دار مساوی،پایه های مساوی داشته باشند، توان های آنها نیز مساویند.

$$\begin{cases} a^m = a^n \rightarrow m = n \\ a \neq ۰,۱,-۱ \end{cases}$$

مثال: $۵^x = ۵^۳ \rightarrow x = ۳$

***

تمرین۱ : در تساوی های مقابل مقدار x را حساب کنید.

الف) $۲^x = ۳۲$

ب) $۳^x \times ۳^۴ = ۲۴۳$

ج) $۹^x = ۲۷$

د) $۳^{x-۱} = \frac{۱}{۸۱}$

حل:

الف) $۲^x = ۳۲ \to ۲^x = ۲^۵ \to x = ۵$

ب) $۳^x \times ۳^۴ = ۲۴۳ \to ۳^{x+۴} = ۳^۵ \to x + ۴ = ۵ \to x = ۱$

ج) $۹^x = ۲۷ \to (۳^۲)^x = ۳^۳ \to ۳^{۲x} = ۳^۳ \to ۲x = ۳ \to x = \frac{۳}{۲}$

د) $۳^{x-۱} = \frac{۱}{۸۱} \to ۳^{x-۱} = \frac{۱}{۳^۴} \to ۳^{x-۱} = ۳^{-۴} \to x - ۱ = -۴ \to x = -۴ + ۱ = -۳$

تمرین برای حل :

۲ : معادله های زیر را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳} = ۸۱$

ب) $۴^{۲x-۱} = ۸^{x+۱}$

پ) $۵^{۳n-۱} = ۱۲۵^{۲n+۱}$

ت) $۲^{۳n-۲} = \frac{۱}{۳۲}$

ث) $۹^x = ۳^{x^۲ - ۴x}$

ج) $۹^{۳y-۳} = ۲۷^{y+۱}$

ح) $(\frac{۳}{۵})^{x+۱} = \frac{۲۵}{۹}$

خ) $۴^{۳x+۲} = \frac{۱}{۶۴^۳}$

❊❊❊

قسمت دوّم : تعمیم قوانین توان رسانی

قوانین توان رسانی برای توان های حقیقی نیز برقرارند. اگر b و a دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یـک و y و x دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم.

۱) $a^{\circ}=۱$

۲) $a^{۱}=a$

۳) $a^{-x}=\frac{۱}{a^x}$

۴) $(a^x)^y=a^{xy}$

۵) $a^x\times a^y=a^{x+y}$

۶) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

۷) $a^x\times b^x=(ab)^x$

۸) $\frac{a^x}{b^x}=(\frac{a}{b})^x$

۹) $a^x=a^y\rightarrow x=y$

تمرین۳ : حاصل عبارت $\frac{۴^{\sqrt{۳}}\times ۲^{\sqrt{۷۵}}}{۲^{\sqrt{۱۲}}\times ۸^{\sqrt{۳}}}$ را به ساده ترین شکل بنویسید.

حل :

$$\frac{۴^{\sqrt{۳}}\times ۲^{\sqrt{۷۵}}}{۲^{\sqrt{۱۲}}\times ۸^{\sqrt{۳}}}=\frac{۲^{۲\sqrt{۳}}\times ۲^{۵\sqrt{۳}}}{۲^{۲\sqrt{۳}}\times ۲^{۳\sqrt{۳}}}=\frac{۲^{۷\sqrt{۳}}}{۲^{۵\sqrt{۳}}}=۲^{۲\sqrt{۳}}$$

تمرین۴ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $((\sqrt{۲})^{\sqrt{۳}})^{\sqrt{۱۲}}=$

۲) $((\sqrt{۱۰})^{۲-\sqrt{۳}})^{۲+\sqrt{۳}}=$

۳) $((\sqrt[۳]{۵})^{۳-\sqrt{۳}})^{۳+\sqrt{۳}}=$

۴)$(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\sqrt{۲}+۱}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}}=$

۵) $(۲-\sqrt[۳]{۷})^{\pi+۱}(۴+۲\sqrt[۳]{۷}+\sqrt[۳]{۴۹})^{\pi+۱}=$

تمرین۵ : مقدار x را از معادله‌ی زیر به دست آورید.

$$x^{\sqrt{۲}}+۱=۵$$

حل :

$$x^{\sqrt{۲}}+۱=۵ \to x^{\sqrt{۲}}=۴ \to (x^{\sqrt{۲}})^{\sqrt{۲}}=(۴)^{\sqrt{۲}} \to x^{۲}=۲^{۲\sqrt{۲}} \to x=۲^{\sqrt{۲}}$$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

درس دوّم : لگاریتم و معادلات لگاریتمی

جان نپر ریاضیدان اسکاتلندی(تولد۱۵۵۰ و وفات ۱۶۱۷) مفهوم لگاریتم را پایه گذاری کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و به عنوان بزرگترین پیشرفت علم حساب در قرن های ۱۶ و ۱۷ محسوب می شود. در این درس مفهوم لگاریتم را معرفی می کنیم و با خواص آن آشنا می شویم.

قسمت اوّل : مفهوم لگاریتم

لگاریتم عدد مثبت b در مبنای عدد مثبت و مخالف یک a ، عددی مانند x است که اگر a به توان x برسد، حاصل برابر b می شود.

$$\log_a^b = x \leftrightarrow a^x = b$$

$$\begin{cases} a,b > ۰ \\ a \neq ۱ \end{cases}$$

برای مثال:

$$۲^۳ = ۸ \rightarrow \log_۲^۸ = ۳$$

((نماد $\log_b^a$ را بخوانید، لگاریتم a در مبنای b))

تمرین ۱ : تساوی های زیر را به صورت لگاریتم بنویسید.

الف) $۷^۳ = ۳۴۳$ ب) $۲^{-۳} = \frac{۱}{۸}$ ج) $\sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

حل:

الف) $۷^۳ = ۳۴۳ \rightarrow \log_۷^{۳۴۳} = ۳$

ب) $۲^{-۳} = \frac{۱}{۸} \rightarrow \log_۲^{\frac{۱}{۸}} = -۳$

ج) $\sqrt[۳]{۶۴} = ۴ \rightarrow ۶۴^{\frac{۱}{۳}} = ۴ \rightarrow \log_{۶۴}^۴ = \frac{۱}{۳}$

تمرین۲ : تساوی های زیر را به صورت توانی بنویسید.

الف) $\log_۲^{۶۴} = ۶$ ب) $\log_۲^{\sqrt{۸}} = \frac{۳}{۲}$ ج) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} = -۳$

حل:

الف) $\log_{۲}^{۶۴}=۶\rightarrow ۲^{۶}=۶۴$

ب) $\log_{۲}^{\sqrt{۸}}=\frac{۳}{۲}\rightarrow ۲^{\frac{۳}{۲}}=\sqrt{۸}$

ج) $\log_{۱۰}^{۰/۰۰۱}=-۳\rightarrow ۱۰^{-۳}=۰/۰۰۱$

تمرین۳ : در هر مورد مقدار x را پیدا کنید.

الف) $\log_{۳}^{۸۱}=x$ ب) $\log_{۲}^{x}=۳$ ج) $\log_{x}^{۶۴}=۲$

حل:

الف) $\log_{۳}^{۸۱}=x\rightarrow ۳^{x}=۸۱\rightarrow ۳^{x}=۳^{۴}\rightarrow x=۴$

ب) $\log_{۲}^{x}=۳\rightarrow ۲^{۳}=x\rightarrow x=۸$

ج) $\log_{x}^{۶۴}=۲\rightarrow x^{۲}=۶۴\rightarrow x=\sqrt{۶۴}\rightarrow x=۸$

تمرین۴ : مقدار x را از تساوی زیر محاسبه کنید.

$$\log_{۷}^{۴۹}=۲x-۱$$

حل:

$$\log_{۷}^{۴۹}=۲x-۱\rightarrow ۷^{۲x-۱}=۴۹\rightarrow ۷^{۲x-۱}=۷^{۲}\rightarrow ۲x-۱=۲\rightarrow ۲x=۳\rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

تمرین۵ : لگاریتم های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\log_{۲}^{۲۵۶}$ ج) $\log_{۷}^{۷}$

ب) $\log_{۴}^{۲۵۶}$ د) $\log_{۳}^{۱}$

حل:

الف) $\log_{۲}^{۲۵۶}=x\rightarrow ۲^{x}=۲۵۶\rightarrow ۲^{x}=۲^{۸}\rightarrow x=۸$

ب) $\log_{۴}^{۲۵۶}=y\rightarrow ۴^{y}=۲۵۶\rightarrow ۴^{y}=۴^{۴}\rightarrow y=۴$

ج) $\log_{۷}^{۷} = z \to ۷^{z} = ۷ \to ۷^{z} = ۷^{۱} \to z = ۱$

د) $\log_{۳}^{۱} = t \to ۳^{t} = ۱ \to ۳^{t} = ۳^{\circ} \to t = \circ$

نتیجه:

۱ : لگاریتم هر عدد مثبت و مخالف یک در مبنای خودش برابر یک است.

$$\begin{cases} \log_{a}^{a} = ۱ \\ a > ۰ , a \neq ۱ \end{cases}$$

۲ : لگاریتم یک در هر مبنای مثبت و مخالف یک صفر است.

$$\begin{cases} \log_{a}^{۱} = ۰ \\ a > ۰ , a \neq ۱ \end{cases}$$

تمرین۶ : نشان دهید که تساوی زیر درست است.

$$\log_{۶}^{۴} + \log_{۶}^{۹} = ۲$$

حل: قرار می دهیم $\log_{۶}^{۴} = x$ و $\log_{۶}^{۹} = y$ و نشان می دهیم که $x + y = ۲$

$$\left.\begin{array}{l} \log_{۶}^{۴} = x \to ۶^{x} = ۴ \\ \log_{۶}^{۹} = y \to ۶^{y} = ۹ \end{array}\right\} \to ۶^{x} \times ۶^{y} = ۴ \times ۹ \to ۶^{x+y} = ۳۶$$

$$\to ۶^{x+y} = ۶^{۲} \to x + y = ۲$$

***

تذکر ۱ : لگاریتم صفر نامعین است.

$$\log_{a}^{\circ} = \text{نامعین}$$

تذکر ۲ : لگاریتم، روی اعداد منفی ، تعریف نمی شود.

تذکر ۳ : اگر مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، لگاریتم را **لگاریتم اعشاری** می نامند. معمولاً در لگاریتم اعشاری مبنای ۱۰ نوشته نمی شود.

$$\log_{۱۰}^{a} = \log a$$

تذکر ۴ : یکی از اعداد گنگ که کاربرد های زیادی در صنعت و اقتصاد و بازرگانی دارد، عددی معروف به عدد نپرین می باشد. این عدد به افتخار لئونارد اویلر را با e نمایش می دهند و مقدار تقریبی آن تا دو رقم اعشار ۲/۷۱ می باشد.

اگر مبنای لگاریتم عدد نپرین باشد، لگاریتم را **لگاریتم طبیعی** می نامند. معمولاً مبنای e نوشته نمی شود. حال به دلیل اینکه این لگاریتم با لگاریتم اعشاری اشتباه نشود، $\log$ را به صورت L_n می نویسند.

$$\log_e^a = L_n\, a$$

واضح است که :

$$L_n\, e = \log_e^e = ۱$$
$$L_n\, ۱ = \log_e^۱ = ۰$$

تذکر ۵ : ماشین های حساب ، فقط لگاریتم اعشاری و لگاریتم طبیعی را محاسبه می کنند. برای محاسبه‌ی لگاریتم در مبناهای دیگر به کمک ماشین حساب می توان از فرمولی به نام فرمول تغییر مبنا استفاده نمود. این فرمول در ادامه، گفته می شود.

***

قسمت دوّم : روابط لگاریتمی

با توجه به تعریف لگاریتم ، روابط زیر را به راحتی می توان بیان کرد.

۱: جمع لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

برای مثال :

$$\log_۷^۳ + \log_۷^۵ = \log_۷^{۳\times۵} = \log_۷^{۱۵}$$

این رابطه برای مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز برقرار است.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

برای مثال:

$$\log_{۱۰۰}^۲ + \log_{۱۰۰}^۵ + \log_{۱۰۰}^{۱۰} = \log_{۱۰۰}^{۲\times۵\times۱۰} = \log_{۱۰۰}^{۱۰۰} = ۱$$

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

مثال :

$$\log_7^{20} - \log_7^5 = \log_7^{20 \div 5} = \log_7^4$$

۳: لگاریتم عدد تواندار

$$\log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

مثال :

$$\log_2^{32} = \log_2^{2^5} = 5\log_2^2 = 5 \times 1 = 5$$

۴: لگاریتم مبنای تواندار

$$\log_{x^m}^a = \frac{1}{m}\log_x^a$$

مثال :

$$\log_{81}^3 = \log_{3^4}^3 = \frac{1}{4}\log_3^3 = \frac{1}{4}$$

نتیجه : $\log_{x^n}^{a^n} = \log_x^a$

۵ : تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

مثال : فرض کنید که می خواهیم مبنای لگاریتم $\log_3^4$ را به ۵ تبدیل کنیم. در این صورت

$$\log_3^4 = \frac{\log_5^4}{\log_5^3}$$

۶: دو لگاریتم مساوی با مبنای برابر

$$\log_{x}^{a}=\log_{x}^{b}\rightarrow a=b$$

مثال :

$$\log_{۳}^{a}=\log_{۳}^{۸}\rightarrow a=۸$$

***

تمرین۷ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$۱)\log ۵+\log ۲۰$

$۲)\ \log_{۷}^{۷۰}-\log_{۷}^{۱۰}$

$۳)\ \log_{۶}^{۴}+\log_{۶}^{۹}$

$۴)\ ۲\log ۵+\log ۴$

$۵)\ ۶\log_{۴}^{۲}-\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۶۴}$

$۶)\log_{۲}^{۸}+\log_{۲}^{۵}-\log_{۲}^{۱۰}$

حل:

$$۱)\log ۵+\log ۲۰=\log ۵\times ۲۰=\log ۱۰۰=\log ۱۰^{۲}=۲\log ۱۰=۲\times ۱=۲$$

$$۲)\ \log_{۷}^{۷۰}-\log_{۷}^{۱۰}=\log_{۷}^{۷۰\div ۱۰}=\log_{۷}^{۷}=۱$$

$$۳)\ \log_{۶}^{۴}+\log_{۶}^{۹}=\log_{۶}^{۴\times ۹}=\log_{۶}^{۳۶}=\log_{۶}^{۶^{۲}}=۲\log_{۶}^{۶}=۲\times ۱=۲$$

$$۴)\ ۲\log ۵+\log ۴=\log ۵^{۲}+\log ۴=\log ۲۵+\log ۴=\log ۲۵\times ۴=\log ۱۰۰$$

$$=\log ۱۰^{۲}=۲\log ۱۰=۲\times ۱=۲$$

$$۵)\ ۶\log_{۴}^{۲}-\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۶۴}=\log_{۴}^{۲^{۶}}-\log_{۲^{۲}}^{۶۴}=\log_{۴}^{۶۴}-\log_{۴}^{۶۴}=\log_{۴}^{۶۴\div ۶۴}=\log_{۴}^{۱}=۰$$

$$۶)\ \log_{۲}^{۸}+\log_{۲}^{۵}-\log_{۲}^{۱۰}=\log_{۲}^{(۸\times ۵)\div ۱۰}=\log_{۲}^{۴}=\log_{۲}^{۲^{۲}}=۲\log_{۲}^{۲}=۲\times ۱=۲$$

تمرین۸ : لگاریتم های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۱) $\log_{۷}^{۱۵} - \log_{۷}^{۳}$

۲) $\frac{\log ۵}{\log ۲}$

۳) $۵\log a - ۲\log b + ۳\log c$

۴) $\log a - \log b - \log c + \log d$

۵) $۲\log x - ۳\log y - ۴\log c$

۶) $۲L_n a + ۳L_n b$

حل:

۱) $\log_{۷}^{۱۵} - \log_{۷}^{۳} = \log_{۷}^{۱۵ \div ۳} = \log_{۷}^{۵}$

۲) $\frac{\log ۵}{\log ۲} = \log_{۲}^{۵}$

۳) $۵\log a - ۲\log b + ۳\log c = \log a^{۵} - \log b^{۲} + \log c^{۳} = \log \frac{a^{۵}c^{۳}}{b^{۲}}$

۴) $\log a - \log b - \log c + \log d = \log \frac{ad}{bc}$

۵) $۲\log x - ۳\log y - ۴\log c = \log x^{۲} - \log y^{۳} - \log c^{۴} = \log \frac{x^{۲}}{y^{۳}c^{۴}}$

۶) $۲L_n a + ۳L_n b = L_n a^{۲} + L_n b^{۳} = L_n a^{۲} b^{۳}$

تمرین۹ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log_{۵}^{۱۲۵}$

۲) $\log_{۴}^{۳۲}$

۳) $\log_{۳}^{\sqrt{۲۷}}$

۴) $\log_{\sqrt[۳]{۴}}^{۸}$

۵) $\log ۱۰۰$

۶) $\log \sqrt{۱۰۰۰}$

حل:

۱) $\log_{۵}^{۱۲۵} = \log_{۵}^{۵^{۳}} = ۳\log_{۵}^{۵} = ۳ \times ۱ = ۳$

۲) $\log_{۴}^{۳۲} = \log_{۲^{۲}}^{۲^{۵}} = ۵ \times \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۲} = \frac{۵}{۲} \times ۱ = \frac{۵}{۲}$

$$۳)\ \log_{۳}^{\sqrt{۲۷}} = \log_{۳}^{\sqrt{۳^۳}} = \log_{۳}^{۳^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۳}{۲}\log_{۳}^{۳} = \frac{۳}{۲}\times ۱ = \frac{۳}{۲}$$

$$۴)\ \log_{\sqrt[۳]{۴}}^{۸} = \log_{\sqrt[۳]{۲^۲}}^{۲^۳} = \log_{۲^{\frac{۲}{۳}}}^{۲^۳} = ۳\times\frac{۳}{۲}\log_{۲}^{۲} = \frac{۹}{۲}\times ۱ = \frac{۹}{۲}$$

$$۵)\ \log ۱۰۰ = \log ۱۰^{۲} = ۲\log ۱۰ = ۲\times ۱ = ۲$$

$$۶)\ \log\sqrt{۱۰۰۰} = \log\sqrt{۱۰^{۳}} = \log ۱۰^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲}\log ۱۰ = \frac{۳}{۲}\times ۱ = \frac{۳}{۲}$$

تمرین ۱۰: اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$ لگاریتم های زیر را بر حسب a و b به دست آورید.

$۱)\ \log ۸۱$

$۲)\ \log ۳۲$

$۳)\ \log ۶$

$۴)\log ۱۲$

$۵)\log ۷۲$

$۶)\log ۵$

$۷)\log ۷۵$

$۸)\log_{۲}^{۳}$

$۹)\log_{۳}^{۲}$

$۱۰)\log_{۸۱}^{۳۲}$

حل:

$$۱)\ \log ۸۱ = \log ۳^{۴} = ۴\log ۳ = ۴b$$

$$۲)\ \log ۳۲ = \log ۲^{۵} = ۵\log ۲ = ۵a$$

$$۳)\ \log ۶ = \log ۲\times ۳ = \log ۲ + \log ۳ = a + b$$

$$۴)\log ۱۲ = \log ۲^{۲}\times ۳ = \log ۲^{۲} + \log ۳ = ۲\log ۲ + \log ۳ = ۲a + b$$

$$۵)\log ۷۲ = \log ۲^{۳}\times ۳^{۲} = \log ۲^{۳} + \log ۳^{۲} = ۳\log ۲ + ۲\log ۳ = ۳a + ۲b$$

$$۶)\log ۵ = \log\frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - a$$

$$۷)\ \log ۷۵ = \log ۳\times ۵^{۲} = \log ۳ + \log ۵^{۲} = \log ۳ + ۲\log ۵ = b + ۲(۱ - a)$$

$$= b + ۲ - ۲a$$

$$۸)\log_{۲}^{۳}=\frac{\log ۳}{\log ۲}=\frac{b}{a}$$

$$۹)\log_{۳}^{۲}=\frac{\log ۲}{\log ۳}=\frac{a}{b}$$

$$۱۰)\log_{۸۱}^{۳۲}=\log_{۳^{۴}}^{۲^{۵}}=۵\times\frac{۱}{۴}\log_{۳}^{۲}=\frac{۵}{۴}\times\frac{a}{b}=\frac{۵a}{۴b}$$

تمرین ۱۱: اگر $\log ۲=۰/۳۰۱۰$ و $\log ۷=۰/۸۴۵۰$ حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید.

$۱)\ \log ۸$ — $۶)\ \log ۵۶$

$۲)\log ۴۹$ — $۷)\log ۵$

$۳)\ \log ۱۴$ — $۸)\log ۲۵$

حل :

$$۱)\ \log ۸=\log ۲^{۳}=۳\log ۲=۳(۰/۳۰۱۰)=۰/۹۰۳۰$$

$$۲)\log ۴۹=\log ۷^{۲}=۲\log ۷=۲(۰/۸۴۵۰)=۱/۶۹$$

$$۳)\ \log ۱۴=\log ۲\times ۷=\log ۲+\log ۷=۰/۳۰۱۰+۰/۸۴۵۰=۱/۱۴۶$$

$$۶)\ \log ۵۶=\log ۲^{۳}\times ۷=\log ۲^{۳}+\log ۷=۳\log ۲+\log ۷=۳(۰/۳۰۱۰)+(۰/۸۴۵۰)$$

$$=۰/۹۰۳۰+۰/۸۴۵۰=۱/۷۴۸$$

$$۷)\log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log ۱۰-\log ۲=۱-(۰/۳۰۱۰)=۰/۶۹۹$$

$$۸)\log ۲۵=\log ۵^{۲}=۲\log ۵=۲(۰/۶۹۹)=۱/۳۹۸$$

تمرین ۱۲ : معادله[1] های زیر را حل کنید.

$۱)\ \log_{۵}^{x}+\log_{۵}^{۳}=\log_{۵}^{۱۲}$ — $۴)\ \log^{x+۳}+\log^{x}=۱$

---

[1] . توجه کنید که بنابر تعریف لگاریتم، جوابی از یک معادله ی لگاریتمی، قابل قبول است که به ازای آن لگاریتم صفر یا لگاریتم عدد منفی، پیش نیاید.

