فصل ۲ : قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

نسبت و تناسب در هندسه

تساوی بین دو نسبت، تناسب نامیده می‌شود. از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان به نتایج زیر رسید:

$$۱)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\rightarrow$$

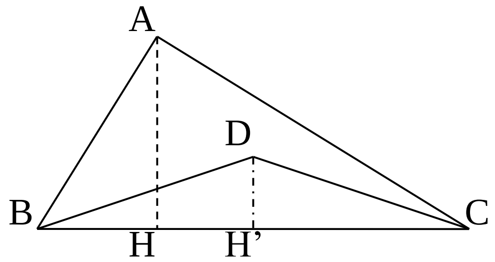
۱	$ad=dc$	$b,d\neq ۰$
۲	$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$	$a,b,c,d\neq ۰$
۳	$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\ ,\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$	$a,b,c,d\neq ۰$
۴	$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\frac{a}{b\pm a}=\frac{c}{d\pm c}$	$b,d\neq ۰$

$$۲)\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k\rightarrow\frac{a+c+e}{b+d+f}=k$$

نکته: در تناسب $\frac{a}{b},\frac{b}{c}$، b میانگین (واسطه ای هندسی) دو جمله کناری c,a نامیده می شود و مقدار آن برابر است با

$$b^{۲}=ac$$

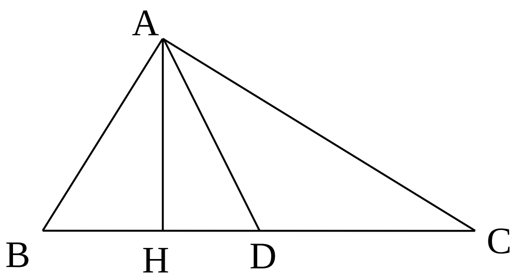
نکته: اگر دو مثلث دارای یک قاعده برابر باشند، نسبت مساحت های آن ها، برابر است با نسبت ارتفاعهای وارد بر آ ن قاعده ی مشترک:



$$\frac{S(\overset{\Delta}{ABC})}{S(\overset{\Delta}{DBC})}=\frac{AH}{DH'}$$

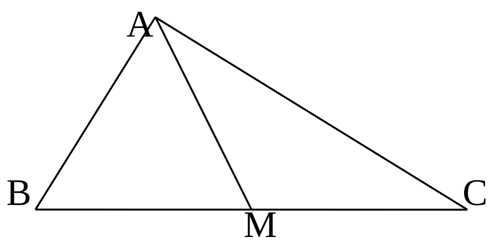
نکته: اگر دو مثلث دارای یک ارتفاع برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر است با نسبت قاعده‌ی نظیر آن ارتفاع مشترک

.



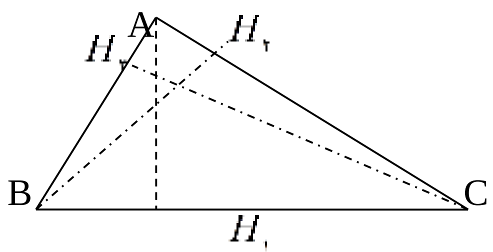
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}} = \frac{BC}{CD} \quad , \quad \frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ACD}}} = \frac{BD}{CD} \quad , \quad \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = \frac{BC}{BD}$$

نکته: میانه‌ی هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت های برابر تقسیم می کند.



$$S_{\overset{\Delta}{ABM}} = S_{\overset{\Delta}{ACM}}$$

نکته: با توجه به مساحت مثلث داریم:



$$S = \frac{۱}{۲}(CH_۳)(AB) =$$
$$\frac{۱}{۲}(BH_۲)(AC) = \frac{۱}{۲}(AH_۱)(BC)$$

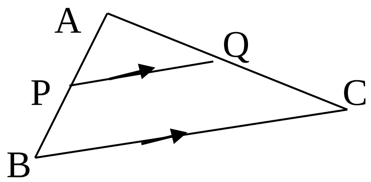
بنابراین در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع ، با عکس نسبت ارتفاع وارد بر آنها، برابر است.

مثال : $\frac{AH_۱}{AH_۲} = \frac{AC}{BC}$

نکته: هر مثلث، بزرگترین ارتفاع به کوچکترین ضلع و کوچکترین ارتفاع به بزرگترین ضلع وارد می شود.

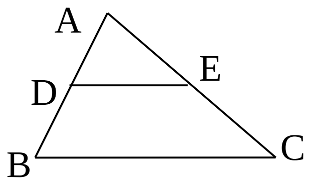
قضیه تالس

قضیه تالس: اگر خطی که موازی با یکی از ضلع های یک مثلث است، دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره خط هایی که روی یک ضلع پدید می آورد، برابر است با نسبت پاره خط هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می کند. پس در شکل مقابل چون $PQ \| BC$، طبق قضیه ی تالس $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.



نتیجه های مهم قضیه تالس:

نتیجه ۱) اگر در مثلث ABC، دو نقطه ی E,D به ترتیب روی دو ضلع AB و AC طوری انتخاب شوند که $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$، آنگاه $DE \| BC$



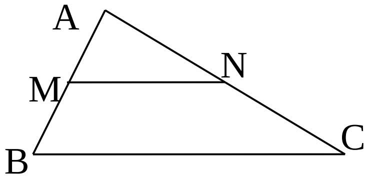
نتیجه ۲) با توجه به شکل بالا که در آن $BE \,||\, BC$، می توان نوشت:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

نتیجه ۳) اگر وسط های دو ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم، پاره خطی حاصل می شود که با ضلع سوم موازی است و طول آن نصف طول ضلع سوم است.

