

## جزوه درس هندسه ۲

# مهندس نیما خانعلی پور

سرفصل های هندسه پایه یازدهم ریاضی:

فصل ۱ کتاب هندسه پایه یازدهم : دایره

درس ۱: مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

درس ۲: رابطه های طولی در دایره

درس ۳: چندضلعی های محاطی و محیطی

فصل ۲ کتاب هندسه پایه یازدهم : تبدیل های هندسی و کاربرد ها

درس ۱: تبدیل های هندسی

درس ۲: کاربرد تبدیل ها

فصل ۳ کتاب هندسه پایه یازدهم: روابط طولی در مثلث

درس ۱: قضیه سینوس ها

درس ۲: قضیه کسینوس ها

درس ۳: قضیه نیمساز های زوایای داخلی و محاسبه طول نیمساز ها

درس ۴: قضیه هرون (محاسبه ارتفاع ها و مساحت مثلث)

شهرستان زیبای لنگرود

۰۹۱۱۸۴۱۱۵۹۱

Nima.khanalipoor@gmail.com

t.me/Riazi\_khanalipoor



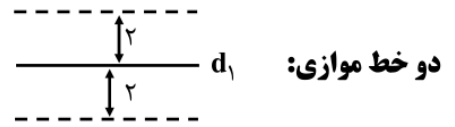
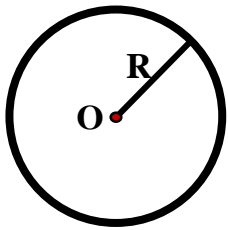
برای دریافت پاسخ تست ها به کانال سر بزنید

تازه کله جزوه و نمونه سوال و مباحث آموزشی و مشاوره ای دیگه هم پیدا می کنید...!

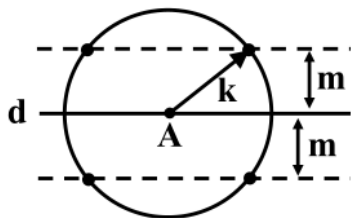
t.me/Riazi\_khanalipoor

دایره

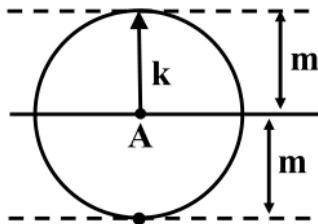
مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله ی آن ها از یک نقطه ثابت به نام مرکز دایره به اندازه ی  $R$  یا شعاع می باشد.



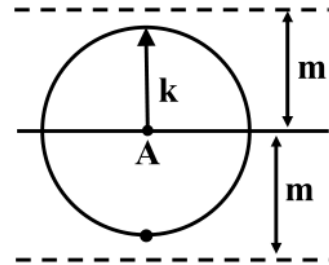
**تذکره:** حالاتی که نقاطی را بخواهیم که از نقطه  $A$  به فاصله  $k$  باشند و از خط  $d$  فاصله  $m$  را داشته باشند یکی از حالات زیر است.



$k > m$   
(جواب ۴)

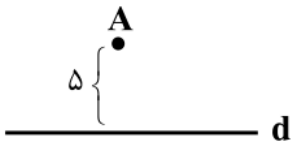


$k = m$   
(جواب ۲)



$k < m$   
(بدون جواب)

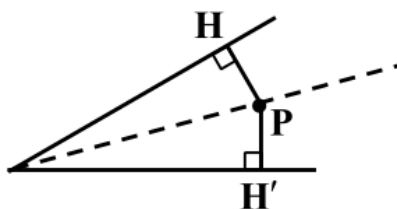
نقطه  $A$  به فاصله ۵ سانتی متر از خط  $d$  قرار دارد. چند نقطه وجود دارد که فاصله اش از  $A$  برابر ۴ و از خط  $d$  برابر ۲ باشد؟



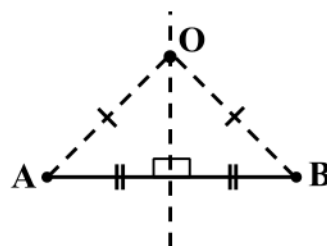
- ۱) صفر
- ۲) ۱
- ۳) ۲
- ۴) ۳

مربع  $ABCD$  به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع  $ABCD$  وجود دارد که فاصله اش از قطر  $AC$  برابر  $1/5$  باشد؟

- ۱) ۴
- ۲) ۲
- ۳) ۱
- ۴) صفر



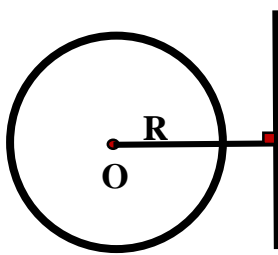
نیمساز:



عمود منصف:

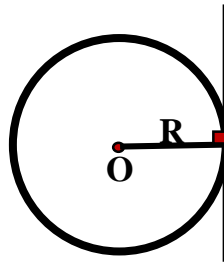
### وضعیت نسبی خط و دایره

کافی است فاصله ی مرکز دایره تا خط را به دست آوریم و با شعاع مقایسه کنیم، آن گاه خواهیم داشت:



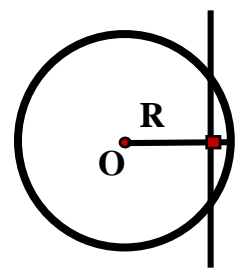
«خط دایره را در دو نقطه قطع می کند»

$$OH < R$$



«خط بر دایره مماس است»

$$OH = R$$



«خط و دایره یکدیگر را قطع نمی کنند»

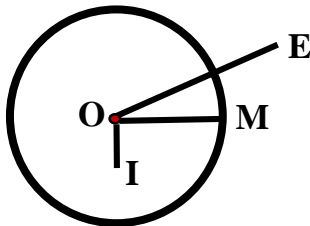
$$OH > R$$

هر دایره صفحه را به سه بخش افراز می کند:

۱- داخل دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره کمتر از شعاع دایره است.  $OI < R$

۲- روی دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره برابر شعاع دایره است.  $OM = R$

۳- خارج دایره: مجموعه نقاطی که فاصله ی آن ها از دایره بیشتر از شعاع دایره است.  $OE > R$



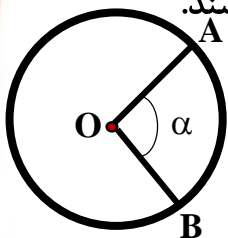
### کمان در دایره

دو نقطه  $A, B$  واقع بر محیط دایره را اگر به هم وصل کنیم کمان  $AB$  را تشکیل می دهند که هر کمان قسمتی از محیط دایره است.

### زاویه مرکزی

به زاویه ای گفته می شود که رأس آن روی مرکز دایره و ضلع های آن شعاع های دایره باشند.

اندازه ی زاویه ی مرکزی با کمان روبه روی آن برابر است.



$\alpha$  زاویه مرکزی

$$AB = \alpha$$

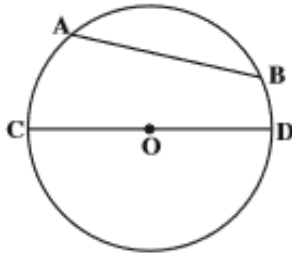
### زاویه ی محاطی

زاویه ای است که رأسش روی محیط دایره و ضلع هایش وترهای دایره باشند.

اندازه ی زاویه ی محاطی نصف کمان روبه روی آن است.

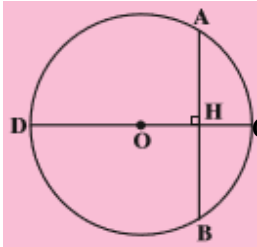
وتر

پاره خطی است که دو سر آن روی محیط دایره است. بزرگترین وتر در دایره قطر است. (۲R)



قضیه

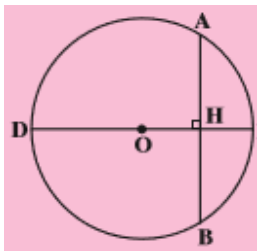
ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود به وتر، کمان نظیرش را نصف می کند.



$$\begin{cases} OB = OA = R \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow[\text{وتر و یک ضلع}]{\triangle AOH \cong \triangle BOH} \begin{cases} AH = BH \\ O_1 = O_2 \rightarrow AC = BC \end{cases}$$

قضیه

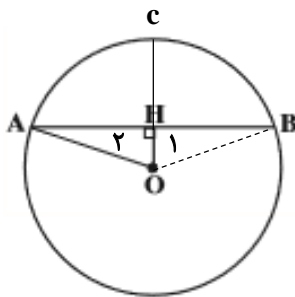
ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن (که از مرکز دایره نگذشته باشد) وصل می کند، به آن عمود است.



$$\begin{cases} AH = HB \\ OB = OA = R \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow[\text{ض ض ض}]{\triangle AOH \cong \triangle BOH} \begin{cases} H_1 = H_2 \\ H_1 + H_2 = 180^\circ \\ 2H_1 = 180^\circ \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \end{cases}$$

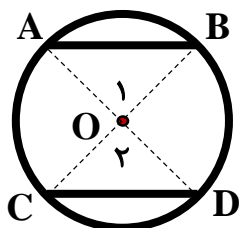
قضیه

ثابت کنید در هر دایره خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن وصل می کند، به آن وتر عمود است.



قضیه

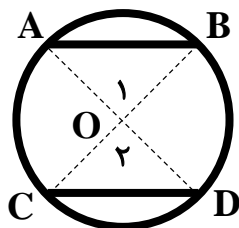
ثابت کنید در هر دایره کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند.



$$\left\{ \begin{array}{l} AB = CD \\ OA = OD \\ OB = OC \end{array} \right. \xrightarrow[\text{ض ض ض}]{\Delta AOH \cong \Delta COH} O_1 = O_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} AB = CD$$

عکس قضیه

ثابت کنید در هر دایره وترهای نظیر کمان های مساوی با هم برابرند.

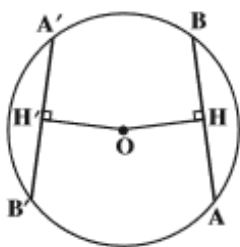


$$AB = CD \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} O_1 = O_2 \\ CO = OB \\ AO = OD \end{array} \right.$$

قضیه

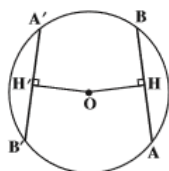
ثابت کنید در هر دایره وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله اند و برعکس.

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AB}{2} = \frac{A'B'}{2} \rightarrow A'H' = AH \\ H = H' = 90^\circ \\ OA = OA' \end{array} \right. \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} OH = OH'$$

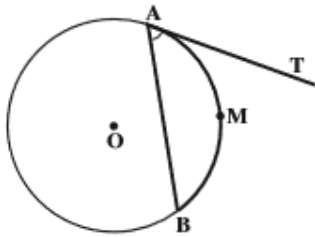
اثبات عکس قضیه



$$\left\{ \begin{array}{l} OH = OH' \\ H = H' = 90^\circ \\ OA = OA' = R \end{array} \right. \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} A'H' = AH \xrightarrow{\times 2} AB = A'B'$$

### زاویه ظلّی

زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره است. یکی از اضلاعش مماس بر دایره است و ضلع دیگرش وتر و تری از دایره است.

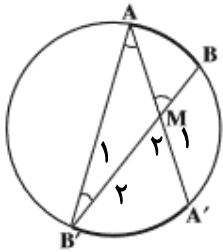


اندازه ی زاویه ی ظلّی نصف کمان روبروی آن است.

### زاویه ی بین دو وتر متقاطع

قضیه: ثابت کنید هرگاه از یک نقطه داخل دایره دو وتر رسم کنیم، زاویه ی حاصل بین دو وتر برابر

است با نصف مجموع کمان های روبه رو به آن با کمان های محصور بین دو وتر.

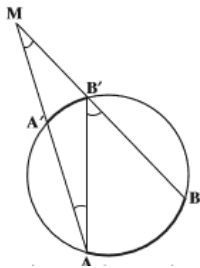


$$M_1 = \frac{AA' + BB'}{2} \quad M_2 = \frac{AB' + A'B}{2}$$

### زاویه ی بین دو قاطع (امتداد دو وتر)

قضیه: ثابت کنید زاویه ی بین دو قاطع (امتداد دو وتر) برابر است با نصف تفاضل کمان های محصور

بین دو وتر یا کمان های روبه رو به زاویه ی M.

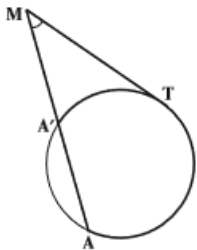


$$M = \frac{AA' - BB'}{2}$$

### زاویه ی بین یک قاطع و یک مماس

قضیه: ثابت کنید زاویه ی بین یک قاطع و یک مماس برابر است با نصف تفاضل کمان های محصور

بین قاطع و مماس (کمان های روبه رو به زاویه ی M)



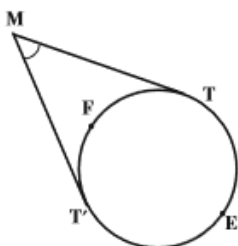
$$M = \frac{|AT - BT|}{2}$$

از B به T وصل می کنیم سپس خواهیم داشت:

### زاویه ی بین دو مماس

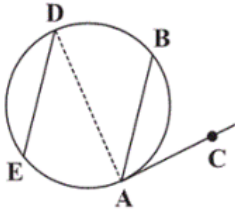
قضیه: ثابت کنید زاویه ی بین دو مماس برابر است با نصف تفاضل کمان های محصور بین دو مماس

یا به عبارتی کمان های روبه رو به زاویه ی M.



$$M = \frac{|TET' - TFT'|}{2}$$

- در شکل روبه‌رو  $AC$  مماس بر دایره و  $AB \parallel DE$  ،  $\widehat{AE} = 11^\circ$  می‌باشد، در این صورت اندازه زاویه  $\widehat{BAC}$  کدام است؟ (  $AD$  قطر دایره است.)