۲) $3\log x=\log 8$　　　　۵) $\log_2^{4x}-\log_2^{x-3}=3$

۳) $2\log x+\log 3=\log 27$　　　　۶) $\log^{1-x}-\log^{2}=\log^{5}$

حل:

۱) $\log_5^{x}+\log_5^{3}=\log_5^{12}\to\log_5^{3x}=\log_5^{12}\to 3x=12\to x=4$

۲) $3\log x=\log 8\to\log x^{3}=\log 8\to x^{3}=8\to x=\sqrt[3]{8}=2$

۳) $2\log x+\log 3=\log 27\to\log x^{2}+\log 3=\log 27\to\log 3x^{2}=\log 27$

$\to 3x^{2}=27\to x^{2}=9\to x=\sqrt{9}=\pm 3$

که ریشه‌ی $x=-3$ غیر قابل قبول است.

۴) $\log^{x+3}+\log^{x}=1\to\log^{x(x+3)}=\log^{10}\to x^{2}+3x=10\to x^{2}+3x-10=0$

$$\to(x+5)(x-2)=0\to\begin{cases}x+5=0\to x=-5\\ x-2=0\to x=2\end{cases}$$

که ریشه‌ی $x=-5$ غیر قابل قبول است.

۵) $\log_2^{4x}-\log_2^{x-3}=3\to\log_2^{\frac{4x}{x-3}}=3\log_2^{2}\to\log_2^{\frac{4x}{x-3}}=\log_2^{2^{3}}\to\log_2^{\frac{4x}{x-3}}=\log_2^{8}$

$\to\frac{4x}{x-3}=8\to 4x=8(x-3)\to 4x=8x-24\to 4x-8x=-24$

$\to -4x=-24\to x=\frac{-24}{-4}=6$

۶) $\log^{1-x}-\log^{2}=\log^{5}\to\log^{\frac{1-x}{2}}=\log^{5}\to\frac{1-x}{2}=5\to 1-x=10\to x=-9$

تمرین۱۳ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$L_n(x-3)=2$$

حل :

$L_n(x-3)=2\to x-3=e^{2}\to x=3+e^{2}$

تمرین برای حل :

۱۴: درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

الف: لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

ب: لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی شود.

پ: $a>b>۰$ آنگاه $\log_{۱۰}^{a}<\log_{۱۰}^{b}$

۱۵: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log ۲۵+\log ۴$

۲) $\log_{۸}^{۴۰}-\log_{۸}^{۵}$

۳) $\log_{۱۲}^{۱۶}+\log_{۱۲}^{۹}$

۴) $۳\log ۵+\log ۸$

۵) $\log_{۹}^{۳}-\frac{۱}{۲}\log_{۳}^{۸۱}$

۶) $\log_{۲}^{۸}-\log_{۲}^{۵}+\log_{۲}^{۲۰}$

۱۶ : لگاریتم های زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

۱) $\log_{۵}^{۱۸}-\log_{۵}^{۳}$

۲) $\dfrac{\log_{۲}^{۷}}{\log_{۲}^{۵}}$

۳) $۵\log p+۲\log q+۳\log r$

۴) $\log a+\log b-\log c-\log d$

۵) $۲\log x-۵\log y-۳\log c$

۱۷: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

۱) $\log_{۱۲۵}^{۲۵}$

۲) $\log_{۸}^{۳۲}$

۳) $\log_{۵}^{\sqrt{۱۲۵}}$

۴) $\log_{۸۱}^{۲۷}$

۵) $\log_{\sqrt{۵}}^{۲۵}$

۶) $\log_{\sqrt{۳}}^{۷۲۹}$

۷) $\log_{\frac{۱}{۲۰}}^{۴۰۰}$

۱۸: اگر $\log ۲=a$ و $\log ۳=b$ و $\log ۷=c$ لگاریتم های زیر را بر حسب a و b و c به دست آورید.

۱) $\log ۴۹$

۲) $\log ۱۲۸$

۳) $\log ۲۱$

۴) $\log ۲۸$

۵) $\log ۴۲$

۶) $\log ۵$

۷) $\log ۵۷۶$

۸) $\log_{۲}^{۷}$

۹) $\log_{۷}^{۲}$

۱۰) $\log_{۸۱}^{۴۹}$

۱۹ : اگر $\log ۳ = ۰/۴۷۷۱$ و $\log ۷ = ۰/۸۴۵۰$ حاصل لگاریتم های زیر را به دست آورید.

۱) $\log ۹$

۲) $\log ۴۹$

۳) $\log ۲۱$

۴) $\log ۲۱۰$

۵) $\log ۶۳$

۶) $\log_{۳}^{۷}$

۲۰ : اگر $\log^{۲} = ۰/۳$ باشد، مقدار $\log \frac{۲۵}{۴}$ را محاسبه کنید.

۲۱ : مقدار x را از تساوی مقابل به دست آورید.

$$\log_{x+۱}^{۶۴} = ۲$$

۲۲ : اگر $\log_{x}^{۸۱} = -۴$ مقدار x را بیابید.

۲۳ : معادله‌ی $\log_{x}^{۲x+۱۵} = ۲$ را حل کنید.

۲۴ : معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\log^{۲x+۱} = ۲\log^{۳}$

۲) $\log^{۲x+۵} - \log^{۳} = ۲\log^{۵}$

۳) $\log x^{۴} = ۴\log^{۳}$

۴) $\log^{۳x+۱} = \log^{۵} + ۳\log^{۲}$

۵) $\log_{۲}^{x} + \log_{۲}^{۵} = \log_{۲}^{۱۵۰} - \log_{۲}^{۳}$

۶) $\log^{x} + \log^{x+۲} = \log^{۳}$

۷) $L_n(x-۳) = ۲$

۸) $L_n(۴x-۵) = L_n(۲-x)$

۹) $L_n(۲x-۱) + L_n(x-۷) = L_n ۷$

۱۰) $\log_{۲}^{x+۱} + \log_{۲}^{x+۴} = ۲$

۲۵ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\log^{x+۱} + \log^{x-۱} = \log^{۳}$$

۲۶ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\log^{۲-x} + \log^{۱-x} = \log^{۵} + ۲\log^{۲}$$

۲۷ : معادله های زیر را حل کنید.

۱) $(e^{x} - ۵)(۲e^{x} - ۷) = ۰$

۲) $(e^{x} + ۳)^{۲} - ۲۵ = ۰$

۳) $(۲^{x} - ۱)(۲^{x} - ۳) = ۰$

۴) $۳^{۲x} - ۴ \times ۳^{x} - ۴۵ = ۰$

۵) $۹^{x} = ۲ \times ۳^{x+۲} - ۴۵$

۶) $۲e^{۲x} + e^{x} - ۳ = ۰$

۷) $|e^{x} - ۱| = |۳ - ۲e^{x}|$

۸) $۱۰^{\log(x+۱)} = ۳$

***

قسمت سوّم : اثبات روابط لگاریتمی

در اینجا روابط لگاریتمی را که پیش از این بیان کرده ایم، اثبات می کنیم.

۱: جمع لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a + \log_x^b = \log_x^{ab}$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ و $\log_x^b = \beta$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \to a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \to b = x^\beta$$

$$\Rightarrow a.b = x^\alpha .x^\beta \to a.b = x^{\alpha+\beta} \to \log_x^{a.b} = \alpha + \beta \to \log_x^{a.b} = \log_x^a + \log_x^b$$

توجه : اثبات تعمیم این رابطه ی به مجموع چند لگاریتم در یک مبنا نیز به همین صورت انجام می گیرد.

$$\log_x^a + \log_x^b + \log_x^c = \log_x^{abc}$$

دانش آموزان عزیز می توانند، این تساوی را خود اثبات کنند.

***

۲: تفریق لگاریتم ها در یک مبنا

$$\log_x^a - \log_x^b = \log_x^{\frac{a}{b}}$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ و $\log_x^b = \beta$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \to a = x^\alpha$$

$$\log_x^b = \beta \to b = x^\beta$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \to \frac{a}{b} = x^{\alpha-\beta} \to \log_x^{\frac{a}{b}} = \alpha - \beta \to \log_x^{\frac{a}{b}} = \log_x^a - \log_x^b$$

***

تمرین۲۸ : به کمک رابطه ی فوق ثابت کنید که $\log_x^{\frac{۱}{a}} = -\log_x^a$

۳ : لگاریتم عدد توان‌دار

$$\log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow (a)^n = (x^\alpha)^n \rightarrow a^n = x^{n\alpha} \rightarrow \log_x^{a^n} = n\alpha \rightarrow \log_x^{a^n} = n\log_x^a$$

***

۴ : لگاریتم مبنای توان‌دار

$$\log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}\log_x^a$$

اثبات : فرض می کنیم که $\log_x^a = \alpha$ پس :

$$\log_x^a = \alpha \rightarrow a = x^\alpha$$

$$\Rightarrow a = (x^{m\alpha})^{\frac{۱}{m}} \rightarrow a = (x^m)^{\frac{\alpha}{m}} \rightarrow \log_{x^m}^a = \frac{\alpha}{m}$$

$$\rightarrow \log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}(\alpha) \rightarrow \log_{x^m}^a = \frac{۱}{m}(\log_x^a)$$

***

۵ : توان لگاریتمی

$$x^{\log_x^a} = a$$

فرض کنیم که $\log_x^a = \alpha$ پس $x^\alpha = a$ و این یعنی $x^{\log_x^a} = a$

۶ : تغییر مبنای لگاریتم

$$\log_b^a \times \log_x^b = \log_x^a$$

فرض می کنیم که

$$\log_b^a = \alpha \to b^\alpha = a \qquad (۱)$$

$$\log_x^b = \beta \to x^\beta = b \qquad (۲)$$

از روابط(۱) و(۲) می توان نتیجه گرفت :

$$(x^\beta)^\alpha = a \to x^{\alpha\beta} = a \to \alpha\beta = \log_x^a$$

پس :

$$\log_b^a \times \log_x^b = \log_x^a$$

نتیجه :

$$\log_b^a = \frac{\log_x^a}{\log_x^b}$$

***

تمرین برای حل :

۲۹ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

$۱)\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$ $\qquad$ $۲)\ a^{\log^b} = b^{\log^a}$ $\qquad$ $۳)\ \log_{b^n}^{a^n} = \log_b^a$

۳۰ : حاصل عبارت های زیر را بیابید.

$۱)\ \log_۳^{۱۸} \times \log_{۱۸}^{۸۱}$ $\qquad$ $۲)\ \frac{۱}{\log_{۱۸}^{۳}} - \frac{۱}{\log_۲^۳}$

۳۱ : حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

الف) $۲\log_{۱۰}^{۲} + \log_{۱۰}^{۲۵۰} =$ $\qquad$ ب) $\log_۴^۳ \times \log_۳^{۱۶} =$ $\qquad$ ج) $۳\log_{۱۰}^{\sqrt[۳]{۴}} + \log_{۱۰}^{۲۵} =$

د) $\log_۸^{\frac{۱}{۳۲}} =$ $\qquad$ هـ) $۲^{\log_۲^۵ - \log_۲^۳} =$

۳۲ : اگر $\log_3^5 = b$ و $\log_3^2 = a$ باشد، مقدار $\log_4^{10}$ را بیابید.

۳۳ : مقدار x از معادله‌ی $2\log_3^x - \log_{\sqrt{3}}^x - \log_{\frac{1}{3}}^x = \frac{1}{3}$ به دست آورید.

۳۴ : جواب معادله‌ی $\log_4^{\log_3^{\log_2^x}} = 0$ را تعیین کنید.

۳۵ : اگر $a^2 + b^2 = 6ab$ ، آنگاه ثابت کنید که $\frac{\log^a + \log^b}{2} = \log^{\frac{a-b}{2}}$

***

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : **www.mathtower.ir**

کانال تلگرام : **@mathameri**

درس سوّم : تابع نمایی و تابع لگاریتمی

در این درس با توابع نمایی و لگاریتمی آشنا می شویم. شناخت این توابع جهت مدل سازی بسیاری از پدیده های طبیعی می تواند مفید باشد.

قسمت اوّل : تابع نمایی

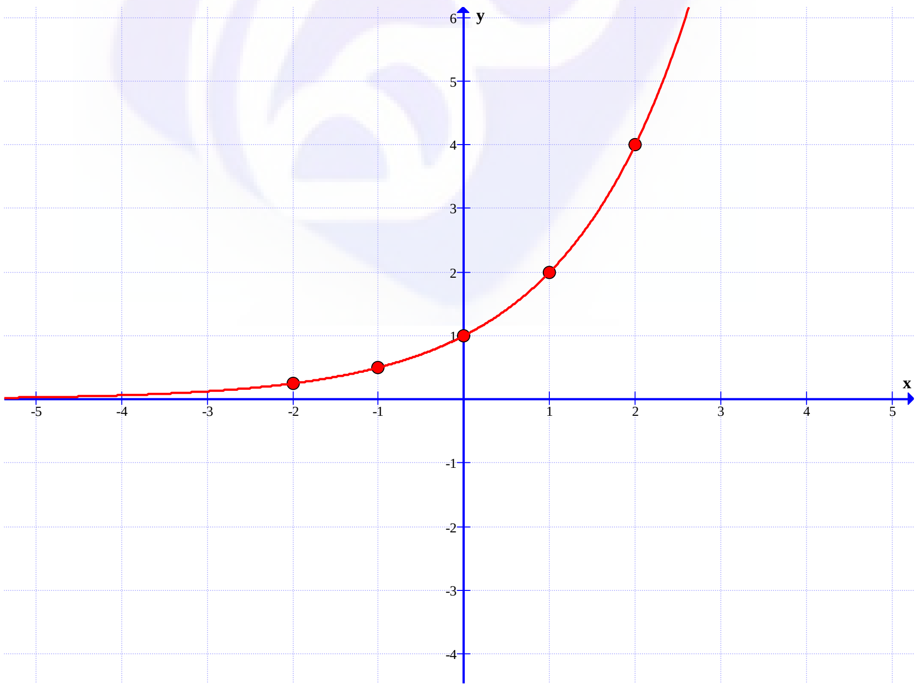
هر تابع به صورت $f(x)=a^x$ به شرط اینکه $a>۰$ و $a\neq ۱$ را تابع نمایی می نامند.

مانند تابع $f(x)=۳^x$

تمرین ۱ : نمودار تابع $f(x)=۲^x$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

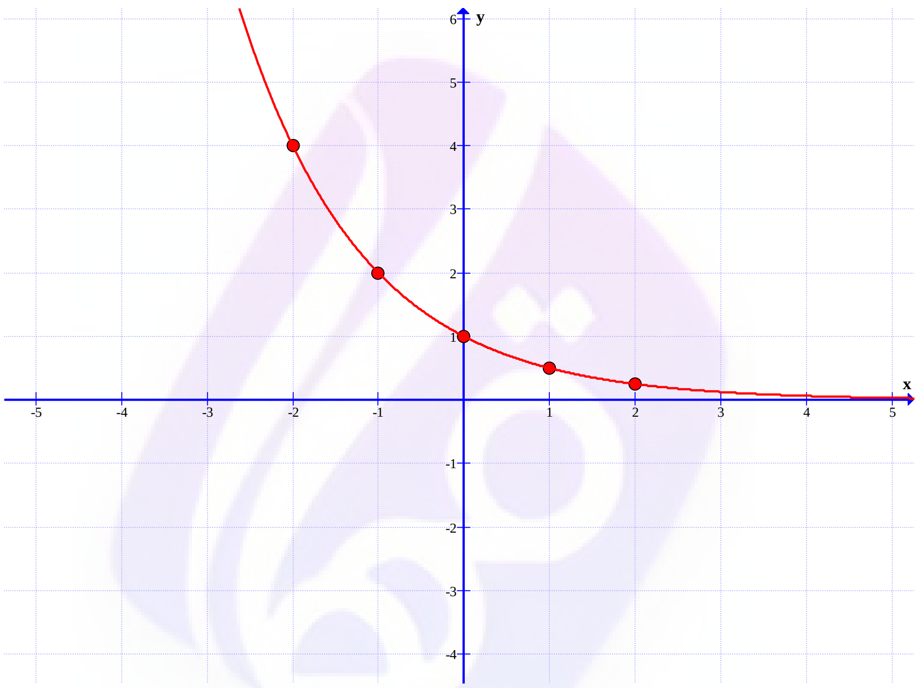
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴



تمرین ۲ : نمودار تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید.

حل: ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$



توجه : هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=ka^x$ که در آن $(k\neq ۰, a>۰, a\neq ۱)$ با تابع نمایی رفتاری مشابه دارند و به همین دلیل می گویند ، این توابع **رفتار نمایی** دارند. برای مثال، توابع $f(x)=۳\times ۲^x$ و $g(x)=(\frac{۲}{۵})^{x-۱}$ رفتار نمایی دارند.

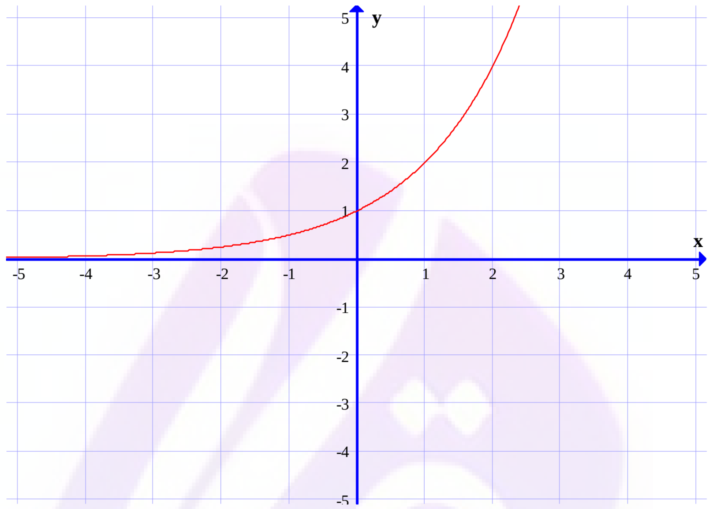
***

خواص تابع نمایی

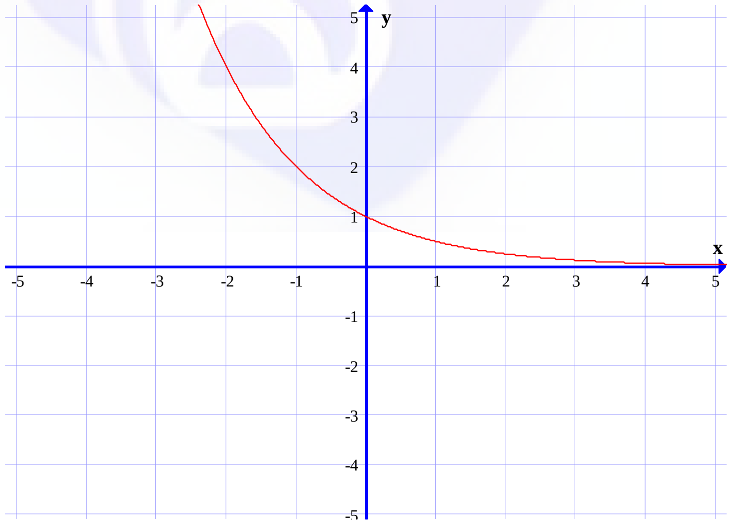
هر تابع نمایی به صورت $y = a^x$ دارای ویژگی های زیر است.

ویژگی اوّل :

اگر $a > ۱$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی (افزایشی) است. یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f افزایش می یابند.



همچنین اگر $۰ < a < ۱$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره نزولی (کاهشی) می باشد. یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f کاهش می یابند.



اگر پایه‌ی تابع نمایی عدد نپرین $(e = ۲/۷۱)$ باشد. تابع ، را تابع نمایی طبیعی می نامند.

ویژگی دوّم : هر تابع نمایی $y = a^x$ محور عرض ها را در نقطه‌ی $(۰,۱)$ قطع می کند.

ویژگی سوّم : دامنه‌ی تابع نمایی $y = a^x$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است.

تمرین برای حل :

۳ : تابع $y = (\sqrt{۳})^x$ محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

۴ : تابع $y = -۲ + (\frac{۱}{۳})^x$ محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند؟

۵: نمودار تابع $y = x^۲$ در چند نقطه نمودار تابع $y = ۲^x$ را قطع می کند؟

۶ : کدام یک از توابع زیر، یک تابع نمایی است؟

الف) $f(x) = x^۳$ ب) $f(x) = (۲x)^x$

ج) $f(x) = (\sqrt{۲})^x$ د) $f(x) = (\sqrt{x})^۳$

۷ : در تابع $f(x) = a^x$

الف : اگر $a > ۱$، با افزایش مقدار x ، مقادیر f .... می یابند.

ب : اگر $۰ < a < ۱$، با افزایش مقدار x ، مقادیر f .... می یابند.

ج : به ازای هر مقدار مثبت و مخالف یک a تابعی .... است.

۸ : محل برخورد نمودار تابع $f(x) = ۳^{۲x+۱}$ با محور عرض ها را به دست آورید.

۹ : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = ۱ + ۲^x$ ب) $f(x) = ۲^{x+۱}$ ج) $f(x) = ۲^{x-۲}$

***

قسمت دوّم : تابع لگاریتمی

هر تابع به صورت $y=\log_a^x$ (به شرط اینکه $a\neq ۱$ و $a>۰$ و $x>۰$) را یک تابع لگاریتمی می نامند.

