جزوه آموزشی

هندسه ۲

یازدهم ریاضی

کاری از استاد بابالویان

پاییز ۹۶

فصل اول : دایره

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

درس دوم : رابطه های طولی در دایره

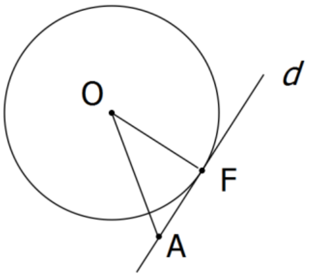
درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

با مفهوم دایره و بعضی از ویژگی هاش سال های قبل آشنا شدیم حالا می خوایم با ویژگی های دیگش آشنا بشیم و حتی این ویژگی ها رو اثبات کنیم .

قضیه : یک خط و یک دایره بر هم مماسند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع آن عمود باشد .

اثبات : چون قضیه دو شرطی هستش باید هر دو طرف ثابت بشه !!



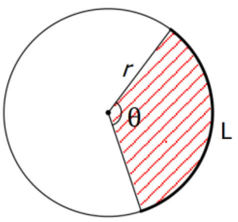
$\Leftarrow$ فرض کنید خط d بر دایره در نقطه F مماس است پس هر نقطه دیگرمانند A روی خط d خارج از دایره است پس $OA > OF$ و این یعنی OF کوتاه ترین فاصله بین نقطه O و خط d است پس خط d بر شعاع OF عمود است .

$\Rightarrow$ فرض کنید خط d بر شعاع OF عمود باشد پس برای هر نقطه دیگر مانند A روی خط $OA > OF$ (وتر بزرگ ترین ضلع مثلث قائم الزاویه است) لذا تمام نقاط روی خط d به جز F خارج از دایره است پس تنها نقطه تماس F است و خط بر دایره مماس است .

تمرین : طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه ای روی آن را توضیح دهید .

طول کمان و مساحت قطاع :

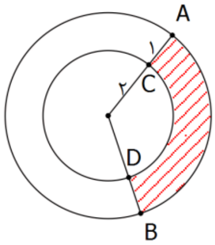
با توجه به محیط و مساحت دایره طول کمان و مساحت قطاع مربوط به زاویه مرکزی θ رادیان را می توان به کمک تناسب بدست آورد :



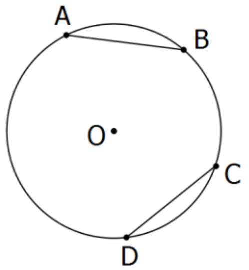
$$\frac{L}{۲\pi r} = \frac{\theta}{۲\pi} \Rightarrow L = r\theta$$

$$\frac{S}{\pi r^{۲}} = \frac{\theta}{۲\pi} \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} r^{۲}\theta$$

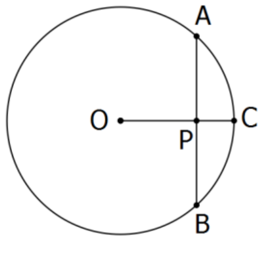
تمرین : طول کمان های AB,CD مساحت قسمت هاشور خورده را بدست آورید .



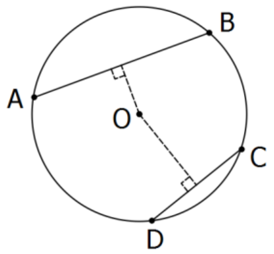
تمرین : ثابت کنید در یک دایره طول کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس .



تمرین : ثابت کنید اگر در یک دایره شعاع بر وتر عمود باشد آن وتر و کمان مقابلش را نصف می کند و برعکس .



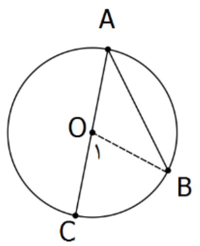
تمرین : ثابت کنید از دو وتر یک دایره آنکه به مرکز نزدیک تر است بزرگ تر است و برعکس .



قضیه : اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل آن .

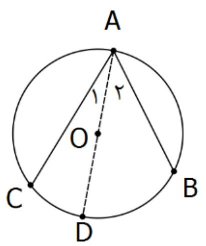
اثبات :

الف) فرض کنید یکی از اضلاع زاویه از مرکز دایره می گذرد . در این صورت با وصل کردن نقاط B و O داریم :



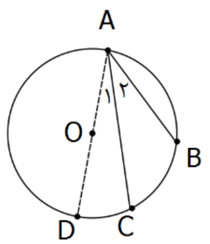
$$\left.\begin{array}{l} O_۱ = A + B \\ A = B \end{array}\right\} \Rightarrow O_۱ = ۲A \Rightarrow A = \frac{۱}{۲}O_۱ \Rightarrow A = \frac{۱}{۲}BC$$