- (۱)  $35^\circ$
- (۲)  $70^\circ$
- (۳)  $40^\circ$
- (۴)  $45^\circ$

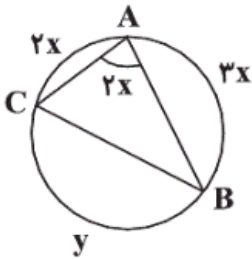
$$\widehat{AB} = 18^\circ - \widehat{DB} = 18^\circ - 11^\circ = 7^\circ$$

چون  $AB \parallel DE$  ، پس  $\widehat{DB} = \widehat{AE} = 11^\circ$  است. لذا:

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{7^\circ}{2} = 3.5^\circ$$

زاویه  $\widehat{BAC}$  زاویه‌ای ظلی است پس:

با توجه به شکل مقابل، حاصل  $y - x$  کدام است؟



- (۱)  $90^\circ$
- (۲)  $150^\circ$
- (۳)  $120^\circ$
- (۴)  $135^\circ$

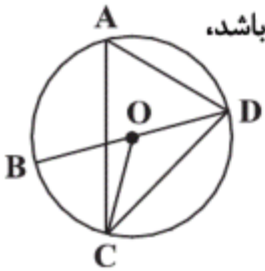
اندازه زاویه محاطی، نصف کمان روبه‌رو به آن است یعنی  $\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$  پس  $2x = \frac{y}{2}$  در نتیجه:  $y = 4x$  . با توجه به این که

$$2x + y + 3x = 360^\circ \xrightarrow{y=4x} 5x + 4x = 360^\circ$$

در هر دایره مجموع کمان‌ها برابر  $360^\circ$  است، داریم:

$$\Rightarrow 9x = 360^\circ \Rightarrow \begin{cases} x = 40^\circ \\ y = 160^\circ \end{cases} \quad y - x = 160^\circ - 40^\circ = 120^\circ$$

در شکل زیر،  $BD$  قطر دایره است. اگر  $\widehat{A} = 7\alpha - 10^\circ$  ،  $\widehat{COD} = 10\alpha + 20^\circ$  و  $O$  مرکز دایره باشد،



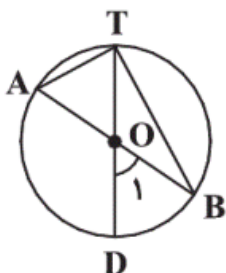
کمان  $\widehat{BC}$  چند درجه است؟

- (۱)  $15$
- (۲)  $30$
- (۳)  $45$
- (۴)  $60$

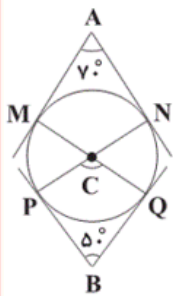
$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} &= \frac{\widehat{DC}}{2} \\ \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{COD} &= \widehat{DC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{COD}}{2} \Rightarrow \widehat{COD} = 2\widehat{A} \Rightarrow 10\alpha + 20^\circ = 2(7\alpha - 10^\circ) \Rightarrow 10\alpha + 20^\circ = 14\alpha - 20^\circ$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 40^\circ \Rightarrow \alpha = 10^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ , \quad \widehat{COD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = \widehat{BOD} = 180^\circ - \widehat{COD} = 60^\circ$$

در شکل مقابل،  $O$  مرکز دایره و  $\widehat{A} = 65^\circ$  است. اندازه زاویه  $O_1$  کدام است؟



- (۱)  $65^\circ$
- (۲)  $60^\circ$
- (۳)  $50^\circ$
- (۴)  $45^\circ$



در شکل روبه‌رو اضلاع زوایای A و B بر دایره مرسوم مماس هستند. در این صورت اندازه زاویه C کدام است؟

- ۱۰۰° (۱)
- ۱۲۰° (۲)
- ۸۰° (۳)
- ۱۴۰° (۴)

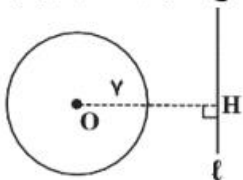
$$\left\{ \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{MPN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow 7^\circ = \frac{\widehat{MPN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{MPN} - \widehat{MN} = 14^\circ \\ \hat{B} &= \frac{\widehat{PMQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 5^\circ = \frac{\widehat{PMQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \widehat{PMQ} - \widehat{PQ} = 10^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \widehat{MN} &= \widehat{MPN} - 14^\circ \\ \widehat{PQ} &= \widehat{PMQ} - 10^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \widehat{MN} &= 36^\circ - \widehat{MN} - 14^\circ \\ \widehat{PQ} &= 36^\circ - \widehat{PQ} - 10^\circ \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \widehat{MN} &= 11^\circ \\ \widehat{PQ} &= 13^\circ \end{aligned} \right.$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{PQ} + \widehat{MN}}{2} = \frac{13^\circ + 11^\circ}{2} = \frac{24^\circ}{2} = 12^\circ$$

دایره  $(O, r)$  و خط  $l$  به فاصله  $a+1$  از مرکز آن مفروض‌اند. اگر خط  $l$  و دایره هیچ نقطه تقاطعی نداشته باشند، مقدار  $a$  کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱ (۱)
- $\frac{3}{2}$  (۲)
- ۲ (۳)
- ۳ (۴)

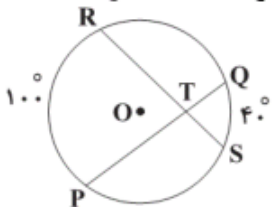
می‌دانیم زمانی خط  $l$  و دایره همدیگر را قطع نمی‌کنند که فاصله مرکز دایره تا خط مذکور، بیش‌تر از طول شعاع دایره باشد. بنابراین:



$$OH > r \Rightarrow a+1 > r \Rightarrow a > 6$$

$$\Rightarrow a > 2$$

در دایره  $C(O, r)$ ، وترهای PQ و RS با هم برابر بوده و یکدیگر را در نقطه T قطع کرده‌اند. اگر  $\widehat{RP} = 100^\circ$  و  $\widehat{QS} = 40^\circ$  باشد، اندازه زاویه OTR کدام است؟



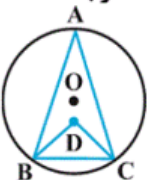
- ۷۰° (۱)
- ۳۵° (۲)
- ۳۰° (۳)
- ۴۰° (۴)

از O به وترهای RS و PQ عمود می‌کنیم و پای عمود را به ترتیب H و H' نام‌گذاری می‌کنیم. چون وترهای RS و PQ برابرند پس فاصله آن‌ها از مرکز برابر است یعنی  $OH = OH'$ . دو مثلث قائم‌الزاویه OHT و OH'T به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند (وتر OT و اضلاع OH و OH'). پس  $\hat{T}_1 = \hat{T}_2$  و در نتیجه OT نیمساز زاویه PTR است. پس:

$$\hat{O}TR = \frac{1}{2} \hat{P}TR = \frac{1}{2} (100^\circ + 40^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} (70^\circ) = 35^\circ$$

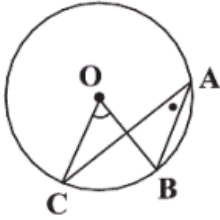
در شکل زیر، نقطه D محل تقاطع نیمسازهای دو زاویه B و C است. اگر  $\widehat{BDC} = 100^\circ$ ، آن‌گاه کمان BC چند درجه است؟



- ۲۰ (۱)
- ۸۰ (۲)
- ۶۰ (۳)
- ۴۰ (۴)

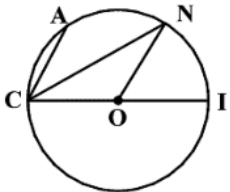


دایره  $C(O, 6)$  مفروض است. اگر  $\hat{O} = (2x + 10)^\circ$  و  $\hat{A} = (3x - 35)^\circ$  باشد، طول کمان  $BC$  کدام است؟



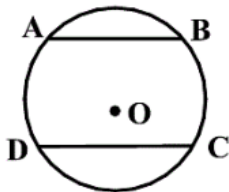
- (۱)  $\frac{5\pi}{3}$
- (۲)  $2\pi$
- (۳)  $\frac{8\pi}{3}$
- (۴)  $\frac{10\pi}{3}$

در شکل مقابل،  $CI$  قطر دایره و  $CA \parallel ON$ . اگر  $\widehat{AC} = 40^\circ$  باشد، آن گاه اندازه زاویه  $CNO$  کدام است؟ ( $O$  مرکز دایره است).



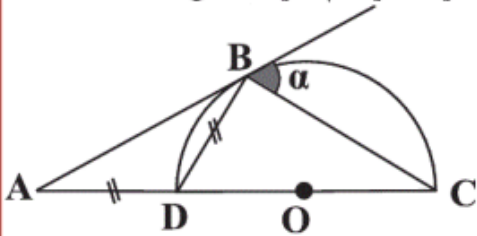
- (۱)  $27/5^\circ$
- (۲)  $30^\circ$
- (۳)  $35^\circ$
- (۴)  $32/5^\circ$

مطابق شکل زیر، در دایره به مرکز  $O$  و شعاع  $5$  واحد، دو وتر موازی  $AB = 6$  و  $CD = 8$  در طرفین مرکز دایره رسم شده‌اند. مساحت ذوزنقه  $ABCD$  کدام است؟



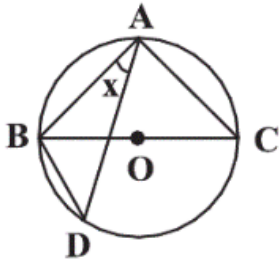
- (۱)  $56$
- (۲)  $49$
- (۳)  $42$
- (۴)  $35$

مطابق شکل در نیم‌دایره‌ای به مرکز  $O$ ، زاویه  $\alpha$  چند درجه است؟ (  $AB$  در  $B$  بر نیم‌دایره مماس است. )



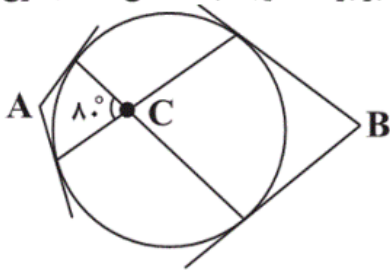
- (۱) ۴۵
- (۲) ۵۰
- (۳) ۵۵
- (۴) ۶۰

در شکل مقابل،  $AB = AC$  و  $\widehat{BD} + \widehat{AC} = 130^\circ$  می‌باشد. اندازه  $\widehat{BAD} = x$  کدام است؟ (  $O$  مرکز دایره است. )



- (۱) ۱۰°
- (۲) ۲۰°
- (۳) ۳۰°
- (۴) ۳۵°

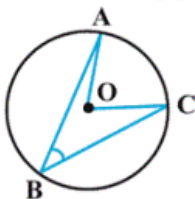
مطابق شکل از نقاط  $A$  و  $B$  بر دایره مماس‌هایی رسم می‌کنیم. اگر اندازه زاویه  $C$  برابر  $80^\circ$  درجه باشد، آن‌گاه مجموع دو



زاویه  $A$  و  $B$  چند درجه است؟

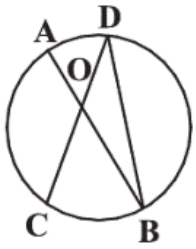
- (۱) ۸۰
- (۲) ۱۰۰
- (۳) ۱۶۰
- (۴) ۲۰۰

مطابق شکل مقابل، دایره  $C(O, 2)$  مفروض است. اگر طول کمان  $AC$  برابر  $\frac{\pi}{3}$  باشد، اندازه زاویه  $ABC$  کدام است؟



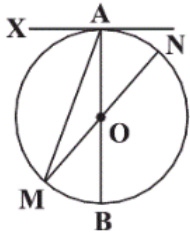
- (۱)  $22/5^\circ$
- (۲)  $45^\circ$
- (۳)  $60^\circ$
- (۴)  $75^\circ$

در شکل زیر، AB قطر دایره می‌باشد و نقاط C و D به گونه‌ای قرار دارند که  $CD = BD$ . اگر  $\widehat{AOD} = 45^\circ$  باشد، اندازه زاویه ADC کدام است؟



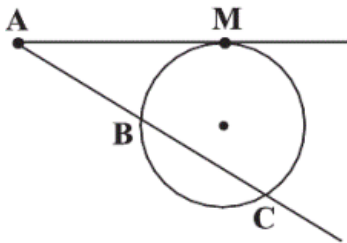
- (۱)  $75^\circ$
- (۲)  $60^\circ$
- (۳)  $30^\circ$
- (۴)  $15^\circ$

در شکل زیر، AB و MN قطرهای دایره‌ای به مرکز O هستند. اگر AX در نقطه A مماس بر دایره و  $\widehat{BN} = \widehat{AN}$  باشد، اندازه زاویه XAM کدام است؟



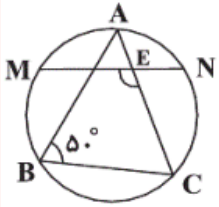
- (۱)  $80^\circ$
- (۲)  $75^\circ$
- (۳)  $60^\circ$
- (۴)  $50^\circ$

در شکل زیر، AM مماس بر دایره و  $\widehat{BC} = \widehat{CM} = \frac{3}{2}\widehat{BM}$  می‌باشد. زاویه A چند درجه است؟ (A، B و C در یک امتدادند.)