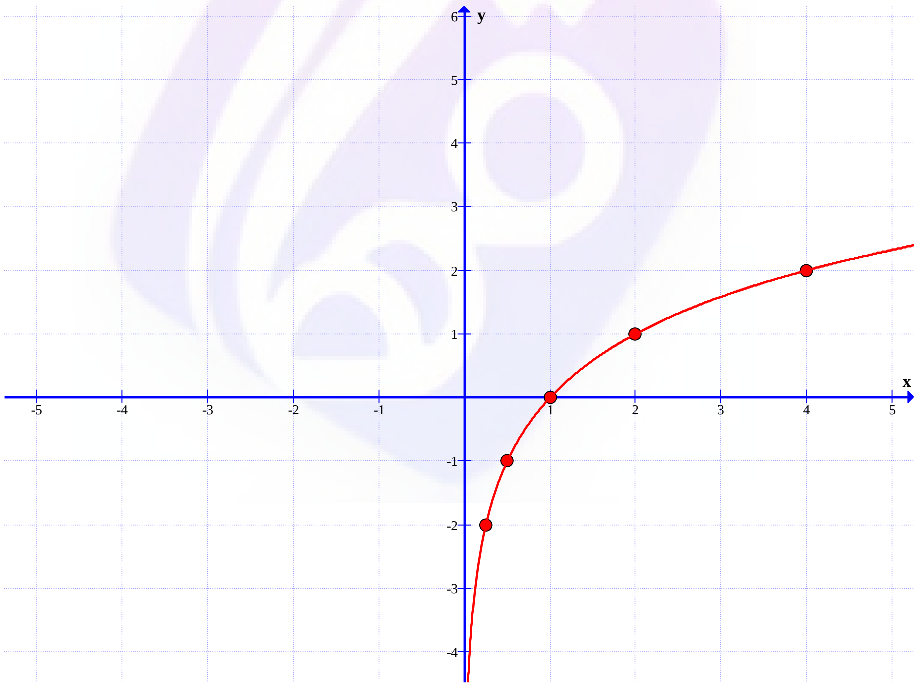
مثال :

$$y=\log_۲^x$$

تمرین ۱۰ : نمودار تابع $f(x)=\log_۲^x$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

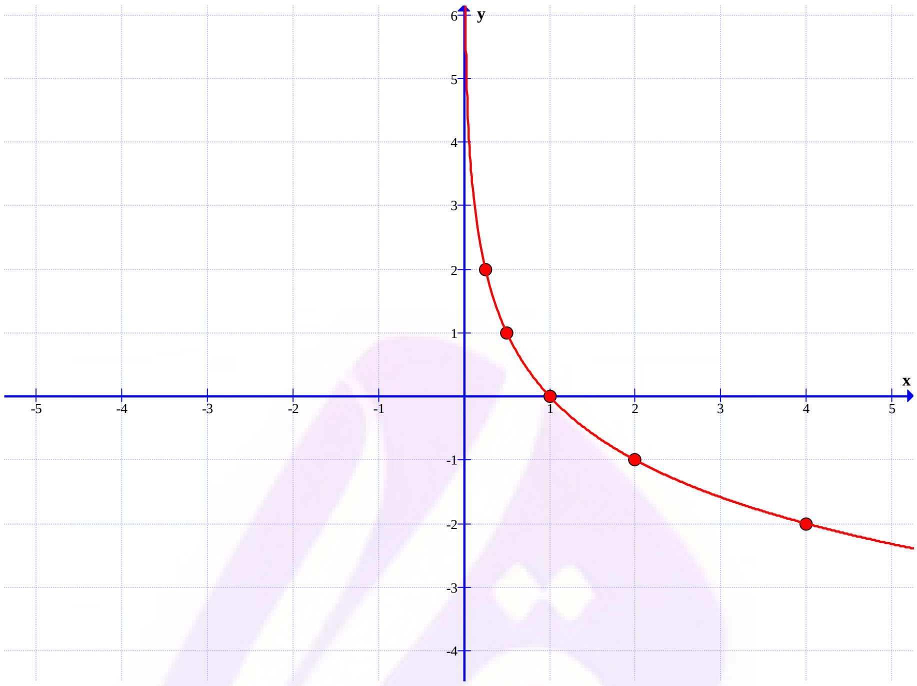
x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
y	-۲	-۱	۰	۱	۲



تمرین ۱۱ : نمودار تابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}^x$ را رسم کنید.

حل : ابتدا چند نقطه‌ی دلخواه از نمودار تابع را مشخص و سپس آنها را روی دستگاه مختصات تعیین می کنیم.

x	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴
y	۲	۱	۰	۱−	۲−

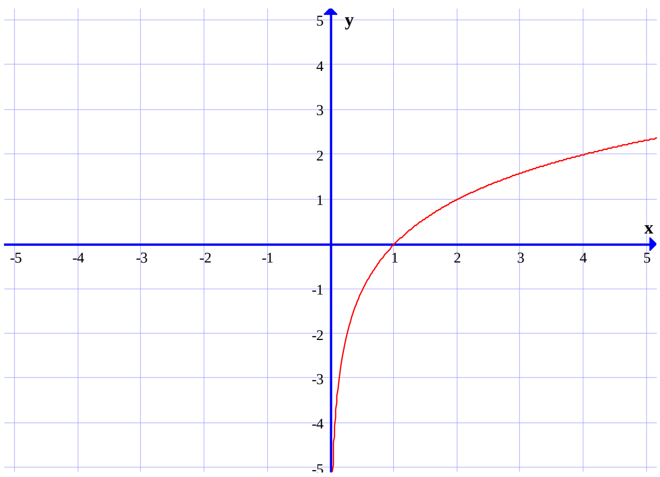


خواص تابع لگاریتمی

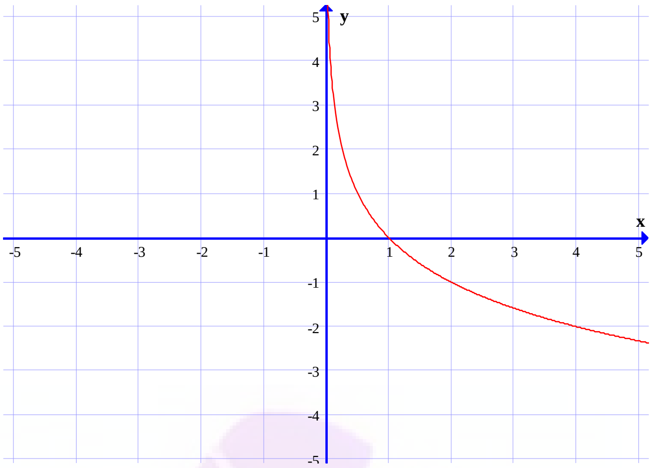
هر تابع لگاریتمی به صورت $y=\log_a^x$ دارای ویژگی های زیر است.

ویژگی اوّل :

اگر $a>۱$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره صعودی (افزایشی) است. یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f افزایش می یابند.



همچنین اگر $۰ < a < ۱$ باشد. تابع دارای نموداری به شکل زیر خواهد بود، که همواره نزولی (کاهشی) می باشد. . یعنی با افزایش مقدار x ، مقادیر f کاهش می یابند.



اگر پایه‌ی تابع لگاریتمی عدد نپرین $(e = ۲/۷۱)$ باشد. تابع ، را تابع لگاریتمی طبیعی می نامند.

ویژگی دوّم : هر تابع لگاریتمی به صورت $y = \log_a^x$ محور طول ها را در نقطه‌ی $(۱,۰)$ قطع می کند.

ویژگی سوّم : دامنه‌ی تابع لگاریتمی به صورت $y = \log_a^x$ مجموعـه‌ی اعـداد حقیقـی مثبـت و بـرد آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

تمرین برای حل:

۱۲ : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $y = (\sqrt{۲})^x$ ب) $y = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^x$

۱۳ : دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_۲^{x+۱}$ را به دست آورید.

۱۴ : نمودار تابع $y = \log_{\sqrt{۲}}^x$ را رسم کنید.

۱۵ : ابتدا دامنه‌ی تابع $y = \log_۲^{x-۱}$ را به دست آورده و سپس نمودار آن را رسم کنید.

۱۶ : درستی یا نادرستی عبارت های زیر را برای تابع لگاریتم به صورت $f(x) = \log_a^x$ تعیین کنید.

الف: تابع لگاریتم محور y ها را قطع می کند.

ب : دامنه‌ی تابع لگاریتمی مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

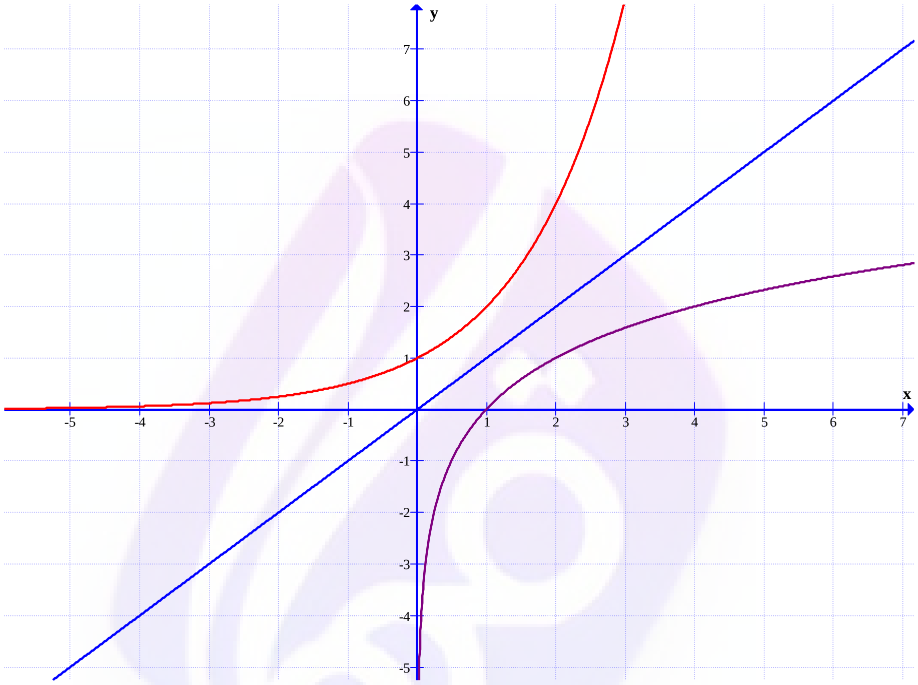
ج : برد تابع لگاریتمی، اعداد حقیقی مثبت است.

توجه : تابع نمایی $y=a^x$ یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد. معکوس آن یک تابع لگاریتمی به صورت زیر است.

$$y=\log_a^x$$

لذا نمودار تابع نمایی $y=a^x$ و معکوس آن یعنی $y=\log_a^x$ نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوّم قرینه اند.

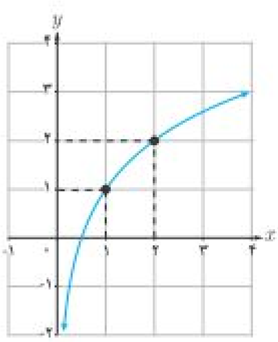
در زیر نمودار تابع $f(x)=۲^x$ و معکوس آن یعنی $g(x)=\log_۲^x$ را مشاهده می کنید.

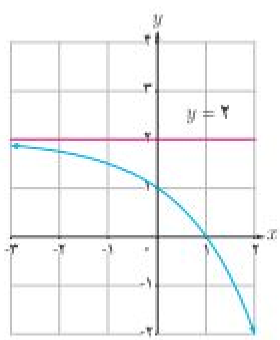


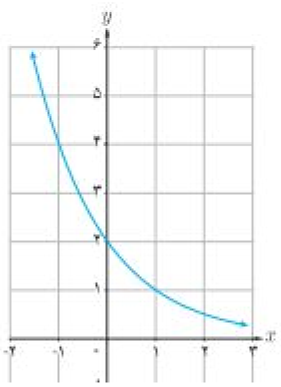
بنابراین اگر نقطه‌ی (b,c) روی تابع $y=a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه نقطه‌ی (c,b) روی نمودار $y=\log_a^x$ قرار دارد.

تمرین ۱۷ : مشخص کنید، هر یک از نمودار های زیر به کدام یک از ضابطه های زیر تعلق دارد؟

الف) $y=-۲^x+۲$ ب) $y=\log_۲(x+۱)$ پ) $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$







تمرین۱۸ : خط $y=۲۷$ نمودار تابع $y=۳^{x}$ را در چه نقطه ای قطع می کند؟

تمرین۱۹ : خط $y=۱۰$ نمودار تابع $y=(۰/۰۱)^{x}$ را در چه نقطه ای قطع می کند؟

تمرین۲۰ : تعیین کنید که خط $y=\sqrt{۷}$، نمودار تابع $y=۲^{x}$ را بین کدام دو عدد صحیح قطع می کند؟

تمرین ۲۱ : درستی یا نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.

الف : دامنه‌ی توابع $y=۲^{x}$ و $y=x^{۲}$ مساوی اند.

ب : محل تقاطع نمودار تابع $y=۶^{x}$ با محور طولها نقطه‌ی $(۶,۰)$ است.

پ : نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲},\sqrt{۵})$ روی نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=۵^{x}$ قرار دارد.

تمرین ۲۲ : اگر $f(x)=۳-۲\log_{۴}^{(\frac{x}{۲}-۵)}$ ، مقدار $f(۴۲)$ را به دست آورید.

تمرین ۲۳ : فرض کنیم که $f(x)=۴^{x}+۲$

الف : مقدار $f(-۱)$ را به دست آورید.

ب : اگر $f(x)=۶۶$ مقدار x چقدر است؟

ج : معکوس این تابع را بنویسید.

***

قسمت سوّم : حل چند مسئله‌ی کاربردی توابع نمایی و لگاریتمی

در این به دو مسئله‌ی کاربردی توابع نمایی و لگاریتمی اشاره می کنیم.

الف : مسائل مربوط به رشد باکتری

هر تابع به صورت $f(x)=ka^x$ (برای مقادیر مثبت و مخالف یک a) رفتار نمایی دارد. این تابع در بسیاری از مسائل اقتصاد و مهندسی کاربرد دارد.

تمرین ۲۴ : یک نوع باکتری در دستگاه گوارش انسان زندگی می کند و تکثیر آن به صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می شود. اندازه‌ی هر توده باکتری از t ساعت از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$p(t)=۱۰۰\times ۲^{۲t} \qquad (۰\le t\le ۱۶)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری ها از بین نروند، تعداد باکتری ها در یک توده، پس از ۳ ساعت را به دست آورید.

حل :

$$p(۳)=۱۰۰\times ۲^{۲(۳)}=۱۰۰\times ۶۴=۶۴۰۰$$

ب : مسائل مربوط به قدرت زلزله

زمانی زلزله به وقوع می پیوندد که انرژی از زمین آزاد شود. بین شدت نسبی زلزله (قدرت آن) بر حسب ریشتر و میزان انرژی آزاد شده از آن بر حسب ارگ (Erg) رابطه‌ی زیر وجود دارد.

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$$

که در آن M قدرت زلزله بر حسب ریشتر و E انرژی آزاد شده بر حسب ارگ می باشد.[۱]

تمرین ۲۵ : مقدار انرژی آزاد شده توسط زلزله ای به قدرت ۶/۶ ریشتر را به دست آورید.

---

[1]. اِرگ یکای انرژی در دستگاه واحدهای سانتیمتر- گرم- ثانیه (cgs) است. اِرگ برابر با کار انجام‌گرفته در بالا بردن جرمی برابر با یک هزارم گرم تا ارتفاع یک سانتیمتر است .

۱ ارگ $=۱۰^{-۷}$ ژول   ۱ ژول $=۱۰^{۷}$ ارگ

حل :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M = ۱۱/۸ + ۱/۵(۶/۶) = ۲۱/۷$$

$$\to E = ۱۰^{۲۱/۷}\ Erg$$

تمرین۲۶ : شدت زلزله‌ی ۱۳۶۹ رودبار ۷/۲ ریشتر گزارش شده است. مقدار تقریبی انرژی آزاد شـده ی آن را بر حسب ارگ پیدا کنید.

حل:

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M = ۱۱/۸ + ۱/۵(۷/۲) = ۲۲/۶$$

$$\to E = ۱۰^{۲۲/۶}\ Erg$$

***

تمرین برای حل :

۲۷ : در دی ماه ۱۳۸۲ در شهرستان بم زلزله ای با قدرت ۶/۳ ریشتر به وقوع پیوست، محاسبه کنید که این زلزله چند ارگ انرژی آزاد کرده است؟

۲۸ : در آبان ماه ۱۳۹۶در شهرستان کرمانشاه زلزله ای با قدرت ۷/۱ ریشتر به وقوع پیوست، محاسـبه کنیـد که این زلزله چند ارگ انرژی آزاد کرده است؟

***

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم « رشته ی علوم تجربی »

فصل ۶ : حد و پیوستگی

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@mathameri

مهر ۱۳۹۶

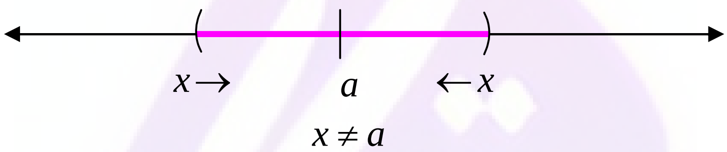
درس اوّل : مفهوم حد و فرآیندهای حدی

مفهوم حد، یکی از مفاهیم اساسی در ریاضیات است. آشنایی با این مفهوم منجر به شناخت دقیق رفتـار تـابع می گردد. به همین جهت است این مفهوم در بسیاری از شاخه های علوم، از جمله فیزیک، ریاضی و اقتـصاد کاربردهای فراوان دارد. با وجود پیچیدگی در تعریف حد در این درس فقط به درک شهودی آن می پـردازیم.

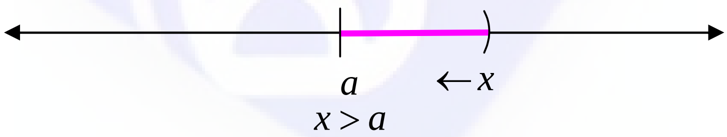
امّا قبل از ورود به بحث، نماد های زیر را معرفی می کنیم.

در ابتدا مفاهیم اوّلیه‌ی زیر را برای درک، مفهوم حد، معرفی کنیم.

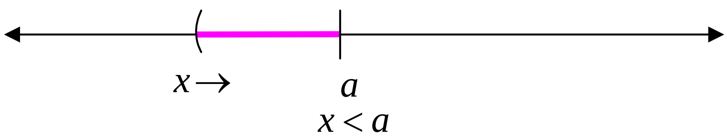
۱) منظور از نماد $x \to a$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a) ، یعنی متغیر x از دو طرف محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اختلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x \neq a$



۲) منظور از نماد $x \to a^+$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a از راست) ، یعنی متغیر x فقط از طرف راست محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اختلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x > a$



۳) منظور از نماد $x \to a^-$ (می خوانند x میل می کند، به سمت a از چپ) ، یعنی متغیر x فقط از طرف چپ محور طول ها به عدد a نزدیک می شود ولی هیچگاه روی آن منطبق نمی شود. بنابراین اختلاف x و a بسیار کوچک است ولی $x < a$

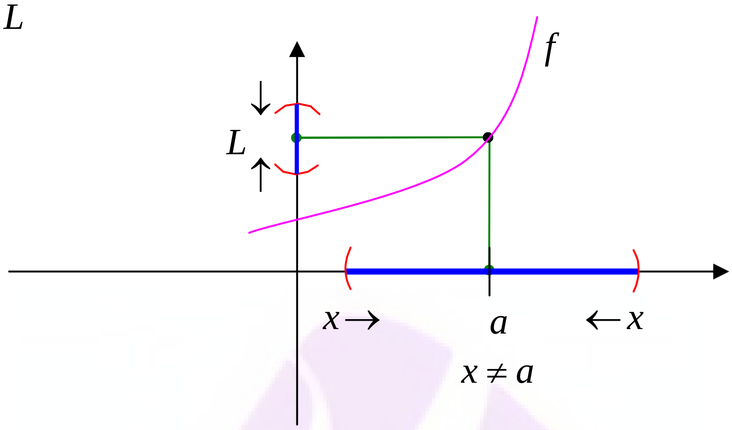


***

قسمت اوّل : مفهوم شهودی حد تابع در یک نقطه

وقتی متغیر x از دو طرف محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد L شود، گویند حد تابع f در $x=a$ برابر L است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$



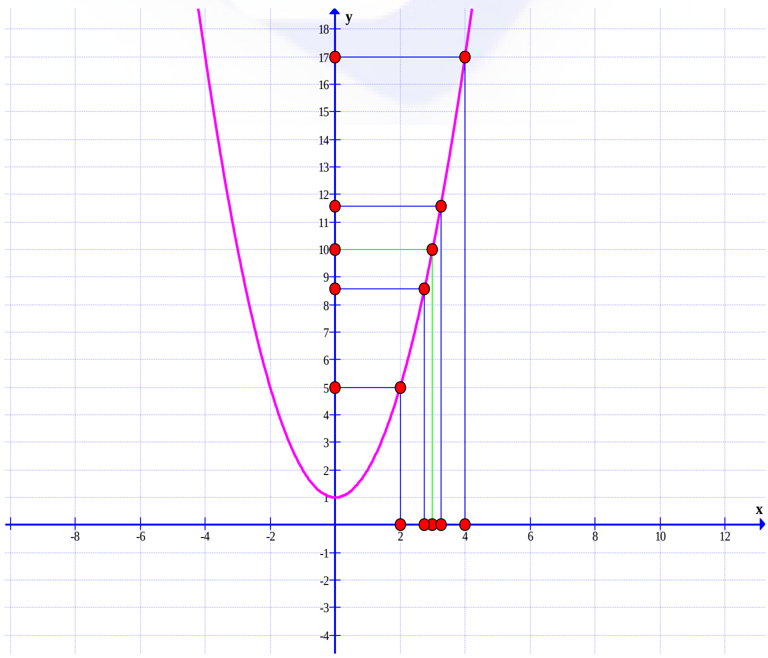
مثال : در تابع $f(x)=x^{۲}+۱$ اگر متغیر x از دو طرف به عدد ۳ نزدیک شود. آنگاه مقادیر تابع بـه عـدد ۱۰ نزدیک می شوند. در این صورت $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۱۰$. به جدول و نمودار زیر توجه کنید.