پس در شکل مقابل اگر $AN = NC, AM = BM$ ، آن گاه می توان نتیجه گرفت که $MN \parallel BC$ و

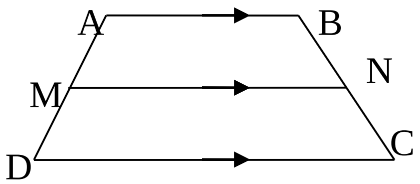
$$MN = \frac{۱}{۲} BC$$



نتیجه ۴) در هر ذوزنقه، پاره خطی که وسط های دو ساق را به هم وصل می کند، با قاعده ها موازی بوده و طول آن برابر با میانگین طول قاعده هاست.

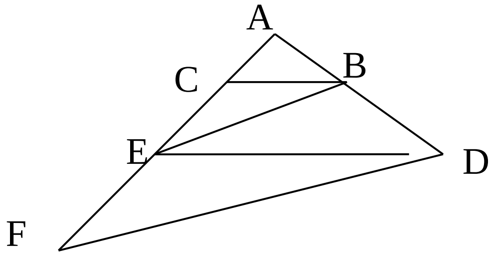
پس در شکل روبه رو: $MN \parallel BC$ و $MN = \frac{AB + CD}{۲}$

نکته: در هر ذوزنقه، پاره خطی که دو ساق را به هم وصل می کند و موازی قاعده هاست، روی ساق ها نسبت های برابر بوجود می آورد.



$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

نکته: در شکل زیر $DE \parallel DF, BC \parallel DE$ ، با نوشتن قضیه تالس یکبار در مثلث AED و یکبار در مثلث AFD می توان گفت:



(۱)
$$\begin{cases} \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AB}{AD} \\ \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{BD} \end{cases} \to AE^{۲} = AC \times AF$$

(۲)
$$\begin{cases} \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{DE} \\ \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BE}{DF} \end{cases} \to BE \times DE = BC \times DF$$

تشابه

تعریف: دو چند ضلعی را متشابه گویند، که در آنها زاویه‌های نظیر با هم برابر بوده و اضلاع نظیر با هم متناسب باشند، به نسبت اضلاع نظیر در دو چند ضعلی متشابه، نسبت تشابه گفته و معمولاً آن را با K نمایش می دهند.

حالت های متشابه دو مثلث:

حالت ۱) تساوی زاویه ها: اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابهند.

حالت ۲): تناسب دو ضلع و تساوی زاویه بین آن ها: اگر یک زاویه زا یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر و اضلاع نظیر این زاویه ها متناسب باشند، آن دو مثلث متشابهند.

حالت ۳) تناسب سه ضلع: اگر سه مثلث با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابهند.

پاره خط های متناسب در دو مثلث متشابه:

در هر مثلث متشابه، نسبت میانه ها،نیمسازها و ارتفاع های متناظر، برابر نسبت تشابه است.

نسبت محیط ها و مساحت ها در دو چندضلعی متشابه:

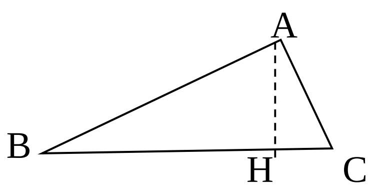
۱) در هر دو چندضلعی متشابه (در نتیجه دو مثلث متشابه)، نسبت محیط ها برابر با نسبت تشابه است.

۲) در هر دو چند ضلعی متشابه (در نتیجه، دو مثلث متشابه)، نسبت مساحت ها، برابر با مجذور نسبت تشابه است.

مثلث قائم الزاویه و روابط طولی مهم:

ـ در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تفکیک می کند که هر دو مثلث با مثلث اصلی متشابه اند: یعنی در شکل مقابل داریم:

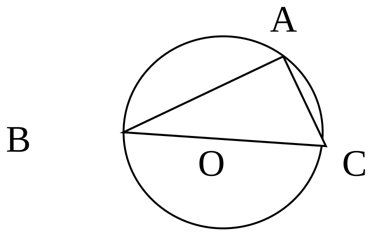
$$\Delta ABC \sim \Delta ABH \sim \Delta ACH$$



روابط طولی: با توجه به شکل بالا نتیجه می شود:

$$۱) AB^۲ = BC.BH$$
$$۲) AC^۲ = BC.CH$$
$$۳) AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ , AH^۲ + BH^۲ = AB^۲ , AH^۲ + CH^۲ = AC^۲$$
$$۴) AH^۲ = BH.CH$$
$$۵) AH \times BC = AB \times AC$$

نکته: اگر در یک دایره مثلثی به گونه ای رسم شود که یک ضلع آن قطر دایره و رأس مقابل آن روی محیط دایره قرار بگیرد، آن مثلث قائم الزاویه خواهد بود. در شکل زیرمثلث ABC در رأس A قائم الزاویه است.



اگر در شکل مقاب، ارتفاع وارد بر وتر و شعاع موازی با آن رسم کنیم خواهیم داشت:

فرض $\begin{cases} BH = x \\ CH = y \end{cases} \to OD = \dfrac{x+y}{۲} , AH^۲ = xy \to AH = \sqrt{xy}$

نتیجه برای هر دو عدد مثبت $a+b$ همواره داریم: $\dfrac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$