- (۱)  $22/5$
- (۲)  $35$
- (۳)  $25$
- (۴)  $32/5$

در شکل مقابل، A وسط  $\widehat{MN}$  است. اگر E محل برخورد MN با AC باشد، اندازه  $\widehat{MEC}$  کدام است؟



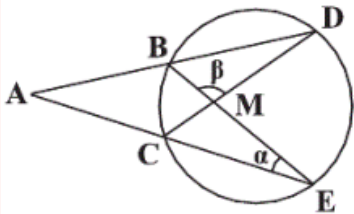
۱۰۰° (۱)

۱۵۰° (۲)

۱۳۰° (۳)

۱۰۵° (۴)

در شکل زیر، امتداد وترهای BD و CE یکدیگر را در نقطه A و وترهای BE و CD یکدیگر را در نقطه M قطع کرده‌اند. اگر  $\alpha = 20^\circ$  و  $\beta = 110^\circ$  باشد، زاویه A چند درجه است؟



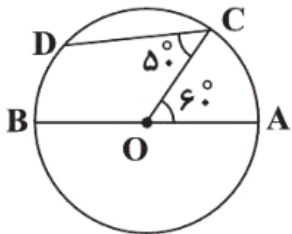
۲۰ (۱)

۲۵ (۲)

۳۰ (۳)

۳۵ (۴)

در شکل زیر، دایره‌ای به مرکز O و قطر AB مفروض است. نقاط C و D روی محیط دایره طوری قرار گرفته‌اند



که  $\widehat{AOC} = 60^\circ$  و  $\widehat{OCD} = 50^\circ$ . کمان  $\widehat{BD}$  چند درجه است؟

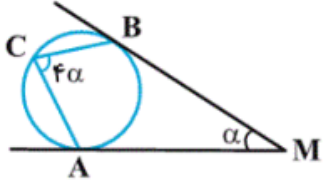
۷۰ (۱)

۶۰ (۲)

۵۰ (۳)

۴۰ (۴)

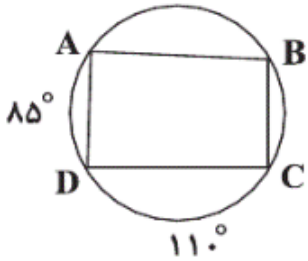
در شکل زیر،  $MA$  و  $MB$  بر دایره مماس‌اند و اندازه زوایای  $M$  و  $C$  به ترتیب برابر  $\alpha$  و  $4\alpha$  است.



مقدار  $\alpha$  چند درجه است؟

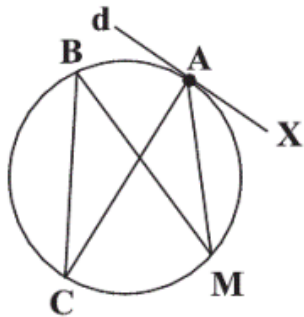
- (۱) ۲۰
- (۲) ۲۵
- (۳) ۳۰
- (۴) ۱۵

در شکل مقابل، قطرهای چهارضلعی  $ABCD$  با هم برابرند. اندازه کمان  $AB$  چند درجه می‌تواند باشد؟



- (۱) ۷۰
- (۲) ۸۰
- (۳) ۹۰
- (۴) ۸۵

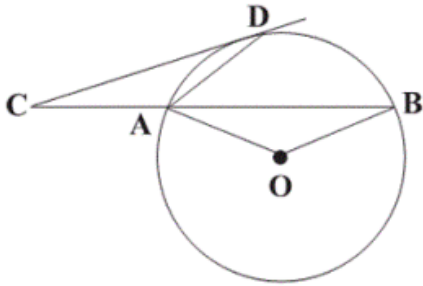
در شکل روبه‌رو، خط  $d$  در نقطه  $A$  بر دایره‌ای به قطر  $AC$  مماس است. اگر زاویه  $MAX$  برابر  $44$  درجه



باشد، اندازه زاویه  $MBC$  کدام است؟

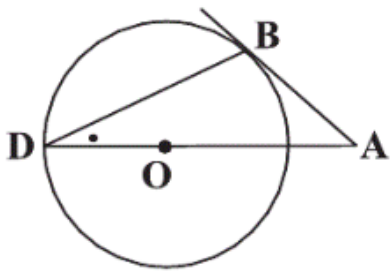
- (۱)  $42^\circ$
- (۲)  $44^\circ$
- (۳)  $46^\circ$
- (۴)  $48^\circ$

در شکل زیر  $CD$  (در نقطه  $D$ ) مماس بر دایره‌ای به مرکز  $O$  است. اگر  $AC = AD$  باشد، زاویه  $AOB$  چند برابر زاویه  $ACD$  است؟ (  $A$  ,  $B$  و  $C$  در یک امتدادند.)



- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

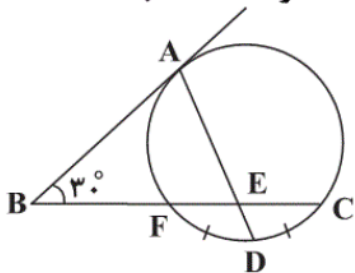
مطابق شکل در دایره  $(O, ۵)$  ، هرگاه طول مماس  $AB$  برابر ۵ باشد، اندازه زاویه  $D$  کدام است؟



(  $D$  محل برخورد امتداد  $AO$  با دایره است.)

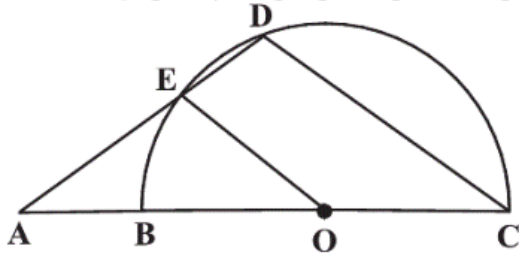
- (۱)  $۳۰^\circ$
- (۲)  $۴۵^\circ$
- (۳)  $۶۰^\circ$
- (۴)  $۲۲/۵^\circ$

در شکل زیر، نیم خط  $BA$  در نقطه  $A$  بر دایره مماس است و  $\widehat{FD} = \widehat{DC}$ . اگر  $\hat{B} = ۳۰^\circ$  باشد،  $\hat{AEC}$  کدام است؟



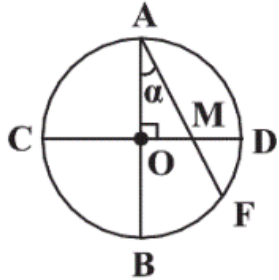
- (۱)  $۱۱۵^\circ$
- (۲)  $۱۱۰^\circ$
- (۳)  $۱۰۵^\circ$
- (۴)  $۱۰۰^\circ$

در شکل زیر، امتداد قطر BC و وتر DE یکدیگر را در نقطه A قطع نموده‌اند. اگر O مرکز نیم‌دایره و  $\widehat{BE} = 30^\circ$  باشد، زاویه A کدام است؟ ( $OE \parallel CD$ )



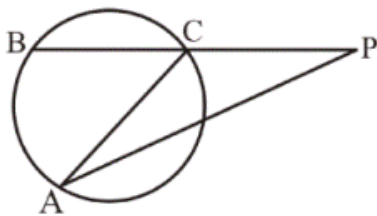
- (۱)  $25^\circ$
- (۲)  $35^\circ$
- (۳)  $45^\circ$
- (۴)  $30^\circ$

در شکل زیر،  $OM = MF$  و دو قطر AB و CD بر هم عمودند. در این صورت اندازه زاویه  $\alpha$  چند درجه است؟



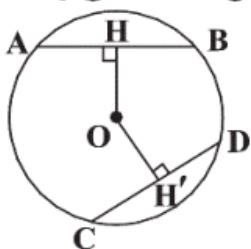
- (۱)  $30^\circ$
- (۲)  $45^\circ$
- (۳)  $50^\circ$
- (۴)  $60^\circ$

در شکل زیر، اگر  $\hat{P} = 32^\circ$  و مثلث ACP متساوی‌الساقین باشد ( $AC = CP$ )، کمان AB چند درجه است؟



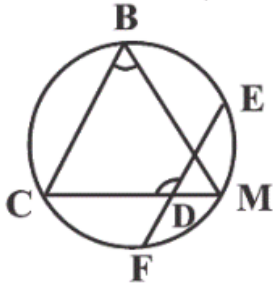
- (۱) ۶۹
- (۲) ۷۴
- (۳) ۸۶
- (۴) ۱۲۸

در دایره مقابل،  $OH < OH'$  و داریم  $AB = 2x - 1$  و  $CD = 3 - x$ . مقدار x چند عدد صحیح مختلف می‌تواند باشد؟



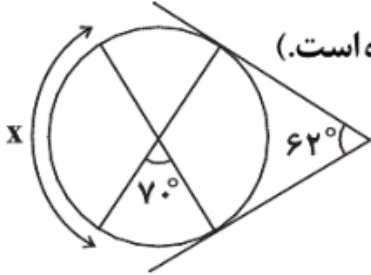
- (۱) هیچ
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

در شکل مقابل،  $M$  وسط کمان  $EF$  و  $\widehat{BC} = 50^\circ$  است. حاصل  $\hat{B} + \hat{D}$  کدام است؟



- (۱)  $160^\circ$
- (۲)  $175^\circ$
- (۳)  $180^\circ$
- (۴)  $230^\circ$

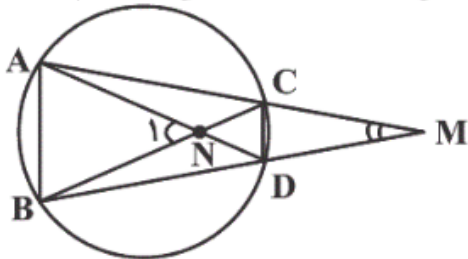
در شکل زیر، زاویه بین دو مماس و زاویه بین دو وتر درون دایره به ترتیب برابر با  $62^\circ$  و  $7^\circ$  می باشد،



اندازه کمان  $x$  کدام است؟ (محل برخورد مماس ها با وترها روی محیط دایره است.)

- (۱)  $110^\circ$
- (۲)  $102^\circ$
- (۳)  $105^\circ$
- (۴)  $98^\circ$

در شکل مقابل،  $AB$  ضلع یک هشت ضلعی منتظم و  $CD$  ضلع یک دوازده ضلعی منتظم محاط



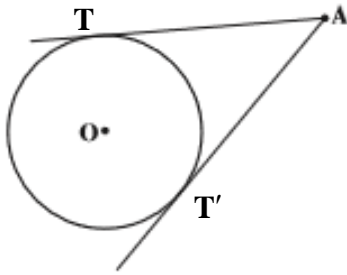
در دایره می باشند. حاصل  $|\hat{M} - \hat{N}|$  کدام است؟

- (۱) ۴۵ درجه
- (۲) ۴۰ درجه
- (۳) ۳۵ درجه
- (۴) ۳۰ درجه



خطوط مماس بر دایره

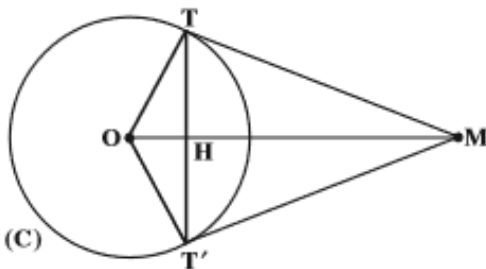
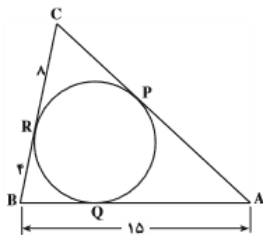
اگر از نقطه ای خارج از دایره دو خط بر دایره مماس کنیم، قطعا طول این مماس ها با هم برابر است و روابطی را در دایره ایجاد می کند.



$$AT = AT'$$

مثال

در شکل زیر ضلع های مثلث  $\triangle ABC$  در نقطه های  $R, P, Q$  بر دایره مماس اند. با توجه به مقدارهای داده شده، ضلع  $AC$  را به دست آورید.



•  $OM$  نیمساز  $\hat{O}$  و نیمساز  $\hat{M}$  است.

•  $OM$  عمود منصف  $TT'$  است.

$$OH \times OM = R^2$$

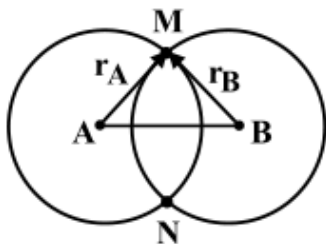
$$TT'^2 = 4OH \times MH$$

$$TT' \times OM = 2R \times MT$$

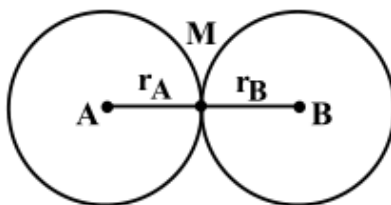
$$MT = MT'$$

وضعیت دو دایره نسبت به هم

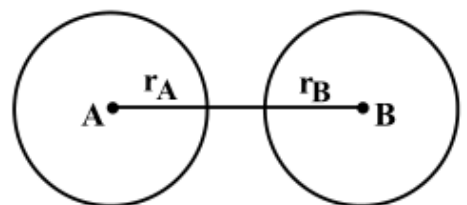
باید فاصله ی دو مرکز را به دست آورده (خط المرکزین) و  $AB$  بنامیم و آن را با جمع و تفاضل دو شعاع مقایسه کنیم.



طول  $r_A + r_B > AB$   
(مساله ۲ جواب دارد)



طول  $r_A + r_B = AB$   
(مساله ۱ جواب دارد)



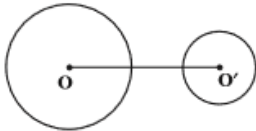
طول  $r_A + r_B < AB$   
(مساله جواب ندارد)

یادآوری

فاصله ی دو مرکز همان فاصله ی دو نقطه است که اگر  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  باشد، از رابطه ی

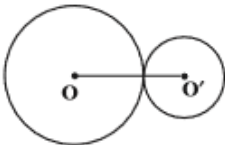
$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

زیر به دست می آید:



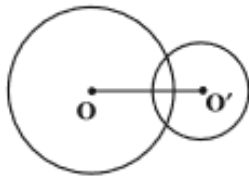
$$d > R + R'$$

«متخارج»:



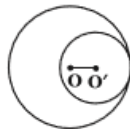
$$d = R + R'$$

«مماس خارج»:



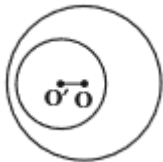
$$|R - R'| < d < R + R'$$

«متقاطع»:



$$d = |R - R'|$$

«مماس داخل»:



$$d < |R - R'|$$

«متداخل»:



$$d = 0$$

«هم مرکز»:

مثال

اگر دو دایره را به مراکز  $O(2, -3)$  و  $O'(1, 4)$  داشته باشیم، شعاع دایره ی اول ۲ و شعاع دایره ی دوم ۳ باشد، دو دایره در چه وضعیتی نسبت به هم قرار دارند؟

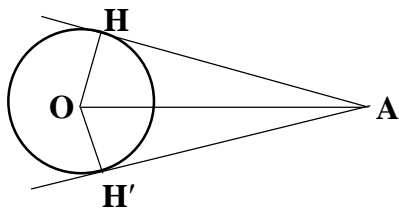
$$R = 2, R' = 3$$

$$d = \sqrt{(1-2)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$d = 5\sqrt{2}, R + R' = 5 \rightarrow d > R + R' \quad \text{متخارج}$$

قضیه

ثابت کنید طول مماس های رسم شده از نقطه خارج از دایره بر دایره، با هم برابرند.