جدول

x	۲	۲/۵	۲/۷۵	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲۵	۳/۵	۴
$f(x)$	۵	۷/۲۵	۸/۵۶۲۵	۹/۴۱	۹/۹۴۰۱	۱۰	۱۰/۰۶۰۱	۱۰/۶۱	۱۱/۵۶۲۵	۱۳/۲۵	۱۷

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۰$$

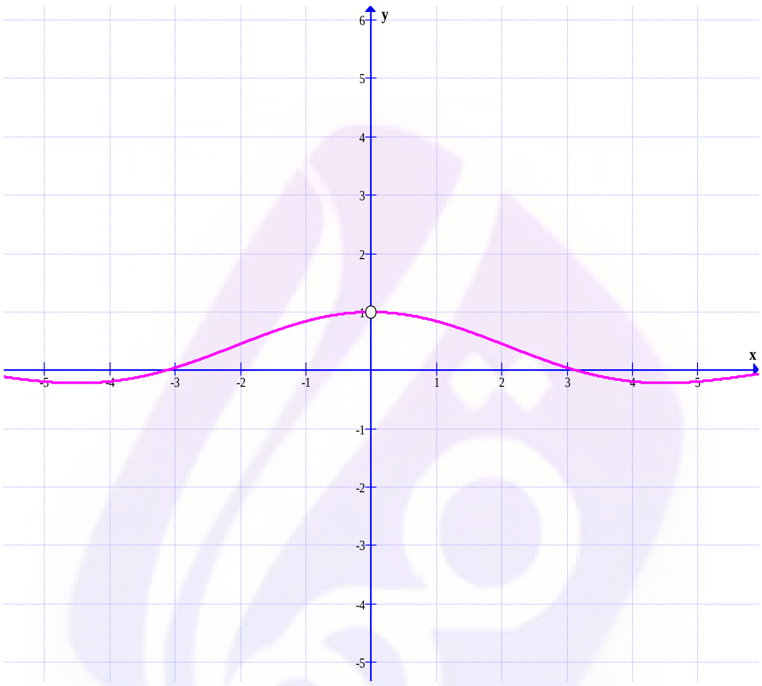
نمودار



تمرین ۱) با تشکیل جدول مقدار حد تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۱$ محاسبه کنید.

تمرین ۲) در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ رسم شده است. با توجه به این شکل حد مقابل را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=$$



نتیجه : حد تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ وقتی که x به سمت صفر میل کند، برابر یک است.

***

قسمت دوّم : محاسبه‌ی حد تابع در یک نقطه

در اکثر مواقع با جایگزینی مقدار به جای x در معادله‌ی تابع ، می توان حد توابع را محاسبه نمود. این روش را روش جایگزینی مستقیم می نامند. برای مثال برای محاسبه‌ی حد تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ وقتی x به سمت ۳ میل می کند. می توان به شکل زیر عمل کرد.

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{۳+۱}=۲$$

تمرین برای حل :

۳ : حد تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ در نقطه‌ی $x=۶$ را بدست آورید.

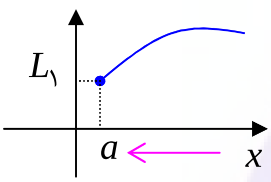
۴ : حد تابع $f(x)=\frac{۴x}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۳$ را بدست آورید.

۵ : حد تابع $f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ در نقطه‌ی $x=۱$ محاسبه کنید.

***

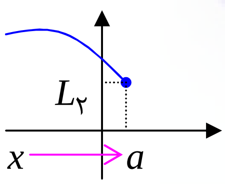
قسمت سوّم : حد های یک طرفه

اگر متغیر x فقط از یک طرف محور طول ها به سمت عدد a میل کند. با مفهوم حد های یک طرفه سروکار داریم.



حد راست : وقتی متغیر x فقط از طرف راست محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد $L_۱$ شود، گویند حد راست تابع f در $x=a$ برابر $L_۱$ است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_۱$$



حد چپ : وقتی متغیر x فقط از طرف چپ محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد $L_۲$ شود، گویند حد چپ تابع f در $x=a$ برابر $L_۲$ است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L_۲$$

مثال : حد راست تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} x+۱=۲+۱=۳$$

مثال : حد چپ تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ به دست آورید.

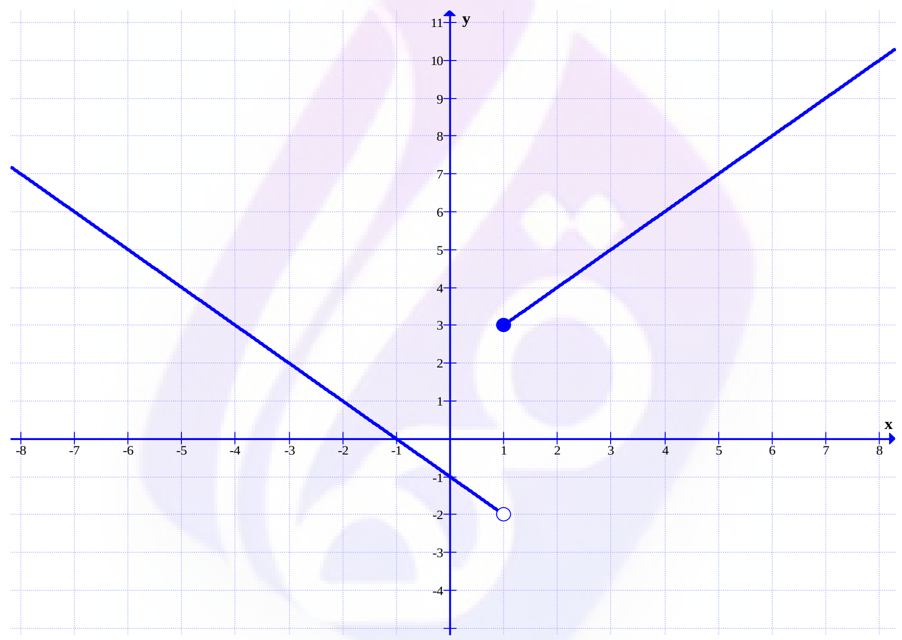
$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} -x=-۲$$

مثال : با توجه به شکل زیر مطلوب است محاسبه‌ی

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ ج) $f(۱)$



حل :

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۳$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=-۲$ ج) $f(۱)=۳$

مثال: حد راست و حد چپ و مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x\geq ۲ \\ x^۲ & x<۲ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^-} (x^۲) = (۲)^۲ = ۴$

مقدار $f(۲) = ۳(۲) - ۱ = ۵$

تمرین برای حل :

۵ : حد راست و حد چپ و مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x = ۱$ بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^۲ + ۳} & x > ۱ \\ ۳x + ۲ & x = ۱ \\ ۲x - ۵ & x < ۱ \end{cases}$$

***

قسمت چهارم : شرط وجود حد یک تابع در یک نقطه

گویند تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ دارای حد است، هرگاه

الف : تابع در دو طرف نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد.

ب : در این نقطه، حد راست و چپ آن عدد های مساوی شوند.

به عبارتی دیگر، اگر تابع f در همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $x = a$ تعریف شده باشد و

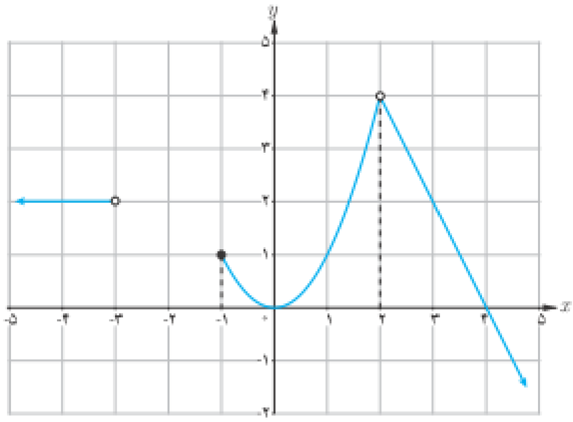
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_۲ \text{ و } \lim_{x\to a^+} f(x) = L_۱$$

در این صورت، اگر $L_۱ = L_۲ = L$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ و برعکس[1]

مثال : در شکل زیر نمودار تابع f به ضابطه‌ی زیر رسم شده است.

$$f(x) = \begin{cases} -۲x + ۸ & x > ۲ \\ x^۲ & -۱ \le x < ۲ \\ ۲ & x < -۳ \end{cases}$$

[1]. بر این اساس، گویند تابع در نقطه‌ی $x = a$ دارای حد نیست، هرگاه یکی از حالت های زیر وجود داشته باشد.
الف : حد راست و چپ عددهای مساوی نباشند. ب : حد راست یا چپ یا هر دو وجود نداشته باشد. یعنی تابع در سمت راست یا چپ تابع تعریف نشده یا اینکه تابع رفتار بی کران داشته باشد. ج: تابع در یک یا دو سمت این نقطه رفتار نوسانی دارد.



با توجه به این شکل می توان نوشت:

۱ : تابع در نقطه‌ی $x=۲$ تعریف نشده است. یعنی $f(۲)$ وجود ندارد.

۲ : حد تابع در نقطه‌ی $x=۲$ برابر ۴ است. یعنی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

۳ : حد راست تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ برابر ۱ است. یعنی $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x)=۱$

۴ : تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ حد چپ ندارد. یعنی $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x)$ وجود ندارد.

۵ : تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ حد ندارد. یعنی $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

۶ : مقدار تابع در نقطه‌ی $x=-۱$ برابر ۱ است. یعنی $f(-۱)=۱$

۷ : چون $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۰$ حد دارد. یعنی

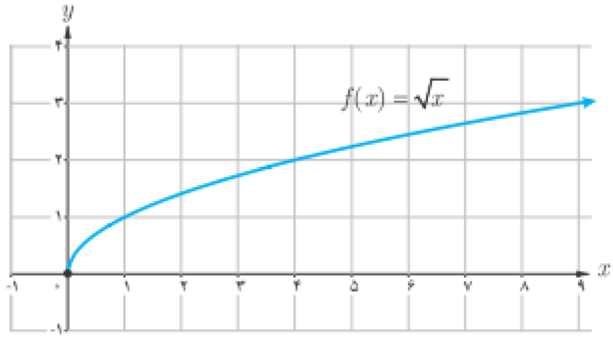
$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ از طرفی $f(۰)=۰$

۸ : چون $\lim\limits_{x\to ۴^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۴^+} f(x)=۰$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۴$ حد دارد. یعنی

$\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$ از طرفی $f(۴)=۰$

۹ : $f(-۳)$ و $\lim\limits_{x\to (-۳)^+} f(x)$ وجود ندارد ولی $\lim\limits_{x\to (-۳)^-} f(x)=۲$

مثال : برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با نمودار زیر می توان نوشت.



الف : $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sqrt{x}=۰$ ب : $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sqrt{x}$ وجود ندارد، زیرا تابع در $x<۰$ تعریف نشده است.

پ : $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x}$ وجود ندارد.

مثال : نشان دهید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۳$ دارای حد است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & x\geq ۳ \\ ۵x & x<۳ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}(x^۲+۲x)=(۳)^۲+۲(۳)=۱۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}(۵x)=۵(۳)=۱۵$

و چون $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۱۵$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۳$ دارای حد است و

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۵$$

مثال : نشان دهید که تابع $f(x)=۳+[x]$ در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد.

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(۳+[x])=۳+[۲^+]=۳+۲=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(۳+[x])=۳+[۲^-]=۳+۱=۴$

و چون $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ پس تابع در نقطه‌ی $x=۲$ دارای حد نیست.

مثال: تابعی مانند f مثال بزنید که در $x=۱$ حد نداشته باشد، اما $|f|$ در $x=۱$ حد داشته باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} ۲ & x\geq ۱ \\ -۲ & x<۱ \end{cases} \rightarrow |f(x)|=\begin{cases} ۲ & x\geq ۱ \\ ۲ & x<۱ \end{cases} \rightarrow |f(x)|=۲$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to ۱}|f(x)|=۲$ در حالی که دو تابع f در نقطه ی $x=۱$ حد ندارد.

مثال : مقدار a را چنان پیدا کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۳$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+x-۱ & x<۳ \\ -۳x+۲ & x\geq ۳ \end{cases}$$

حل : کافی است حد راست و حد چپ این تابع را در نقطه‌ی $x=۳$ محاسبه کرده و برابر هم قرار دهیم.

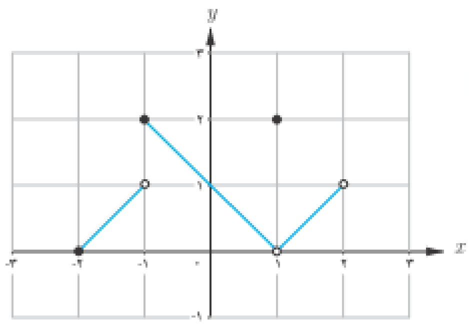
حد راست $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{+}}(-۳x+۲)=-۳(۳)+۲=-۷$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۳^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^{-}}(ax^{۲}+x-۱)=a(۳)^{۲}+(۳)-۱=۹a+۲$

$$\Rightarrow ۹a+۲=-۷\rightarrow ۹a=-۹\rightarrow a=-۱$$

تمرین برای حل :

۶ : برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟



الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$

ب) $f(۱)=۲$

پ) $f(۲)=۱$

ت) $\lim\limits_{x\to (-۲)^{+}} f(x)=۰$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=۲$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۱$

چ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد.　　　ح) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

۷ : نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را رسم کنید. سپس حاصل تساوی های زیر را در صورت وجود را بنویسید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$　　　ج) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$　　　د) $f(۲)$

۸ : نمودار تابع زیر را رسم کنید. سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

$$f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

الف :آیا این تابع در نقطه‌ی صفر حد دارد؟ در صورت مثبت بودن جواب حد آن را بنویسید.

ب : آیا $f(۰)$ موجود است؟ چرا؟

۹ : نمودار تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ را رسم کنید. سپس حد تابع را در نقطه‌ی $x=۰$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱۰ : مثالی از یک تابع همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطه‌ی ۲ برابر ۱- باشد.

۱۱ : تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه‌ی ۳ حد نداشته باشد و $f(۳)=۱$

۱۲ : تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطه‌ی ۲ تعریف نشده باشد ولی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

۱۳ : نمودار تابع $f(x)=|x-۱|$ را رسم کنید. سپس حاصل تساوی های زیر را در صورت وجود را بنویسید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$　　　ج) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$　　　د) $f(۱)$

۱۴ : با محاسبه‌ی حد راست و حد چپ ، وجود حد تابع زیر در نقطه‌ی $x=۰$ را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x\neq ۰ \\ ۵ & x=۰ \end{cases}$$

۱۵ : نمودار تابع زیر را رسم کنید و حد تابع در نقطه‌ی $x=۰$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲ & x>۰ \\ -۲x-۲ & x\leq ۰ \end{cases}$$

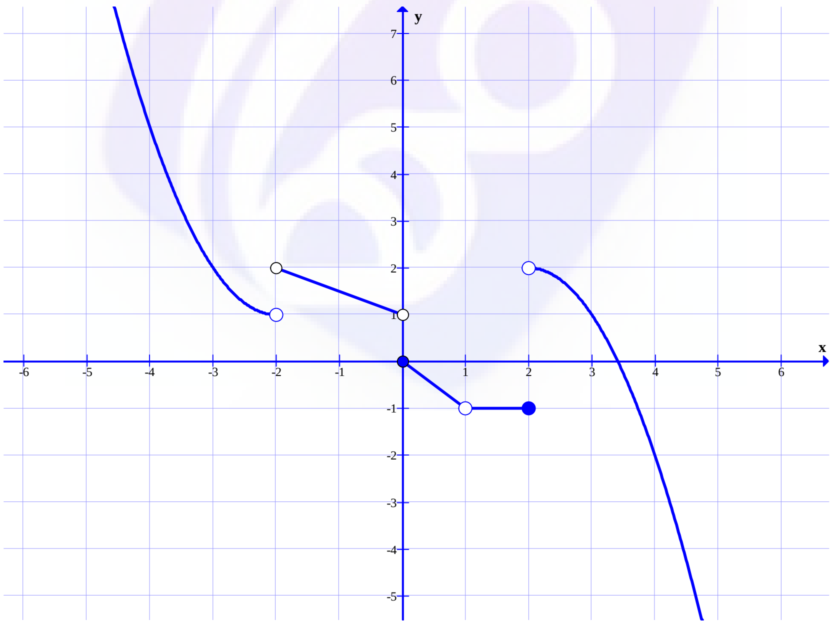
۱۶ : نشان دهید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۲$ حد ندارد.

$$f(x)=\begin{cases} -x+۲ & x>۲ \\ -۲ & x=۲ \\ x-۳ & x<۲ \end{cases}$$

۱۷ : مقدار a را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=-۱$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۳}-۲ & x>-۱ \\ ۲ax^{۲} & x\leq -۱ \end{cases}$$

۱۸ : با توجه به شکل مقابل، تساوی های زیر را کامل کنید.[۲]



---

2 . توجه : منظور از نماد $x\to(-۲)^{+}$ یعنی x از سمت راست بـه ۲- نزدیـک مـی شـود. و منظـور از نمـاد $x\to -۲^{+}$ یعنی x در قسمت قرینه‌ی سمت راست ۲ قرار دارد. واضح است که $-۲^{+}=(-۲)^{-}$

همچنین منظور از نماد $x\to(-۲)^{-}$ یعنی x از سمت چپ به ۲- نزدیک می شود. و منظور از نماد $x\to -۲^{-}$ یعنی x در قسمت قرینه‌ی سمت چپ ۲ قرار دارد. واضح است که $-۲^{-}=(-۲)^{+}$

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) + ۳ \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) - ۲ \lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x) =$

ب) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} f(x) - \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) + ۴ \lim\limits_{x\to ۱} f(x) + \lim\limits_{x\to -۲^-} f(x) =$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) - \lim\limits_{x\to (-۲)^+} f(x) + ۲ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x) =$

د) $\dfrac{\lim\limits_{x\to (-۳)^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) + \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)} =$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

درس دوّم : محاسبه‌ی حد توابع

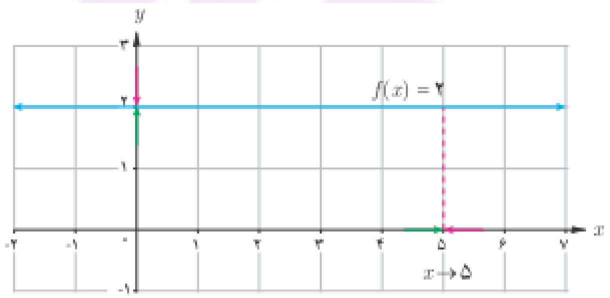
یکی از عواملی که می تواند به مطالعه‌ی دقیق تر یک تابع کمک کند، حد آن تابع (در یک نقطه) است. لذا لازم است قواعد و دستور هایی برای محاسبه‌ی حد وجود داشته باشد. در این درس برخی از این قواعد را به طور شهودی و به همراه ذکر مثال ، معرفی می کنیم.

قسمت اوّل : اعمال روی حد توابع

در این بخش به مطالعه‌ی اعمال روی حد می پردازیم که محاسبه‌ی حدود توابع را ساده تر می کنند.

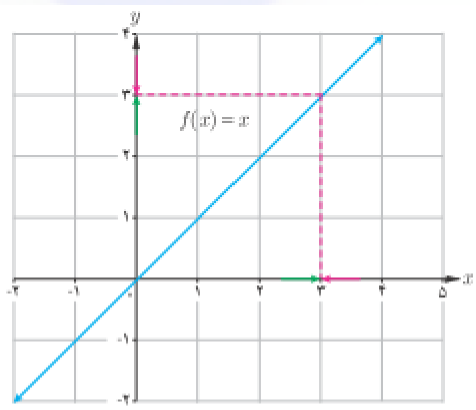
۱ : تابع ثابت $f(x)=c$ در همه‌ی نقاط حد دارد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$

مثال : تابع $f(x)=۲$ در همه‌ی نقاط حد دارد. لذا $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۲$



۲ : تابع همانی $f(x)=x$ در همه‌ی نقاط حد دارد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$

مثال : تابع $f(x)=x$ در همه‌ی نقاط حد دارد. لذا $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۳$



۳ : فرض کنیم که توابع f و g روی دامنه‌ی یکسانی تعریف شده و در a دارای حد باشند. بـه عبـارت دیگر فرض کنیم که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=k$ در این صورت :

الف : حد مجموع دو تابع برابر مجموع حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=l+k$$

ب : حد تفاضل دو تابع برابر تفاضل حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=l-k$$

ج : حد حاصل ضرب دو تابع برابر با حاصل ضرب حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=lk$$

د : حد خارج قسمت دو تابع برابر خارج قسمت حد های آنها است.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{l}{k} \qquad ; \qquad k\neq ۰$$

نتیجه :

۱ : حد حاصل ضرب یک عدد در یک تابع با حاصل ضرب آن عدد در حد تابع برابر است.