ب) فرض کنید اضلاع زاویه اطراف مرکز دایره باشد. با رسم قطر گذرنده از A طبق قسمت الف داریم :



$$\left.\begin{array}{l} A_۱ = \frac{۱}{۲}CD \\ A_۲ = \frac{۱}{۲}BD \end{array}\right\} \Rightarrow A_۱ + A_۲ = \frac{۱}{۲}(CD + BD) \Rightarrow A = \frac{۱}{۲}BC$$

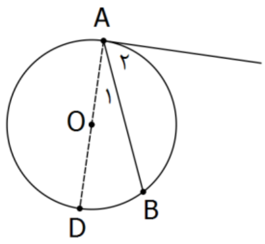
ج) فرض کنید اضلاع زاویه در یک طرف مرکز باشد . با رسم قطر گذرنده از A طبق قسمت الف داریم :



$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{۱}{۲}BD \\ A_۱ = \frac{۱}{۲}DC \end{array}\right\} \Rightarrow A - A_۱ = \frac{۱}{۲}(BD - DC) \Rightarrow A_۲ = \frac{۱}{۲}BC$$

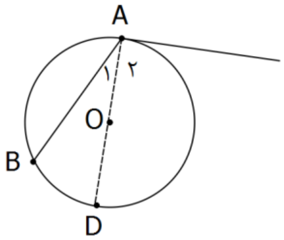
قضیه : اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان مقابل آن .

اثبات :



الف) اگر زاویه ظلی حاده باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم :

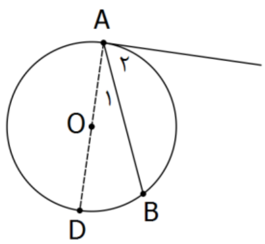
$$\left.\begin{array}{l} A = 90^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{2}AD \\ A_1 = \frac{1}{2}BD \end{array}\right\} \Rightarrow A - A_1 = \frac{1}{2}(AD - BD) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}AB$$



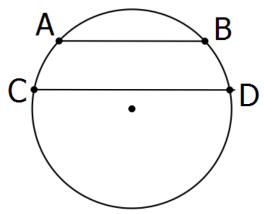
ب) اگر زاویه ظلی منفرجه باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم :

$$\left.\begin{array}{l} A_2 = 90^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{2}AD \\ A_1 = \frac{1}{2}BD \end{array}\right\} \Rightarrow A_2 + A_1 = \frac{1}{2}(AD + BD) \Rightarrow A = \frac{1}{2}AB$$

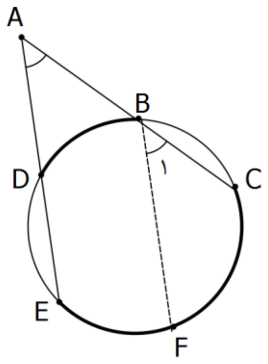
تمرین : قضیه قبل را با وصل کردن B به D و در یک مرحله ثابت کنید.



تمرین : ثابت کنید دو وتر از دایره با هم موازیند اگر و تنها اگر کمان های محدود بین آنها مساوی باشند .



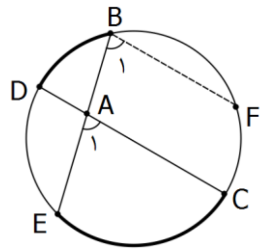
قضیه : زاویه حاصل از برخورد دو وتر در بیرون از دایره برابر با نصف تفاضل اندازه کمان هایی است که بین اضلاع زاویه محصورند .



اثبات : از نقطه B وتری موازی DE رسم می کنیم در این صورت :

$$A = B_1 = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}\left(EC - EF\right) \xrightarrow{EF=BD} A = \frac{EC - BD}{2}$$

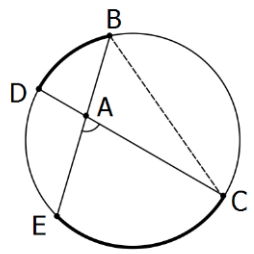
قضیه : زاویه حاصل از برخورد دو وتر در درون دایره برابر با نصف مجموع اندازه کمان هایی است که بین اضلاع زاویه محصورند .

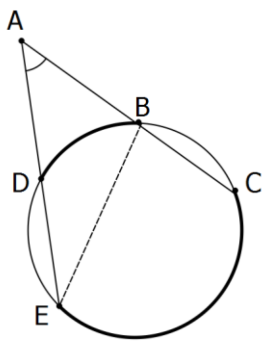


اثبات : از نقطه B وتری موازی DC رسم می کنیم در این صورت :

$$A_1 = B_1 = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}\left(EC + FC\right) \xrightarrow{FC=BD} A = \frac{EC + BD}{2}$$

تمرین : قضیه قبل را با وصل کردن B به C و قضیه قبلی آن را با وصل کردن B به E اثبات کنید .

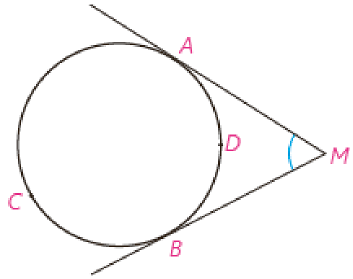




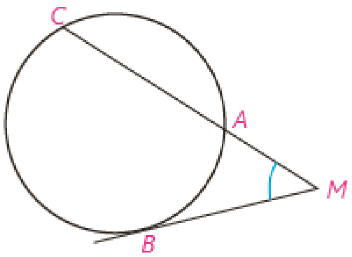
تمرین های کتاب صفحات ۱۶ و ۱۷ :

۱ــ در شکل‌های زیر ثابت کنید :

راهنمایی: از نقطهٔ B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.

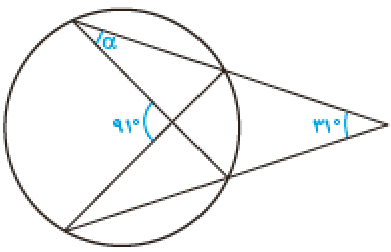


الف) $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$

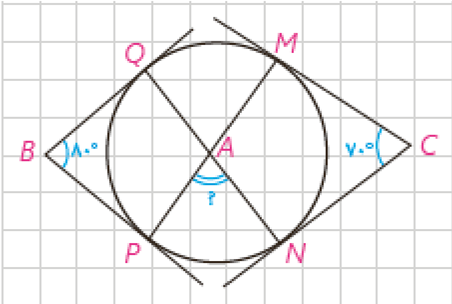


ب) $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

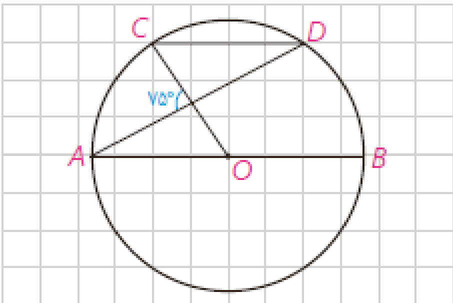
۲ــ در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.



۳ــ در شکل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ چند درجه است؟

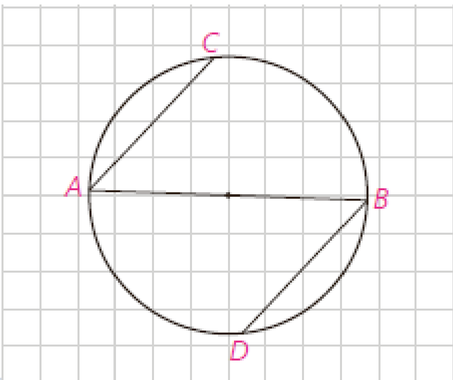


۴ــ در دایره رسم شده شکل مقابل CD||AB، اندازه کمان CD را به‌دست آورید.

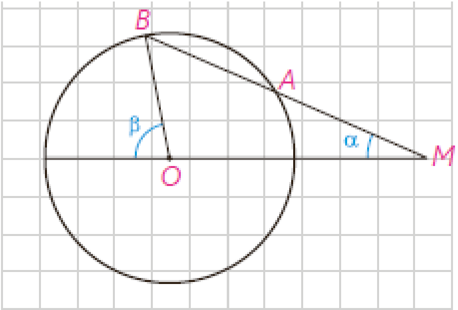


۵ــ در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند.

ثابت کنید : AC = BD



۶ــ دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و $MA = R$؛ نشان دهید : $\beta = 3\alpha$



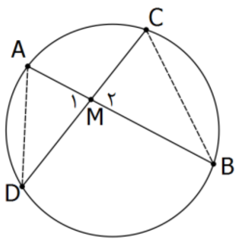
۷ــ در دایرهٔ $C(O,R)$، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصلهٔ O از وتر AB را به دست آورید.

درس دوم : رابطه های طولی در دایره

قضیه : هرگاه خط هایی شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M (درون یا بیرون دایره) همدیگر را قطع کنند .
آنگاه : $MA.MB = MC.MD$

الف) اگر درون دایره همدیگر را قطع کنند :

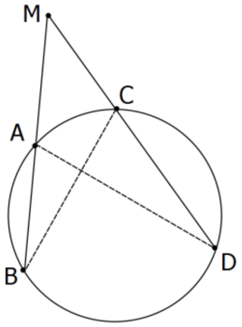
A را به D و B را به C وصل می کنیم :



$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \dfrac{AC}{2} = \hat{D} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\Delta}{ADM} \sim \overset{\Delta}{MBC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

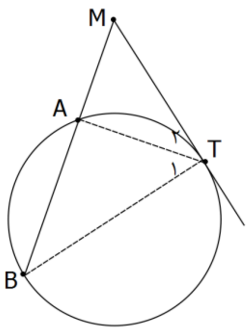
ب) اگر بیرون دایره همدیگر را قطع کنند :

A را به D و B را به C وصل می کنیم :

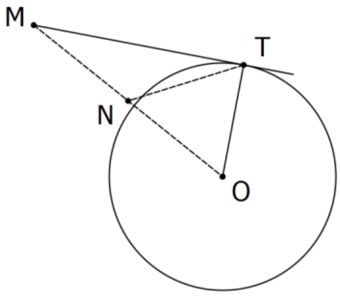


$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \dfrac{AC}{2} = \hat{D} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\Delta}{ADM} \sim \overset{\Delta}{MBC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

قضیه : هر گاه از نقطه ای خارج از دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شود ، مربع اندازه مماس با حاصل ضرب اندازه های دو قطعه قاطع برابر است . ($MT^2 = MA.MB$)



تمرین : طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه ای خارج آن را توضیح دهید و دلیل خود را برای درستی روش بیان کنید .



حل : اگر T نقطه ای باشد که خط گذرنده از M بر دایره مماس شده است

آنگاه مثلث MTO قائم الزاویه است و میانه وارد بر وتر نصف وتر است

(سال قبل اثبات کردیم) یعنی $NM = NO = NT$ پس دایره ای که

به قطر MO رسم شود از T خواهد گذشت . در نتیجه برای رسم مماس

کافیست دایره ای به قطر MO رسم کنیم و نقاط برخورد دو دایره را به M وصل کنیم .

تمرین : ثابت کنید اندازه دو مماس رسم شده بر یک دایره از نقطه ای خارج آن با هم برابرند .

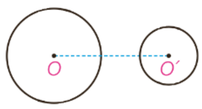
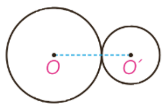
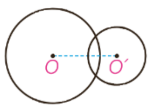
حالت های دو دایره نسبت به هم :

طبق جدول مقابل برای اینکه بدانیم دو دایره نسبت به هم چه وضعی را دارند ، بهتر است ابتدا مجموع دو شعاع و تفاضل دوشعاع را بدست آوریم و سپس اندازه فاصله دو مرکز را با دو عدد بدست آمده مقایسه کنیم .

اگر برابر با یکی از این اعداد باشد مماس درون یا بیرون است (به جدول نگاه کنید)

اگر عددی بین این ها باشد متقاطع است.

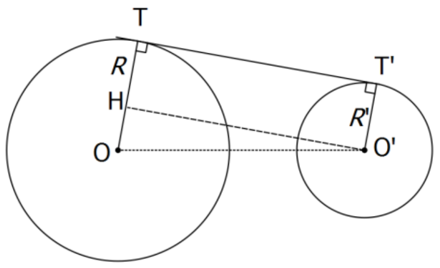
اگر عددی اطراف اینها باشد متداخل یا متخارج است (به جدول نگاه کنید)

دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = ۰$	

مماس مشترک خارجی :

می خواهیم اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های R و R′ و طول خط المرکزین d را بدست آوریم :

اگر شعاع های OT و OT′ را رسم کنیم بر مماس مشترک عمود خواهند بود . پاره خط O′H را موازی TT′ رسم می کنیم و چون چهار ضلعی حاصل مستطیل است مثلث OHH' مثلث قائم الزاویه خواهد بود و داریم :

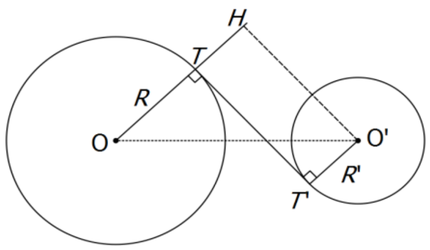


$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R - R')^{۲}}$$

مماس مشترک داخلی :

می خواهیم اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع های R و R′ و طول خط المرکزین d را بدست آوریم :

اگر شعاع های OT و OT′ را رسم کنیم بر مماس مشترک عمود خواهند بود . پاره خط O′H را موازی TT′ رسم می کنیم تا امتداد شعاع OT را قطع کند .مثلث OHH' مثلث قائم الزاویه خواهد بود و داریم :

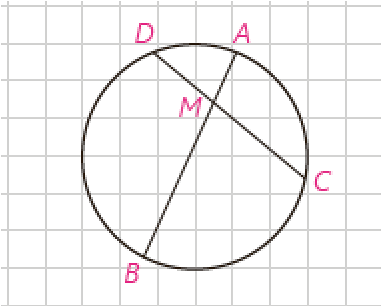


$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$$

تمرین : دو دایر به شعاع های ۳و ۴ مماس خارجی هستند . طول مماس مشترک آنها چقدر است ؟

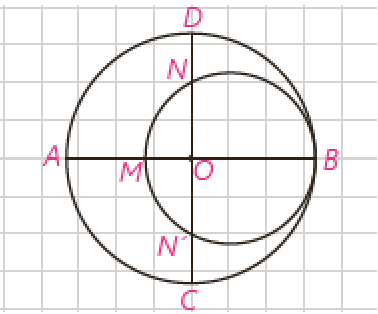
تمرین ۱۵ صفحه ۲۳ :

۱ــ در دایرهٔ $C(O,R)$ وتر AB ، وتر CD به طول ۹ سانتی‌متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11cm$، آن‌گاه وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



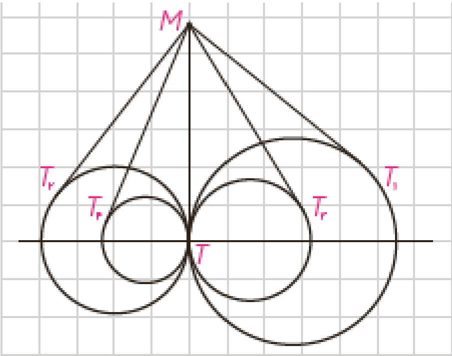
۲ــ از نقطهٔ P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کرده است و $BC = 20$. طول‌های PB و PC را به‌دست آورید.

۳ــ در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر برهم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



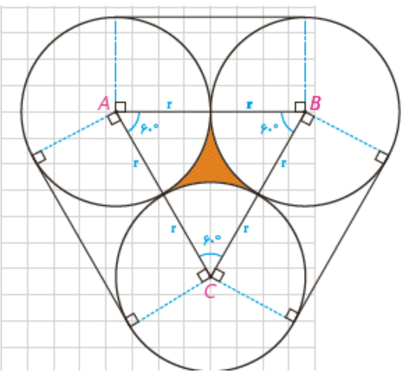
۴ــ مطابق شکل مقابل، تمام دایره‌ها در نقطه T برهم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کرده‌ایم؛ ثابت کنید

$MT_۱ = MT_۲ = MT_۳ = MT_۴ = \dots$



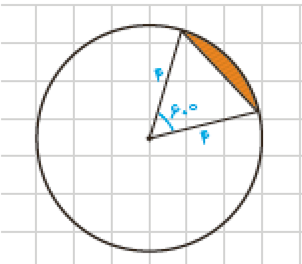
۵ــ طول شعاع‌های دو دایرهٔ متخارج را به‌دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است.

۶ــ سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس‌اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیلهٔ نخی بسته شده‌اند. نشان دهید طول این نخ برابر $۶r + ۲\pi r$ است. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^۲(\sqrt{۳} - \frac{\pi}{۲})$ محدود است.



۷ــ طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیهٔ محدود بین آنها 16π سانتی‌مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.

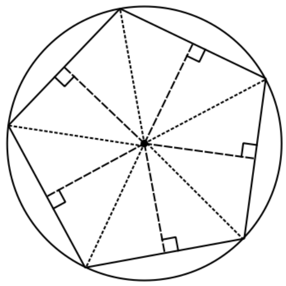
۸ ــ مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.



درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی

چند ضلعی محاطی : چند ضلعی که تمام رئوس آن روی یک دایره باشد . (آن دایره بر چند ضلعی محیط خواهد بود)

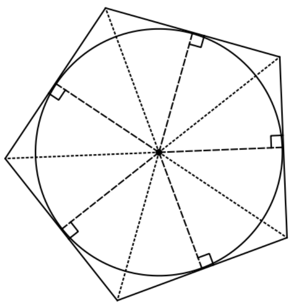
توجه : می دانیم تمام نقاطی که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله هستند روی عمود منصف پاره خط قرار دارند . چرا ؟



پس می توان گفت « **چند ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر همه عمود منصف های اضلاع در یک نقطه همرس باشند** » .

چند ضلعی محیطی : چند ضلعی که تمام اضلاع آن بر یک دایره مماس باشد .(آن دایره در چند ضلعی محاط خواهد بود)

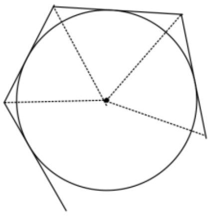
توجه : می دانیم تمام نقاطی که از دو ضلع زاویه به یک فاصله هستند روی نیمساز آن زاویه قرار دارند . چرا ؟



پس می توان گفت « **چند ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر همه نیم ساز های زاویه ها در یک نقطه همرس باشند** » .

نتیجه : از آنجایی که سال گذشته ثابت کردیم عمود منصف ها و نیمساز های مثلث همرسند پس مثلث هم چند ضلعی محیطی است و هم محاطی و محل همرسی عمود منصف های اضلاع، مرکز دایره محیطی و محل همرسی نیمسازها، مرکز دایره محاطی است .

تمرین : نشان دهید یک n ضلعی محیطی با شعاع دایره محاطی r و محیط ۲P دارای مساحت $S = rp$ است ؟

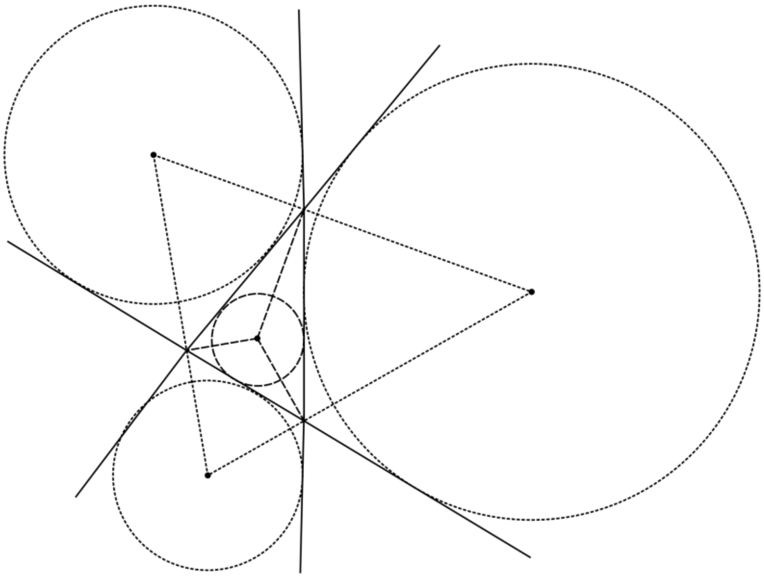


راهنمایی : مساحت n مثلث را بدست آورده (اضلاع لزوماً مساوی نیستند) و جمع کنید .

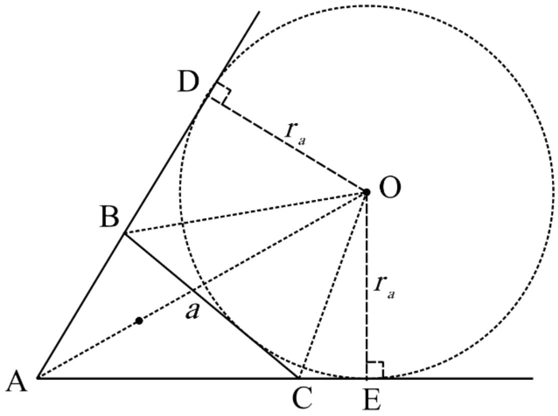
نتیجه : شعاع دایره محاطی هر مثلث برابر است با $r = \frac{S}{P}$ (P نصف محیط است)

دایره محاطی خارجی و شعاع آن : هر مثلث سه دایره محاطی خارجی نیز دارد که از بیرون بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس هستند و مرکز آنها محل برخورد یک نیمساز داخلی با دو نیمساز خارجی است .

آیا می توانید بگویید چرا نیمساز داخلی و دو نیمساز خارجی همرس هستند ؟



حالا می خواهیم شعاع هر دایره محاطی خارجی را حساب کنیم : در مثلث ABC فرض کنید ضلع مقابل به زاویه A را a شعاع دایره خارجی محاطی مقابل آن را r_a بنامیم حال داریم :



$$S_{ABC}=S_{ADO}+S_{ACO}-S_{BCO}=\frac{۱}{۲}r_a(b+c-a)$$

از طرفی $۲p=a+b+c\Rightarrow ۲p-۲a=b+c-a$

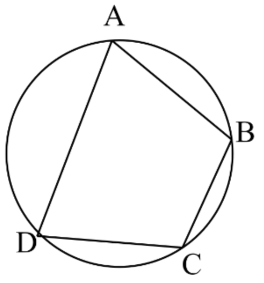
پس داریم : $S=r_a(p-a)\Rightarrow r_a=\dfrac{S}{p-a}$

در نتیجه برای دایره های محاطی خارجی دیگر نیز داریم : $r_b=\dfrac{S}{p-b}$ و $r_c=\dfrac{S}{p-c}$

تمرین : نشان دهید رابطه شعاع دایره محاطی و دوایر خارجی محاطی به صورت $\dfrac{۱}{r}=\dfrac{۱}{r_c}+\dfrac{۱}{r_b}+\dfrac{۱}{r_a}$ است .

تمرین : نشان دهید رابطه شعاع دایره محاطی و ارتفاع های مثلث به صورت $\dfrac{۱}{r}=\dfrac{۱}{h_c}+\dfrac{۱}{h_b}+\dfrac{۱}{h_a}$ است. ($\dfrac{a}{۲S}=\dfrac{۱}{h_a}$)

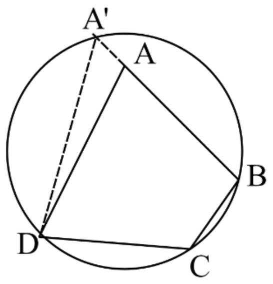
قضیه : چهار ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر دو مقابل آن مکمل باشند .



اثبات : فرض کنید چهار ضلعی محاطی باشد پس :

$$A=\frac{BCD}{۲} \quad , \quad C=\frac{BAD}{۲} \quad \Rightarrow \quad A+C=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

و به همین ترتیب دو زاویه مقابل دیگر نیز مکمل هستند .

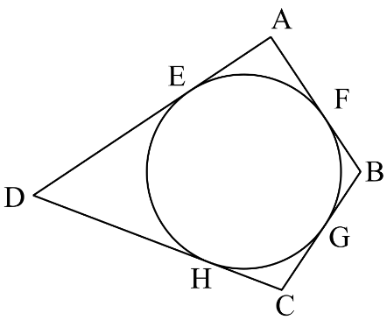


حال فرض کنید زاویه های A,C مکمل باشد نشان می دهیم دایره ای که از سه نقطه B,C,D میگذرد از نقطه A نیز خواهد گذشت و چهار ضلعی خواهد بود .

(فرض خلف) فرض کنیم اینطور نباشد و دایره خط BA را در A′ قطع کند در این صورت چهار ضلعی A′BCD محاطی است و A′,C مکمل هستند .

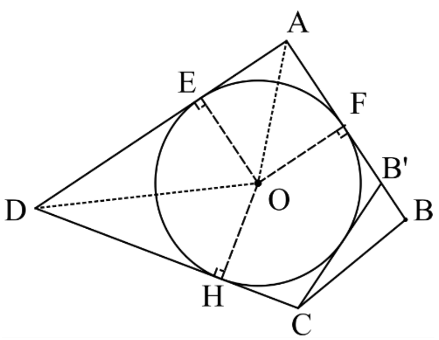
پس A و A′ هم اندازه خواهند بود که این امکان ندارد در نتیجه A′ همان A است .

قضیه : چهار ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر مجموع اندازه دو ضلع مقابل برابر با مجموع اندازه دو ضلع دیگر باشد .



اثبات : فرض کنید چهار ضلعی محیطی باشد پس :

$$\begin{aligned} AB+DC &= AF+BF+DH+CH \\ &= \underline{AE}+\underline{\underline{BG}}+\underline{DE}+\underline{\underline{CG}} \\ &= AD+BC \end{aligned}$$



حال فرض کنید $AB+CD=AD+BC$ و نیم ساز های زاویه های A و D را رسم می کنیم تا همدیگر را در O قطع کنند فاصله این نقطه از سه ضلع AD,AB,AC برابر است (چرا ؟) پس دایره ای به مرکز O و شعاع OE بر این سه ضلع مماس است ثابت می کنیم بر ضلع چهارم نیز مماس است.

(فرض خلف) فرض کنید این دایره بر BC مماس نباشد از C مماسی بر دایره

رسم می کنیم در این صورت چهار ضلعی AB′CD محیطی است و $AB'+CD=AD+B'C$

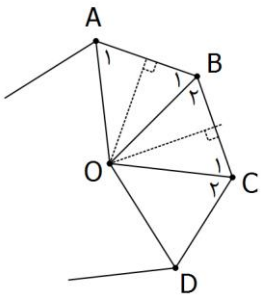
از تفاضل دو رابطه قبل داریم :

$$AB-AB'=BC-B'C \Rightarrow AB'+BB'-AB'=BC-B'C \Rightarrow BC=B'C+BB'$$

و این رابطه غیر ممکن است زیرا طبق نامساوی مثلثی در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است .

پس B′ همان B است و دایره بر ضلع BC نیز مماس است .

چند ضلعی منتظم : یک چند ضلعی محدب را منتظم می گویند هرگاه تمام ضلع های آن هم اندازه و زاویه های آن نیز هم اندازه باشند .



قضیه : هر چند ضلعی منتظم هم محاطی است و هم محیطی .

عمود منصف های اضلاع AB و BC را رسم می کنیم تا در O همدیگر را قطع کنند اگر O را به A,B,C وصل کنیم $OA=OB=OC=k$ و بنا به حالت (ض ض ض)

مثلث های OAB و BOC همنهشت هستند و $A_۱=B_۱=B_۲=C_۱=\alpha$ در نتیجه $C_۲=\alpha$. حال اگر O را به D وصل کنیم بنا به حالت (ض ز ض) دو مثلث OBC و OCD همنهشتند و $OD=k$.

به همین ترتیب فاصله O از بقیه رئوس نیز برابر K است و این یعنی O مرکز دایره ای است که از رئوس چند ضلعی می گذرد و از آنجایی که فاصله O از تمام ضلع ها نیز برابر است مرکز دایره ای است که بر اضلاع مماس است و این یعنی چند ضلعی منتظم هم محیطی و هم محاطی است .

تمرین های صفحه ۲۹ و ۳۰ :

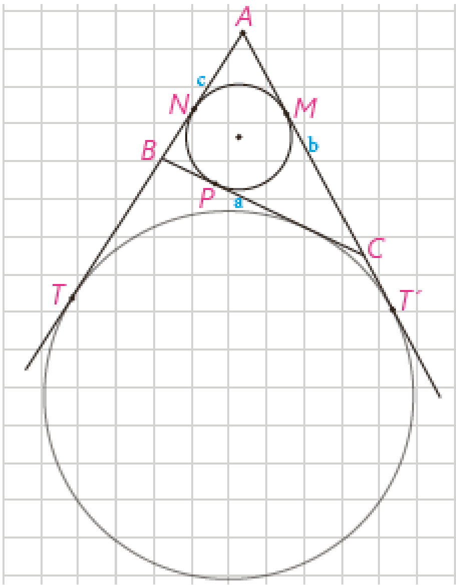
۱ــ ثابت کنید یک ذوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد.

۲ــ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی را به‌دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد.

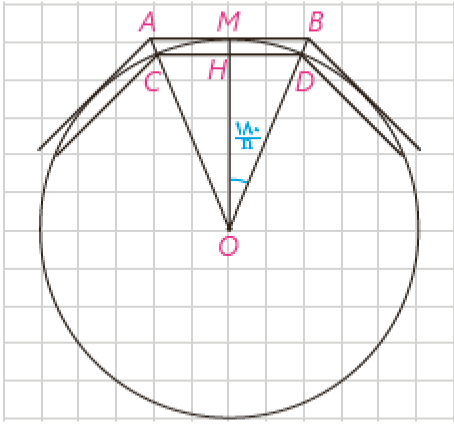
۳ــ ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۴ــ یک ذوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.

۶ــ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن N، M و P باشند و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند، نشان دهید : $AT=AT'=P$



۷ــ یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = ۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ و $CD = ۲r\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}$.



۸ــ شش ضلعی منتظم ABCDEF مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش‌ضلعی. مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

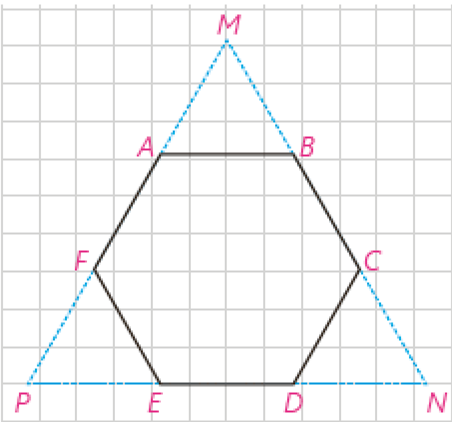
الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

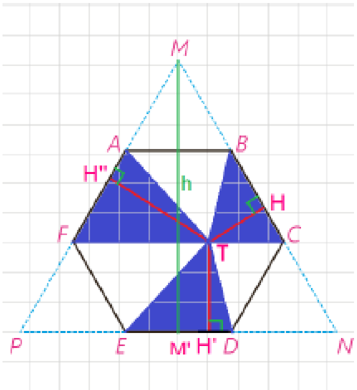
پ) از نقطهٔ دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسهٔ پایهٔ ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید :

$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$



حل قسمت ت :



$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$

$$S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}=\frac{۱}{۲}AF.TH''+\frac{۱}{۲}DE.TH'+\frac{۱}{۲}BC.TH$$

$$\xrightarrow{AF=ED=BC=a} S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}=\frac{۱}{۲}a(\underbrace{TH''+TH'+TH}_{h})=\frac{۱}{۲}ah$$

$$\Rightarrow S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}=\frac{۱}{۲}ah$$

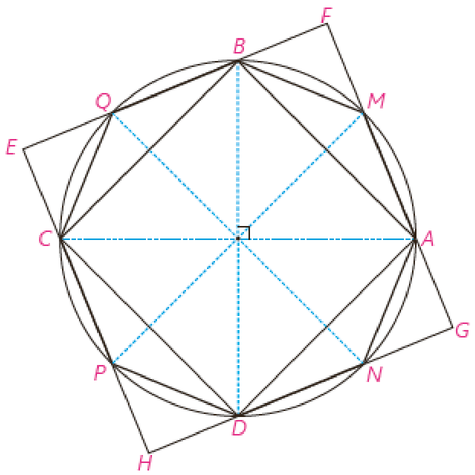
$$S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{۱}{۲}MN.h \xrightarrow{MN=۳a} S_{\overset{\triangle}{MNP}}=\frac{۳}{۲}a.h$$

$$\Rightarrow \frac{S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}}{S_{MNP}}=\frac{\frac{۱}{۲}ah}{\frac{۳}{۲}a.h}\Rightarrow \frac{S_{TAF}+S_{TDE}+S_{TBC}}{S_{MNP}}=\frac{۱}{۳}$$

مساحت مثل های آبی رنگ $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث MNP است ومساحت شش ضلعی $\frac{۲}{۳}$ مساحت مثلث MNP مساحت مثلث های سفید و آبی برابر با مساحت شش ضلعی است پس مساحت مثلث های سفید هم برابر با $\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$ است بنا براین مساحت مثلث های آبی با مساحت مثلث های سفید برابر است.

$$S_{TBC}+S_{TDE}+S_{TAF}=S_{TAB}+S_{TEF}+S_{TCD}$$

۹ــ دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.



فصل دوم : تبدیلات هندسی

درس اول : تبدیلات هندسی

درس دوم : کاربرد تبدیل ها

درس اول : تبدیلات هندسی