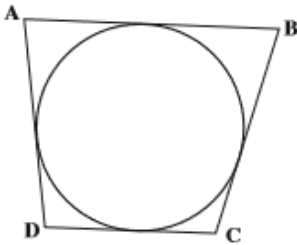


$$\begin{cases} OH = OH' \\ \angle H = \angle H' = 90^\circ \rightarrow AH = AH' \\ AO = AO \end{cases}$$

چندضلعی های محیطی

چندضلعی که همه ی اضلاع آن بر دایره ای مماس باشد، چندضلعی محیطی است و به آن دایره،

دایره ی محاطی گوئیم.



نکته

در هر چهارضلعی محیطی، جمع اضلاع مقابل با هم برابر است.

$$\longleftrightarrow AB + DC = BC + AD \text{ چهارضلعی محیطی}$$

نکته

یک چهارضلعی محیطی است اگر نیمسازهای زوایای داخلی در یک نقطه هم رس باشند. (آن نقطه

مرکز دایره ی محاطی است.)

در بین چهارضلعی های معروف فقط مربع و لوزی همواره محیطی هستند.

شرط لازم و کافی برای این که یک دوزنقه محیطی باشد، آن است که:

$$(\underline{2R})^2 = AB \times CD$$

ارتفاع

تمرین

یک دوزنقه ی متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع ۳ محیط است، اگر مساحت دوزنقه ۴۵ باشد،

طول ساق آن کدام است؟

$$S = 45$$

$$45 = \frac{1}{2}(a+b) \times 6 \rightarrow 45 = 3(a+b) \rightarrow a+b = 15 \div 2 = 7.5$$

$$\text{قاعده بزرگ} + \text{قاعده کوچک} = AD + BC \rightarrow a+b = AD + BC$$

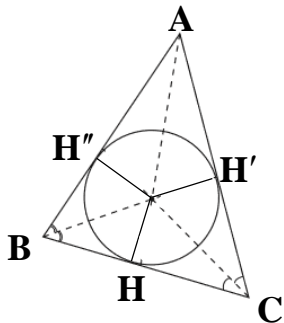
$$15 = AD + BC \rightarrow AD = BC = 7.5$$

دایره محاطی مثلث

قبلا در رابطه با دایره ی محاط مثلث توضیح داده بودیم شعاع آن  $r = \frac{S}{P}$  بود و

و همچنین گفتیم که هر مثلث سه دایره محاطی خارجی دارد  $OH = OH' = OH''$

که شعاع های آن ها برابر است با: (S مساحت مثلث و P نصف محیط است)

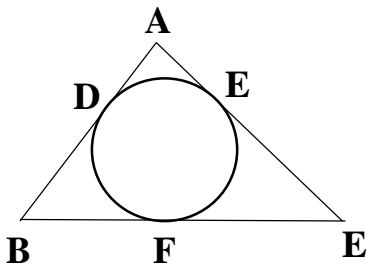


دایره بر ضلع مثلث به طول مماس است  $r_a = \frac{S}{P-a}$

دایره بر ضلع مثلث به طول مماس است  $r_b = \frac{S}{P-b}$

دایره بر ضلع مثلث به طول مماس است  $r_c = \frac{S}{P-c}$

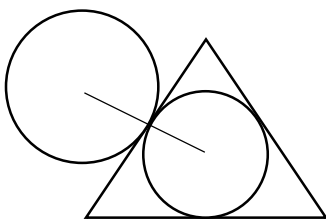
محاسبه ی هر قطعه که دایره محاطی داخلی مثلث روی اضلاع آن جدا می کند برابر است با نصف محطی منهای اندازه ی ضلع مقابل به زاویه ی رأس.



$$\begin{cases} AD = AE = P - a \\ BD = BF = P - b \\ CE = CF = P - c \end{cases}$$

مثال

در مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع  $\sqrt{3}$  ، طول خط المرکزین دو دایره ی محاطی داخلی و



محاطی خارجی آن کدام است؟

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3a}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3})^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times 3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}$$

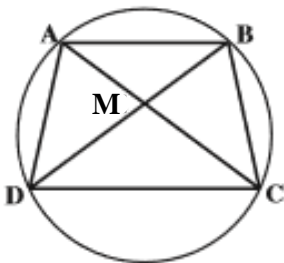
$$r' = \frac{S}{P-a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{3a}{2} - a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3})^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times 3}{\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$r + r' = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

چندضلعی محاطی

اگر همه رأس های چندضلعی روی دایره قرار داشته باشند، آن چندضلعی را محاطی می گوئیم و به

آن دایره، دایره ی محیطی چندضلعی گفته می شود.



- مرکز دایره ی محیطی چندضلعی، محل برخورد عمودمنصف های اضلاع آن چندضلعی است.
- اگر در یک چهارضلعی زاویه های روبرو مکمل باشند، چهارضلعی محاطی است و برعکس.
- یک چهارضلعی محاطی است اگر:

$$\overset{\wedge}{A} + \overset{\wedge}{C} = \overset{\wedge}{B} + \overset{\wedge}{D} = 180^\circ$$

$$\begin{cases} MA \times MC = MB \times MD \\ AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD \end{cases}$$

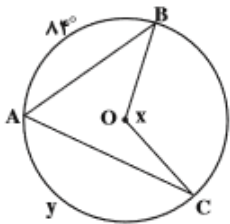
### مثال

دو زاویه ی مجاور یک چهارضلعی محاطی  $80^\circ$  و  $120^\circ$  درجه می باشند. تفاضل دو زاویه دیگر چقدر

$$100^\circ - 60^\circ = 40^\circ \quad \text{است؟}$$

### چند مسئله از کتاب درسی

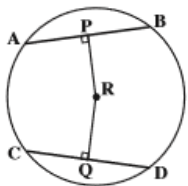
۱- در شکل روبرو:



الف) اگر  $\widehat{B} = 140^\circ$ ، آن گاه اندازه ی زاویه  $\widehat{X}$  را به دست آورید.

ب) اگر  $\widehat{X} = 165^\circ$  آن گاه اندازه ی کمان  $\widehat{AC}$  را به دست آورید.

۲- با توجه به شکل روبرو:



الف) اگر طول شعاع  $10$  و  $PR = 6$  آن گاه طول  $AP$ ،  $AB$  را به دست آورید.

$$r^2 = 36 + AP^2 \rightarrow r^2 = 100 \rightarrow AP^2 = 100 - 36 \rightarrow AP = 8 \rightarrow 2AP = 16$$

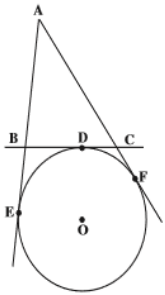
باشد، آن گاه طول پاره خط های

ب) اگر  $CQ = RQ, RC = \sqrt{2}$

$$2x^2 = 2 \rightarrow x = 1$$

$CD, DQ, CQ$  را به دست آورید.

۳- خط های  $AE$ ,  $AF$ ,  $BC$  به ترتیب در نقاط  $E$ ,  $F$ ,  $D$  بر دایره  $O$  مماس هستند. مماس  $BC$ , خط های  $AE$ ,  $AF$  را به ترتیب در نقاط  $B$ ,  $C$  قطع کرده است. ثابت کنید با تغییر مکان



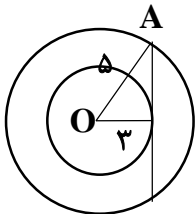
نقطه ی  $D$  روی دایره بین دو نقطه ی

ثابت  $E$ ,  $F$  محیط مثلث  $\triangle ABC$  ثابت می ماند.

$$\begin{aligned} \text{محیط مثلث } \triangle ABC &= AB + BC + AC = AB + (BD + DC) + AC = \\ &= AB + EB + CF + AC = AE + AF \xrightarrow{AE=AF} \\ &= AE + AE = 2AE = 2AF \end{aligned}$$

بنابراین محیط به نقطه ی  $D$  بستگی ندارد و جابه جایی تأثیری در آن نخواهد داشت.

۴- شعاع های دو دایره ی هم مرکز  $3$  و  $5$  سانتی متر هستند. اندازه ی وتر ی از دایره بزرگتر که بر دایره ی کوچکتر مماس است را پیدا کنید.



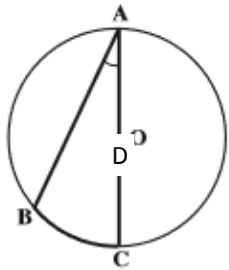
$$OH^2 + AH^2 = OA^2$$

$$9 + AH^2 = 25$$

$$AH^2 = 16 \rightarrow AH = 4 \rightarrow AA' = 2 \times AH = 2 \times 4 = 8$$

### قضیه

ثابت کنید اندازه ی زاویه ی محاطی نصف کمان روبه روی آن است. این قضیه در  $3$  حالت اثبات می شود:



الف) یکی از اضلاع زاویه از مرکز دایره عبور کند.

از مرکز دایره به نقطه ی  $B$  وصل می کنیم تا مثلث  $OAB$  به دست آید:

$$\text{حکم } A_1 = \frac{BD}{2}$$

$$\text{متساوی الساقین } \triangle OAB : OA = OB = r \rightarrow B_1 = A_1$$

$$O_1 = A_1 + B_1 \rightarrow O_1 = 2A_1 \rightarrow O_1 = BD = 2A_1 \rightarrow A_1 = \frac{BD}{2}$$

ب) دو ضلع زاویه در یک طرف مرکز باشند.

از رأس  $A$  قطر گذرنده از مرکز را رسم می کنیم و از مرکز به نقطه ی  $B$  رسم می کنیم:

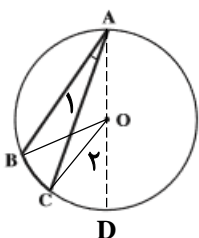
$$O_1 = A + B_1 \xrightarrow{OA=OB=r} O_1 = 2A \rightarrow BD = 2A \rightarrow A = \frac{BD}{2} \quad (1)$$

سپس از مرکز دایره به نقطه ی  $C$  وصل می کنیم آن گاه چون مثلث  $ACD$  متساوی الساقین است:

$$OA = OC = r \rightarrow C_1 = A_r$$

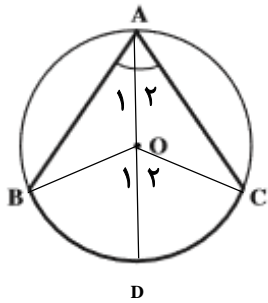
$$O_r = A_r + C_1 = 2A_r \Rightarrow CD = 2A_r \Rightarrow A_r = \frac{CD}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A - A_r = \frac{BD}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2} \rightarrow A_1 = \frac{BC}{2}$$



پ) دو ضلع زاویه در دو طرف مرکز باشند

از رأس A قطر گذرنده از مرکز را رسم می کنیم. سپس از B, C به مرکز وصل می کنیم. آن گاه:



$$\triangle OAB : OA = OB = r \rightarrow A_1 = B$$

زاویه خارجی  $O_1 = A_1 + B = 2A_1 \rightarrow A_1 = \frac{O_1}{2} = \frac{BD}{2} \quad (1)$

$$\triangle OAC : OA = OC = r \rightarrow A_2 = C$$

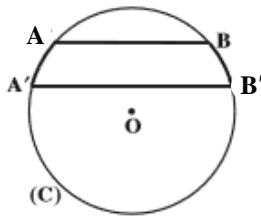
زاویه خارجی  $O_2 = A_2 + C = 2A_2 \rightarrow A_2 = \frac{O_2}{2} = \frac{CD}{2} \quad (1)$

$$A = A_1 + A_2 \xrightarrow{(1),(2)} A = \frac{BD}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2}$$

### قضیه

ثابت کنید در هر دایره کمان های محصور بین وترهای موازی با هم برابرند.

از A به B' وصل می کنیم سپس خواهیم داشت:

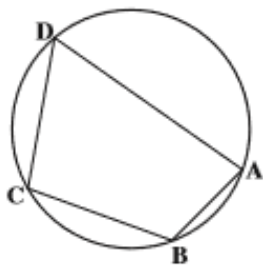


$$AB \parallel A'B', AB' \text{ مورب} \rightarrow B_1 = A_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{محاطی } A_1 = \frac{BB'}{2} \\ \text{محاطی } B_1 = \frac{AA'}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{BB'}{2} = \frac{AA'}{2} \Rightarrow AA' = BB'$$

### قضیه

ثابت کنید در چهارضلعی محاطی زوایای روبرو مکمل اند.

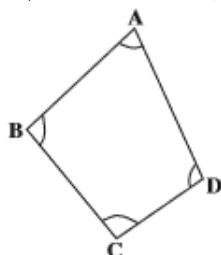
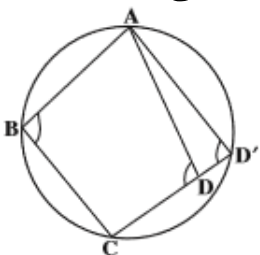


$$\left. \begin{array}{l} \text{محاطی } A = \frac{BCD}{2} \\ \text{محاطی } C = \frac{BAD}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} A + C = \frac{BCD + BAD}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{محاطی } B = \frac{ADC}{2} \\ \text{محاطی } D = \frac{ABC}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} B + D = \frac{ADC + ABC}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

### عکس قضیه

ثابت کنید هر گاه در یک چهارضلعی زوایای روبرو مکمل باشند، آنگاه چهارضلعی محاطی است.