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=cl$$

۲ : حد معکوس یک تابع با معکوس حد آن عدد برابر است.

$$\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\frac{۱}{l} \qquad ; \qquad l\neq ۰$$

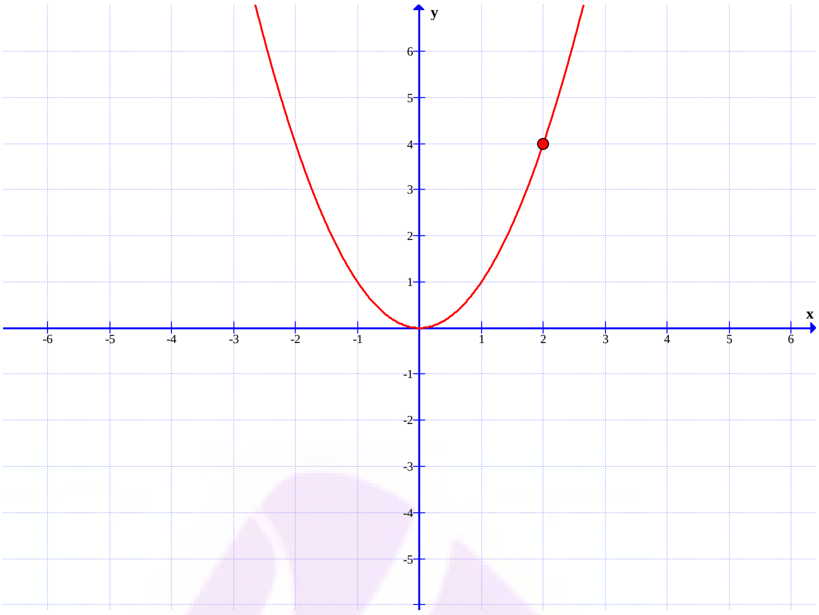
۳ : اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه

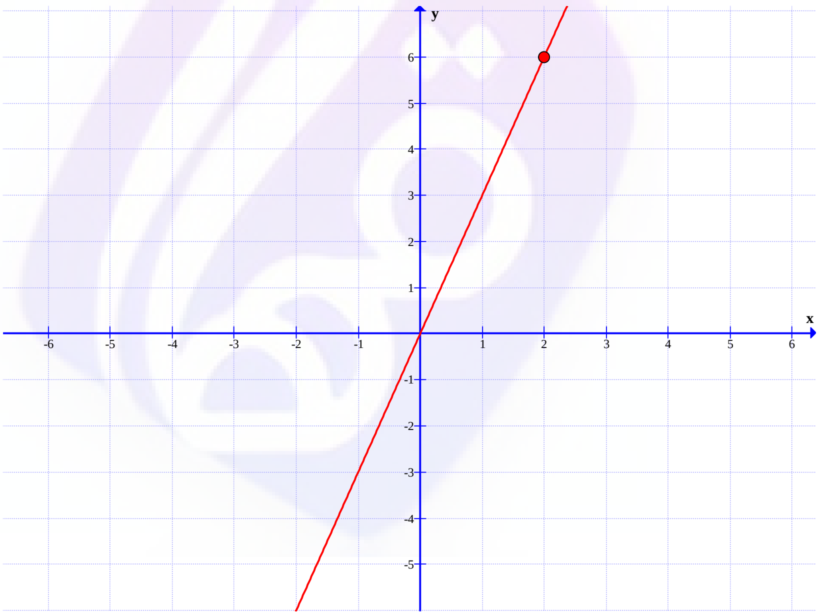
$$\lim_{x\to a} f^n(x)=(\lim_{x\to a} f(x))^n=l^n$$

۴ : اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{l}$$ (در صورتی که n زوج باشد باید $\lim\limits_{x\to a} f(x)\geq ۰$)

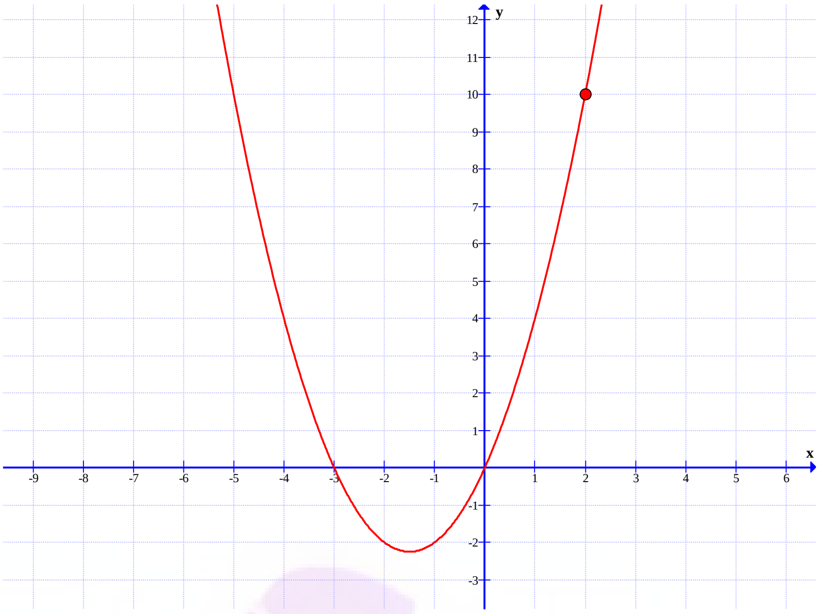
مثال : نمودار توابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=۳x$ را در نظر بگیرید.





واضح است که $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$ و $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۶$

اکنون نمودار تابع $h(x)=x^{۲}+۳x$ را رسم می کنیم.



در این صورت با توجه به این نمودار معلوم است که :

$$\lim_{x\to ۲} h(x)=۱۰$$

با توجه به این مطلب نتیجه می شود که :

$$\lim_{x\to ۲} h(x)=\lim_{x\to ۲} f(x)+\lim_{x\to ۲} g(x)$$

یعنی :

$$\lim_{x\to ۲} x^{۲}+۳x=\lim_{x\to ۲} x^{۲}+\lim_{x\to ۲} ۳x$$

تمرین ۱ : فرض کنید که توابع f و g و h روی دامنه ی یکسان تعریف شده باشند و

$$\lim_{x\to a} h(x)=۰ \quad و \quad \lim_{x\to a} g(x)=۶ \quad و \quad \lim_{x\to a} f(x)=-۲$$

در این صورت حد های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

۱) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=$

۲) $\lim_{x\to a}(f(x))^{۲}=$

۳) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$

۴) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[۳]{g(x) - f(x)} =$

۵) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{۲g(x)}{۶f(x) - ۳h(x)}\right) =$

۶) $\lim\limits_{x \to a} \frac{۱}{f(x)} =$

تمرین ۲ : حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۲} (۳x^{۲} + ۲x - ۷)$

ب) $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{۲x - ۱}{x^{۲} - ۴x + ۱}$

ج) $\lim\limits_{x \to ۵} \sqrt{۲x - ۶}$

ادامه‌ی دستور های اعمال روی توابع

۴ : اگر b یک عدد حقیقی مثبت و $P(x)$ یک چند جمله ای باشد آنگاه :

$$\lim_{x \to a} b^{P(x)} = b^{P(a)}$$

مثال :

$$\lim_{x \to -۱} ۳^{۲x + x^{۲}} = ۳^{۲(-۱) + (-۱)^{۲}} = ۳^{-۱} = \frac{۱}{۳}$$

۵ : اگر x بر حسب رادیان باشد. آنگاه :

الف) $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$

ب) $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$

د) $\lim\limits_{x \to a} \cot x = \cot a \quad (a \neq k\pi\ , k \in Z)$

ج) $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a \quad (a \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in Z)$

مثال :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(۲\sin x-\cos x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(۲\sin x)+\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}(-\cos x)$$

$$=۲\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\sin x-\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\cos x=۲\sin\frac{\pi}{۲}-\cos\frac{\pi}{۲}=۲(۱)-۰=۲$$

تمرین۳ : با استفاده از قضایای حد، حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to۲}\frac{۱}{۲x^۳-۳x+۱}=$

ج) $\lim_{x\to-۱}۲^{۳x^۲+۱}=$

ب) $\lim_{x\to۱}(\sqrt[۵]{x^۴-۲x}+(x^۲+x)^۴)=$

د) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۲\sin x+\cos x}{\cos ۲x-۳x\sin ۲x}=$

تمرین۴ : ثابت کنید که $\lim_{x\to a}f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$

اثبات :

قسمت اوّل:

$$\lim_{x\to a}f(x)=L\to\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=L-\lim_{x\to a}L$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to a}L=L}\lim_{x\to a}(f(x)-L)=L-L\to\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$$

قسمت دوّم :

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰\to\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}L=۰$$

$$\to\lim_{x\to a}f(x)-L=۰\to\lim_{x\to a}f(x)=L$$

تمرین۵ : دو تابع مثال بزنید که هیچ کدام در نقطه‌ی $x=۱$ حد نداشته باشند، ولی مجموع آن ها در ایـن نقطه دارای حد باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases}-x+۱ & x>۱\\ ۲ & x\le ۱\end{cases}\quad و \quad g(x)=\begin{cases}x-۱ & x>۱\\ -۲ & x\le ۱\end{cases}$$

$$\rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases} 0 & x>1 \\ 0 & x\le 1 \end{cases} \rightarrow (f+g)(x)=0$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to 1}(f+g)(x)=0$ در حالی که دو تابع f و g در نقطه ی $x=1$ دارای حد نیستند.

تمرین۶ : دو تابع مثال بزنید که در یک نقطه حد نداشته باشند، ولی تفاضل آن ها در این نقطه دارای حد باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ 2 & x\le 0 \end{cases} \quad و \quad g(x)=\begin{cases} x-1 & x>0 \\ 1 & x\le 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (f-g)(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 1 & x\le 0 \end{cases} \rightarrow (f-g)(x)=1$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to 0}(f-g)(x)=1$ در حالی که دو تابع f و g در نقطه‌ی $x=0$ دارای حد نیستند.

تمرین۷ : دو تابع مثال بزنید که هیچ کدام در $x=0$ حد نداشته باشند، ولی تابع $\frac{f}{g}$ در $x=0$ حد داشته باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \quad و \quad g(x)=\begin{cases} -1 & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (\frac{f}{g})(x)=\begin{cases} -1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \rightarrow (\frac{f}{g})(x)=-1$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{f}{g})(x)=-1$ در حالی که دو تابع f و g در نقطه ی $x=0$ دارای حد نیستند.

تمرین۸ : نشان دهید توابع $f(x)=x+2$ و $g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ در نقطه‌ی ۲ دارای حدی برابر هم هستند.

حل: برا ی $x\neq 2$ داریم :

$$g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2=f(x)$$

لذا

$$\lim_{x\to ۲} g(x)=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

تمرین برای حل :

۸ : حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to -۱}(۳x^{۲}-۴x+۵)$

ب) $\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-۴x+۱}{۳x+۲}$

پ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x)$

ت) $\lim_{x\to ۱}\sqrt{۳x^{۲}+x}$

ث) $\lim_{x\to ۰}(x^{۲}+۳\sin x+۱)$

ح) $\lim_{x\to a}(۳x+x^{۲}-۵)$

۹ : اگر $\lim_{x\to ۲} f(x)=-۱$ و $\lim_{x\to ۲} g(x)=۳$ حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to ۲}(۳f(x)-۵g(x))$

ب) $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)+g(x)}{۵g(x)+۲}$

۱۰ : اگر تابع f در نقطه‌ی $x=۳$ حد داشته باشد و $\lim_{x\to ۳}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵$ آنگاه مقدار $\lim_{x\to ۳} f(x)$ را بیابید.

۱۱ : در هر یک از حالت های زیر درباره‌ی حد تابع $f+g$ چه می توان گفت؟

الف : اگر توابع g و f در a حد نداشته باشند.

ب : اگر تابع f در a حد داشته باشد، ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

ج : هر دو تابع g و f در a حد داشته باشند.

***

قسمت دوّم : تعمیم قوانین اعمال روی حد توابع

تمام قوانینی که درباره‌ی حد مطرح شد، برای حد های یک طرفه (حد راست و چپ) نیز قابل تعمیم است.

مثال :

$$\lim_{x\to ۳^+}(x^۲+[x]+۱)=\lim_{x\to ۳^+}x^۲+\lim_{x\to ۳^+}[x]+\lim_{x\to ۳^+}۱=۹+۳+۱=۱۳$$

توجه : اگر تابع داده شده شامل جزء صحیح باشد، برای محاسبه‌ی حد در یک نقطه، ابتدا باید جزء صحیح را تعیین مقدار کرده و جایگزین کنیم و همچنین اگر تابع داده شده شامل قدر مطلق باشد، ابتدا باید درون قدرمطلق را تعیین علامت کرده و قدر مطلق را حذف کنیم و سپس حد را محاسبه می کنیم.

تمرین ۱۲ : حد توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده ، در صورت وجود بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۱^+}\frac{|x-۱|}{x-۱}$ ۳) $\lim_{x\to ۲^+}[x]+۱$ ۵) $\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x-۱}$

۲) $\lim_{x\to ۱^-}\frac{|x-۱|}{x-۱}$ ۴) $\lim_{x\to ۲^-}[x]+۱$ ۶) $\lim_{x\to ۱^-}\sqrt{x-۱}$

تمرین۱۳: با بررسی حد های یکطرفه، حد توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده در صورت وجود بدست آورید.

۱) $\lim_{x\to ۱}(|x-۱|+۲)$ ۴) $\lim_{x\to ۳}([x]+[-x])$

۲) $\lim_{x\to ۳}\sqrt{x^۲-۶x+۹}$ ۵) $\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|}{x-۲}$

۳) $\lim_{x\to ۲}\sqrt{x-۲}$ ۶) $\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{[x-۲]}$

تمرین برای حل :

۱۴ : مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)=a[x]+[x+۱]$ در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته باشد.

۱۵ : مقدار حد مقابل را در صورت وجود، بدست آورید. $\lim_{x\to ۲^+}\frac{[x]}{x+[x]}$

۱۶ : مقدار حد مقابل را در صورت وجود، بدست آورید. $\lim_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۱}{x-۲}$

***

قسمت سوّم : حدهای مبهم

گاهی در محاسبه‌ی حد توابع کسری با حالت صفر حدی بر روی صفر حدی[1] ($\frac{\cdot}{\cdot}$) برخورد می کنیم. در اصطلاح گفته می شود که حد مبهم است و مقدار آن روش جایگزینی مستقیم به دست نمی آید، بلکه باید قبل از جایگزینی عامل صفر کننده (عامل ابهام) را از صورت و مخرج حذف کنیم. این عمل را رفع ابهام گویند.

برای حذف عامل ابهام لازم است با توجه به نوع تابع یکی از روش های زیر را بکار بگیریم.

الف) اگر صورت و مخرج کسری، چند جمله ای باشند، صورت و مخرج را تجزیه کنید و سپس کسر را ساده کنید[2].

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}=\frac{(۲)^{۲}-۴}{۳(۲)-۶}=\frac{\cdot}{\cdot} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-۴}{۳x-۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{۳(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲}{۳}=\frac{۲+۲}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

مثال: حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^{۲}+۶x+۸}{x^{۲}-۴}$$

حل:

1 . عدد بسیار کوچک مثبت و نزدیک صفر و یا عدد بسیار کوچک منفی و نزدیک صفر ، را صفر حدی می نامند.

2 . در صورتی که تجزیه ی صورت یا مخرج کسر مشکل باشد، می توان از تقسیم صورت یا مخرج بر عامل صفر کننده استفاده نمود.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲+۶x+۸}{x^۲-۴}=\frac{(-۲)^۲+۶(-۲)+۸}{(-۲)^۲-۴}=\frac{۴-۱۲+۸}{۴-۴}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۲+۶x+۸}{x^۲-۴}=\lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)(x+۴)}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x+۴}{x-۲}=\frac{(-۲)+۴}{(-۲)-۲}=\frac{۲}{-۴}=\frac{۱}{-۲}$$

ب) اگر صورت یا مخرج کسری شامل رادیکال با فرجه‌ی ۲ باشند، صورت یا مخرج را گویا کنید. برای گویا کردن، معمولاً صورت یا مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کنید.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۹}\frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۹}\frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}=\frac{۲(۹)-۱۸}{\sqrt{۹}-۳}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to ۹}\frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}=\lim_{x\to ۹}\frac{۲x-۱۸}{\sqrt{x}-۳}\times\frac{\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}+۳}=\lim_{x\to ۹}\frac{۲(x-۹)}{(\sqrt{x})^۲-(۳)^۲}\times(\sqrt{x}+۳)$$

$$=\lim_{x\to ۹}\frac{۲(x-۹)}{x-۹}\times(\sqrt{x}+۳)=\lim_{x\to ۹}۲(\sqrt{x}+۳)=۲(\sqrt{۹}+۳)=۱۲$$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}$$

حل:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}=\frac{\sqrt{(۲)^۲+۵}-۳}{(۲)-۲}=\frac{\sqrt{۹}-۳}{۲-۲}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{x^۲+۵}-۳}{x-۲}\times\frac{\sqrt{x^۲+۵}+۳}{\sqrt{x^۲+۵}+۳}=\lim_{x\to ۲}\frac{(\sqrt{x^۲+۵})^۲-(۳)^۲}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۵-۹}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)(\sqrt{x^۲+۵}+۳)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۲}{\sqrt{x^۲+۵}+۳}=\frac{۲+۲}{\sqrt{(۲)^۲+۵}+۳}=\frac{۴}{۳+۳}=\frac{۲}{۳}$$

ج) اگر صورت یا مخرج شامل عبارت مثلثاتی باشد، از روابط مثلثاتی استفاده کنید.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x}=\frac{۱-\cos(۰)}{۰}=\frac{۰}{۰}\quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x^۲}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{x^۲}\times\frac{۱}{۱+\cos x}$$

$$\text{در}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{x^۲}\times\frac{۱}{۱+\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{x^۲}\times\frac{۱}{۱+\cos x}=۱\times\frac{۱}{۱+\cos(۰)}=\frac{۱}{۲}$$

توجه : ابتدای این فصل داشتیم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

از این تساوی می توان نتایج زیر را نیز به دست آورد.

$$\lim_{u\to ۰}\frac{\sin u}{u}=۱ \quad \text{و} \quad \lim_{u\to ۰}\frac{u}{\sin u}=۱$$

$$\lim_{u\to ۰}\frac{\tan u}{u}=۱ \quad \text{و} \quad \lim_{u\to ۰}\frac{u}{\tan u}=۱$$

از این نتایج برای محاسبه‌ی حد بسیاری از توابع مثلثاتی می توان استفاده کرد.

مثال : حد های زیر را حساب کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x}{۵x} \qquad ۴)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۳}x}{x^{۲}\tan x}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۷x} \qquad ۵)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{\sin x} \qquad ۶)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin x}{x}$$

حل :

$$۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۵x}{۵x}=۱$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۷x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۳x}\times\frac{۳}{۷}=۱\times\frac{۳}{۷}=\frac{۳}{۷}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}\times\frac{x}{\sin x}=۱\times ۱=۱$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۳}x}{x^{۲}\tan x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۲}x}{x^{۲}}\times\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^{۲}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x}{\tan x}=۱$$

$$۵)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{mx}\times\frac{m}{n}=۱\times\frac{m}{n}=\frac{m}{n}$$

$$۶)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin x}{x}=\lim_{x\to ۰}(\frac{۳x}{x}+\frac{\sin x}{x})=۳+۱=۴$$

نتیجه : $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{nx}=\frac{m}{n}$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin ۴x}{۳x}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳x+\sin ۴x}{۳x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳x}{۳x}+\frac{\sin ۴x}{۳x}=۱+\frac{۴}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

توجه : گاهی لازم می شود قبل از اقدام به رفع ابهام، متغیر را تغییر دهیم و متغیر جدیدی را تعریف کنیم.

توجه داشته باشید که متغیر جدید ممکن است به عددی دیگری میل کند و باید در محاسبه اعمال شود.

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\sqrt{x}=t}\lim_{x\to 1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}=\lim_{t\to 1}\frac{2t^2-3t+1}{t^2-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(2t-1)}{(t-1)(t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{2t-1}{t+1}=\frac{1}{2}$$

مثال : حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{3x+6}$$

حل : کافی است قرار دهیم $x+2=t$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{3x+6}=\lim_{x+2\to 0}\frac{\sin(x+2)}{3(x+2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{3}=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

تمرین برای حل :

۱۷ : حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$

ج) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2-\sqrt{x+3}}$

ب) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$

د) $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+2\tan x}{5x}$

۱۸ : حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+7x+12}{x^3+4x^2+4x+3}$$

۱۹ : حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}$

ت) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sqrt{x+۲}-x}{۳-\sqrt{x+۷}}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^{۳}+۸}{x+۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{\sqrt{۱+\tan x}-\sqrt{۱-\tan x}}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^{۳}}$

۲۰ : مقدار a را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{۲}-a^{۲}}{x-a}=۸$ باشد.

۲۱ : حدهای زیر را حساب کنید.

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲\sin\frac{x}{۲}-۳\tan\frac{۱}{۳}x}{x}$

الف) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{\tan(x+۱)\times\sin^{۲}(x+۱)}{۵(x+۱)^{۳}}$

***

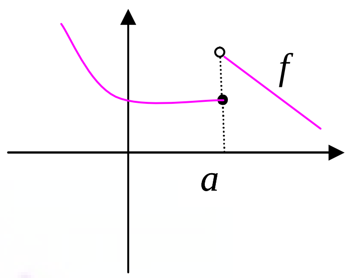
تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

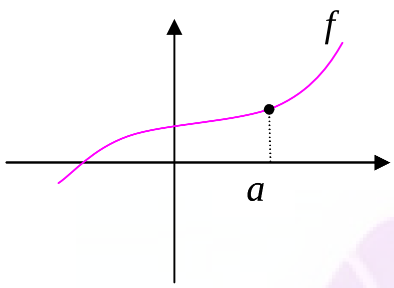
کانال تلگرام : @mathameri

درس سوّم : پیوستگی توابع

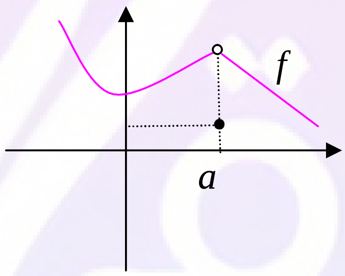
بررسی پیوستگی یک تابع در یک نقطه می تواند در شناخت رفتار یک تابع کمک نماید. از نظر هندسی تابعی را در یک نقطه، پیوسته گویند، هرگاه نمودار آن تابع در این نقطه بریدگی یا پرش نداشته باشد. به نمودار های زیر توجه کنید.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته نیست.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته نیست.

***

قسمت اوّل : تعریف ریاضی پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع $y=f(x)$ را در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته گویند، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

الف) تابع در نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. یعنی $f(a)$ وجود داشته باشد.

ب) تابع در نقطه‌ی $x=a$ حد داشته باشد. یعنی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

ج) حد تابع در این نقطه با مقدار آن برابر باشد. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

به عبارتی دیگر تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است، هرگاه

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

اگر یکی از شرط های فوق برقرار نباشد، گویند تابع در $x=a$ پیوسته نیست.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^۲+۳} & x>۱\\ ۵ & x=۱\\ ۲x-۵ & x<۱\end{cases}$$

حل : کافی است، شرایط پیوستگی را بررسی کنیم.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\sqrt{x^۲+۳}=\sqrt{(۱)^۲+۳}=۲$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(۲x-۵)=۲(۱)-۵=-۳$

مقدار $f(۱)=۵$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته نیست.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x\le ۲\\ ۳x-۱ & x>۲\end{cases}$$

حل : کافی است، شرایط پیوستگی را بررسی کنیم.

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(x^۲+۱)=(۲)^۲+۱=۵$

مقدار $f(۲)=(۲)^۲+۱=۵$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=۲$ پیوسته است.

مثال: تابع زیر در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است. مقدار a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}۲ax^۲+۵ & x\ge ۱\\ ۶x-۳ & x<۱\end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2ax^2+5x)=2a(1)^2+5(1)=2a+5$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(6x-3)=6(1)-3=3$

مقدار $f(1)=2a(1)^2+5(1)=2a+5$

و چون تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است، پس :

$$2a+5=3\to 2a=3-5\to 2a=-2\to a=-1$$

تمرین برای حل :

۱ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=2$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & x<2\\ x+5 & x=2\\ 9-x & x>2\end{cases}$$

۲ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=5$ بررسی کنید.

$$f(x)=1+2[x]$$

۳ : پیوستگی تابع علامت را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.

۴ : نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته باشد ولی در نقطه‌ی $x=-1$ پیوسته نباشد.

۵ : مقادیر a و b را طوری پیدا کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=-2$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}2ax+b & x<-2\\ 5 & x=-2\\ 2bx-3 & x>-2\end{cases}$$

***

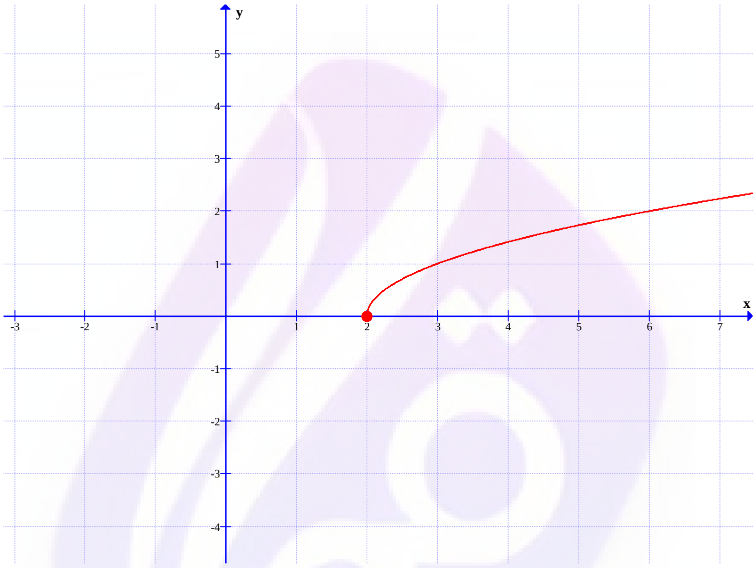
قسمت دوّم : پیوستگی های یک طرفه

گویند تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوستگی راست دارد، هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

همچنین گویند تابع f در نقطه‌ی $x=a$ پیوستگی راست دارد، هرگاه $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

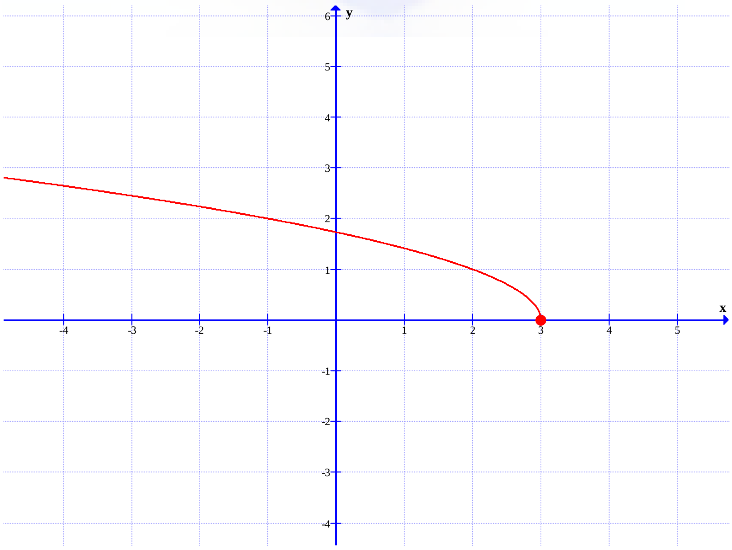
مثال : تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ در نقطه‌ی $x=۲$ پیوستگی راست دارد. زیرا :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)=۰$$



مثال : تابع $f(x)=\sqrt{۳-x}$ در نقطه‌ی $x=۳$ پیوستگی چپ دارد. زیرا:

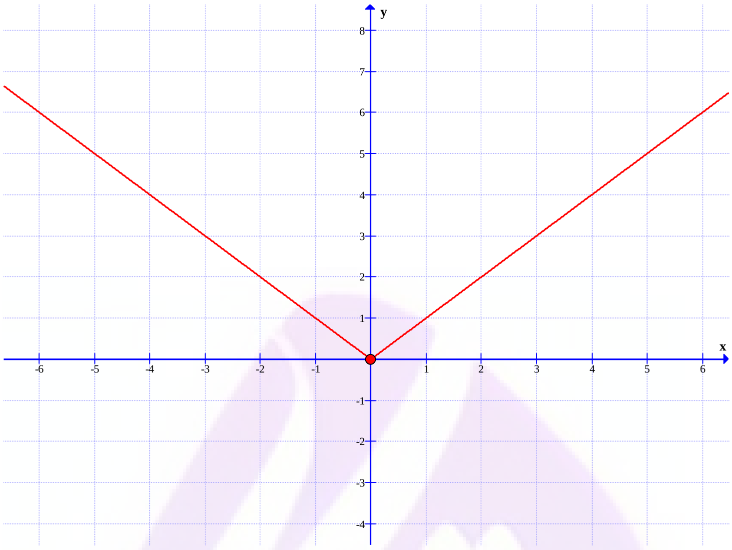
$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=f(۳)=۰$$



مثال : تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی $x=\cdot$ هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ دارد.

زیرا :

$$\lim_{x\to\cdot^-} f(x)=f(\cdot)=\cdot \quad \text{و} \quad \lim_{x\to\cdot^+} f(x)=f(\cdot)=\cdot$$

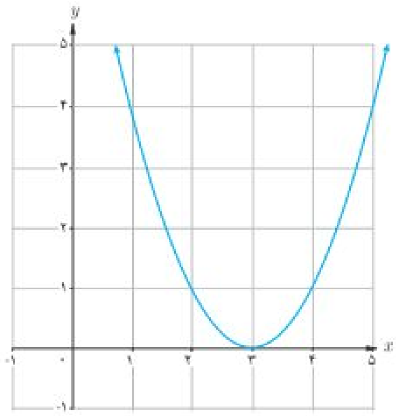


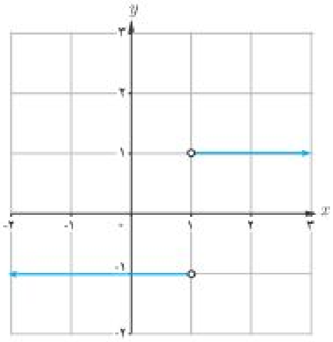
تمرین ۶ : پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

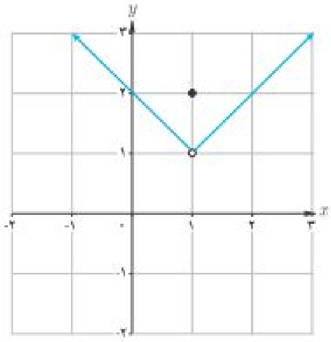
الف) $f(x)=(x-۳)^۲$

ب) $g(x)=\frac{|x-۱|}{x-۱}$

پ) $h(x)=\begin{cases} x & x>۱ \\ ۲ & x=۱ \\ -x+۲ & x<۱ \end{cases}$





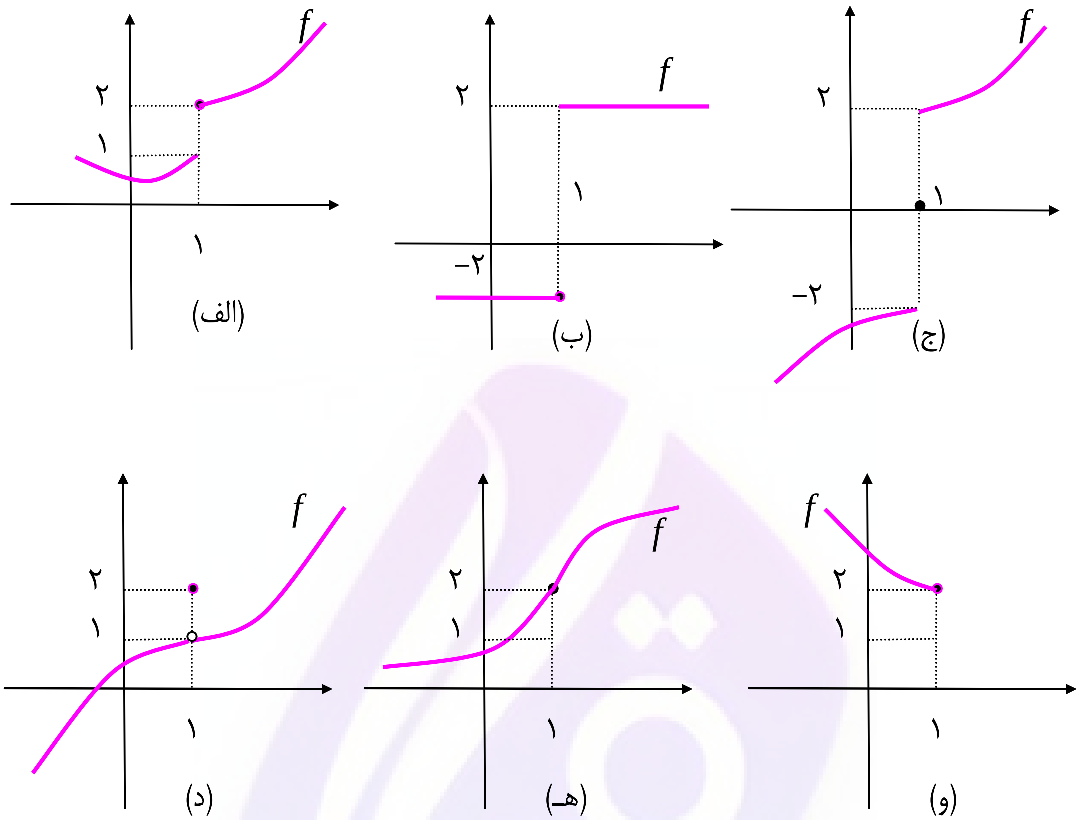


تمرین ۷ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -x+۳ & x<۱ \\ ۲x & x\geq ۱ \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۸ : در هر مورد پیوستگی تابع داده شده را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.



۹ : مقدار k را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۴$ پیوستگی راست داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} x-k & x>۴ \\ ۵+۳x^{۲} & x=۴ \\ -x+۱ & x<۴ \end{cases}$$

۱۰ : پیوستگی تابع $x=۱$ را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -۲x+۵ & x\leq ۱ \\ x^{۲}+۲ & x>۱ \end{cases}$$

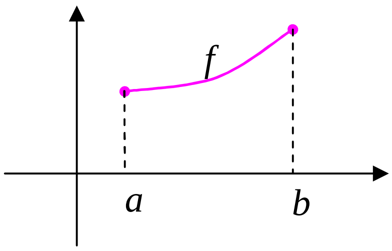
۱۱ : تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه‌ی $x=۱$ برابر ۱− باشد، ولی در این نقطه پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

***

قسمت سوّم : پیوستگی در یک فاصله

پیوستگی در یک فاصله را به یکی از حالت های زیرتعریف می کنیم.

تعریف۱: تابع $y = f(x)$ را در فاصله ای مانند $[a,b]$ پیوسته گویند، هرگاه



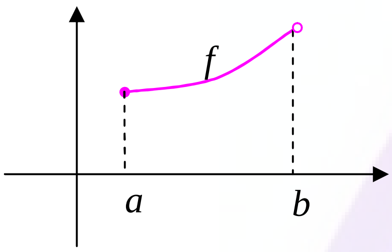
الف) در تمام نقاط فاصله‌ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه‌ی $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.

ج) در نقطه‌ی $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

***

تعریف۲: تابع $y = f(x)$ را در فاصله ای مانند $[a,b)$ پیوسته گویند، هرگاه

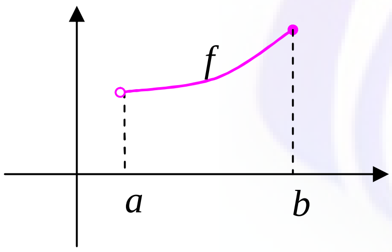


الف) در تمام نقاط فاصله‌ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه‌ی $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.

***

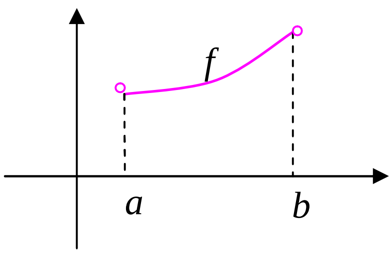
تعریف۳: تابع $y = f(x)$ را در فاصله ای مانند $(a,b]$ پیوسته گویند، هرگاه



الف) در تمام نقاط فاصله‌ی (a,b) پیوسته باشد.

ب) در نقطه‌ی $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

***



تعریف۴ : تابع $y = f(x)$ را در فاصله ای مانند (a,b) پیوسته گویند، هرگاه در تمام نقاط این فاصله پیوسته باشد.

***

مثال : پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله‌ی $[۱,۲)$ بررسی کنید.

حل: ابتدا ثابت می کنیم که تابع درنقطه‌ی $x=۱$ پیوستگی راست دارد.

مقدار $f(۱)=[۱]=۱$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=[۱^+]=۱$

تابع در $x=۱$ پیوستگی راست دارد.

حال نشان می دهیم که تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است. گیریم که $a\in(۱,۲)$ پس $[a]=۱$

مقدار تابع $f(a)=[a]=۱$

حد راست $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=[a^+]=۱$

حد چپ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=[a^-]=۱$

تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است.

***

مثال : پیوستگی تابع $f(x)=۲x+\sqrt{۲-x}$ را در فاصله‌ی $(۱,۲]$ بررسی کنید.

حل: ابتدا ثابت می کنیم که تابع درنقطه‌ی $x=۲$ پیوستگی چپ دارد.

مقدار $f(۲)=۲(۲)+\sqrt{۲-۲}=۴$

حد راست $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲(۲)+\sqrt{۲-۲}=۴$

تابع در $x=۲$ پیوستگی چپ دارد.

حال نشان می دهیم که تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است.گیریم که $a\in(۱,۲)$

مقدار تابع $f(a)=۲a+\sqrt{۲-a}=۲a+۱$

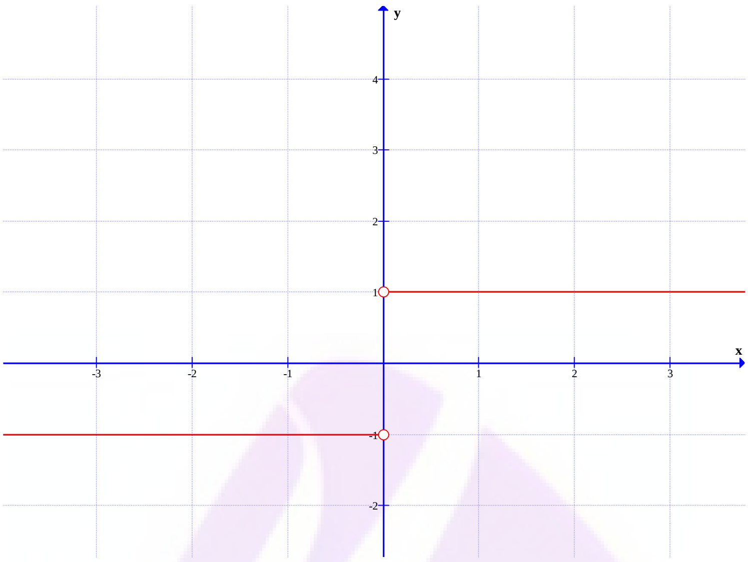
حد راست $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=۲a+\sqrt{۲-a}$

حد چپ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=۲a+\sqrt{۲-a}$

تابع در تمام نقاط فاصله‌ی $(۱,۲)$ پیوسته است.

مثال : دو بازه‌ی بسته مثال بزنید که تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

حل : تابع f در بازه‌ی $[۱,۲]$ پیوسته است ولی در بازه‌ی $[-۱,۱]$ ناپیوسته است.



تمرین۱۲ : تابع زیر را در نظر بگیرید. سپس درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف) $\lim\limits_{x\to ۵^+} f(x)=۰$ ب) $\lim\limits_{x\to ۵^-} f(x)=۰$ پ) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۰$

ت) تابع f روی بازه‌ی $(-\infty,-۱]$ پیوسته است. ث) تابع f روی بازه‌ی $(-\infty,-۱)$ پیوسته است.

ج) تابع f روی بازه‌ی $[۲,۵]$ پیوسته است. ح) تابع f روی بازه‌ی $(-۲,۰)$ پیوسته است.

***

توجه : فاصله ای که یک تابع در تمام نقاط آن پیوسته باشد را فاصله‌ی پیوستگی می نامند. برای تعیین فاصله‌ی پیوستگی یک تابع ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می کنیم و سپس پیوستگی تابع را در تمام نقاط مرزی و یا شکستگی بررسی کرده و در صورت ناپیوسته بودن در آن نقاط آنها را از دامنه حذف می کنیم.

منظور از نقاط مرزی نقاط ابتدا و انتهای دامنه (به شرط اینکه بصورت بسته باشند.) و منظور از نقاط شکستگی نقاطی که در آنها ضابطه‌ی تابع عوض می شود.

مثال : ابتدا دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورده و سپس فاصله‌ی پیوستگی آن را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

حل: واضح است که $D_f=\{x\,|\,x\geq ۱\}\bigcup\{x\,|\,x<۱\}=R$

حال پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱-۱=۰$$

$$f(۱)=۱+۲=۳$$

لذا تابع در این نقطه پیوسته نمی باشد و در نتیجه فاصله‌ی پیوستگی آن به صورت زیر است.

$$R-\{۱\}=(-\infty,۱)\bigcup(۱,+\infty)$$

مثال : فاصله‌ی پیوستگی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ \dfrac{۱}{x}-۳ & x<۱ \end{cases}$$

حل: واضح است که $D_f=R-\{۰\}$

حال پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی می کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱+۲=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۱-۳=-۲$$

$$f(۱)=۱+۲=۳$$

لذا تابع در این نقطه پیوسته نمی باشد و در نتیجه فاصله‌ی پیوستگی آن به صورت زیر است.

$$R-\{۱,۰\}=(-\infty,۰)\bigcup(۰,۱)\bigcup(۱,+\infty)$$

تمرین ۱۲: فاصله‌ی پیوستگی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۲ & x\geq ۱ \\ ۴x-۱ & x<۱ \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۱۳: ثابت کنید که تابع زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}|x-۱| & x<۱\\ x-[x] & ۱\le x<۲\\ -x+۳ & x\ge ۲\end{cases}$$

۱۴: مقدار b و a را طوری بیابید که تابع زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۱-x} & x<۱\\ ax+b & ۱\le x<۳\\ x^{۲} & x\ge ۳\end{cases}$$

***

قسمت چهارم : توابع پیوسته

تابع f را تابع پیوسته گویند، هرگاه در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته[1] باشد. در این صورت

الف : هر تابع چند جمله ای در تمام نقاط پیوسته است.

ب : تابع ثابت و تابع همانی در تمام نقاط پیوسته هستند.

ج : تابع کسری وقتی همواره پیوسته است، هرگاه مخرج آن ریشه نداشته باشد.

د : هر تابع رادیکالی با فرجه ی زوج (تابع اصم) به ازاء همه ی مقادیر حقیقی که زیر رادیکال را نامنفی کنند، پیوسته است.

و : توابع مثلثاتی $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ تمام نقاط پیوسته است.

مثال : نقاطی را تعیین کنید که تابع زیر در آن نقاط پیوسته نباشد.

$$f(x)=\frac{۳x-۵}{x^{۲}-۴x}$$

حل : کافی است ریشه های مخرج تابع را تعیین کنیم.

$$x^{۲}-۴x=۰\rightarrow x(x-۴)=۰\rightarrow x=۰\ ,\ x=۴$$

[1]. به عبارتی دیگر نمودار تابع در تمام نقاط پرش یا بریدگی نداشته باشد.

تمرین برای حل :

۱۵: نقاطی را تعیین کنید که تابع زیر در آن نقاط پیوسته نباشد.

الف) $f(x)=\frac{۳x-۱}{x^{۲}-۴}$ ب) $f(x)=\frac{۵}{x^{۳}-۴x}$

۱۶ : ثابت کنید که تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x^{۲}+۵}$ همواره پیوسته است.

۱۷ : فاصله‌ی پیوستگی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{۳-x}}$$

۱۸ : نقاط ناپیوستگی تابع زیر را در فاصله‌ی $[۱,۶]$ تعیین کنید.

$$f(x)=[x]+\sqrt{x-۲}$$

۱۹ : نقاط ناپیوستگی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+۱}}{x^{۲}+۳x}$$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

ریاضی ۲

پایه ی یازدهم « رشته ی علوم تجربی »

فصل ۷ : آمار و احتمال

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

@mathameri

مهر ۱۳۹۶

درس اوّل : احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

قبل از ورود به مفهوم احتمال شرطی ، مفاهیم مقدماتی مربوط به احتمال را یادآوری می کنیم.

قسمت اوّل : یادآوری مفاهیم احتمال

مفاهیم مربوط به احتمال که در پایه های قبل با آنها آشنا شده اید به شرح زیر می باشند.

۱ : پدیده‌ی تصادفی

هر پدیده یا آزمایش که نتیجه‌ی آن را نتوان قبل از انجام به طور قطعی پیش بینی کرد را پدیده‌ی تصادفی می نامند.

۲ : فضای نمونه ای

مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای می نامند و آن را با S نمایش می دهند.

۳ : برآمد

هر یک از اعضای فضای نمونه ای را برآمد می گویند.

۴ : پیشامد تصادفی

هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای را پیشامد تصادفی نامیده می شود و آنرا نیز با یک حرف بزرگ لاتین مانند E نمایش می دهند.

۵ : اعمال روی پیشامدها

الف : اجتماع دو پیشامد A و B که با نماد $A \bigcup B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهد.

ب : اشتراک دو پیشامد A و B که با نماد $A \bigcap B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن هر دو پیشامد A و B رخ دهد.

ج : تفاضل پیشامد B از پیشامد A که با نماد $A - B$ نوشته می شود، پیشامدی است که با رخ دادن A و رخ ندادن B رخ دهد.