### اثبات

می دانیم از هر سه نقطه حتما یک دایره می گذرد. بنابراین از سه نقطه ی  $A, B, C$  دایره ای عبور می دهیم و فرض می کنیم این دایره از نقطه ی  $D$  عبور نمی کند.  $CD$  را ادامه می دهیم تا دایره را در

قطع کند آن گاه خواهیم داشت: چون  $ABCD'$  محاطی است:

$$\left. \begin{array}{l} B + D' = 180 \\ B + D = 180 \end{array} \right\} \rightarrow D = D' (1)$$

از طرفی طبق شکل  $D$  زاویه ی خارجی  $\triangle AD'D$  می باشد:

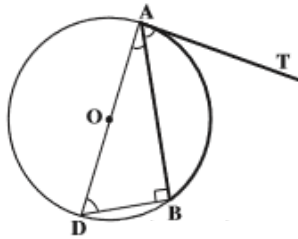
$$D = A + D' \rightarrow D > D' (2)$$

طبق رابطه ی (1) و (2) به تناقض در فرض اولیه می رسیم. پس چهار نقطه روی یک دایره اند.



قضیه

ثابت کنید اندازه ی زاویه ی ظلی نصف کمان روبروی آن است.

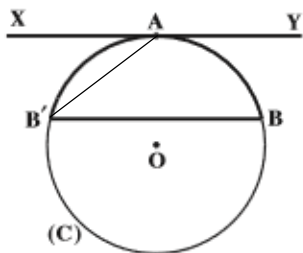


$$\left. \begin{aligned} B = 90^\circ \rightarrow A_2 + D = 90^\circ \\ AT \rightarrow A_1 + A_2 = 90^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow A_1 = D(1)$$

$$D = \frac{AB}{2} \xrightarrow{(1)} A_1 = \frac{AB}{2}$$

تمرین

خط XY در نقطه ی A بر دایره ی C مماس است. وتر BB' از دایره را موازی XY رسم کرده ایم. ثابت کنید:  $AB = AB'$



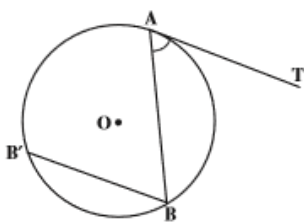
از A به B وصل می کنیم:

$$xy \parallel BB', AB' \rightarrow A_1 = B_1(1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ظلی } A_1 = \frac{AB'}{2} \\ \text{محاطی } B_1 = \frac{AB}{2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(1)} \frac{AB'}{2} = \frac{AB}{2} \rightarrow AB' = AB$$

تمرین

زاویه ی ظلی TAB در دایره به مرکز O داده شده است. به کمک خط BB' که موازی خط مماس AT رسم شده است ثابت کنید:  $TAB = \frac{AB}{2}$



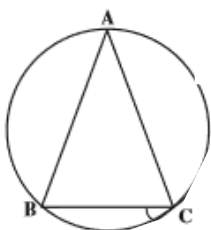
$$AT \parallel BB', AB \rightarrow A_1 = B_1(1)$$

$$B_1 = \frac{AB'}{2} \xrightarrow{(1)} A_1 = \frac{AB'}{2} \rightarrow A_1 = \frac{AB}{2}$$

کمان بین وترهای مساوی باهم برابرند

تمرین

با استفاده از تعریف زاویه ی محاطی نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است. از هر نقطه غیر واقع بر یک خط یک دایره می گذرد.



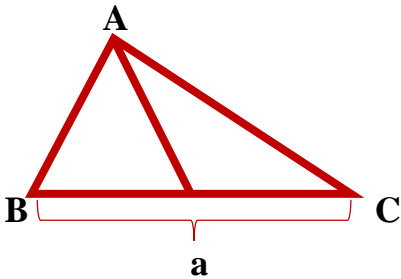
$$A = \frac{BC}{2}, B = \frac{AC}{2}, C = \frac{AB}{2}$$

$$A + B + C = \frac{BC}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{BC + AC + AB}{2} = \frac{360}{2} = 180^\circ$$

تمرین

در مثلث  $\triangle ABC$  ضلع  $BC = a$ ,  $\angle A = \alpha$  و میانه  $AM = ma$  داده شده است. مثلث را رسم کنید: پاره خط  $BC$  را به اندازه  $\alpha$  مفروض کشیده و سپس عمود منصف  $BC$  را رسم می کنیم و نقطه ای دلخواه مانند  $P$  روی آن در نظر می گیریم. نیم خط  $Px$  را طوری کشیده که با عمود منصف زاویه  $\alpha$  بسازد و سپس از نقاط  $B, C$  دو خط موازی  $Px$  تا نقاط  $O$  و  $O'$  که محل برخورد این خطوط با عمود منصف است به دست آید سپس به مرکز  $O$  و شعاع  $OB$  دایره ای رسم کرده که کمان بزرگتر کمان درخور زاویه  $\alpha$  وابسته به پاره خط  $BC$  می باشد.

نقطه  $M$  را وسط  $BC$  اختیار کرده سپس به مرکز  $M$  و شعاع  $AM$  کمانی زده تا کمان درخور را در نقاط  $A$  و  $A'$  قطع کند مثلث های  $ABC$  و  $AB'C$  جواب مسئله اند. با توجه به اینکه همین کارها را در کمان درخور پایین  $BC$  نیز می توان انجام داد مسئله حداکثر ۴ جواب دارد ولی یک جواب آن منحصر به فرد است.



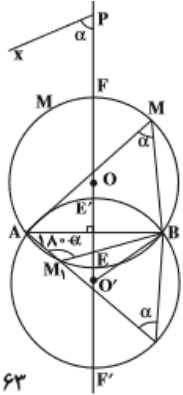
کمان درخور یک زاویه  $\alpha$  وابسته به یک پاره خط

مکان هندسی رأس زاویه ای که دو ضلع آن از دو نقطه ی ثابت می گذرند، کمان هایی از دو دایره ی مساوی است که از آن دو نقطه ی ثابت می گذرند و زاویه ی مرکزی روبه رو به وتر مشترک برابر  $2\alpha$  می باشد.

ابتدا پاره خط  $BC$  را به اندازه  $\alpha$  داده شده رسم کرده و سپس عمود منصف آن را کشیده و نقطه ی دلخواه  $P$  را روی آن اختیار کرده و نیم خط  $Px$  را طوری رسم می کنیم که با عمود منصف زاویه  $\alpha$  بسازد. سپس از نقاط  $B, C$  دو نیم خط به موازات  $Px$  رسم کرده تا عمود منصف را در نقاط  $O$  و  $O'$  قطع کند.

چهارضلعی  $BOCO'$  لوزی است. (زیرا قطرهای آن بر هم عمودند و یکدیگر را نصف می کنند)، بنابراین زاویه ی  $O$  و  $O'$  برابر  $2\alpha$  می باشند، حال به مرکز  $O$  و  $O'$  و به شعاع  $OB$  دو دایره رسم کرده به طوری که از  $B, C$  بگذرند.

کمان BFC, BEC مکان هندسی رأس A می باشند و بالعکس اگر نقطه ی A روی این دو کمان نباشد، در این صورت یا خارج از این دو کمان است و یا داخل، خواهیم داشت:



غیر قابل قبول  $A' > \alpha$  خارجی  
غیر قابل قبول  $\alpha > A''$

## تست های آموزشی

شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{3}$       (۲) ۳      (۳)  $2\sqrt{3}$       (۴)  $3\sqrt{3}$

اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P، شعاع دایره محاطی داخلی برابر r باشد، داریم: (\*)  $S = rP$

از طرفی برای مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۶ داریم:

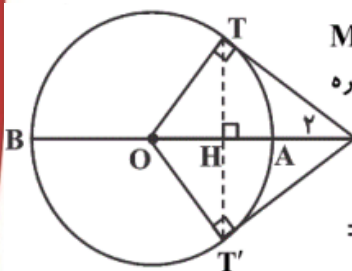
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (6)^2 = 9\sqrt{3}$$

$$2P = 3 \times 6 \Rightarrow P = 9$$

(\*)  $\rightarrow 9\sqrt{3} = r \times 9 \Rightarrow r = \sqrt{3}$

کمترین و بیشترین فاصله نقطه M تا دایره‌ای به ترتیب ۲ و ۱۸ واحد است. اگر بتوانیم از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، فاصله دو نقطه تماس از یکدیگر کدام است؟

- (۱)  $4/8$       (۲) ۵      (۳)  $9/6$       (۴) ۱۰



در مثلث قائم الزاویه OTM:

$$MT^2 = MA \times MB = 2 \times 18 = 36 \Rightarrow MT = 6$$

شعاع دایره  $r = OT = OA = 8$  (شعاع دایره)  $\Rightarrow$  قطر دایره  $= 18 - 2 = 16$

$$OM = OA + AM = 10$$

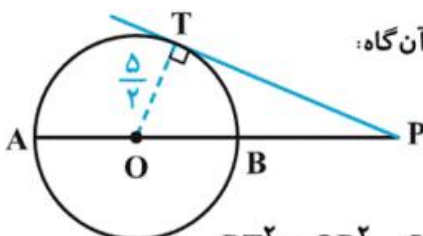
$$TH \times OM = OT \times MT \Rightarrow TH = \frac{OT \times MT}{OM} \Rightarrow TH = \frac{8 \times 6}{10} = 4/8$$

$$\Rightarrow TT' = 2TH = 2 \times 4/8 = 9/6$$

فاصله دورترین نقطه دایره‌ای از نقطه P برابر ۹ سانتی متر و فاصله P تا مرکز این دایره  $\frac{13}{2}$  سانتی متر است. طول مماس مرسوم از نقطه P بر این دایره کدام است؟

- (۱)  $3\sqrt{2}$       (۲) ۶      (۳)  $\sqrt{13}$       (۴)  $\sqrt{6}$

طبق فرض‌های مسئله  $PA = 9$  و  $PO = \frac{13}{2}$  است، پس اگر شعاع دایره برابر R باشد، آن گاه:

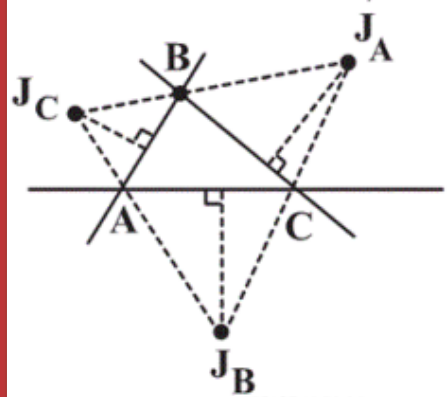


$$R = OA = AP - OP = 9 - \frac{13}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow OT = R = \frac{5}{2}$$

در مثلث قائم الزاویه OTP با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$PT^2 = OP^2 - OT^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{169 - 25}{4} = \frac{144}{4} = 36 \Rightarrow PT = 6$$

مطابق شکل، نیمسازهای خارجی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. اگر طول عمودهای مشخص شده ۲، ۳ و ۶ باشند، اندازه شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC کدام است؟

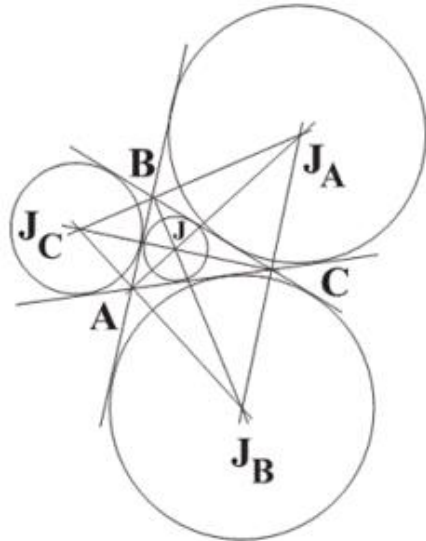


۰/۵ (۱)

۰/۷۵ (۲)

۱ (۳)

۱/۵ (۴)



محل برخورد نیمسازهای خارجی، مرکز دایره محاطی خارجی مثلث می‌باشد. اندازه عمودهای مشخص شده در شکل، در واقع شعاع دایره‌های محاطی خارجی مثلث مفروض است. طبق تمرین ۵ صفحه ۲۹ کتاب درسی، با داشتن طول شعاع دایره‌های محاطی خارجی می‌توان شعاع دایره محاطی داخلی را به دست آورد، بنابراین:

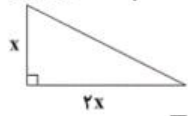
$$\begin{cases} r_a = 6 \\ r_b = 3 \\ r_c = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{6}{6} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = 1$$

اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول یکی از اضلاع زاویه قائمه دو برابر دیگری باشد، نسبت شعاع دایره محاطی داخلی به شعاع دایره محاطی خارجی متناظر با وتر کدام است؟

(۱)  $\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$  (۲)  $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$  (۳)  $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$  (۴)  $\frac{5 - \sqrt{3}}{5 + 5\sqrt{3}}$

طول وتر =  $\sqrt{x^2 + (2x)^2} = \sqrt{5}x$



$$P = \frac{x + 2x + \sqrt{5}x}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}x$$

$$P - a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}x - \sqrt{5}x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x$$

در هر مثلث شعاع دایره محاطی داخلی از رابطه  $r = \frac{S}{P}$  و شعاع دایره محاطی خارجی رو به ضلع a از رابطه  $r_a = \frac{S}{P - a}$  به دست می‌آید

که S مساحت مثلث و P نصف محیط آن است. اگر طول اضلاع زاویه قائمه مثلث را x و 2x فرض کنیم، طبق قضیه فیثاغورس، طول وتر آن به دست می‌آید:

$$\frac{\text{شعاع دایره محاطی داخلی}}{\text{شعاع دایره محاطی خارجی وتر}} = \frac{\frac{S}{P}}{\frac{S}{P - a}} = \frac{P - a}{P} = \frac{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}x}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}x} = \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \times \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{9 + 5 - 6\sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{14 - 6\sqrt{5}}{4} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$$

در مثلث ABC اگر  $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$  و  $a^2 + b^2 + c^2 = 40$  باشد، شعاع دایره محیطی مثلث کدام است؟

۱ (۱) ۴ (۲)

۳ (۳)  $\sqrt{5}$  (۴)  $\sqrt{3}$

در یک مثلث قائم الزاویه، دایره محاطی داخلی در نقطه تماس با وتر، آن را به دو قطعه به طول های ۳ و ۱۰ واحد تقسیم می کند. اندازه شعاع دایره محاطی خارجی نظیر رأس قائمه کدام است؟

۱ (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۳۰

شعاع دایره محاطی درونی مثلث قائم الزاویه ای که طول وتر آن برابر ۷ و محیط آن برابر ۱۵ می باشد، کدام است؟

۱ (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $\frac{3}{2}$  (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{3}{4}$

در یک دوزنقه محیط بر دایره، طول خط واصل بین وسط‌های دو ساق آن ۱۲ واحد است. محیط دوزنقه کدام است؟

- ۳۶ (۱)      ۴۴ (۲)      ۴۶ (۳)      ۴۸ (۴)

در یک دوزنقه قائم‌الزاویه محیطی، اندازه قاعده کوچک ۷ و طول ساق قائم آن ۹ است. طول قاعده بزرگ این دوزنقه کدام است؟

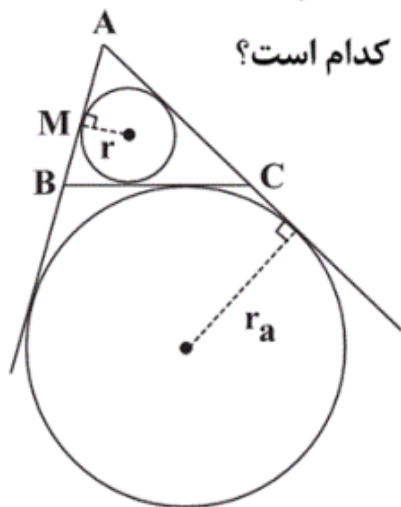
- ۱۲ (۱)      ۱۲/۵ (۲)      ۱۲/۶ (۳)      ۱۲/۸ (۴)

شعاع دایره محاطی داخلی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ کدام است؟

- $\sqrt{3}$  (۱)      ۳ (۲)       $2\sqrt{3}$  (۳)       $3\sqrt{3}$  (۴)

در شکل زیر، مثلث  $ABC$  و دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی آن رسم شده‌اند.

اگر  $AM = 2$ ،  $BC = 7$  و  $S_{\Delta ABC} = 6\sqrt{6}$  باشد، حاصل  $rr_a$  کدام است؟

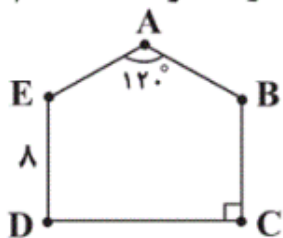


- ۶ (۱)  
۸ (۲)  
۱۰ (۳)  
۱۲ (۴)

مجموع زوایای داخلی یک  $n$  ضلعی منتظم برابر  $720^\circ$  است. اگر محل‌های تماس  $n$  ضلعی و دایرهٔ محاطی آن را متوالیاً به هم وصل کنیم، مساحت شکل جدید چقدر با مساحت شکل اولیه تفاوت دارد؟ (طول هر ضلع  $n$  ضلعی برابر ۴ است).

- ۹ (۴)                       $6\sqrt{3}$  (۳)                       $3\sqrt{3}$  (۲)                      ۶ (۱)

در پنج‌ضلعی محاطی  $ABCDE$ ، اگر اندازهٔ ضلع  $DE$  برابر ۸ باشد، اندازهٔ قطر  $BD$  کدام است؟



- ۱۲ (۲)                      ۱۰ (۱)  
۱۶ (۴)                      ۱۴ (۳)

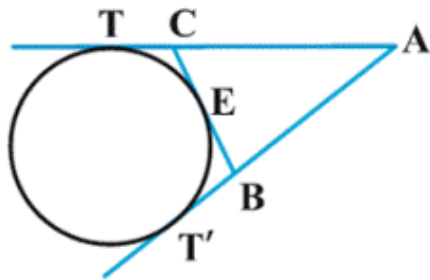
در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )، دایره محاطی خارجی نظیر رأس  $A$  بر امتداد اضلاع  $AB$  و  $AC$  به ترتیب در  $T$  و  $T'$  مماس شده است. اندازه  $TT'$  کدام است؟ ( $AB = 3$  و  $AC = 4$ )

(۱)  $6\sqrt{2}$       (۲)  $\sqrt{3}$       (۳)  $3\sqrt{2}$       (۴)  $6\sqrt{3}$

در یک چندضلعی محیطی به مساحت ۸۴، اگر طول شعاع دایره محاطی برابر ۳ باشد، آن گاه مجموع طول اضلاع کدام است؟

(۱) ۲۸      (۲) ۵۶      (۳) ۳۰      (۴) ۶۰

از نقطه ثابت  $A$  دو مماس  $AT$  و  $AT'$  بر دایره ای ثابت رسم شده اند و پاره خط متغیر  $BC$  بر دایره مماس است، به طوری که نقطه  $B$  همواره روی  $AT'$  و نقطه  $C$  همواره روی  $AT$  قرار دارد. محیط مثلث  $ABC$ ، کدام است؟



(۱)  $\frac{2}{3}AT$

(۲)  $AT$

(۳)  $\frac{3}{2}AT$

(۴)  $2AT$



دو دایره هم‌مرکز  $C_1$  و  $C_2$  را در نظر بگیرید. اگر خط  $d$  بر  $C_1$  مماس باشد و هم‌زمان دایره  $C_2$  را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع کند، به طوری که  $AB = 24$  و اختلاف شعاع دو دایره برابر ۸ باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر کدام است؟

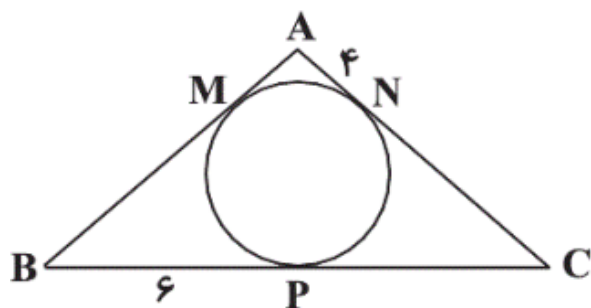
۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

مطابق شکل زیر، دایره محاطی مثلث  $ABC$  ( $AB = AC$ ) رسم شده است. با توجه به اندازه‌های مشخص شده، شعاع این دایره کدام است؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

در مثلثی به اضلاع ۴، ۵ و ۷، نسبت مساحت کوچک‌ترین دایره محاطی خارجی به مساحت دایره محاطی داخلی کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳)  $\frac{۶۴}{۹}$  (۴) ۶۴

دو دایره  $C(O, ۱۷)$  و  $C'(O, ۱۰)$  مفروضند. خط قاطع  $d$  که در دایره  $C$  وترى به طول  $۳۰$  به وجود می‌آورد، در دایره  $C'$  وترى با کدام طول پدید می‌آورد؟

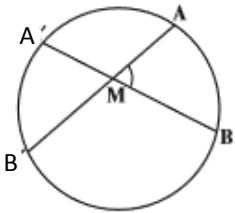
- (۱) ۱۵ (۲) ۱۲ (۳) ۱۰ (۴) ۸

در دایره‌ای به مساحت  $۴\pi\sqrt{۳}$ ، مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط شده است. مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) ۶ (۲)  $۷/۵$  (۳) ۸ (۴) ۹

روابط طولی در دایره

قضیه: اگر از یک نقطه داخل دایره دو وتر رسم کنیم، حاصل ضرب قطعات یک وتر برابر است با



حاصل ضرب قطعات روی وتر دیگر.  $MA \times MB = MA' \times MB'$

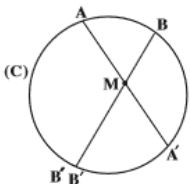
$$\begin{cases} A = A' = \frac{BB'}{2} \\ B = B' = \frac{AA'}{2} \end{cases} \xrightarrow{\Delta \square \Delta} \frac{MB'}{MB} = \frac{MA}{MA'} \rightarrow MA \times MB = MA' \times MB'$$

عکس قضیه

$MA \times MB = MA' \times MB'$

اگر نقطه ی M محل تلاقی دو پاره خط باشد، به طوری که داشته باشیم

آن گاه از 4 نقطه ی A, B, A', B' یک دایره می گذرد.



از سه نقطه ی A, B, A' یک دایره عبور می دهیم. اگر این دایره از نقطه B' عبور کند،

عبور کند، A'B' را امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه ی قطع کند آن گاه

طبق خود قضیه خواهیم داشت:

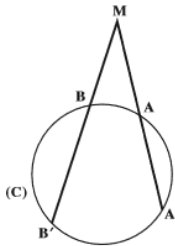
$$\left. \begin{array}{l} \text{طبق قضیه } MA' \times MB'' = MA \times MB \\ \text{طبق فرض } MA' \times MB' = MA \times MB \end{array} \right\} \Rightarrow B' = B'' \Rightarrow A, B, A', B'$$

از یک دایره می گذرند.

قضیه

اگر از یک نقطه خارج از دایره دو قاطع بر دایره رسم کنیم، ثابت کنید حاصل ضرب قطعات یک قاطع

برابر است با حاصل ضرب قطعات دیگر.  $BM \times AM = B'M \times A'M$



$$\Delta AMB, \Delta A'MB' \Rightarrow \begin{cases} A = A' = \frac{BB'}{2} \\ B = B' = \frac{AA'}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{MB'}{MB} = \frac{AM}{A'M} \Rightarrow BM \times AM = B'M \times A'M$$

**عکس قضیه**

اگر نقطه ی  $M$  محل تلاقی دو پاره خط باشد، به طوری که داشته باشیم  $MA \times MB = MA' \times MB'$  آن گاه از ۴ نقطه ی  $A, B, A', B'$  یک دایره می گذرد.

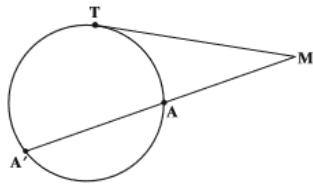
از سه نقطه ی  $A, B, A'$  یک دایره عبور می دهیم. اگر این دایره از نقطه  $B'$  عبور کند،  $A'B'$  را امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه ی  $B$  قطع کند آن گاه طبق خود قضیه خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طبق قضیه } MA' \times MB'' = MA \times MB \\ \text{طبق فرض } MA' \times MB' = MA \times MB \end{array} \right\} \Rightarrow B' = B'' \Rightarrow A, B, A', B'$$

از یک دایره می گذرند.

**قضیه**

اگر نقطه ی  $M$  محل تلاقی یک قاطع و یک مماس باشد (از نقطه ی  $M$  خارج دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده ایم)، آن گاه طول مماس واسطه ی هندسی است بین قطعات قاطع.

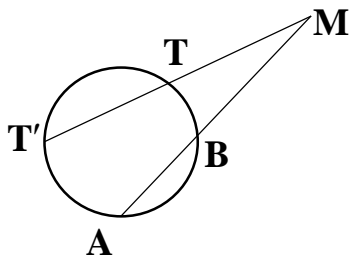


از  $T$  به  $A, B$  رسم می کنیم. آن گاه خواهیم داشت  $MT^2 = MB \times MA$

$$\triangle ATM, \triangle BTM \Rightarrow \begin{cases} M = M \\ A = T_1 = \frac{BT}{2} \end{cases} \xrightarrow{\triangle \triangle \triangle} \frac{AT}{BT} = \frac{MT}{BM} = \frac{AM}{MT} \Rightarrow MT^2 = MB \times MA$$

**عکس قضیه**

نقطه ی  $M$  محل تلاقی دو پاره خط  $MT$  و امتداد  $AB$  است. اگر داشته باشیم  $MT^2 = AM \times BM$  آن گاه از سه نقطه ی  $A, B, T$  یک دایره می گذرد.