د : اگر S فضای نمونه‌ای و E یک پیشامد تصادفی از آن باشد، پیشامدی را که متناظر با رخ ندادن E می باشد، مکمل E می نامند و آن را با E' یا E^C نمایش می دهند. بدیهی است که $E' = S - E$

۶ : پیشامدهای ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه هر دو با هم رخ ندهند. به عبارت دیگر اشتراک آنها تهی است.

$$A \cap B = \Phi$$

۷ : احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی

اگر E یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد. در این صورت ، خارج قسمت تعداد اعضای پیشامد تصادفی E بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای نظیر آن یعنی S را احتمال وقوع پیشامد تصادفی E می نامند.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد حالت های ممکن}}$$

مثال ۱ : در پرتاب یک تاس ، احتمال آن را حساب کنید که مضرب ۳ بیاید.

حل :

فضای نمونه ای $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \quad \to n(S) = ۶$

پیشامد تصادفی $E = \{۳,۶\} \quad \to n(E) = ۲$

احتمال آمدن مضرب ۳ $\quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

مثال۲: از بین اعداد طبیعی از ۱۰ تا ۱۰۰ به تصادف یک عدد انتخاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که عدد انتخاب شده مضرب ۸ باشد.

حل :

$$S = \{۱۰,۱۱,۱۲,...,۱۰۰\} \to n(S) = b - a + ۱ = ۱۰۰ - ۱۰ + ۱ = ۹۱$$

$$E = \{۱۶,۲۴,...,۹۶\} \to n(E) = \frac{b-a}{k} + ۱ = \frac{۹۶ - ۱۶}{۸} + ۱ = ۱۱$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{۱۱}{۹۱}$$

مثال۳ : تاسی را پرتاب می کنیم. اگر A پیشامد رخ دادن عدد بزرگتر از ۵ و B پیشامد رخ دادن عدد کمتر از ۳ باشد. نشان دهید که این دو پیشامد ناسازگارند.

حل :

فضای نمونه ای $\quad S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\rightarrow n(S)=۶$

عدد بزرگتر از ۵ $\quad A=\{۶\}$ $\qquad$ عدد کمتر از ۳ $\quad B=\{۱,۲\}$

و چون $A\bigcap B=\{\}$ این دو پیشامد ناسازگارند.

۸ : اصول احتمال

برای هر پیشامد مانند E از فضای نمونه ای S، احتمال وقوع E، عددی حقیقی از بازه‌ی $[۰,۱]$ مـی باشـد و آن را با $P(E)$ نمایش می دهند. اصول احتمال عبارتند از :

اصل ۱ : $P(S)=۱$

اصل ۲ : برای هر دو پیشامد B و A که $A\bigcap B=\Phi$ داریم، $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$

اصل ۳ : برای هر دو پیشامد B و A که $A=B$ داریم، $P(A)=P(B)$

نتیجه :

الف : برای هر پیشامد مانند E از فضای نمونه ای S، ثابت کنید که $P(E')=۱-P(E)$

ب : $P(\Phi)=۰$

۹ : روابط اساسی احتمال

برای هر دو پیشامد A و B از فضای نمونه ای S می توان روابط زیر را نوشت:

الف) $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$

ب) $P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)$

مثال : اعداد طبیعی از ۱۱ تا ۱۰۰ را روی صد کارت می نویسیم و یـک کـارت بـه تـصادف از میـان آنهـا استخراج می کنیم. مطلوبست احتمال اینکه عدد روی این کارت:

الف : بر ۴ یا بر ۶ بخش پذیر باشد.

ب : بر ۴ بخش پذیر باشد ولی بر ۶ بخش پذیر نباشد.

حل :

$$S=\{۱۱,۱۲,...,۱۰۰\}\rightarrow n(S)=b-a+۱=۱۰۰-۱۱+۱=۹۰$$

بخش پذیر بر۴ $A=\{۱۲,۱۶,...,۹۶,۱۰۰\}\rightarrow n(A)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۱۰۰-۱۲}{۴}+۱=۲۳$

بخش پذیر بر۶ $B=\{۱۲,۱۸,...,۹۶\}\rightarrow n(B)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۲}{۶}+۱=۱۵$

بخش پذیر بر۱۲(ک م م ۴ و۶) $A\bigcap B=\{۱۲,۲۴,...,۹۶\}\rightarrow n(A\bigcap B)=\frac{b-a}{k}+۱=\frac{۹۶-۱۲}{۱۲}+۱=۸$

الف :

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۲۳}{۹۰}+\frac{۱۵}{۹۰}-\frac{۸}{۹۰}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$$

ب :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)=\frac{۲۳}{۹۰}-\frac{۸}{۹۰}=\frac{۱۵}{۹۰}=\frac{۱}{۶}$$

تمرین برای حل :

۱: احتمال اینکه دانش آموزی در درس آمار و احتمال قبول شود، ۰/۳۴ و در درس حسابان قبول شود، ۰/۲۳ و احتمال اینکه دست کم در یکی از این دو درس قبول شود، ۰/۳۸ است. احتمال اینکه این دانش آموز در هر دو درس قبول شود، چقدر است؟

۲: احتمال آن که خانه ای یخچال داشته باشد، برابر ۰/۸۵ و احتمال اینکه هم یخچال و هم تلویزیون باشد برابر ۴۰/ و احتمال آن که حداقل یکی از این دو وسیله باشند ۰/۹۶ می باشد. احتمال آن را بیابید که در این خانه :

الف : تلویزیون باشد.   ب : فقط یخچال باشد.

۳ : عددی به تصادف از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۱۰۰۰\}$ انتخاب کنیم، احتمال اینکه :

الف : عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد، امّا بر ۵ بخش پذیر نباشد، چقدر است؟

ب : عدد انتخاب نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشد، چقدر است؟

***

قسمت دوّم: احتمال شرطی

نتایج بسیاری از آزمایش ها و اتفاق هایی که در آینده رخ می دهند، مشروط به نتایج آزمایش های دیگر می باشند. احتمال این چنین رخداد هایی را احتمال شرطی می نامند. برای مثال احتمال آسیب دیدن یک راننده در یک تصادف به شرط اینکه از کمربند ایمنی استفاده کرده باشد. یک احتمال شرطی است. در واقع در احتمال شرطی با دو پیشامد مختلف سروکار داریم و فرض می کنیم یکی از آنها رخ داده است و می خواهیم بدانیم احتمال رخ دادن دیگری چه تغییری کرده است.

تعریف : فرض کنید B و A دو پیشامد باشند، به قسمی که $P(B)>۰$ در این صورت اگر B رخ داده باشد، احتمال وقوع A را با نماد $P(A|B)$ نشان می دهیم و آنرا احتمال شرطی A به شرط وقوع B (یعنی B قبل از A رخ داده باشد) می گوییم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال : در یک مسابقه‌ی اتومبیل رانی، احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل : اگر A پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل و B پیشامد رسیدن به خط پایان تعریف کنیم. در این صورت داریم: $P(A\cap B)=۰/۷$ و $P(B)=۰/۸$ لذا:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۷}{۰/۸}=\frac{۷}{۸}$$

نتیجه ۱: فرض کنید B و A دو پیشامد باشند، به قسمی که $B\neq\Phi$ در این صورت طبق تعریف احتمال شرطی داریم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

نتیجه ۲: در حالتی که فضای نمونه ای احتمال هم شانس است، شرطی کردن یک پیشامد مانند A نسبت به پیشامد دیگر مثل B این است که فضای نمونه ای یعنی S را کنار گذاشته و B را فضای نمونه ای تلقی می کنیم. احتمال روی این فضای نمونه ای نیز هم شانس است. به این رویکرد « کاهش فضای نمونه ای » گفته می شود.

مثال : دو تاس پرتاب می شوند، اگر مجموع شماره ها ۶ باشد، احتمال آنکه اقلاً یکی از دو تاس ۲ باشد را حساب کنید.

حل:

$A=\{(۱,۲),(۲,۲),(۳,۲),(۴,۲),(۵,۲),(۶,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵),(۲,۶)\}$ اقلاً یکی از دو عدد ۲ باشد.

$B=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$ مجموع دو عدد ۶ باشد.

$A\bigcap B=\{(۲,۴),(۴,۲)\}$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۲}{۵}$$

مثال : سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. می دانیم که دست کم یک بار رو آمده است. در این صورت ، احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد، چقدر است؟

حل : سه بار رو آمدن سکه را A و دست کم یک بار رو آمدن سکه را B می نامیم. در این صورت:

$S=\{RRR.RRP,RPR,PRR,PPR,PRP,RPP,PPP\}$

$B=\{RRR.RRP,RPR,PRR,PPR,PRP,RPP\}$

$A=\{RRR\}$

$A\bigcap B=\{RRR\}$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۷}$$

مثال : اعداد ۱ تا ۹ را روی نُه کارت می نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هر سه عدد زوج باشند، به شرط اینکه مجموع آنها زوج باشد.

حل : برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشند یا هر سه باید زوج باشند و یا اینکه دو عدد فرد و یکی زوج باشند. امّا اعداد زوج در این مسئله چهارتا و اعداد فرد پنج تا هستند. حال اگر A پیشامد اینکه هر سه عدد زوج و B پیشامد زوج بودن مجموع اعداد سه کارت، تعریف کنیم. داریم.

$$n(A\bigcap B)=\binom{۴}{۳}=۴ \quad \text{و} \quad n(B)=\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۰}\binom{۴}{۳}=۴۰+۴=۴۴$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۴۴}=\frac{۱}{۱۱}$$

تمرین ۳: دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده است باشد، چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ باشد، چقدر است؟

حل :

الف :

$A=\{(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$ تاس سبز باشد.

$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$ مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

$$A\bigcap B=\{(۶,۴)\}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۳}$$

ب :

$A=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$ مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

$B=\{(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$ تاس سبز باشد.

$$A\bigcap B=\{(۶,۴)\}$$

$$P(A|B)=\frac{n(A\bigcap B)}{n(B)}=\frac{۱}{۶}$$

مثال : فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی ترین رقیبش را ببرد، $\frac{۱}{۶}$. احتمال قهرمانی ایـن تـیم در حال حاضر $\frac{۱}{۴}$ و در صورتی که اصلی ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{۱}{۳}$ افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاقِ « قهرمان شدن» یا «بردن اصلی ترین رقیب» برای این تیم اتفـاق خواهـد افتاد؟

حل : اگر A پیشامد قهرمان شدن و B پیشامد بر اصلی ترین رقیب تعریف کنیم. در این صورت داریم.

$$P(A)=\frac{۱}{۴} \text{ و } P(B)=\frac{۱}{۶} \text{ و } P(A|B)=\frac{۱}{۳}$$

واضح است که هدف این مسئله تعیین $P(A\bigcup B)$ است. لذا بر اساس اطلاعات داده شده داریم.

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)}\to P(A\bigcap B)=P(A|B)\times P(B)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۸}=\frac{۹+۶-۲}{۳۶}=\frac{۱۳}{۳۶}$$

مثال : اگر $P(A-B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A)=\frac{۳}{۴}$ باشد. مقدار $P(B|A)$ را بدست آورید.

حل :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\bigcap B)\to\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}-P(A\bigcap B)\to P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۲}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

تمرین برای حل :

۴ : تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $P(A|A)=۱$ ب) $P(A|A')=۰$

۵ : اگر $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ باشد. $P(A\bigcup B)$ را بدست آورید.

۶ : یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوّم را به دسـت آوریـد، بـه شـرط اینکه در پرتاب اوّل و دوّم پشت ظاهر شده باشد.

قسمت سوّم : پیشامد های مستقل و وابسته

گاهی نتایج یک آزمایش تصادفی وابسته به نتیجه‌ی یک آزمایش دیگر است و گاهی مستقل از آن می باشد. در این درس به معرفی پیشامد های مستقل و وابسته می پردازیم.

تعریف : اگر B و A دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، بطوری که $P(A),P(B)>0$، آنگاه این دو پیشامد را مستقل گوییم، هرگاه احتمال وقوع یکی از آنها بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

اگر دو پیشامد B و A مستقل نباشند، آنها را وابسته می گوییم.

نتیجه :

۱) اگر B و A دو پیشامد مستقل باشند، در این صورت:

$$P(A|B)=P(A)$$
$$P(B|A)=P(B)$$
$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

۲) اگر B و A دو پیشامد وابسته باشند، در این صورت:

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A).P(B|A)\\&=P(B).P(A|B)\end{aligned}$$

توجه : اگر حداقل یکی از دو پیشامد A و B تهی باشد. این دو پیشامد مستقل هستند.

توجه : مستقل بودن دو پیشامد، در بسیاری از موارد، نیاز به بررسی ندارد. به عنوان مثال قبولی در درس فیزیک برای دو دانش آموز ، دو پیشامد مستقل می باشند. زیرا قبولی یا عدم قبولی یکی هیچ تأثیری روی دیگری ندارد و لذا نیازی به بررسی مستقل بودن این دو پیشامد نیست.

مثال : جعبه ای محتوی۱۲ لامپ است و می دانیم که ۳ تای آنها معیوب اند. از این جعبه به تصادف یک لامپ بر می داریم، سپس بدون جایگذاری لامپ اوّل، لامپ دیگری به تصادف بر می داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند، چقدر است؟

حل: تعریف می کنیم:

$B=$ پیشامد لامپ دوّم معیوب و $A=$ پیشامد لامپ اوّل معیوب

چون معیوب یا غیر معیوب بودن لامپ اوّل هیچ تأثیری بر معیوب یا غیر معیوب بودن لامپ دوّم ندارد، پس دو پیشامد B و A مستقل هستند. در این صورت:

$$P(A\bigcap B)=P(A).P(B)=\frac{۳}{۱۲}\times\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱}{۲۲}$$

مثال : ۷۵ درصد افراد جامعه ای چشم میشی و ۴۰ درصد گروه خونی A دارند، یک فرد به تصادف انتخاب می کنیم.احتمال آنکه این فرد چشم میشی یا گروه خونی A داشته باشند، کدام است؟

۱) ۰/۷۸   ۲) ۰/۸۲   ۳) ۰/۸۵   ۴) ۰/۹۵

حل: دو پیشامد چشم میشی بودن و گروه خونی A داشتن مستقل هستند،پس:

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$
$$=P(A)+P(B)-P(A).P(B)=\frac{۳}{۴}+\frac{۲}{۵}-(\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۵})=\frac{۱۷}{۲۰}=۰/۸۵$$

مثال : اگر $P(B)=\frac{۱}{۴}$ و $P(A|B)=\frac{۱}{۶}$ و دو پیشامد B و A مستقل باشند. $P(A\bigcup B)$ را بدست آورید.

حل :

$$P(A|B)=P(A)=\frac{۱}{۶}$$
$$P(A\bigcap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$
$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۳}{۸}$$

تمرین۷ : اگر دو پیشامد B و A ناتهی و مستقل باشند، نشان هید که:

الف) دو پیشامد B' و A' نیز مستقل هستند.

ب) دو پیشامد B و A' نیز مستقل هستند.

ج) دو پیشامد B' و A نیز مستقل هستند.

حل:

الف:

$$P(A'\bigcap B')=P(A\bigcup B)'=۱-P(A\bigcup B)=۱-(P(A)+P(B)-P(A\bigcap B))$$
$$=۱-P(A)-P(B)+P(A\bigcap B)=۱-P(A)-P(B)+P(A).P(B)$$
$$=(۱-P(A))-P(B)(۱-P(A))=P(A')-P(B).P(A')$$
$$=P(A')(۱-P(B))=P(A').P(B')$$

$$P(A'|B')=\frac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A')\times P(B')}{P(B')}=P(A')$$

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{P(A')\times P(B')}{P(A')}=P(B')$$

ب:

$$\begin{aligned}P(A'\cap B)&=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\\&=P(B)-P(A).P(B)=P(B)(1-P(A))\\&=P(B).P(A')\end{aligned}$$

$$P(A'|B)=\frac{P(A'\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A')\times P(B)}{P(B)}=P(A')$$

$$P(B|A')=\frac{P(A'\cap B)}{P(A')}=\frac{P(A')\times P(B)}{P(A')}=P(B)$$

ج: مانند ب حل می شود و حل آن به فراگیران محترم واگذار می شود.

***

تمرین برای حل :

۸ : در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج ، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲ باشد. مستقل بودن یا نبودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۹ : یک سکه و یک تاس را پرتاب می کنیم. احتمال آن را حساب کنید که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید.

۱۰ : احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه ۷۰ درصد است، احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود را به دست آورید.

۱۱: خانواده ای دارای دو فرزند است. مطلوب است محاسبه‌ی احتمال اینکه هر دو فرزند آنها پسر باشند.

۱۲ : فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملّی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم ملّی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۸ باشد. تعیین کنید با چه حداقل یکی از این تیم ها قهرمان خواهد شد.

۱۳ : احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملّی فوتبال نوجوانان انتخاب می شود. احتمال های زیر را محاسبه کنید.

الف : در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب : در هیچکدام از تیم ها انتخاب نشود.

پ : فقط در تیم فوتبال انتخاب شود.

ت : فقط در یکی از تیم ها انتخاب شود.

ث : حداقل در یکی از تیم ها انتخاب شود.

۱۴ : احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال قبول شدن دوستش در این درس می باشد. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند برابر ۰/۶۲۵ باشد. حساب کنید با چه احتمالی رؤیا در این درس قبول خواهد شد.

۱۵ : اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، ثابت کنید که : $P(A\bigcup B)=1-P(A').P(B')$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : **www.mathtower.ir**

کانال تلگرام : **@mathameri**

درس دوّم : آمار توصیفی

آمار توصیفی به خلاصه کردن داده ها در قالب نمودار و جدول و یا با محاسبه ی معیارهای مختلف گرایش به مرکز یا معیارهای پراکندگی می پردازد. به عبارتی دیگر، آمار به کمک معیارهای عددی و هندسی، اطلاعاتی مناسب از داده های جمع آوری شده از نمونه یا جامعه برای نتیجه گیری می دهد.

قسمت اوّل : معیارهای گرایش به مرکز

هر عدد که معرف مرکز مجموعه داده ها باشد را معیار مرکزی یا شاخص مرکزی (پارامتر مرکزی) می نامند. به کمک معیار های مرکزی می توان موقعیت کلی داده ها را تعیین کرد، لذا برای مقایسه‌ی دو یا چند جامعه یک روش مناسب، محاسبه‌ی معیار های مرکزی آنها است. معیار های مرکزی دارای سه نوع مهم هستند. در اینجا فقط به دو نوع از آنها یعنی ، میانگین ($\bar{x}$) و میانه ($\tilde{x}$) می پردازیم. میانگین مهمترین معیار مرکزی محسوب می شود.

میانگین

در یک مجموعه‌ی داده های آماری، عدد متمایل به وسط آنها را میانگین (میانگین حسابی) می نامند. میانگین یا متوسط داده ها، با خارج قسمت مجموع اندازه‌ی داده ها بر تعداد آنها برابر است.

$$\bar{x}=\frac{x_۱+x_۲+x_۳+...+x_n}{n}=\frac{\sum x_i}{n}$$

مثال: میانگین داده های زیر را بدست آورید.

x_i : ۵و ۸و۱۰و ۱۲و۱۴و۱۷

حل:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{۵+۸+۱۰+۱۲+۱۴+۱۷}{۶}=\frac{۶۶}{۶}=۱۱$$

تمرین برای حل :

۱ : میانگین نمرات یک کلاس۱۶ نفری در درس ریاضی برابر ۱۲/۵ است. جمع نمرات دانش آموزان این کلاس را بدست آورید.

۲ : میانگین دادهای زیر برابر ۲۲ است. مقدار a را بدست آورید.

۲۰ و ۲۵ و۳۰ و ۲۲ و a و ۲۵ و ۲۴ و ۲۱ و ۲۰ و ۱۵

۳ : میانگین ۵ داده‌ی آماری ۱۷ است. اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده های قبلی اضافه کنیم. میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟

۴ : ثابت کنید که مجموع تفاضل هر یک از داده های یک مجموعه آماری از میانگین آنها برابر صفر است.

$$\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\overline{x})=۰$$

***

خواص میانگین

اگر $(x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ و... و $x_n)$ و $(y_۱$ و $y_۲$ و $y_۳$ و... و $y_n)$ دو مجموعه‌ی عددی و k یک عدد حقیقی باشد. در این صورت خواص زیر را می توان برای میانگین بررسی کرد.

الف : میانگین حاصل جمع داده های یک مجموعه‌ی آماری با یک عدد ثابت با حاصل جمع آن عدد و میانگین آن داده ها برابر است.

$$z_i=x_i+k\rightarrow\overline{z}=\overline{x}+k$$

ب : میانگین حاصل ضرب داده های یک مجموعه‌ی آماری در یک عدد ثابت با حاصل ضرب آن عدد و میانگین آن داده ها برابر است.

$$z_i=k.x_i\rightarrow\overline{z}=k.\overline{x}$$

ج : میانگین حاصل جمع داده های متناظر ازدو مجموعه داده های آماری با حاصل جمع میانگین های آنها برابر است.

$$z_i=x_i+y_i\rightarrow\overline{z}=\overline{x}+\overline{y}$$

مثال : داده های زیر وزن پنج نفر از دوستان نیلوفر برحسب کیلوگرم می باشند.

۵۵ و ۶۱ و ۵۷ و ۵۵ و ۶۲

الف : میانگین داده ها را به دست آورید.

ب : به هر کدام از این داده ها ۳ واحد اضافه کنید، سپس میانگین داده های جدید را به دست آورده و با میانگین داده های اصلی مقایسه کنید.

ج : هر کدام از این داده ها را در ۲ ضرب کنید، سپس میانگین داده های جدید را به دست آورده و با میانگین داده های اصلی مقایسه کنید.

حل :

الف :

$$x_i : ۶۲ \text{ و } ۵۵ \text{ و } ۵۷ \text{ و } ۶۱ \text{ و } ۵۵$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۶۲ + ۵۵ + ۵۷ + ۶۱ + ۵۵}{۵} = \frac{۲۹۰}{۵} = ۵۸ \quad kg$$

ب:

$$y_i : ۶۵ \text{ و } ۵۸ \text{ و } ۶۰ \text{ و } ۶۴ \text{ و } ۵۸$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{۶۵ + ۵۸ + ۶۰ + ۶۴ + ۵۸}{۵} = \frac{۳۰۵}{۵} = ۶۱ \quad kg$$

نتیجه : میانگین نیز ۳ واحد افزایش یافت .