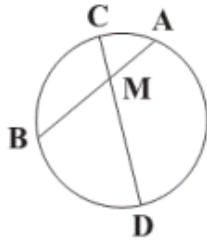


فرض می کنیم دایره ی گذرنده از سه نقطه ی  $A, B, T$  بر خط  $MT$  مماس نباشد، پس امتداد  $MT$  را در نقطه ی  $T'$  قطع می کند:

$$\left. \begin{array}{l} MA \cdot MB = MT' \cdot MT \\ MA \cdot MB = MT \cdot MT \end{array} \right\} \Rightarrow T = T' \Rightarrow T \text{ و } T' \text{ بر هم منطبقند و دایره ی گذرنده از سه نقطه } A, B, T \text{ در نقطه ی } T \text{ بر } MT \text{ مماس است.}$$

## تست های آموزشی

در دایره زیر، وتر AB و وتر CD را به نسبت ۱ به ۶ تقسیم کرده است. اگر  $AB = 10$  و  $CD = 14$  باشد،



حاصل  $|AM - BM|$  کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۵
- (۳) ۷
- (۴) ۱۰

وتر CD به نسبت ۱ به ۶ تقسیم شده است. پس:  $\frac{CM}{DM} = \frac{1}{6}$ ,  $CD = 14 \Rightarrow CM = 2, DM = 12$

طبق روابط طولی در دایره داریم:

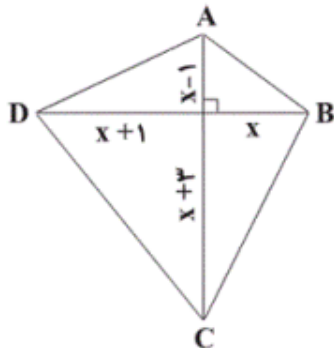
$$CM \cdot DM = BM \cdot AM \Rightarrow BM \cdot AM = 2 \times 12 = 24$$

$$AB = 10 \Rightarrow AM + BM = 10$$

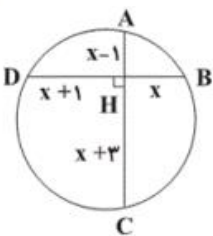
$$\begin{cases} AM + BM = 10 \\ AM \cdot BM = 24 \end{cases} \Rightarrow (AM + BM)^2 - 4AM \cdot BM = (AM - BM)^2 = 4 \Rightarrow |AM - BM| = 2$$

رئوس چهارضلعی ABCD روی محیط یک دایره قرار دارند. با توجه به اندازه های مشخص شده،

مساحت چهارضلعی کدام است؟



- (۱) ۵۶
- (۲) ۴۸
- (۳) ۲۸
- (۴) ۲۴



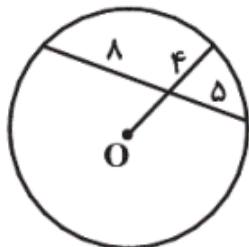
رئوس چهارضلعی ABCD روی محیط یک دایره قرار دارند، پس:  $AH \times HC = BH \times HD$

$$\Rightarrow (x-1)(x+3) = x(x+1) \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = x^2 + x \Rightarrow x = 3$$

لذا مساحت آن برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 = 28$$

در شکل زیر، O مرکز دایره است. شعاع دایره کدام است؟



- (۱) ۷
- (۲) ۷/۵
- (۳) ۸
- (۴) ۸/۵

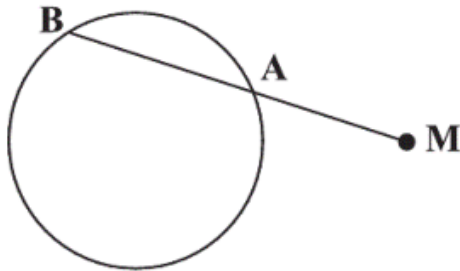
فرض می کنیم امتداد BO، دایره را در نقطه E قطع کند، با فرض  $OD = x$  داریم:  $OE = OB = x + 4$

حال بنا به رابطه طولی در دایره داریم:  $DA \cdot DC = DB \cdot DE \Rightarrow 8 \times 5 = 4(2x + 4) \Rightarrow x = 3$

$$R = OE = x + 4 = 3 + 4 = 7$$

و در نتیجه:

فاصله نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره زیر از نقطه M، به ترتیب ۶ و ۱۶ واحد است. اگر  $MA = ۸$  باشد، فاصله مرکز دایره از وتر AB کدام است؟



- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳)  $\sqrt{۲۱}$  (۴)  $۲\sqrt{۶}$

نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره نسبت به نقطه M، به ترتیب نقاط  $A'$  و  $B'$  هستند؛ پس داریم:

$MA' = ۶$

$MB' = ۱۶ \Rightarrow A'B' = ۱۶ - ۶ = ۱۰ \Rightarrow 2r = ۱۰ \Rightarrow r = ۵$

از روابط طولی در دایره داریم:

$MA \times MB = MA' \times MB'$

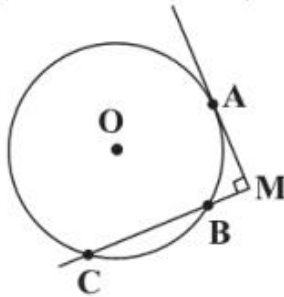
$\Rightarrow ۸ \times MB = ۶ \times ۱۶ \Rightarrow MB = ۱۲ \Rightarrow AB = ۴$

می‌دانیم اگر از مرکز دایره بر وتری از آن عمود رسم کنیم، پاره‌خط عمود، وتر را نصف می‌کند:

از قضیه فیثاغورس در مثلث AHO داریم:  $OH^2 + AH^2 = r^2 \Rightarrow OH^2 = ۵^2 - ۲^2 = ۲۱ \Rightarrow OH = \sqrt{۲۱}$

$AH = \frac{1}{2} AB = ۲$

مطابق شکل دایره‌ای به مرکز O و شعاع واحد مفروض است. اگر مماس رسم شده در نقطه A و امتداد آن و وتر BC یکدیگر را با زاویه  $۹۰^\circ$  قطع کنند و  $\widehat{AB} = \widehat{BC}$  باشد، طول پاره‌خط BC کدام است؟



- (۱)  $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$  (۲)  $\frac{۱}{۲}$  (۳)  $\sqrt{۳}$  (۴) ۱

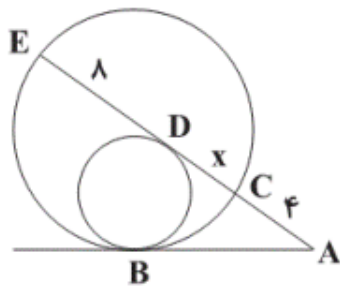
با فرض  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \alpha$  داریم:

$\hat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{۲} = \frac{(۳۶^\circ - ۲\alpha) - \alpha}{۲} = ۹۰ \Rightarrow ۳\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BC} = ۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = ۶۰^\circ \Rightarrow \Delta BOC$  متساوی‌الاضلاع است.  $\Rightarrow BC = ۱$

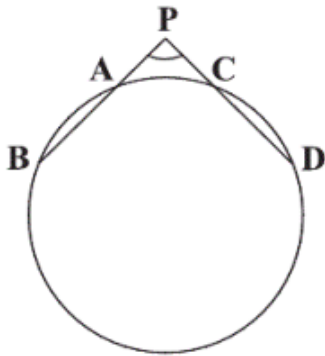
در شکل زیر، دو دایره در نقطه B مماس درون‌اند. اگر مماس رسم شده بر دایره کوچک‌تر در نقطه D، دایره بزرگ‌تر را در نقاط C و E و مماس رسم شده در نقطه B را در نقطه A قطع کند،

ان‌گاه طول CD کدام است؟ ( $DE = ۸$  و  $AC = ۴$ )



- (۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۵

در شکل زیر، امتداد وترهای AB و CD را یکدیگر را در نقطه P قطع کرده‌اند به طوری که  $\hat{P} = 120^\circ$ .



اگر  $PA = PC = \frac{1}{2}CD = \sqrt{3}$  باشد، طول پاره خط BD کدام است؟

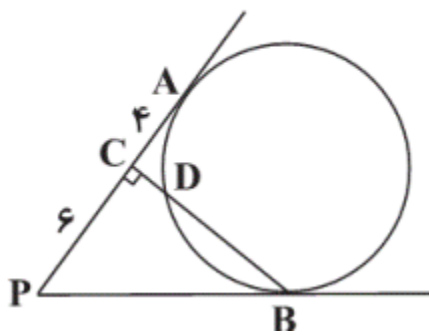
(۱) ۳

(۲) ۶

(۳) ۹

(۴) ۱۲

در شکل زیر، PA و PB بر دایره مماس هستند و BC بر PA عمود است. اگر  $PC = 6$



و  $CA = 4$  باشند، طول CD کدام است؟

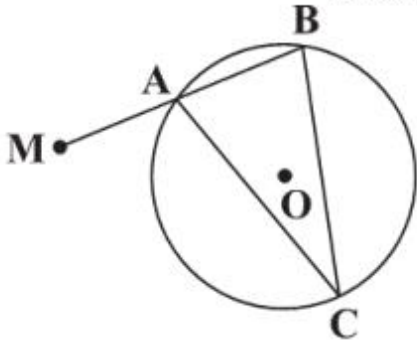
(۱) ۳

(۲)  $\sqrt{6}$

(۳)  $\sqrt{5}$

(۴) ۲

در دایره زیر، قاطع MAB رسم شده است؛ به طوری که  $MA = AB = 6$  و  $\hat{BAC} = 75^\circ$ . اگر  $AC = CB$  باشد، فاصله نقطه M از مرکز دایره چقدر است؟



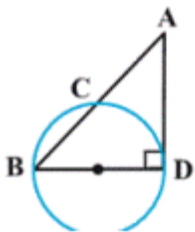
(1)  $6\sqrt{3}$

(2) 12

(3)  $8\sqrt{3}$

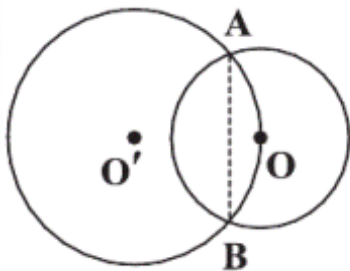
(4) 16

در شکل زیر، BD قطر دایره و AD بر دایره مماس است. اگر شعاع دایره برابر 3 و طول وتر BC برابر 4 باشد، اندازه AB کدام است؟



(1) 9      (2) 6      (3) 3      (4) 12

دو دایره  $C(O, \sqrt{5})$  و  $C'(O', \frac{5}{2})$  مطابق شکل رسم شده‌اند. طول وتر AB کدام است؟



(1) 2

(2) 3

(3) 4

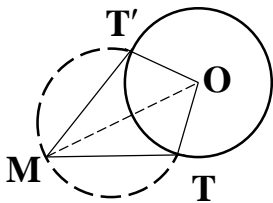
(4) 6



طریقه رسم مماس بر دایره از یک نقطه خارج از آن

نقطه دلخواه  $M$  را خارج دایره در نظر گرفته، سپس دایره ای به قطر  $OM$  رسم می کنیم به طوری که دایره ی مفروض را در نقاط  $T$  و  $T'$  قطع کند.  $T$  و  $T'$  را به  $O$  و  $M$  وصل کرده، ثابت می شود زاویه ی  $\angle OTM = 90^\circ$  است، زیرا محاطی روبه قطر است.

چون  $MT$  بر شعاع در نقطه تماس عمود است، پس مماس بر دایره می شود. به همین ترتیب  $MT'$  نیز بر دایره مماس می شود.



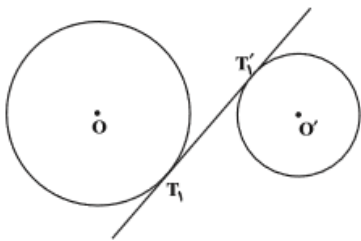
تذکر

از هر نقطه خارج دایره فقط دو مماس بر دایره می توان رسم کرد.

مماس مشترک داخلی و خارجی

اگر مراکز دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، مماس مشترک را خارجی گویند و اگر مراکز دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، مماس مشترک را داخلی گویند.

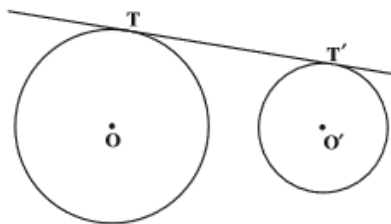
مماس مشترک داخلی



$$|TT'| = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

$d$  فاصله ی دو مرکز (خط المرکزین) و  $R, R'$  شعاع های دو دایره اند.

مماس مشترک خارجی



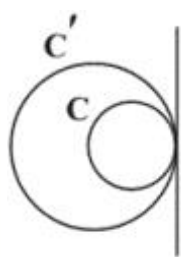
$$|TT'| = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$d$  فاصله ی دو مرکز (خط المرکزین) و  $R, R'$  شعاع های دو دایره اند.

## تست های آموزشی

اگر دو دایره  $C(O, a)$  و  $C'(O', 2a)$  با طول خط‌المركزین  $OO' = 4 - 2a$  دارای تنها یک مماس مشترک باشند،  $a$  برابر با کدام است؟

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{4}{3}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\frac{8}{3}$



چون دو دایره دارای یک مماس مشترک می‌باشند، قطعاً مماس درون هستند.  
 $OO' = |R - R'| \quad 4 - 2a = |2a - a| = |a| = a \quad 4 - 2a = a \Rightarrow a = \frac{4}{3}$   
 توجه داشته باشید که  $a$  طول شعاع دایره بوده، پس مثبت خواهد بود.

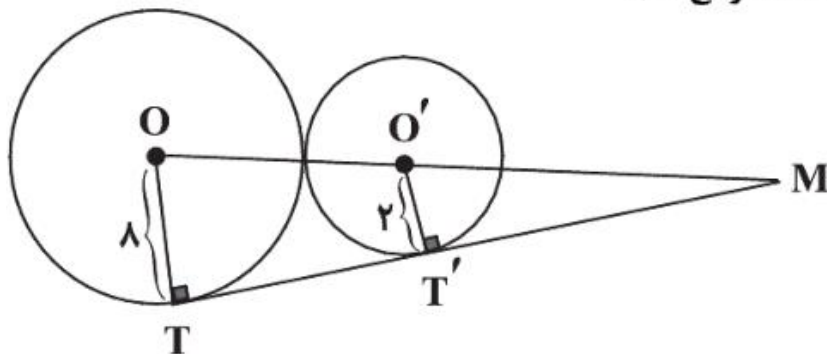
دو دایره متقاطع به شعاع‌های  $R$  و  $\Delta R$  مفروض‌اند. اگر مرکز یکی از دو دایره، روی محیط دایره دیگر واقع شده باشد، اندازه مماس مشترک خارجی آن‌ها چند برابر  $R$  است؟

- (۱)  $\sqrt{5}$  (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)  $2\sqrt{5}$

با توجه به شکل، مشخص است که  $d = \Delta R$ . در نتیجه اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره برابر است با:

$$TT' = \sqrt{(\Delta R)^2 - (\Delta R - R)^2} = \sqrt{2\Delta R^2 - 16R^2} = \sqrt{9R^2} \Rightarrow TT' = 3R$$

در شکل زیر، دو دایره به مراکز  $O$  و  $O'$  مماس برون‌اند. اندازه  $MT$  کدام است؟  
 ( $M, T, T'$  بر روی یک خط واقع‌اند.)



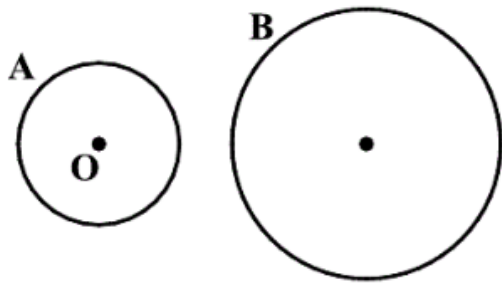
- (۱) ۹  
 (۲)  $\frac{28}{3}$   
 (۳) ۱۰  
 (۴)  $\frac{32}{3}$

$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{8 \times 2} = 2\sqrt{16} = 2 \times 4 = 8$$

$$\triangle OMT : OT \parallel O'T' \xrightarrow{\text{طبق تالس}} \frac{O'T'}{OT} = \frac{MT'}{MT} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{MT'}{8 + MT'}$$

$$\Rightarrow 8MT' = 16 + 2MT' \Rightarrow 6MT' = 16 \Rightarrow MT' = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \Rightarrow MT = TT' + MT' = 8 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

نزدیک‌ترین و دورترین فاصله بین نقاط روی دو چرخ زیر برابر با ۲ و ۱۳ واحد می‌باشد. اگر شعاع چرخ کوچک برابر با ۱ واحد باشد، طول مماس رسم شده از نقطه O (مرکز چرخ کوچک) بر چرخ بزرگ‌تر کدام است؟



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۹ (۳)
- ۱۲ (۴)

اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد، برابر ۱۵ واحد است. طول خط‌المركزین این دو دایره چند واحد است؟

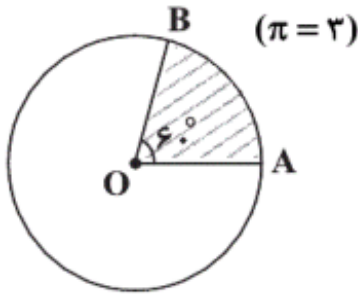
- ۱۲√۲ (۱)
- ۷√۶ (۲)
- ۱۷ (۳)
- ۱۸ (۴)

در دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۳ واحد، اندازه مماس مشترک داخلی برابر با  $4\sqrt{3}$  است. زاویه بین دو مماس مشترک داخلی آن‌ها کدام است؟

- ۳۰° (۱)
- ۴۵° (۲)
- ۶۰° (۳)
- ۹۰° (۴)

## تست های مساحت

در شکل زیر، اگر O مرکز دایره و مساحت ناحیه هاشورخورده برابر ۱۸ باشد، طول کمان AB کدام است؟

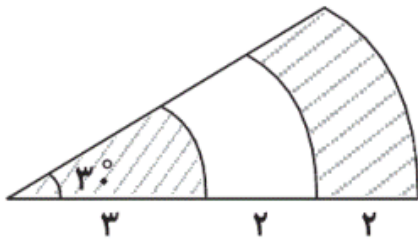


- (۱) ۴
- (۲) ۶
- (۳)  $4\sqrt{2}$
- (۴)  $6\sqrt{2}$

مساحت ناحیه هاشورخورده:  $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ} \Rightarrow 18 = \frac{3 \times R^2 \times 60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6$

طول کمان AB:  $L = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ} = \frac{3 \times 6 \times 60^\circ}{180^\circ} = \frac{3 \times 6}{3} = 6$

در شکل زیر، قطاع‌هایی با زاویه ۳۰ درجه از سه دایره هم‌مرکز نشان داده شده است. با توجه به اندازه‌های داده شده، مجموع مساحت قسمت‌های هاشورخورده چند واحد مربع است؟



- (۱)  $2/25\pi$
- (۲)  $2/75\pi$
- (۳)  $4/5\pi$
- (۴)  $5/5\pi$

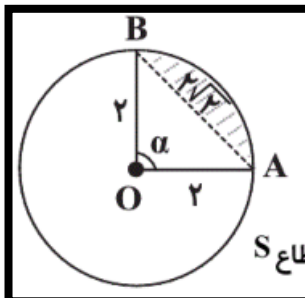
می‌دانیم مساحت قطاعی با زاویه  $\alpha$  در دایره‌ای به شعاع  $r$ ، از رابطه  $S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$  به دست می‌آید.

ابتدا  $S_1$  را به دست می‌آوریم:  $S_1 = S_{BOB'} - S_{AOA'} \Rightarrow S_1 = \frac{\pi(3^2)(30^\circ)}{360^\circ} - \frac{\pi(2^2)(30^\circ)}{360^\circ} = \frac{4\pi}{3}$

بنابراین مجموع مساحت قسمت‌های هاشورخورده برابر است با:

مساحت هاشورخورده  $S = S_{COC'} - S_1 = \frac{\pi(7^2)(30^\circ)}{360^\circ} - \frac{4\pi}{3} = \frac{11\pi}{4} = 2/75\pi$

اندازه شعاع یک دایره ۲ و طول وتر AB در آن برابر  $2\sqrt{2}$  است. مساحت قطعه کوچک‌تر حاصل از رسم وتر AB در دایره کدام است؟



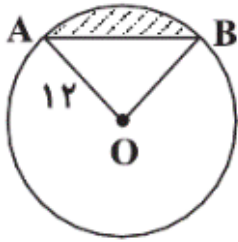
با توجه به عکس قضیه فیثاغورس از آنجا که در مثلث AOB، مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است پس این مثلث قائم‌الزاویه است. در نتیجه:  $\alpha = 90^\circ$

$S_{\Delta AOB} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$

$S_{\text{قطعه}} = S_{\text{قطاع}} - S_{\Delta AOB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi R^2 - 2 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 4 - 2 = \pi - 2$

- (۱)  $2\pi - 4$
- (۲)  $\pi - 2$
- (۳)  $2\pi - 6$
- (۴)  $\pi - 3$

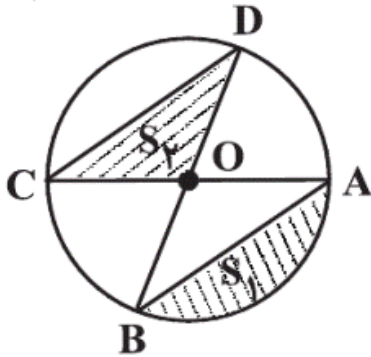
در شکل زیر، طول کمان  $AB$  برابر  $4\pi$  می باشد. مساحت ناحیه سایه خورده چند برابر  $3\sqrt{3} - 2\pi$  است؟ (  $O$  مرکز دایره است.)



است؟ (  $O$  مرکز دایره است.)

- (۱) ۶
- (۲) ۱۲
- (۳) ۱۸
- (۴) ۲۴

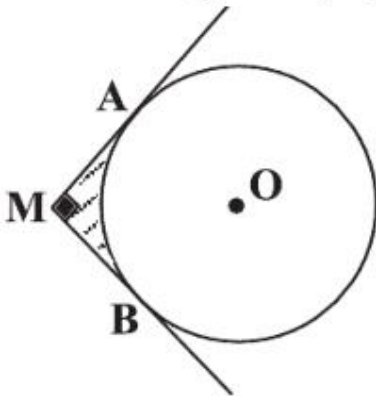
در شکل زیر،  $\widehat{AB} = \widehat{CD} = 120^\circ$  و شعاع دایره برابر ۲ واحد است. مجموع مساحت های  $S_1$  و  $S_2$  کدام است؟ (  $O$  مرکز دایره است.)



- (۱)  $\frac{4}{3}\pi$
- (۲)  $\frac{\sqrt{3}+1}{3}\pi$
- (۳)  $\frac{2}{3}\pi$
- (۴)  $\frac{\sqrt{3}+3}{3}\pi$

مطابق شکل،  $MA$  و  $MB$  به ترتیب در نقاط  $A$  و  $B$  بر دایره  $C(O, R)$  مماس اند.

مساحت قسمت هاشور خورده کدام است؟ ( $\hat{M} = 90^\circ$ )



- (۱)  $R^2(1 - \frac{\pi}{4})$
- (۲)  $2R^2(1 - \frac{\pi}{4})$
- (۳)  $R^2(1 - \frac{\pi}{8})$
- (۴)  $2R^2(1 - \frac{\pi}{8})$

طول خط‌المركزین دو دایره که نسبت به هم مماس درونی‌اند، ۴ و مساحت ناحیه محدود بین آن‌ها  $۳۲\pi$  است. طول شعاع دایره کوچک‌تر کدام است؟

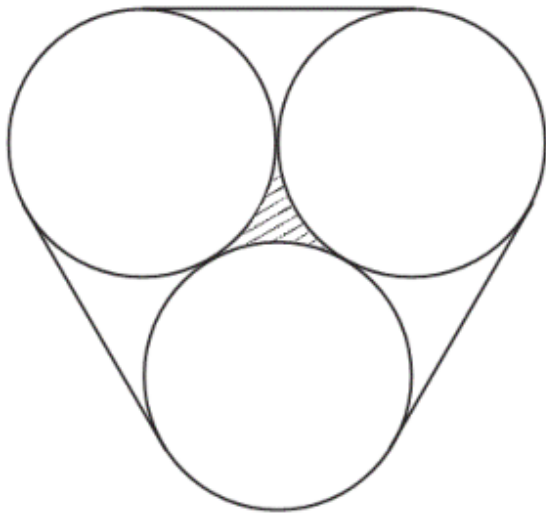
۱ (۴)

۲ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

سه دایره به شعاع‌های برابر، دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل زیر، این سه دایره به وسیله نخ بسته شده‌اند. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر  $(۴\sqrt{۳} - ۲\pi)$  باشد، طول نخ کدام است؟



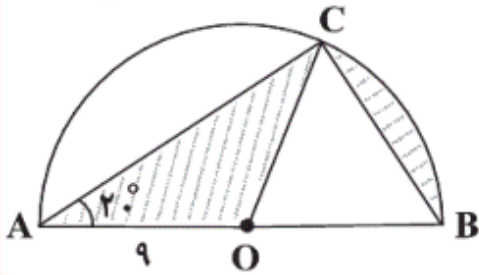
۱)  $۱۲ - ۲\pi$

۲)  $۲۴ - ۴\pi$

۳)  $۱۲ + ۴\pi$

۴)  $۲۴ + ۸\pi$

در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره به شعاع ۹ سانتی‌متر است. اگر  $\hat{A} = 20^\circ$  باشد، مجموع مساحت ناحیه‌های رنگی چند سانتی‌متر مربع است؟



- (۱)  $6\pi$  (۲)  $9\pi$  (۳)  $12\pi$  (۴)  $15\pi$

### تست های متفرقه

در یک دایره طول کمان AB برابر ۴ واحد و اندازه کمان AB برابر  $60^\circ$  است. در این صورت طول شعاع دایره کدام است؟

(۲)  $\frac{12}{\pi}$

(۱)  $12\pi$

(۴)  $24\pi$

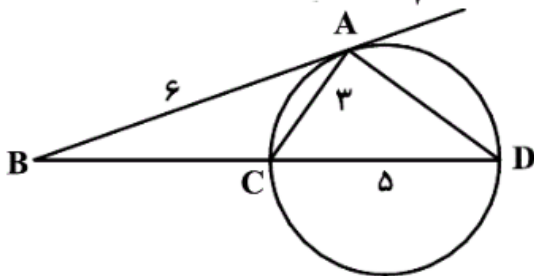
(۳) ۲۴

$\frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ}$

می‌دانیم رابطه زیر برقرار است:

پس:  $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{4}{2\pi R}$  لذا:  $2\pi R = 24$  و در نتیجه:  $R = \frac{12}{\pi}$

در شکل مقابل، AB در نقطه A بر دایره مماس است. طول وتر AD کدام است؟

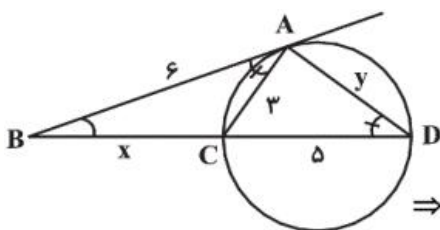


(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۵

(۴) ۵/۵

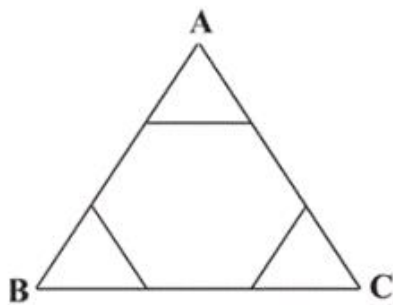


$$\left. \begin{aligned} \hat{B} &= \hat{B} \\ \hat{BAC} &= \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta ACB \sim \Delta DAB \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{6}{x+5} = \frac{3}{y} = \frac{x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{6}{x+5} \Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0 \Rightarrow (x+9)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{3}{y} = \frac{x}{6} \Rightarrow y = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$

با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی منتظم مقابل به ضلع ۲ واحد، یک مثلث ساخته ایم. اگر O نقطه‌ای دلخواه درون شش ضلعی باشد، مجموع فواصل نقطه O از سه ضلع مثلث ABC کدام است؟



(۱)  $\sqrt{3}$

(۲)  $2\sqrt{3}$

(۳)  $3\sqrt{3}$

(۴)  $4\sqrt{3}$

نقطه M درون دایره C(O, R) قرار دارد. اگر طول کوتاه‌ترین و بلندترین وتر گذرنده از M به ترتیب ۴ و ۶ باشد، فاصله M از مرکز دایره برابر است با:

(۱)  $\sqrt{3}$

(۲) ۲

(۳)  $\sqrt{5}$

(۴) ۳

در بین همه شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت، بیش‌ترین مساحت برابر با ۳۶ می‌باشد. محیط هر یک از این اشکال کدام است؟

(۱)  $6\sqrt{\pi}$

(۲) ۲۴

(۳)  $12\sqrt{27}$

(۴)  $12\sqrt{\pi}$



دو وتر موازی به طول‌های ۴ و ۱۰ در دو طرف مرکز دایره به گونه‌ای قرار گرفته‌اند که فاصله مرکز دایره از وتر کوچک‌تر، دو برابر فاصله آن تا وتر بزرگ‌تر است.

طول شعاع این دایره کدام است؟ (۱) ۴ (۲)  $4\sqrt{2}$  (۳)  $4\sqrt{3}$  (۴) ۸

برای دریافت پاسخ تست‌ها به کانال سر بزیند

تازه کلیه جزوه و نمونه سوال و مباحث آموزشی و مشاوره ای دیگه هم پیدا می‌کنید...!

[t.me/Riazi\\_khanalipoor](https://t.me/Riazi_khanalipoor)