ج :

$$z_i : ۱۲۴ \text{ و } ۱۱۰ \text{ و } ۱۱۴ \text{ و } ۱۲۲ \text{ و } ۱۱۰$$

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} = \frac{۱۲۴ + ۱۱۰ + ۱۱۴ + ۱۲۲ + ۱۱۰}{۵} = \frac{۵۸۰}{۵} = ۱۱۶ \quad kg$$

نتیجه : میانگین نیز در۲ ضرب شده است.

تمرین برای حل :

۴ : هر یک از خواص فوق را اثبات کنید.

۵ : ثابت کنید که میانگین داده های مساوی، برابر هر یک از آنها است.

۶ : اگر میانگین وزن دوستان محسن بر حسب کیلوگرم برابر۵۸ باشد. این میانگین بر حسب گرم،چقدر است؟

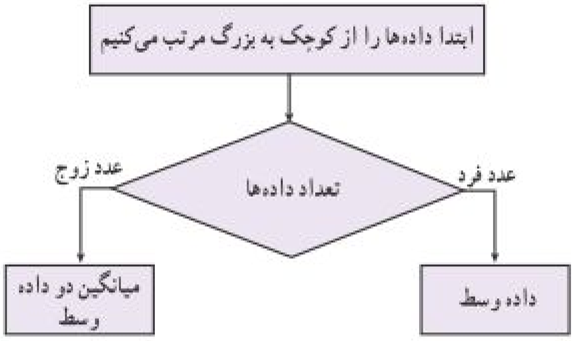
۷ : دمای هوای اهواز در یک هفته از شهریور سال۹۶ برابر ۴۵ سانتی گراد باشد. این میانگین را برحسب فارنهایت بدست آورید. $(F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲)$

۸ : هرگاه میانگین داده های آماری$(x_۱ \text{ و } x_۲ \text{ و } x_۳ \text{ و ... و } x_n)$ برابر۱۷ باشد. میانگین داده های $(۲x_۱ + ۱ \text{ و } ۲x_۲ + ۱ \text{ و } ۲x_۳ + ۱ \text{ و ... و } ۲x_n + ۱)$ را بدست آورید.

***

میانه

در یک مجموعه از داده های آماری، میانه داده ای است که نصف داده از آن بیشتر و نصف داده ها از آن کمتر است. به عبارت دیگر در یک مجموعه‌ی داده های آماری که به صورت غیر نزولی (از کوچک به بزرگ) مرتب شده باشند، عدد وسط این داده ها را میانه می نامند. برای محاسبه‌ی میانه ابتدا داده ها را به صورت غیر نزولی مرتب می‌کنیم، آنگاه



الف) اگر تعداد داده ها فرد باشد، داده‌ی وسط میانه است.

ب) اگر تعداد داده ها زوج باشد، میانگین دو داده‌ی وسط میانه است.

مثال: میانه‌ی هریک از مجموعه های زیر را بیابید.

الف) ۳ و ۵ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۵ و ۸ و ۵

ب) ۱۳ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۷ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ۶۰

حل: ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

الف:

۳ و ۵ و ۵ و ۵ و ۷ و ۸ و ۸ و ۹ و ۱۰

چون تعداد داده ها فرد است، پس داده‌ی وسط میانه است. لذا میانه برابر $\tilde{x} = ۷$ می باشد.

ب :

۱۳ و ۱۵ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۷ و ۱۹ و ۲۰ و ۲۱ و ۲۲ و ۶۰

چون تعداد داده ها زوج است، میانگین دو داده‌ی وسط میانه است است. لذا میانه برابر $\tilde{x} = \frac{۱۷+۱۹}{۲} = ۱۸$ می باشد.

نتیجه: اگر تمام داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری برابر باشند، میانه نیز برابر هر یک از آنها است.

توجه: اگر در یک مجموعه‌ی داده های آماری داده‌ی دور افتاده‌ای وجود داشته باشند. چون میانه تحت تأثیر داده های دور افتاده قرار نمی گیرد، نسبت به میانگین، معیار مناسبتری محسوب می شود. داده‌ی دور افتـاده، داده‌ای است که نسبت به سایر داده ها تفاوت بسیار دارد.

تمرین برای حل :

۹ : تعداد حمله های یک تیم فوتبال در شش ماه گذشته به صورت ۴۲ و ۴۴ و ۴۷ و ۱۰ و ۴۳ و ۴۸ اسـت. میانگین و میانه‌ی تعداد حملات این تیم را در این شش ماه به دست آورید. به نظر شما کدام معیار با معنا تـر است؟ چرا؟

۱۰ : میانگین و میانه‌ی داده های زیر را تعیین کنید.

۱۵ و ۱۸ و ۲۲ و ۱۶ و ۹ و ۱۱ و ۵ و ۴

***

قسمت دوّم : معیار های پراکندگی

در فعالیت آماری، گاهی لازم می شود که میزان پراکندگی (دوری و نزدیکی) داده را نسبت بـه همـدیگر یـا نسبت به میانگین محاسبه شود. برای اینکار از معیارهای پراکندگی استفاده می شود.

هر عدد که میزان پراکندگی داده ها نسبت به همدیگر یا نسبت به میانگین را نشان دهد، را معیار پراکندگی یا شاخص پراکندگی (پارامتر پراکندگی) می نامند. مهمترین معیارهای پراکندگی عبارتند از ، دامنه‌ی تغییـرات ، واریانس ، انحراف معیار و ضریب تغییرات می باشند.

از بین این معیارها، دامنه‌ی تغییرات پراکندگی داده ها را نسبت به همدیگر و بقیه، پراکندگی را نسبت به میانگین نشان می دهند.

دامنه‌ی تغییرات

در یک مجموعه‌ی داده های آماری تفاضل کمترین داده از بیشترین آنها را دامنه‌ی تغییـرات مـی نامنـد. بـه عبارتی دیگر دامنه‌ی تغییرات، طول بازه ای اسـت کـه داده هـا در آن قـرار دارنـد. در ایـن صـورت، اگـر a کوچکترین و b بزرگترین داده یک مجموعه‌ی داده های آماری باشند. دامنه‌ی تغییرات به شکل زیر است.

$$R = b - a$$

دامنه‌ی تغییرات را می توان به بیشترین اختلاف بین داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری تعبیر کرد.

مثال: دامنه‌ی تغییرات داده های زیر را حساب کنید و تعبیر آن را بنویسید.

۱۳ و ۸ و ۱۴ و ۱۵ و۱۰

حل:

$$R = b - a = ۱۵ - ۸ = ۷$$

تعبیر: بیشترین اختلاف بین داده های این مجموعه برابر ۷ است.

نتیجه:

۱ : بزرگی دامنه‌ی تغییرات نشان دهنده‌ی تفاوت زیاد در جامعه است، هر چه قدر این دامنه بیشتر باشد، تفاوت بین داده ها زیاد است و هر چه قدر این دامنه کمتر باشد، داده ها به هم نردیکترند. اگر دامنه‌ی تغییرات صفر باشد، تمام داده های برابر هستند و جامعه همگون است.

۲ : دامنه‌ی تغییرات ضعیف ترین شاخص پراکندگی است و معرف خوبی برای پراکندگی داده ها نمی باشد، زیرا برای محاسبه‌ی آن فقط از بزرگترین و کوچکترین داده استفاده می شود و تعداد یا مقادیر بقیه‌ی داده‌ها تأثیری بر مقدار آن ندارند.

***

واریانس و انحراف معیار

میانگین توان دوّم تفاضل داده ها از میانگین آنها را واریانس (پراش) می نامند. در این صورت

$$\sigma^۲ = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^۲}{n}$$

توجه داشته باشید که واریانس در ضمن داشتن اهمیت زیاد دارای دو اشکال عمده است.

الف : تحت تأثیر داده های بزرگ قرار می گیرد.

ب : واحد اندازه گیری واریانس مجذور واحد اصلی متغیر داده ها است. مثلاً اگر واحد اندازه گیری داده ها سانتی متر باشد، واحد اندازه گیری واریانس سانتی متر مربع خواهد بود.

برای رفع این دو اشکال از انحراف معیار استفاده می شود. ریشه‌ی دوّم واریانس را انحراف معیار (انحراف استاندارد) می نامند.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{۲}}$$

بنابراین طبق این تعریف بدیهی است که انحراف معیار دارای همان واحدی خواهد بود که داده ها بر حسب آن محاسبه شده اند.

مثال : واریانس و انحراف معیار داده های زیر را بدست آورید.

۹ و۴ و۷ و ۳ و ۲

حل:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^{۲}$
۲	$-$ ۳	۹
۳	$-$ ۲	۴
۷	۲	۴
۴	$-$ ۱	۱
۹	۴	۱۶
۲۵ = جمع	-	۳۴

میانگین $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{۲۵}{۵} = ۵$

واریانس $\sigma^{۲} = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^{۲}}{n} = \dfrac{۳۴}{۵} = ۶/۸$

انحراف معیار $\sigma = \sqrt{\sigma^{۲}} = \sqrt{۶/۸} = ۲/۶$

***

تمرین برای حل :

۱۱ : واریانس و انحراف معیار داده های زیر را محاسبه کنید.

۷ و ۹ و۶ و ۵ و۳

۱۲ : ثابت کنید که واریانس داده های مساوی برابر صفر است.

خواص واریانس

اگر (x_1 و x_2 و x_3 و ... و x_n) یک مجموعه‌ی عددی و k یک عدد حقیقی باشد. در این صورت خواص زیر را می توان برای واریانس آنها بررسی کرد.

۱ : واریانس حاصل جمع داده ها با یک عدد ثابت ، با واریانس آن داده ها برابراست.

$$y_i = x_i + k \rightarrow \sigma_y^2 = \sigma_x^2$$

۲ : واریانس حاصل ضرب داده ها در یک عدد ثابت ، با حاصل ضرب مربع آن عدد در واریانس آن داده ها برابر است.

$$y_i = k.x_i \rightarrow \sigma_y^2 = k^2.\sigma_x^2$$

***

خواص انحراف معیار

مشابه آنچه که برای واریانس داشتیم. می توان نوشت خواص زیر را برای انحراف معیار نیز بیان کرد.

۱ : انحراف معیارحاصل جمع داده ها با یک عدد ثابت با انحراف معیارآن داده ها برابراست.

$$y_i = x_i + k \rightarrow \sigma_y = \sigma_x$$

۲ : انحراف معیار حاصل ضرب داده ها در یک عدد ثابت، با حاصل ضرب قدر مطلق آن عدد در انحراف معیارآن داده ها برابر است.

$$.y_i = k.x_i \rightarrow \sigma_y = |k|.\sigma_x$$

تمرین برای حل :

۱۳ : اگر واریانس داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری برابر ۱۸ و میانگین آنها ۸ باشد و تمام داده ها را دو برابر کنیم. میانگین و واریانس داده های جدید را تعیین کنید.

۱۴ : هرگاه واریانس داده های آماری(x_1 و x_2 و x_3 و ... و x_n) برابر۱۶ باشد. انحراف معیار داده های ($2x_1+1$ و $2x_2+1$ و $2x_3+1$ و ... و $2x_n+1$) را محاسبه کنید.

***

ضریب پراکندگی

خارج قسمت انحراف معیار داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری بر میانگین آنهـا را ضـریب پراکنـدگی (ضریب تغییرات) گویند.

$$CV_x = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

توجه کنید که طبق تعریف ، ضریب پراکندگی داده ها فاقد واحد اندازه گیری می‌باشد، لذا اغلب در موارد زیر استفاده می شود.

الف : برای مقایسه‌ی دو یا چند جامعه‌ی آماری که واحد اندازه گیری داده‌های آنها متفاوت باشد.

مثلاً: مقایسه‌ی سود دو شرکت که سود یکی برحسب ریال و سود دیگری بر حسب دلار باشد.

ب : برای مقایسه‌ی دو یا چند جامعه‌ی که واریانس های آنها برابر باشند ولی میـانگین‌هـای متفـاوت دارنـد.

مثلاً: باتوجه به اطلاعات زیر دو شرکت x و y دارای انحراف معیار برابر هستند ولی میانگین مساوی دارنـد، لذا شرکت y از پراکندگی شرکت بهتری در مقایسه با شرکت x محسوب می شود.

ضریب پراکندگی	انحراف معیار	میانگین	-
۰/۲	۲	۱۰	شرکت x
۰/۱	۲	۲۰	شرکت y

مثال : ضریب پراکندگی داده های زیر را محاسبه کنید.

۶ و ۸ و ۳ و ۹ و ۴

$(x_i - \bar{x})^۲$	$x_i - \bar{x}$	x_i
۴	۲−	۴
۹	۳	۹
۹	۳−	۳
۴	۲	۸
۰	۰	۶
۲۶	---	جمع = ۳۰

میانگین $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{۳۰}{۵} = ۶$

$$\sigma^{۲} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^{۲}}{n} = \frac{۲۶}{۵} = ۵/۲$$ واریانس

$$\sigma = \sqrt{۵/۲} = ۲/۲۸$$ انحراف معیار

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲/۲۸}{۶} = ۰/۳۸$$ ضریب تغییرات

نتیجه: اگر تمام داده های آماری برابر باشند، ضریب تغییرات آنها صفر است.

***

تمرین برای حل :

۱۵ : برای داده های زیر ضریب تغییرات را محاسبه کنید.

۱۲ و ۱۵ و ۳ و ۶ و ۹

۱۶ : اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده برابر ۲ و میانگین آنها برابر ۴ باشد، واریانس داده ها را به دست آورید.

۱۷ : نشان دهید که اگر تمام داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری را در عدد مثبت k ضرب کنیم، ضریب تغییرات آنها تغییری نمی کند.

۱۸ : توضیح دهید که اگر تمام داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری را با عدد مثبت k جمع کنیم، ضریب تغییرات آنها چه تغییری می کند؟

۱۹ : داده های یک مجموعه ی داده های آماری بر حسب متر اندازه گیری شده اند. واحد اندازه گیری معیارهای میانگین ، واریانس ، انحراف معیار و ضریب تغییرات را مشخص کنید.

۲۰ : اگر همه‌ی داده های یک مجموعه‌ی داده های آماری مساوی باشند. درباره‌ی میانگین و واریانس آن مجموعه چه می توان گفت؟

۲۱ : اگر تمام داده های یک مجموعه‌ی آماری مساوی و میانگین آنها ۵ باشد. مقدار هر یک از شاخص های زیر را بنویسید.   الف : میانه   ب: انحراف معیار

۲۲ : میانگین یک مجموعه‌ی داده های آماری ۵ و واریانس آنها ۱۲ است. در صورتی که تمام داده ها را سه برابر کنیم، میانگین و واریانس داده های جدید را بنویسید.

۲۳ : امتیازات مهارت کاری دو نفر از پرسنل یک آزمایشگاه در ۵ روز کاری به صورت زیر است. تعیین کنید که دقت عمل کدام یک بیشتر است.

A : ۲۰ و ۲۳ و ۲۴ و ۲۶ و ۲۷ و B : ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ و ۲۶ و ۲۸

۲۴ : نمرات ریاضی و هندسه یک تیم پنج نفره از دانش آموزان برای شرکت در یک آزمون علمی به شرح جدول زیر است. خانه های جدول را کامل کنید و سپس تعیین کنید که این تیم در کدام آزمون ریاضی یا هندسه بهتر است شرکت نماید. چرا؟

ردیف	نام دانش آموز	ریاضی	هندسه
۱	محسن احمدی	۱۵	۱۲
۲	علی رضایی	۱۱	۱۶
۳	رضا اکبری	۱۲	۱۰
۴	احمد علوی	۱۸	۱۷
۵	حسین صادقی	۱۹	۲۰
میانگین			
واریانس			
انحراف معیار			
ضریب تغییرات			

***

چارک ها

در یک مجموعه‌ی داده های آماری که داده های آن به صورت غیر نزولی مرتب شده باشند، عدد وسط این داده ها را میانه یا چارک دوّم می نامند و آنرا با $Q_۲$ نمایش می دهند. از طرفی میانه‌ی نیمه‌ی اوّل داده ها را چارک اوّل ($Q_۱$) و میانه‌ی نیمه‌ی دوّم آنها را چارک سوّم ($Q_۳$) می نامند.

مثال: چارک های اوّل تا سوّم داده های زیر را تعیین کنید.

۱۹ و ۳۱ و ۲۵ و ۱۸ و ۳۲ و ۴۳ و ۴۱ و ۳۴ و ۱۸ و ۲۷ و ۱۴ و ۲۳ و ۱۵ و۱۰ و۱۲

حل:

۴۳ و۴۱ و ۳۴ و۳۲ و۳۱ و۲۷ و ۲۵ و ۲۳ و ۱۹و ۱۸و ۱۸و ۱۵و۱۴ و ۱۲ و۱۰

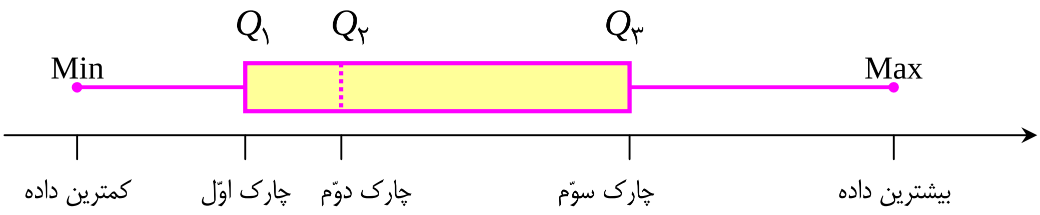
$Q_۳$ $Q_۲$ $Q_۱$

لذا چارک اوّل $Q_۱ = ۱۵$ و چارک دوّم (میانه) $Q_۲ = ۲۳$ و چارک سوّم $Q_۳ = ۳۲$

توجه : برای تعیین چارک ها، ابتدا میانه را محاسبه می کنیم ولی برای تعیین چارک های اوّل و سوّم، میانه شرکت داده نمی شود.

نمودار جعبه ای و دامنه‌ی میان چارکی

نموداری که معیارهای پراکندگی داده را می توان به کمک آن تعیین کرد. نموداری موسوم به نمودار جعبه ای است. این نمودار پراکندگی داده را در اطراف میانه و قبل و بعد از چارک اوّل و سوّم را به تصویر می کشد. این نمودار به کمک کمترین و بیشترین داده و چارک های اوّل تا سوّم داده های یک مجموعه‌ی آماری ترسیم می شود.



در نمودار جعبه ای ممکن است، میانه وسط جعبه نباشد. میانه به هر سمت متمایل شود، در آن سمت داده ها به هم نزدیکترند و در سمت دیگر داده ها پراکنده تر هستند.

یک معیار دیگر که در صورت وجود داده های دور افتاده (پَرت) مورد استفاده قرار مــی گیـرد. دامنــه‌ی میـان چارکی است. تفاضل چارک اوّل از چارک سوّم را دامنه‌ی میان چارکی می نامند و آن را با IQR نمایش می دهند.

$$IQR = Q_۳ - Q_۱$$

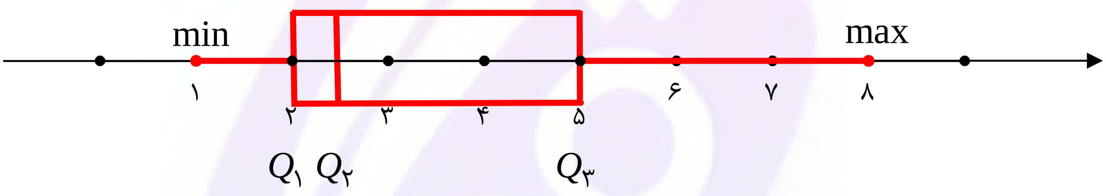
مثال: حسین تعداد گلهای ۲۲ بوته‌ی گل قرمز یک باغ را شمرده است. نمودار جعبه ای این داده ها را ترسیم نموده و دامنه‌ی میان چارکی را محاسبه کنید.

۸ و ۷ و ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۴ و ۴ و ۴ و ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱

حل :

$\boxed{۸ و ۷ و ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۴ و ۴ و ۴ و ۳ و ۳}$ و $\boxed{۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱ و ۱}$

$$\min = ۱ \text{ و } Q_۱ = ۲ \text{ و } Q_۲ = \frac{۲ + ۳}{۲} = ۲/۵ \text{ و } Q_۳ = ۵ \text{ و } \max = ۸$$



دامنه‌ی میان چارکی $IQR = Q_۳ - Q_۱ = ۵ - ۲ = ۳$

تمرین برای حل :

۲۴ : داده های زیر را در نظر بگیرید.

۱۹و ۳۱ و ۲۵ و ۱۸ و ۳۲ و ۴۳ و ۴۱ و ۳۴ و ۱۶ و ۲۷ و ۱۴ و ۲۳ و ۱۵ و ۱۰ و ۱۲

الف : چارک های اوّل تا سوّم داده های زیر را تعیین کنید.

ب : دامنه‌ی میان چارکی را محاسبه کنید.

ج : نمودار جعبه ای ترسیم کنید.

۲۵ : چارک های اوّل تا سوّم و دامنه‌ی میان چارکی داده های زیر را محاسبه کنید.

۴۱ و ۱۷ و ۱۶ و ۱۹ و ۱۳ و ۱۴و ۱۸ و ۱۶ و ۱۵ و ۱۷

۲۶: داده های زیر را در نظر بگیرید.

۲۶ و ۲۲ و ۴۱ و ۳۱ و ۲۵ و۲۲ و ۲۸ و۳۰ و ۲۴ و ۲۰

الف: میانگین، میانه را محاسبه کنید.

ب: دامنه‌ی میان چارکی را تعیین کنید.

ج: نمودار جعبه ای مربوط به این داده ها را رسم کنید.

۲۷ : در هر مورد جای خالی را کامل کنید.

الف : تفاضل بیشترین و کمترین داده را .... گویند.

ب : در نمودار جعبه ای ۵۰ درصد داده ها قبل از و ۵۰ درصد داده ها بعد از .... قرار دارند.

پ : در نمودار یک مجموعه‌ی داده های آماری ...... درصد داده ها قبل از چارک اوّل و ..... درصد داده ها قبل از چارک دوّم و ...... درصد داده ها قبل از چارک سوّم قرار می گیرند.

ت : معیارهای پراکندگی که میانگین در آنها نقش دارد .... و....... هستند.

ث : اگر داده های آماری k برابر شوند، ضریب تغییرات .... (عدد k مثبت است.)

ج : واحد اندازه گیری واریانس ، .... واحد اندازه گیری داده ها است.

ح : هر قدر انحراف معیار کمتر باشد، میزان .... داده ها، کمتر است.

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri