سطح مخروطی : هرگاه یکی از دو خط متقاطع حول دیگری دوران کند سطحی ایجاد می کند که آن را سطح مخروطی گویند.
در این تعریف خط ثابت را محور و خط متحرک را مولد و نقطه‌ی تقاطع دو خط را رأس می نامند.

مقطع مخروطی : مقطع (مجموعه‌ی نقاط مشترک صفحه و سطح مخروطی) هر صفحه با سطح مخروطی را مقطع مخروطی گویند.
به طوری که :

الف : هرگاه صفحه قاطع عمود بر محور، سطح مخروطی را قطع کند و از رأس آن نگذرد مقطع دایره است.

ب : هرگاه صفحه قاطع به طورمایل فقط یکی از دامنه های رویه را قطع کند و موازی با مولد نباشد، مقطع بیضی است.

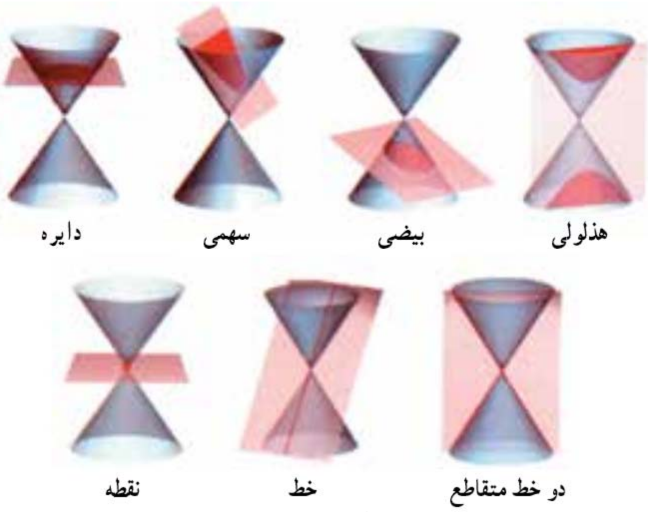
ج : هرگاه صفحه شامل محور رویه نباشد و هر دو دامنه را قطع کند، آن گاه اشتراک آن ها دو منحنی مجزا یعنی مقطع هذلولی است.

د : هرگاه صفحه قاطع موازی مولد، سطح مخروطی را قطع کند و بر سطح مقطع مماس نگردد (و از رأس سطح مخروطی عبور نکند.) مقطع سهمی است.

ه : هرگاه صفحه قاطع با رویه فقط در رأس مشترک باشد، آن گاه مقطع یک نقطه است.

و : هرگاه صفحه قاطع از رأس آن بگذرد و بر رویه مماس گردد (مقطع شامل رأس و فقط یک مولد باشد.) مقطع یک خط راست است.

ز : هرگاه صفحه قاطع از رأس آن بگذرد و هر دو دامنه‌ی رویه را قطع کند، آن گاه مقطع دو خط متقاطع است.   (ص۳۵کتاب جدید)



مثال) صفحه ای ازرأس یک سطح مخروطی می گذردوهردودامنه‌ی رویه راقطع می کند،فصل مشترک حاصل کدام شکل می تواندباشد

۱) دو خط راست   ۲) دایره   ۳) بیضی   ۴) هذلولی

جواب: گزینه ۱ صحیح است. چون صفحه از رأس سطح مخروطی می گذرد پس مقطع نمی تواند دایره، بیضی، سهمی و هذلولی باشد.

مثال) صفحه ای بر محور سطح مخروطی دوار عمود است، مقطع حاصل کدام می تواند باشد؟

۱) سهمی یا نقطه   ۲) دایره‌یا نقطه   ۳) هذلولی   ۴) دو خط متقاطع

جواب : گزینه ۲ صحیح است. چون صفحه بر محور سطح مخروطی دوار عمود است، پس مقطع حاصل دایره‌یا نقطه است.

مثال) مقطع یک سطح مخروطی با یک صفحه، سهمی است. این صفحه با مولد یا محور سطح مخروطی، کدام وضع را دارد؟

۱) موازی یک مولد   ۲) موازی محور   ۳) عمود بر یک مولد   ۴) گذرا از نقطه تلاقی محور و مولد

جواب : گزینه ۱ صحیح است. طبق تعریف سهمی موازی یک مولد است.   (کنکور سراسری ریاضی ۷۸)

مثال) صفحه ای یک سطح مخروطی را قطع نمی کند. فصل مشترک حاصل کدام شکل نمی تواند باشد؟

۱) دو خط راست   ۲) سهمی   ۳) هذلولی   ۴) بیضی   (کنکور سراسری تجربی ۷۱)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

مثال) صفحه‌ی p یک سطح مخروطی دوار را طوری قطع نموده است که مقطع همواره از دو قسمت مجزا تشکیل شده است وضع صفحه‌ی p نسبت به این سطح مخروطی کدام است؟

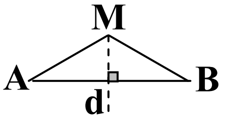
۱) به موازات محور   ۲) به موازات مولد   ۳) عمود بر مولد   ۴)گذرا از رأس(کنکور آزمون پیش دانشگاهی ریاضی ۷۶)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. چون مقطع همواره از دو قسمت مجزا تشکیل شده است پس هذلولی است.

۱)خطوط d_1 و d_2 متنافرند از نقطه A واقع بر d_1 حداکثر چند خط می گذرد که با خط d_2 متقاطع و با آن زاویه ۳۰ درجه می سازد؟

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) ۰   ۴) بیشمار   (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۰)

یادآوری : الف) هر نقطه‌ی روی عمودمنصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است. (ص۳۶کتاب جدید)



ب) هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمودمنصف آن است.

اگر خط d عمودمنصف پاره خط AB باشد، در این صورت $M \in d \Leftrightarrow MA = MB$

به طور خلاصه، یک نقطه روی عمودمنصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

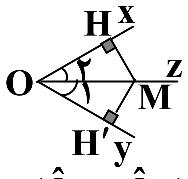
به عبارت معادل، می گوئیم عمودمنصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله اند.

مکان هندسی : مجموعه‌ی همه‌ی نقطه های صفحه یا فضا است که دارای ویژگی مشترکی هستند، یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که آن ویژگی را دارد عضو این مجموعه می باشد.

س۱) واژه زیر را تعریف کنید : مکان هندسی

س۲) جمله زیر را با کلمه مناسب تکمیل کنید.

نقطه M روی عمود منصف پاره خط AB است اگروفقط اگر فاصله M از A و B......... باشد.



فعالیت ۱ : ۱) هر نقطه روی نیمساز زاویه . . . .

۲) هر نقطه که . . . . روی نیمساز زاویه است.

اکنون گزاره زیر را کامل کنید :

یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر . . . . $(\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲) M \in Oz \Leftrightarrow \cdots$

بنابراین می توان گفت :

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که . . . .

س۳) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مکان هندسی نقطه ای در صفحه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد . . . . است.

مثال) در مثلث ABC زاویه‌ی $\hat{A} > \hat{C}$، نیمساز زاویه‌ی B و عمودمنصف ضلع AB در نقطه‌ی D متقاطع اند. M و N پای عمودهایی است که از نقطه‌ی D به ترتیب بر BA و BC رسم شده اند، کدام نابرابری درست است؟

۱) $NC > NB$ ۲) $NC < NB$ ۳) $DA > DC$ ۴) $AM > BN$ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۵)

۲) در مثلث ABC، داریم $\hat{B} = ۵۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمودمنصف ضلع BC در نقطه M متقاطع اند، زاویه $M\hat{B}C$ چند درجه است؟

۱) ۲۰   ۲) ۳۰   ۳) ۳۵   ۴) ۴۰   (کنکور سراسری ریاضی۸۹خارج از کشور)

۳) مثلث ABC مفروض است مکان هندسی نقاطی مانند O در صفحه‌ی مثلث ABC به طوری که $\frac{s_{\Delta OAB}}{s_{\Delta OAC}} = \frac{AB}{AC}$ باشد.

کدام یک از اجزای نظیر رأس A است؟ (s نماد مساحت است.)

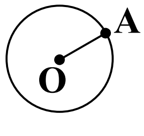
۱) میانه   ۲) فقط نیمساز داخلی   ۳) ارتفاع   ۴) نیمسازهای داخلی و خارجی

س۴) مکان هندسی مرکز دایره هایی را که بر دو خط متقاطع داده شده مماسند چیست؟

فعالیت ۲ : دایره‌ی C به مرکز O و شعاع r را در نظر بگیرید.

الف) هر نقطه‌ی دلخواه A روی دایره، از O چه فاصله ای دارد؟

ب) اگر B، یک نقطه در صفحه باشد و از O به فاصله‌ی r باشد ($OB = r$) با برهان خلف نشان دهید، B روی دایره است و از (الف) و (ب) نتیجه بگیرید : $A \in C \Leftrightarrow OA = r$



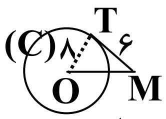
نتیجه : نقطه‌ی A روی دایره‌ی $C(O,r)$ است، اگر و تنها اگر . . . .

نتیجه : دایره‌ی $C(O,r)$ مکان هندسی نقاطی از صفحه است که . . . .

س۵) مکان هندسی مرکز دایره هایی را پیدا کنید که از نقطه مفروض A می گذرند و شعاع آنها برابر R است.

س۶) دایره $C(O,۶)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه ای از صفحه این دایره را تعیین کنید که از آن نقطه مماس هایی به طول ۸ بر این دایره می توان رسم کرد.

مثال) دایره $C(O,۸)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه ای از صفحه این دایره که از آن نقطه مماس هایی به طول ۶ بر این دایره می توان رسم کرد کدام است؟



۱) یک خط   ۲) دایره ای به شعاع۶   ۳) دایره ای به شعاع۸   ۴) دایره ای به شعاع۱۰

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $OM = \sqrt{۳۶ + ۶۴} = ۱۰$ بنابراین مکان هندسی مورد نظردایره به مرکز O و شعاع۱۰ می باشد.

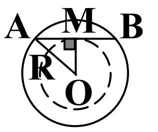
س۷) دایره $C(O, R)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه ای را تعیین کنید که مماس های رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم عمود باشند.

۴) مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط می توان دو خط عمود بر هم و مماس بر دایره به شعاع $۲\sqrt{۲}$ رسم کرد کدام است؟

۱) دایره به شعاع ۲ ۲) دایره به شعاع ۳   ۳) دایره به شعاع ۴   ۴) دایره به شعاع ۵

س۸) در دایره $C(O, R)$ وترهای به طول K رسم شده اند، مکان هندسی نقطه‌ی M وسط این وترها را تعیین کنید.

مثال) مکان هندسی وسط وترهایی به طول ۶ در دایره ای به قطر ۱۰ کدام است؟



۱) یک مربع   ۲) دایره ای به مرکز همان دایره و شعاع ۴

۳) دایره ای به مرکز همان دایره و شعاع ۳   ۴) دو پاره خط عمود بر هم

جواب : گزینه ۲ صحیح است. فرض کنیم $AB = ۶$ وتری از دایره‌ی $C(O,۲R = ۱۰)$ باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی Oمرکز دایره از نقطه‌ی M وسط وتر AB همواره مقدار ثابت زیر است. $OM = \sqrt{OA^۲ - AM^۲} = \sqrt{(\frac{۱۰}{۲})^۲ - (\frac{۶}{۲})^۲} = \sqrt{۱۶} = ۴$

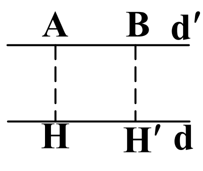
پس مکان هندسی نقطه‌ی M دایره ای به مرکز O و به شعاع ۴ است.

س۹) سکه ای به شعاع ۲ سانتی متر را روی صفحه‌ی مربع شکلی به ضلع ۱۲ سانتی متر پرتاب می کنیم، مکان هندسی نقطه ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع شود.

س۱۰) پاره خط AB به اندازه‌ی L واحد از صفحه‌ی مختصات چنان می لغزد که همواره دو سر آن، A و B بر روی محورهای مختصات قرار دارند. مکان هندسی نقطه‌ی M وسط AB کدام است؟

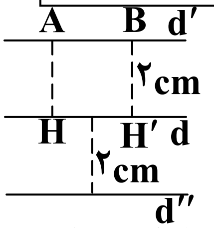
س۱۱)مطلوب است مکان هندسی نقطه هایی که مجموع مربع های فاصله هایشان از دو خط عمود بر هم، مساوی مقدار ثابت $a^۲$باشد.

فعالیت ۳ : دو خط موازی d، d' را که فاصله‌ی آنها از هم ۲ سانتی متر است، در نظر بگیرید.



آیا نقطه های دلخواه A و B روی d'، از خط d فاصله‌ی یکسانی دارند؟ این فاصله چقدر است؟

آیا می توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از d به فاصله‌ی ۲ سانتی متر باشد و روی d' نباشند؟



همه نقاطی که از d به فاصله ۲ سانتی متر واقع اند، روی چه شکلی قرار دارند؟

آیا گزاره زیر درست است؟

یک نقطه در صفحه، از خط d به فاصله ۲ سانتی متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط d' و d'' که موازی d هستند، واقع باشد.

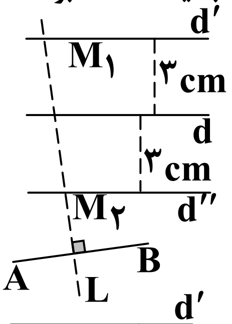
آیا نتیجه گیری زیر درست است؟ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله‌ی ۲ سانتی متر هستند، دو خط راست موازی d (در دو طرف آن) و به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از آن می باشد.

۵) اگر فاصله‌ی دو خط موازی برابر ۶ باشد، مکان هندسی نقاطی از صفحه این دو خط که تفاضل فواصل آن نقاط از این دو خط برابر ۴ باشد کدام گزینه است؟

۱) یک خط موازی با آن دو خط و بین آن دو خط۲) دو خط موازی با آن دو خط و بین آن دو خط

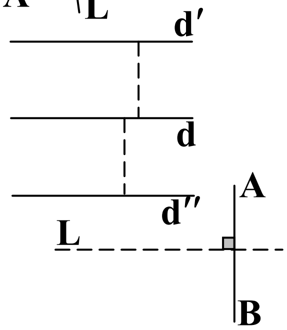
۳) دو خط موازی با آن دو خط و خارج آن دو خط۴) تهی

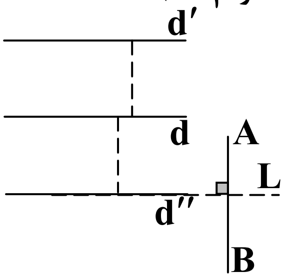
مثال : دو نقطه‌ی A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند. نفطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد.



حل : مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمودمنصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر از آن هستند. بنابراین نقطه‌ی برخورد خط L (عمودمنصف AB) و دو خط موازی d' و d'' جواب مسئله است (نقاط M_1 و M_2).

بحث در وجود جواب : اگر L یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم قطع می کند و مسئله مانند شکل، ۲ جواب دارد. اگر با دو خط موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر L بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد. (ص۳۸کتاب جدید)





تمرین۱) مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید :

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله اند.

ب) مرکزهای همه‌ی دایره هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس اند.

پ) مرکز همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند.

ت) مرکزهای همه‌ی دایره هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی $C(O,r)$ در صفحه‌ی این دایره مماس خارج اند. (ص۳۹کتاب جدید)

۶) چند نقطه روی یک دایره وجود دارد که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشد؟

۱) حداکثر ۲ تا   ۲) همواره ۲ تا   ۳) حداکثر ۴ تا   ۴) همواره ۲ تا

س۱۲) دو خط L و L' در نقطه O متقاطع اند، نقاطی در صفحه این دو خط مشخص کنید که از دو خط به یک فاصله و از نقطه O به فاصله‌ی R_{cm} باشد مسئله چند جواب دارد؟ $(R \neq 0)$

س۱۳) مکان هندسی مرکز توپی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می غلتد را با رسم شکل بیابید.

س۱۴) مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد چیست؟

س۱۵) جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مکان هندسی مرکز دایره ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می غلتد . . . . می باشد.

تمرین۲) نقاط A ، B ، C و D در صفحه مفروش اند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).   (ص۳۹کتاب جدید)

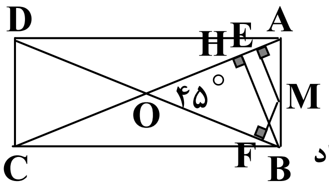
تمرین۳)نقاط A ، B و C در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد. (بحث کنید).   (ص۳۹کتاب جدید)

تمرین۴) نقطه‌ی A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه ای بیابید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی متر و از d به فاصله‌ی ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).   (ص۳۹کتاب جدید)

تمرین۵) هرگاه صفحه ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (مقطع) حاصل چه شکلی است؟
(ص۳۹کتاب جدید)

تمرین۶) هرگاه دو خط d و L موازی باشند، از دوران d حول L سطحی ایجاد می شود که آن را یک سطح استوانه ای می نامیم. حال فرض کنید صفحه‌ی P، یک سطح استوانه ای را قطع کند. در حالت های مختلف در باره‌ی سطح مقطع حاصل بحث کنید (چهار حالت). **(ص۳۹کتاب جدید)**

مثال) دو خط d و d' با زاویه‌ی ۴۵ درجه یکدیگر را قطع کرده اند. مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصل آن نقاط تا این دو خط برابر ۲ می باشد دارای چه مساحتی است؟

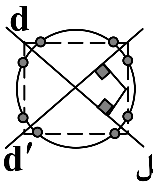


۱) ۴   ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) ۸   ۴) $۸\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. می دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق همواره مقداری ثابت و برابر ارتفاع وارد بر ساق آن مثلث است. به این ترتیب می توان نشان داد مکان هندسی نقاطی که مجموع آن نقاط تا دو نیم خط متقاطع یکسان است، قاعده مثلث متساوی الساقینی است که ارتفاع وارد بر ساق آن مثلث برابر آن مقدار یکسان است. در صورتی که هدف یافتن مکان نقاطی باشد که مجموع فواصل آن نقاط تا دو نیم خط متقاطع یکسان باشد، این مکان، تبدیل به چهار پاره خط می شوند که در کنار یکدیگر تشکیل مستطیل خواهد داد.

$$\hat{O} = ۴۵^\circ \text{ و } ME + MF = MH = ۲ \Rightarrow OH = ۲ \Rightarrow OB = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow s_{ABCD} = \frac{(۲\sqrt{۲})(۲\sqrt{۲})\sin ۴۵}{۲} = ۸\sqrt{۲}$$

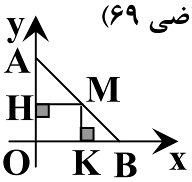
مثال) دو خط متقاطع d و d' و دایره‌ی C مفروض اند، بر دایره‌ی C حداکثر چند نقطه می توان یافت که مجموع فوصلشان از دو خط d و d' مساوی k باشد؟



۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۸

جواب : گزینه ۴ صحیح است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله هایشان از دو خط ثابت متقاطع d و d'، برابر عدد ثابت و معلوم k باشد ضلع های مستطیلی است که این دو خط قطرهای آن هستند و فاصله‌ی هر رأس مستطیل از قطرهایش k است. رأس های مستطیل هم جزء مکان هستند. تعداد نقاط مشترک این مستطیل با دایره C جواب مسأله است. بنابراین حداکثر هشت نقطه می توان یافت که مجموع فوصلشان از دو d و d' خط مساویر k باشد. توجه : اگر این مستطیل مربعی به ضلع به $k\sqrt{۲}$ باشد و دایره ای به مرکز محل برخورد دو قطر و به شعاع x به طوری که $\frac{k\sqrt{۲}}{۲} < x < \frac{k\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۲}$ باشد رسم کنیم ۸ نقطه به دست می آید.

مثال) مکان هندسی مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله های آنها از دو خط عمود بر هم برابر ۵ باشد، کدام است؟



۱) مربعی به ضلع ده ۲) مربعی به ضلع $۱۰\sqrt{۲}$ ۳) مربعی به قطر $۱۰\sqrt{۲}$ ۴) مربعی به قطر ۱۰ (کنکور سراسری ریاضی ۶۹)

جواب : گزینه ۴ درست است. فرض کنیم $M(x, y)$ نقطه ای از مکان باشد داریم : $|x| + |y| = ۵$

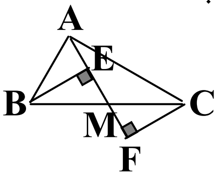
پس : $x > ۰, y > ۰ \Rightarrow x + y = ۵$ و $x < ۰, y > ۰ \Rightarrow -x + y = ۵$

و $x < ۰, y < ۰ \Rightarrow -x - y = ۵$ و $x > ۰, y < ۰ \Rightarrow x - y = ۵$

با رسم نمودار معادله‌ی خطوط فوق دیده می شود که مکان هندسی مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله های آنها از دو خط عمود بر هم برابر ۵ باشد، مربعی به طول قطر ۱۰

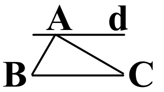
س۱۶) دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. آیا مسئله همواره جواب دارد؟ بحث کنید.(مسأله چند جواب دارد؟ (بحث کنید))

مثال) مثلث ABC مفروض است. از نقطه‌ی A چند خط می توان رسم کرد که نقاط B و C از آن به یک فاصله باشد؟



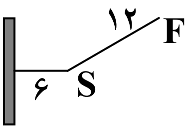
۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

جواب : گزینه ۳ صحیح است. با توجه به همنهشتی دو مثلث BME و CMF فاصله‌ی نقاط B و C از کلیه خطوطی که از نقطه‌ی M وسط BC عبور می کند، یکسان است. لذا به عنوان یکی از این خطوط فاصله‌ی نقاط B و C تا میانه‌ی AM یکسان است. همچنین واضح است فاصله‌ی نقاط B و C از خط d که موازی BC و از نقطه‌ی A رسم می شود یکسان است.



۶) در صفحه‌ی مثلث ABC، چند خط وجود دارد که هر سه نقطه‌ی A، B و C از آن ها به یک فاصله باشند؟

۱) صفر   ۲) یک   ۳) سه   ۴) بیشمار



س۱۷) نمودار مقابل محل قرار گرفتن ساختمان شهرداری، مجسمه S و فواره‌ی F را نشان می دهد.

س۱۸) مکان هندسی نقطه ای را در فضا را پیدا کنید که از یک خط داده شده‌ی L به فاصله d باشد.

س۱۹) مکان هندسی رأس های مثلثی هایی که در قاعده مشترک و مساحت برابر دارند را تعیین کنید.

س۲۰) مکان هندسی نقطه ای از صفحه را پیدا کنید که از دو خط موازی به یک فاصله باشد.

س۲۱) مکان هندسی مرکز دایره هایی را بیابید که بر دو خط متوازی مماس باشند.

س۲۲) مکان هندسی وسط های پاره خط هایی را که دو سرشان روی دو خط موازی واقعند، پیدا کنید.

س۲۳) مکان هندسی نقطه ای در فضا را پیدا کنید که از دو صفحه موازی به یک فاصله باشد.

۷) مکان هندسی نقطه ای از فضا که از دو صفحه متوازی به یک فاصله است، کدام است؟

۱) یک خط راست موازی آن صفحه   ۲) یک صفحه عمود بر آن دو صفحه

۳) یک خط عمود بر آن دو صفحه   ۴) صفحه ای موازی آن دو صفحه و به یک فاصله از آن دو صفحه

س۲۴) دو صفحه‌ی P و Q و خط d با هم موازیند. مکان هندسی نقطه ای از فضا که از دو صفحه‌ی موازی P و Q به یک فاصله باشد و از خط موازی d به فاصله‌ی معلوم k باشد را به کمک استدلال استقرایی بیابید. (در مورد جواب های مسئله بحث کنید.)

۸) مکان هندسی نقطه ای در درون یک مکعب که از دو وجه مقابل آن به یک فاصله است، کدام است؟

۱) صفحه ای عمود برآن دو وجه   ۲) یک خط موازی آن دو وجه

۳) تنها یک نقطه   ۴) صفحه ای موازی آن دو وجه و به یک فاصله از آن دو

دایره : مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت (مرکز دایره) به فاصله ای ثابت (شعاع دایره) واقع اند.

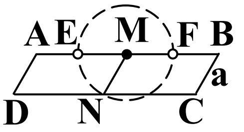
س۲۹) دایره مکان هندسی چه نقطه ای از صفحه است.

س۳۰) مکان هندسی نقطه ای از یک صفحه که از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه به فاصله ثابتی است چیست؟

مثال) در متوازی الاضلاع $ABCD$ طول BC برابر با a و ضلع AB ثابت است. اگر زاویه‌ی A تغییر کند، مکان هندسی وسط CD کدام است؟

۱) قسمتی از دایره به قطر AB ۲) قسمتی از دایره ای به مرکز وسط AB و شعاع a

۳) خطی موازی AB ۴) دایره ای به مرکز A و شعاع AB



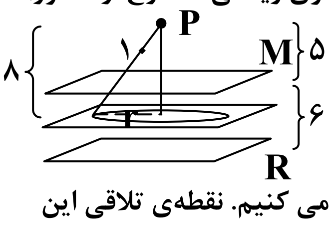
جواب : گزینه ۲ صحیح است. فرض کنیم نقاط M و N به ترتیب وسط های ضلع های AB و CD باشند.
بدیهی است که چهارضلعی $MNCB$ متوازی الاضلاع است پس : (مقدار ثابت) $MN = BC = a$
از طرفی جای نقطه‌ی M نیز ثابت می باشد درنتیجه تغییر زاویه‌ی M تابع تغییر زاویه‌ی A است.
و چون ضلع های AB و $AD = BC = a$ ثابت اند پس مکان هندسی نقطه‌ی N وسط ضلع CD دایره ای است به مرکز M و به شعاع a. به جز دو نقطه‌ی E و F که در آن حالت متوازی الاضلاع به پاره خط تبدیل می شود.

کره : کره مکان هندسی نقطه ای از فضا است که از یک نقطه ثابت داده شده در آن به فاصله‌ی معین باشد.

س۳۱) مکان هندسی نقطه ای از فضا که از نقطه ثابتی واقع در آن به فاصله ثابتی است چیست؟
مثال) اگر $AB = ۱۲$ باشد، چند نقطه در فضا می توان یافت کرد که از A به فاصله‌ی ۶ و از B به فاصله‌ی ۴ باشند؟
۱) هیچ   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) بیشمار
جواب : گزینه ۱ صحیح است. یک مکان هندسی نقاط در فضا که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۶ باشند کره ای به مرکز A و شعاع ۶ است و مکان هندسی دیگر نقاط در فضا که از نقطه‌ی B به فاصله‌ی ۴ باشند کره ای به مرکز B و شعاع ۴ است. چون $۴ + ۶ < ۱۲$ می باشد پس این دو کره دارای نقطه‌ی مشترک نخواهند بود. (هندسه ۳ دوازدهم ۹۸-۹۷)
س۳۲) مکان هندسی مرکز دایره هایی که از دو نقطه‌ی متمایز A و B واقع در یک صفحه می گذرند چیست؟
س۳۳) سه نقطه متمایز A، B و C در یک صفحه داده شده اند. نقطه ای از این صفحه را بیابید که از دو نقطه‌ی B و C به یک فاصله و از نقطه‌ی A به فاصله‌ی معلوم R باشد.
س۳۴) مکان هندسی مرکز دایره ای را تعیین کنید که در نقطه مشخص A بر یک خط داده شده مماس باشد و این دایره از نقطه‌ی ثابت B خارج آن خط بگذرد.
س۳۵) با استفاده از خط کش و پرگار مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض DE قطر آن باشد. (روش رسم را توضیح دهید.)(مراحل رسم را توضیح دهید.)

D•——•E

۹) پاره خط AB به طول ۱۰ سانتی متر در یک صفحه مفروض است. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از A به فاصله‌ی ۶ و از B به فاصله‌ی ۴ باشند؟
۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳
س۳۶) مکان هندسی مرکز دایره های به شعاع R، که بر خط مفروض d مماس است چیست؟
س۳۷)مکان هندسی نقطه ای از فضا که از دو خط موازی L و L' به‌یک فاصله باشد و از نقطه ثابت O به فاصله‌ی R باشد، را بیابید.
مثال) دو صفحه موازی هم و نقطه P به فاصله ۵ و ۱۱ واحد از دو صفحه در بالای هر دو قرار دارد. مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه به یک فاصله و از نقطه P به فاصله ۱۰ واحد باشد، کدام است؟   (کنکور سراسری ریاضی۹۱خارج از کشور)

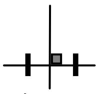


۱) دایره ای به شعاع۶   ۲) پاره خط به طول ۶   ۳) دایره به شعاع $۴\sqrt{۲}$ ۴) پاره خط به طول $۴\sqrt{۲}$
جواب : گزینه ۱ صحیح است. یک مکان هندسی نقطه ای که از دو صفحه‌ی موازی M و R به یک فاصله باشد صفحه ای است موازی آن دو و به فاصله‌ی یکسان از آن دو. مکان هندسی دیگر نقاطی که از نقطه ثابت P، به فاصله ۱۰ باشد سطح کره ای به مرکز P و به شعاع ۱۰ است. این دو مکان را رسم می کنیم. نقطه‌ی تلاقی این دو مکان جواب مسئله است. لازم به ذکر است که کره و این صفحه متقاطع اند.پس فصل مشترک آنها یک دایره است. با توجه به شکل دایره ای به شعاع ۶ مکان هندسی مورد نظر است.

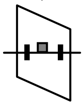
$$r^{۲} = ۱۰^{۲} - ۸^{۲} = ۳۶ \Rightarrow r = ۶$$

۱۰) مکان هندسی مرکز دایره هایی که در نقطه ثابت A بر دایره $C(O,R)$ مماسند کدام شکل است؟
۱) خط مماس بر دایره (C) در نقطه A ۲) نیم خط OA(به مبدأ O)
۳) دایره ای مماس بر دایره (C) درنقطه A ۴) خط OA

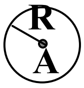
نکته : (معرفی چند مکان هندسی معروف) مکان هندسی



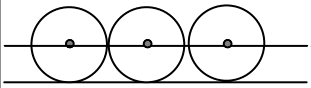
الف : نقطه ای در صفحه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله است، خط عمود منصف آن پاره خط



ب : نقطه ای در فضا که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله است، صفحه عمود منصف آن پاره خط



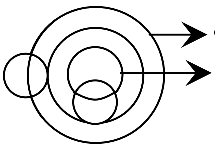
پ : مرکزدایره هایی که از نقطه مفروض A می گذرند و شعاع آن ها برابر R است، دایره به مرکز A و شعاع R می باشد.



مکان هندسی مرکز

ت : مرکز توپی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می غلتد،

خطی موازی خط فوق می باشد.

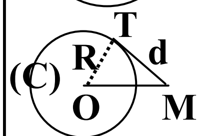


مکان مماس خارج

مکان مماس داخل

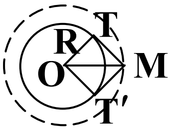
ث : مراکز دایره هایی که با شعاع معلوم r بر محیط دایره مفروض به شعاع R مماس باشند

عبارت است از دو دایره هم مرکز با آن دایره و به شعاع های $R \pm r$



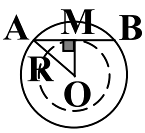
ج : نقطه ای از صفحه‌ی دایره‌ی $C(O,R)$ که از آن نقطه می توان مماس های به طول d بر این دایره رسم کرد

دایره ای است به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R^۲ + d^۲}$.



چ : نقطه ای از صفحه‌ی دایره $C(O,R)$ که مماس های رسم شده از این نقطه بر دایره، بر هم عمود باشند،

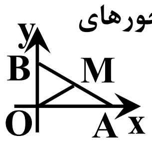
دایره ای به مرکز O و به شعاع $R\sqrt{۲}$ است. (دایره‌ی مونژ)



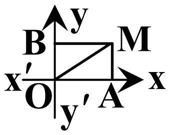
ح : نقطه‌ی در صفحه‌ی دایره $C(O,R)$ که از آن بتوان وترهای به طول K در این دایره رسم نمود،

دایره ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R^۲ - (\frac{K}{۲})^۲}$ است.

خ : نقطه‌ی M وسط پاره خط AB به اندازه‌ی L واحد از صفحه‌ی مختصات که همواره دو سر آن، A و B بر روی محورهای

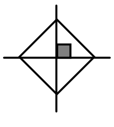


مختصات قرار دارند، دایره ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\frac{۱}{۲}L$.



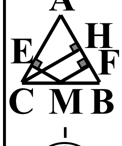
د : نقطه هایی که مجموع مربع های فاصله هایشان از دو خط عمود بر هم، مساوی مقدار ثابت $a^۲$ باشد.

دایره ای است به مرکز O (محل برخورد دو خط) و به شعاع $|a|$



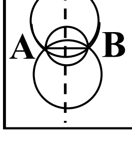
ذ : مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله های آنها از دو خط عمود بر هم برابر K باشد،

مربعی به طول قطر $۲K$(و یا مربعی به ضلع $K\sqrt{۲}$)

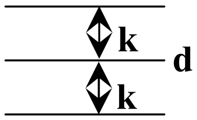


ر : مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله هایشان از دو ضلع یک زاویه‌ی معلوم برابر عدد ثابت k باشد (درون زاویه)

قاعده‌ی مثلث متساوی الساقینی است که دو ساق آن دو ضلع زاویه هستند و ارتفاع وارد بر ساق مثلث نیز k است.



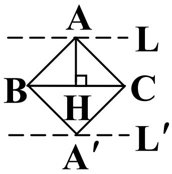
ز : مرکز دایره هایی که از دو نقطه متمایز Aو Bواقع در یک صفحه می گذرند، خط عمودمنصف پاره خط AB می باشد.



ژ : نقطه ای از صفحه که از یک خط داده شده‌ی $\mathbf{d}$ در آن صفحه به فاصله معلوم $\mathbf{k}$ باشد. دو خط موازی خط $\mathbf{d}$ و به فاصله‌ی $\mathbf{k}$ که در دو طرف خط $\mathbf{d}$ قرار گرفته اند می باشد. $(\mathbf{k} > ۰)$

س : نقطه ای از فضا که از یک صفحه داده شده‌ی $\mathbf{P}$ به فاصله معلوم $\mathbf{k}$ باشد. دو صفحه موازی صفحه $\mathbf{P}$ و به فاصله‌ی $\mathbf{k}$ که در دو طرف صفحه‌ی $\mathbf{P}$ قرار گرفته اند می باشد. $(\mathbf{k} > ۰)$

ش : مرکز دایره های به شعاع $\mathbf{R}$، که بر خط مفروض $\mathbf{d}$ مماس است، دو خط راست موازی خط $\mathbf{d}$، در دو طرف آن و به فاصله $\mathbf{R}$ از $\mathbf{d}$ می باشند.



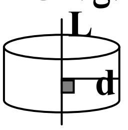
ص : رأس های مثلثی هایی که در قاعده مشترک و مساحت برابر دارند، دو خط $\mathbf{L}$ و $\mathbf{L'}$ است که موازی قاعده‌ی $\mathbf{BC}$ یکی بالای آن و دیگری پایین قاعده به فاصله ارتفاع قرار دارند.

ق : وسط های پاره خط هایی را که دو سرشان روی دو صفحه موازی واقعند، صفحه ای است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها

ک : مرکز دایره هایی از فضا که در یک نقطه مشخص بر یک خط داده شده مماس باشند، یک صفحه که از $\mathbf{A}$ می گذرد و بر خط $\mathbf{L}$ عمود است می باشد.

ض : مرکز ثقل مثلث هایی که قاعده‌ی مشترک داشته و ارتفاع وارد بر این قاعده در همه‌ی آن ها مشترک باشد. خطی است موازی قاعده و به فاصله‌ی ثلث ارتفاع از آن

ط : نقطه ای در فضا که از یک خط داده شده‌ی $\mathbf{L}$ به فاصله $\mathbf{d}$ باشد. سطح جانبی استوانه ای است که خط $\mathbf{L}$ محور تقارن آن است. به طوری که فاصله‌ی هر نقطه‌ی روی سطح از خط $\mathbf{L}$ برابر $\mathbf{d}$ باشد.



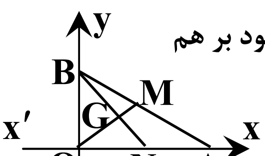
ظ : نقطه ای از صفحه که از دو خط موازی به یک فاصله باشد، خط راستی است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها

ع : نقطه ای از فضا که از دو صفحه موازی به یک فاصله باشد، صفحه ای است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها

غ : مکان هندسی مرکز دایره هایی که بر دو خط متوازی مماس باشند. خط راستی است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها

ف : وسط های پاره خط هایی را که دو سرشان روی دو خط موازی واقعند، خط راستی است موازی آن دو و به یک فاصله از آنها

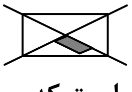
گ : مرکز دایره هایی را که بر دو خط متقاطع داده شده مماسند، دو خط، نیمسازهای زاویه های ایجاد شده بین دو خط متقاطع است که بر هم عمود نیز هستند.



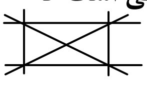
ل : مرکز ثقل مثلث قائم الزاویه $\mathbf{ABO}$ را که وترش $\mathbf{AB}$، طول ثابتی دارد و دو سر اصلی وتر روی دو خط عمود بر هم $\mathbf{x'Ox}$ و $\mathbf{y'Oy}$ تغییر مکان می دهد، دایره ای به مرکز $\mathbf{O}$ و به شعاع $\frac{۱}{۳}\mathbf{AB}$ است.

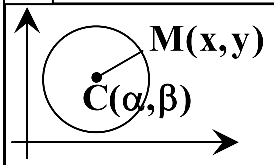
م : نقاطی از صفحه که مجموع فاصله هایشان از دو خط ثابت متقاطع، برابر عدد ثابت و معلوم $\mathbf{k}$ باشد ضلع های مستطیلی است که این دو خط قطرهای آن هستند و فاصله‌ی هر رأس مستطیل از قطرهایش $\mathbf{k}$ است. رأس های مستطیل هم جزء مکان هستند.

ن : نقاطی از صفحه که اگر از آن نقاط دو خط به موازات دو خط متقاطع $\mathbf{L}$ و $\mathbf{L'}$رسم کنیم محیط متوازی الاضلاعی به محیط ثابت و مشخص $\mathbf{k}$ به دست آید نقاط روی مستطیلی به قطر $\mathbf{k}$ است.



و : نقاطی از صفحه که تفاضل فواصلشان از دو خط ثابت و متقاطع، برابر عدد ثابت و معلوم $\mathbf{k}$ باشد امتداد اضلاع مستطیلی است که این دو خط قطرهای آن بوده و فاصله‌ی هر رأس مستطیل تا قطرش $\mathbf{k}$ است (۸ نیم خط)





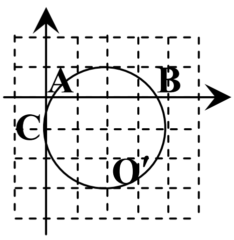
معادله کانونیک (استاندارد) دایره : معادله دایره به مرکز $C(\alpha,\beta)$ و شعاع R به صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ است.

حالت خاص : معادله دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع R به صورت $x^۲+y^۲=R^۲$ است.

مثال:معادله‌ی دایره ای به مرکز $O'(۲,-۱)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

حل : به کمک دستور بالا معادله‌ی استاندارد دایره‌ی فوق نوشته می شود : $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$

اگر در این معادله، $y=۰$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور xها به دست می آید :



$$(x-۲)^۲+۱=۴\Rightarrow(x-۲)^۲=۳\Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۳}\Rightarrow x=۲\pm\sqrt{۳}$$

لذا دایره فوق محور xها را در نقاط $A(۲-\sqrt{۳},۰)$ و $B(۲+\sqrt{۳},۰)$ قطع می کند

و اگر در این معادله، $x=۰$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور yها به دست می آید :

$$۴+(y+۱)^۲=۴\Rightarrow(y+۱)=۰\Rightarrow y=-۱$$

بنابراین دایره فوق محور yها را در نقطه‌ی $C(۰,-۱)$ و $B(۲+\sqrt{۳},۰)$ قطع می کند.   (ص۴۰کتاب جدید)

۱۱) در مثلث ABC، ضلع BC ثابت و رأس A در صفحه‌ی مثلث طوری تغییر می کند که طول میانه‌ی ضلع AC همواره مقداری ثابت باشد. مکان هندسی رأس A کدام است؟

۱) دایره ای به شعاع طول میانه‌ی ضلع AC ۲) دایره ای به شعاع دو برابر طول میانه‌ی ضلع AC

۳) خطی عمود بر ضلع BC ۴) دو پاره خط عمود برهم

نکته : دامنه و برد معادله‌ی دایره : برای پیدا کردن حداقل و حداکثر مقدار x در معادله‌ی یک دایره کافی است مرکز و شعاع دایره را پیدا کنیم. در این صورت اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد، آن گاه حدود x به صورت زیر به دست می آید (x را به اندازه‌ی R حول α نوسان می دهیم) : $\alpha-R\le x\le\alpha+R$ در نتیجه : $D=[\alpha-R,\alpha+R]$ (دامنه)

و هم چنین برای پیدا کردن برد معادله‌ی دایره‌یا ماکسیمم و مینیمم y، کافی است y را به اندازه‌ی R حول β نوسان دهیم. یعنی $\beta-R\le y\le\beta+R$ در نتیجه : $\Delta=[\beta-R,\beta+R]$

مثال : کمترین مقدار x از رابطه‌ی $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۲۵$ کدام است؟

جواب : $O(\alpha,\beta)=(۱,-۲)$ و $R^۲=۲۵\Rightarrow R=۵$ و $۱-۵\le x\le۱+۵\Rightarrow-۴\le x\le۶\Rightarrow Min(x)=-۴$

۱۲) طول قطر دایره‌ی $۹(x+۱)^۲+(۳y-۲)^۲=۳۶$ چقدر است؟

۱ (۱   ۲ (۲   ۳ (۴   ۴ (۶

طریقه‌ی رسم دایره : برای رسم دایره مرکز آن را مشخص کنیم سپس به اندازه‌ی شعاع دایره در چهار طرف شمال، جنوب، شرق و غرب حرکت کنیم تا چهار نقطه دایره مشخص شود سپس این نقطه ها را به صورت کمان به هم وصل می کنیم.

مثال) سطح دایره $(۲x+۲)^۲+(۲y-۴)^۲=۱۲$ در کدام نواحی محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) فقط دوم   ۲) فقط اوّل و دوم و سوم   ۳) فقط اوّل و دوم   ۴) هر چهار ربع   (کنکور آزاد ریاضی ۸۳)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $(۲x+۲)^۲+(۲y-۴)^۲=۱۲ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۳ \Rightarrow O'(-۱,۲)$ و $R=\sqrt{۳}$

اگر دایره رسم شود ملاحظه می گردد که از ناحیه سوم و چهارم نمی گذرد.

مثال) سطح دایره‌ی $x^۲+۲x+y^۲-۲y=-\frac{۱}{۴}$ در کدام ربع های محورهای مختصات قرار دارد؟

۱) فقط دوم   ۲) فقط دوم و سوم   ۳) فقط اوّل و دوم و سوم   ۴) چهار ربع   (کنکور آزاد۸۶خارج از کشور)

جواب:گزینه۳صحیح است $x^۲+۲x+y^۲-۲y=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۱)^۲=\frac{۷}{۴} \Rightarrow O(-۱,۱)$ و $R=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\approx ۱/۳$

با رسم شکل ملاحظه می شود که این دایره از ربع های اوّل و دوم و سوم می گذرد اما از ربع چهارم نمی گذرد.

مثال) دایره $x^۲-۶x+y^۲+۴y+۶=۰$ در چند نقطه محورهای مختصات را قطع می کند؟

۱) چهار نقطه   ۲) دو نقطه   ۳) صفر   ۴) یک نقطه   (کنکور آزاد تجربی پزشکی ۸۸)

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$y=۰ \Rightarrow x^۲-۶x+۶=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۳۶-۲۴=۱۲>۰$ (محل برخورد با محور x ها)

معادله دو جواب دارد پس محور x ها را در دو نقطه قطع می کند.

$x=۰ \Rightarrow y^۲+۴y+۶=۰ \Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۱۶-۲۴=-۸<۰$ (محل برخورد بامحور y ها) محور y ها قطع نمی شود

مثال) معادله‌ی مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع مربعات فواصل هر کدام از آن ها از دو نقطه‌ی $A(-۴,۲)$ و $B(۲,-۴)$ برابر ۵۴ باشد کدام است؟

۱) $(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۹$ ۲) $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۹$

۳) $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۹$ ۴) $(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۹$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. فرض کنیم $M(x,y)$ نقطه ای از مکان باشد.

$$MA^۲+MB^۲=۵۴ \Rightarrow (x+۴)^۲+(y-۲)^۲+(x-۲)^۲+(y+۴)^۲=۵۴$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۴x+۴y+۴۰=۵۴ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۲y=۷ \Rightarrow (x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۹$$

مثال) داخل دایره ای به معادله $x^۲+y^۲=۳$ چند نقطه با مختصات صحیح نسبی وجود دارد؟

۱) ۴   ۲) ۸   ۳) ۹   ۴) ۱۳

جواب : گزینه ۳ درست است. شعاع دایره فوق $\sqrt{۳}$ است و داریم : $-۲<\sqrt{۳}<۲$ بنابراین در دایره ای با شعاع $\sqrt{۳}$ فقط ۹ نقطه با مختصات صحیح می توان یافت : $(-۱,۰)$ و $(۰,۱)$ و $(۱,۰)$ و $(-۱,۰)$ و $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ و $(۱,-۱)$ و $(-۱,۱)$ و $(-۱,-۱)$

مثال) مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله‌ی $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰$ را به دست آورید.

جواب : $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰ \Rightarrow x^۲+۲x+۱^۲-۱+y^۲-۴y+۲^۲-۴+۱=۰$

$\Rightarrow (x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۴ \Rightarrow O(-۱,۲)$ و $r=۲$ (ص۴۱کتاب جدید)

فعالیت : می خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله‌ی ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ را در حالت کلی به دست آوریم. با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید :

$$x^{2}+y^{2}+ax+by+c=0\Rightarrow (x^{2}+ax+\frac{a^{2}}{4}-\frac{a^{2}}{4})+(y^{2}+by+\cdots-\cdots)+c=0$$

$$\Rightarrow (x+\cdots)^{2}+(y+\cdots)^{2}+\cdots=0\Rightarrow (x+\cdots)^{2}+(y+\cdots)^{2}=\cdots$$

$$\Rightarrow O(\cdots,\cdots) \text{ و } r=\frac{\sqrt{a^{2}+b^{2}-4c}}{2}$$

با توجه به نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه ای در باره‌ی a، b و c به دست می آید؟ (ص۴۱کتاب جدید)

نتیجه : با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می توان معادله‌ی آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادله‌ی دایره می توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد. (ص۴۱کتاب جدید)

معادله ضمنی (یا گسترده یا کلی یا عمومی) دایره : هر معادله به صورت $x^{2}+y^{2}+ax+by+c=0$ را می توان به صورت زیر به مربع کامل تبدیل کرد :

$$x^{2}+ax+\frac{a^{2}}{4}-\frac{a^{2}}{4}+y^{2}+by+\frac{b^{2}}{4}-\frac{b^{2}}{4}+c=0$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^{2}+(y+\frac{b}{2})^{2}+\frac{a^{2}+b^{2}-4c}{4}=0\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^{2}+(y+\frac{b}{2})^{2}=\frac{a^{2}+b^{2}-4c}{4}$$

در این صورت :

۱) اگر $\Delta=a^{2}+b^{2}-4c<0$ و یا $a^{2}+b^{2}<4c$ باشد این معادله هیچ نقطه ای از صفحه را مشخص نمی کند.

۲) اگر $\Delta=a^{2}+b^{2}-4c=0$ و یا $a^{2}+b^{2}=4c$ باشد این معادله نقطه‌ی $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ از صفحه را مشخص می کند.

۳) اگر $\Delta=a^{2}+b^{2}-4c>0$ و یا $a^{2}+b^{2}>4c$ باشد این معادله دایره به مرکز $O(\alpha=-\frac{a}{2},\beta=-\frac{b}{2})$ و به طول شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}=\frac{\sqrt{a^{2}+b^{2}-4c}}{2}$ از صفحه را مشخص می کند.

و به عبارت دیگر در صورتی که $\alpha=-\frac{a}{2}$ و $\beta=-\frac{b}{2}$ باشد آنگاه $r^{2}=\alpha^{2}+\beta^{2}-c$

۱) اگر $r^{2}=\alpha^{2}+\beta^{2}-c<0$ و یا $\alpha^{2}+\beta^{2}<c$ باشد این معادله هیچ نقطه ای از صفحه را مشخص نمی کند.

۲) اگر $r^{2}=\alpha^{2}+\beta^{2}-c=0$ و یا $\alpha^{2}+\beta^{2}=c$ باشد این معادله نقطه‌ی $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ از صفحه را مشخص می کند.

۳) اگر $r^{2}=\alpha^{2}+\beta^{2}-c>0$ و یا $\alpha^{2}+\beta^{2}>c$ باشد این معادله دایره به مرکز $O(\alpha=-\frac{a}{2},\beta=-\frac{b}{2})$ و به طول شعاع $r=\sqrt{\alpha^{2}+\beta^{2}-c}$ از صفحه را مشخص می کند.

توجه : معادله‌ی $x^{2}+y^{2}+ax+by+c=0$ در صورتی که $c<0$ باشد همواره معادله‌ی یک دایره است.

نتیجه : با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می توان معادله‌ی آن را تعیین کرد و برعکس با داشتن معادله‌ی دایره می توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

نکته : در مقاطع مخروطی دایره و بیضی و هذلولی (افقی و یا قائم)، ریشه‌ی مشتق نسبی نسبت به x (یعنی $f'_x = 0$) و هم چنین ریشه‌ی مشتق نسبی نسبت به y (یعنی $f'_y = 0$) محورهای تقارن افقی و قائم مقطع را می دهند که محل برخورد این دو محور یعنی ($f'_x = 0, f'_y = 0$) مرکز تقارن یعنی مرکز این مقاطع می باشد.

نکته : در صورتی که داشته باشیم $f(x,y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$. در معادله‌ی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

حاصل
$$\begin{cases} f'_x = 0 \to x = \alpha = -\dfrac{a}{2} \\ f'_y = 0 \to y = \beta = -\dfrac{b}{2} \end{cases}$$
O را به دست می آوریم.

۱) اگر $f(\alpha,\beta) > 0$ باشد این معادله هیچ نقطه ای از صفحه را مشخص نمی کند.

۲) اگر $f(\alpha,\beta) = 0$ باشد این معادله نقطه‌ی $O(\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2})$ از صفحه را مشخص می کند.

۳) اگر $f(\alpha,\beta) < 0$ باشد این معادله دایره به مرکز $O(\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = -\frac{b}{2})$ و به طول شعاع $r^2 = |f(\alpha,\beta)| = -f(\alpha,\beta)$ از صفحه را مشخص می کند.

کار در کلاس :

۱) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ و شعاع آن ۳ باشد.

۲) معادله‌ی دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r به چه صورت است؟

۳) کدام یک از روابط زیر می تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره ها را به دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$

ب) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$

ج) (ص۴۲کتاب جدید) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0$

مثال : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقطه‌ی $O(-۲,-۱)$ مرکز آن و $M(۱,۱)$ یک نقطه از آن باشد. (ص۴۲کتاب جدید)

حل : مرکز دایره را داریم، پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادله‌ی آن را بنویسیم. روشن است که $OM = r$ پس طول OM را به دست می آوریم :

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^۲ + (y_M - y_O)^۲} = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (۱+۱)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

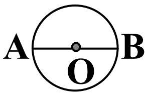
و معادله دایره را به صورت زیر نوشته می شود : $(x+۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۱۳$

و به روش دیگر می توان گفت مختصات هر نقطه روی دایره در معادله‌ی دایره صدق می کند.

$$(x-\alpha)^۲ + (y+\beta)^۲ = r^۲ \Rightarrow (۱+۲)^۲ + (۱+۱)^۲ = r^۲ \Rightarrow r^۲ = ۱۳ \Rightarrow (x+۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۱۳$$

س۳۸) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که از نقطه‌ی $(۱,-۱)$ بگذرد و خطوط $y = x + ۱$ و $y = ۱ - x$ شامل دو قطر آن باشند.

نکته : اگر A و B دو سر قطری از دایره باشند آنگاه مختصات مرکز و شعاع دایره به صورت زیر خواهد بود.



مرکز $O(\alpha = \frac{x_A + x_B}{۲}, \beta = \frac{y_A + y_B}{۲})$ (O وسط قطر AB) و $R = OA = OB = \frac{AB}{۲}$ (شعاع)

۱۳) معادله‌ی دایره ای که نقاط $A(۱,۹)$ و $B(۷,۱)$ دو سر قطری از آن باشند، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ - ۴y - ۴۶ = ۰$
۲) $x^۲ + y^۲ + ۸x + ۲y - ۱۰۸ = ۰$
۳) $x^۲ + y^۲ - ۸x - ۱۰y + ۱۶ = ۰$
۴) $x^۲ + y^۲ + ۱۶x + ۸y - ۱۷۰ = ۰$

مثال)معادله‌ی دایره ای که خط $۳x - ۴y = ۲۴$ معادله‌ی قطری ازآن بوده ودوسراین قطربرمحورهای مختصات واقع است،کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ + ۸x + ۶y = ۰$
۲) $x^۲ + y^۲ - ۸x + ۶y = ۰$
۳) $x^۲ + y^۲ + ۸x - ۶y = ۰$
۴) $x^۲ + y^۲ - ۸x - ۶y = ۰$

جواب : گزینه ۲ صحیح است. نقاط برخورد این قطر با محورهای مختصات را A و B می نامیم. نقطه‌ی C وسط پاره خط AB مرکز دایره است. $y = ۰ \Rightarrow ۳x = ۲۴ \Rightarrow x = ۸$ و $A(۸,۰)$ و $x = ۰ \Rightarrow -۴y = ۲۴ \Rightarrow y = -۶ \Rightarrow B(۰,-۶)$

$C(۴,-۳)$ و $R = CA = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$ و $(x-۴)^۲ + (y+۳)^۲ = ۵^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۸x + ۶y = ۰$

نکته : کلیه قطرهای دایره از مرکز دایره می گذرند درنتیجه نقطه‌ی برخورد هر دو قطر دلخواه مرکز دایره می باشد بنابراین اگر در معادله‌ی یک خط ضریب x یا ضریب y پارامتری باشد آنگاه آن معادله نشان دهنده‌ی یک دسته خطوط است که برای پیدا کردن نقطه‌ی همرسی دسته خطوط کافی است به پارامتر فوق دو عدد دلخواه نسبت بدهیم و از حل دستگاه به دست آمده، نقطه‌ی همرسی دسته خطوط (مرکز دایره) را پیدا کنیم.

مثال) معادله دایره ای که اقطارش به معادله $(m-۱)x + ۳y = m + ۲$ بوده و از نقطه $M(۵,-۲)$ می گذرد، کدام است؟

۱) $(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲۵$
۲) $(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲۵$
۳) $(x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲۵$
۴) $(x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲۵$

جواب : گزینه ۴ درست است. مرکز دایره $C(۱,۱)$ $m = ۰ \Rightarrow -x + ۳ = ۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow$ و $m = ۱ \Rightarrow ۳y = ۳ \Rightarrow y = ۱$

$$R = \sqrt{(۱-۵)^۲ + (۱-(-۲))^۲} = ۵ \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲۵$$

مثال) اگر $O'(۱,۲)$ مرکز دایره $x^۲ + y^۲ - ax + ۲by = ۰$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۲-   ۳) ۴   ۴) صفر

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$O'(۱,۲) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{۲} = ۱ \Rightarrow a = ۲ \\ \dfrac{-۲b}{۲} = ۲ \Rightarrow b = -۲ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۰$$

مثال) شعاع دایره $ax^۲ + y^۲ + ۲x + ۴y = k$ برابر ۲ است، آنگاه :

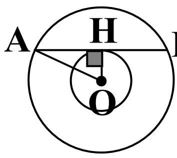
۱) $k = ۰$ ۲) $k = ۱$ ۳) $k = -۱$ ۴) $k = ۲$ (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۱)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. در دایره ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ باید برابر ۱ باشد پس : $a = ۱$ درنتیجه :

$$x^۲ + y^۲ + ۲x + ۴y - k = ۰ \Rightarrow r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۱۶ + ۴k} = ۲ \Rightarrow k = -۱$$

مثال) دو دایره‌ی به معادله های $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + ۱ = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y - ۳ = ۰$ مفروض اند. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگتر که بر دایره‌ی کوچکتر مماس است کدام است؟

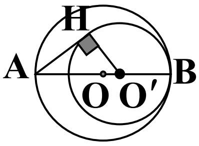
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) ۵



جواب : گزینه ۳ صحیح است. $R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ + ۱۲} = \sqrt{۵}$ و $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ - ۴} = ۱$ و $O = O' = (۱,-۱)$

$$AH^۲ = OA^۲ - OH^۲ = ۵ - ۱ = ۴ \Rightarrow AH = ۲ \Rightarrow AB = ۴$$

مثال) دو دایره‌ی به معادله های $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y - ۶۲ = ۰$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y - ۳۴ = ۰$ مفروض اند. اندازه بزرگترین قطعه مماسی که‌یک سر آن بر روی دایره بزرگتر و سر دیگر آن قطعه‌ی تماس بر روی دایره کوچکتر باشد، برابر کدام است؟ ۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) ۵

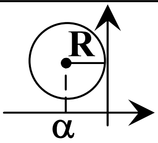


جواب : گزینه ۳ صحیح است. $R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ + ۱۳۶} = ۶$ و $O' = (-۱,۱)$ و $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴ + ۲۴۸} = ۸$ و $O = (۱,۱)$

$$OO' = ۲ \text{ و } AO' = ۸ + ۲ = ۱۰ \text{ و } \Delta AHO' : AH^۲ = AO'^۲ - O'H^۲ = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow AH = ۸$$

نکته : معادله دایره ای که مرکز آن $C(\alpha,\beta)$ بوده و بر محور عرض ها مماس است به صورت زیر است.

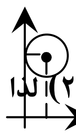
$$r = |\alpha| \Rightarrow (x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = \alpha^۲$$



مثال) دایره‌ی $(۲x - ۱)^۲ + (۲y - ۳)^۲ = ۱$ بر کدام خط مماس است؟

۱) $y = ۰$ ۲) $y = ۳x$ ۳) $x = ۰$ ۴) $y = -x$ (کنکور آزاد تجربی ۷۶)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. ابتدا معادله‌ی داده شده را به صورت استاندارد تبدیل می کنیم.



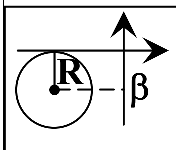
$$(۲x - ۱)^۲ + (۲y - ۳)^۲ = ۱ \xrightarrow{\div ۴} (x - \frac{۱}{۲})^۲ + (y - \frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow O(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$$ لذا

مرکز دایره و شعاع دایره $R = \frac{۱}{۲}$

دایره بر محور عرض ها یعنی خط $x = ۰$ مماس است.

نکته : معادله دایره ای که مرکز آن $C(\alpha,\beta)$ بوده و بر محور طول ها مماس است به صورت زیر است.

$$r = |\beta| \Rightarrow (x - \alpha)^۲ + (y - \beta)^۲ = \beta^۲$$



مثال) معادله دایره ای که مرکز آن روی خط $x - y = ۲$ بوده و در نقطه ای به طول ۳- بر محور طول ها مماس باشد، کدام است؟

۱) $(x+۳)^۲ + (y+۵)^۲ = ۲۵$ ۲) $(x-۳)^۲ + (y-۵)^۲ = ۲۵$

۳) $(x+۳)^۲ + (y+۵)^۲ = ۹$ ۴) $(x-۳)^۲ + (y-۵)^۲ = ۹$

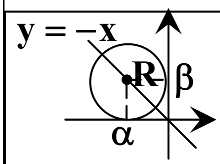
جواب : گزینه ۱ صحیح است. $C(\alpha, \beta = \alpha - ۲)$ و $\alpha = -۳ \Rightarrow \beta = -۳ - ۲ = -۵$

$$R = |\beta| = |-۵| = ۵ \Rightarrow (x+۳)^۲ + (y+۵)^۲ = ۲۵$$

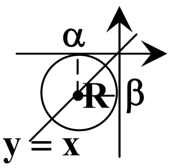
۱۴) دایره ای بر دو نقطه‌ی $(۰,۲)$ و $(۴,۰)$ گذشته و بر محور x ها مماس است. این دایره محور y ها را در نقطه‌ی دیگر، با کدام عرض قطع می کند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸ (کنکور سراسری ریاضی۸۵خارج از کشور)

نکته : معادله دایره ای که مرکز آن $C(\alpha, \beta)$ بوده و بر محورهای مختصات مماس است به صورت زیر است



$$r = |\alpha| = |\beta| \Rightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = \alpha^۲ = \beta^۲$$



تذکر : مرکز این دایره روی نیمساز ناحیه اوّل و سوم و یا نیمساز ناحیه دوم و چهارم واقع است.

به عبارت دیگر :

الف : معادله‌ی دایره به شعاع R که بر محورهای مختصات در ربع اوّل مماس باشد. $(x-R)^۲ + (y-R)^۲ = R^۲$

ب : معادله‌ی دایره به شعاع R که بر محورهای مختصات در ربع دوم مماس باشد. $(x+R)^۲ + (y-R)^۲ = R^۲$

پ : معادله‌ی دایره به شعاع R که بر محورهای مختصات در ربع سوم مماس باشد. $(x+R)^۲ + (y+R)^۲ = R^۲$

ت : معادله‌ی دایره به شعاع R که بر محورهای مختصات در ربع چهارم مماس باشد. $(x-R)^۲ + (y+R)^۲ = R^۲$

۱۵) دو دایره گذرا بر نقطه‌ی $(۲,-۹)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است، شعاع دایره‌ی بزرگتر، کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۵)

۱۶) اگر دایره‌ی $x^2 + ax + y^2 - 4y = b$ در ربع اوّل بر هر دو محور مماس باشد $a + 2b$ چه قدر است؟

۱) ۸-   ۲) ۴-   ۳) ۱۶-   ۴) ۱۲-   (کنکور آزاد تجربی ۸۴ غیر پزشکی)

مثال) معادله‌ی دایره ای که مرکزش روی خط $y = 2x + 2$ و در ربع سوم بر هر دو محور مماس باشد، کدام است؟

۱) $x^2 + 4x + y^2 + 4y - 4 = 0$ ۲) $x^2 + 4x + y^2 + 4y + 4 = 0$

۳) $x^2 + 4x + y^2 - 12 = 0$ ۴) $x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0$ (کنکور آزاد پزشکی صبح ۹۰)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. چون دایره در ربع سوم بر هر دو محور مماس است پس مرکز دایره بر روی خط $y = x$ واقع است. از طرفی مرکز دایره روی خط $y = 2x + 2$ نیز می باشد پس : $x = y = -2$ و در نتیجه : $O(-2,-2)$ و $R = |-2| = 2$

لذا معادله‌ی دایره به صورت زیر خواهد بود. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + 4x + y^2 + 4y + 4 = 0$

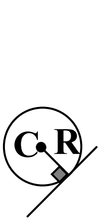
نکته : معادله‌ی دایره به شعاع R و مماس بر نیمساز ناحیه های

الف : اوّل و دوم به صورت $x^2 + (y - R\sqrt{2})^2 = R^2$ یا $x^2 + y^2 - 2R\sqrt{2}y + R^2 = 0$ می باشد.

ب : دوم و سوم به صورت $(x + R\sqrt{2})^2 + y^2 = R^2$ یا $x^2 + y^2 + 2R\sqrt{2}x + R^2 = 0$ می باشد.

ج : سوم و چهارم به صورت $x^2 + (y + R\sqrt{2})^2 = R^2$ یا $x^2 + y^2 + 2R\sqrt{2}y + R^2 = 0$ می باشد.

د : اوّل و چهارم به صورت $(x - R\sqrt{2})^2 + y^2 = R^2$ یا $x^2 + y^2 - 2R\sqrt{2}x + R^2 = 0$ می باشد.

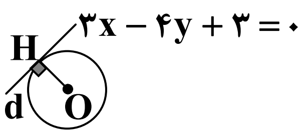


نکته : معادله دایره ای که مرکز آن $C(\alpha,\beta)$ بوده و بر خط $ax + by + c = 0$ مماس گردد به صورت زیر است.

$$R = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

(شعاع دایره برابر فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس می باشد.)

فعالیت ۲: معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقطه‌ی $O(1,-1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله‌ی $3x - 4y + 3 = 0$ مماس باشد.

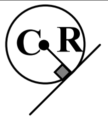


۱) با توجه به آنچه از هندسه‌ی ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطه‌ی تماس (H) بر خط . . . .

۲) طول شعاع دایره برابر است با فاصله‌ی مرکز دایره از . . . .

۳) به کمک دستور فاصله‌ی نقطه از خط داریم : $r = OH = \frac{|\cdots\cdots\cdots|}{\sqrt{\cdots + \cdots}} = \cdots$

۴) معادله‌ی دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می نویسیم. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \cdots \Rightarrow \cdots$



نکته : معادله دایره ای که مرکز آن $C(\alpha,\beta)$ بوده و بر خط $ax+by+c=۰$ مماس گردد به صورت زیر است.

$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$ که در آن $R=\dfrac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$ (شعاع دایره برابر فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس)

س۳۹)شعاع دایره ای را بیابید که مرکز آن بر روی نیمساز ناحیه‌ی دوم واقع شده و از نقطه‌ی $A(-۲,۳)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y=۴x$ مماس شود.

مثال) معادله دایره به شعاع $۳\sqrt{۲}$ و مماس بر نیمساز ناحیه‌ی اوّل و نیمساز ناحیه‌ی دوم کدام است؟

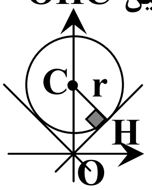
۱) $x^{۲}+y^{۲}-۱۲y=۱۸$ ۲) $x^{۲}+y^{۲}-۱۲x=۱۸$

۳) $x^{۲}+y^{۲}-۱۲y+۱۸=۰$ ۴) $x^{۲}+y^{۲}-۱۲x+۱۸=۰$ (کنکورسراسری تجربی ۷۲)

جواب : گزینه ۳ درست است.

روش اوّل : $x^{۲}+(y-r\sqrt{۲})^{۲}=r^{۲}\Rightarrow x^{۲}+(y-۳\sqrt{۲}\times\sqrt{۲})^{۲}=(۳\sqrt{۲})^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۱۲y+۱۸=۰$

روش دوم:چون دایره مماس بر نیمساز ناحیه‌ی اوّل و نیمساز ناحیه‌ی دوم است پس مرکز آن روی محور عرض ها با عرض مثبت است.
لذا مرکز این دایره را به صورت $C(۰,\beta)$ در نظر می گیریم : بنا به قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین OHC



داریم : $OC^{۲}=OH^{۲}+CH^{۲}\Rightarrow\beta^{۲}=r^{۲}+r^{۲}=۱۸+۱۸=۳۶\Rightarrow\beta=۶\Rightarrow C(۰,۶)$

$\Rightarrow x^{۲}+(y-۶)^{۲}=(۳\sqrt{۲})^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۱۲y+۱۸=۰$

روش سوم : چون دایره مماس بر نیمساز ناحیه‌ی اوّل و نیمساز ناحیه‌ی دوم است پس مرکز آن روی محور عرض ها با عرض مثبت است. لذا مرکز این دایره را به صورت $C(۰,\beta)$ و نیمساز ناحیه اوّل را به صورت $x-y=۰$ در نظر می گیریم. می دانیم شعاع دایره برابر با فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس می باشد درنتیجه می توان نوشت :

$$r=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}\Rightarrow\frac{|۰-\beta|}{\sqrt{۱+۱}}=۳\sqrt{۲}\Rightarrow|\beta|=۶\xrightarrow{\beta>۰}\beta=۶\Rightarrow C(۰,۶)$$

$$\Rightarrow x^{۲}+(y-۶)^{۲}=(۳\sqrt{۲})^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۱۲y+۱۸=۰$$

مثال) مرکز دایره ای بر روی نیمساز ناحیه‌ی اوّل است. اگر این دایره از نقطه‌ی $A(۶,۳)$ گذشته و بر خط به معادله‌ی $y=۲x$ مماس شود. شعاع آن کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۲)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.چون مرکز دایره بر روی نیمساز ناحیه‌ی اوّل یعنی خط $y=x$ واقع است پس مختصات مرکز این دایره به صورت $\alpha>۰$ و $O(\alpha,\alpha)$ می باشد. بدیهی است که شعاع دایره برابر فاصله‌ی مرکز دایره از نقطه‌ی $A(۶,۳)$ و همچنین برابر فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس $y=۲x$ می باشد.

$$\sqrt{(\alpha-۶)^{۲}+(\alpha-۳)^{۲}}=\frac{|۲\alpha-\alpha|}{\sqrt{۴+۱}}\Rightarrow ۲\alpha^{۲}-۱۸\alpha+۴۵=\frac{\alpha^{۲}}{۵}\Rightarrow ۱۰\alpha^{۲}-۹۰\alpha+۲۲۵=\alpha^{۲}$$

$$\Rightarrow ۹\alpha^{۲}-۹۰\alpha+۲۲۵=۰\Rightarrow\alpha^{۲}-۱۰\alpha+۲۵=۰\Rightarrow\alpha=۵\Rightarrow R=\frac{\alpha}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

مثال) دایره ای بر محور $\mathbf{x}$ها و خط به معادله‌ی $\mathbf{۳x + ۴y = ۰}$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه‌ی اوّل و شعاع ۳ واحد باشد، نقطه‌ی مشترک آن با محور $\mathbf{x}$ها با کدام طول است؟

۱) ۱   ۲) ۱/۵   ۳) ۲   ۴) ۲/۵   (کنکور سراسری ریاضی ۹۴ خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : چون این دایره بر محور $\mathbf{x}$ها مماس و مرکزش در ناحیه‌ی اوّل و شعاعش ۳ واحد است، پس مختصات مرکز آن به صورت $(\alpha,۳)$ می باشد. از طرفی فاصله‌ی مرکز این دایره از خط $\mathbf{۳x + ۴y = ۰}$ برابر شعاع دایره است. پس :

$$R = \frac{|۳\alpha + ۱۲|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = ۳ \Rightarrow ۳\alpha + ۱۲ = ۱۵ \Rightarrow \alpha = ۱$$

روش دوم : ابتدا معادلات خطوط نیمساز دو خط $\mathbf{y = ۰}$ و $\mathbf{۳x + ۴y = ۰}$ را به دست می آوریم.

$$\frac{|۳x + ۴y|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = \frac{|y|}{\sqrt{۰ + ۱}} \Rightarrow \begin{cases} ۳x + ۴y = ۵y \Rightarrow y = ۳x \\ ۳x + ۴y = -۵y \Rightarrow x = -۳y \otimes \end{cases}$$

مرکز دایره‌ی مورد نظر روی این نیمساز است پس مختصات مرکز به صورت $(\alpha,۳\alpha)$ است و مختصات نقطه‌ی تماس با محو $\mathbf{x}$ها به صورت $(\alpha,۰)$ است بنابراین معادله‌ی ئایره به صورت مقابل است. $(x - \alpha)^۲ + (y - ۳\alpha)^۲ = ۹$

و نقطه‌ی $(\alpha,۰)$ در این معادله صدق می کند درنتیجه : $(\alpha - \alpha)^۲ + (۰ - ۳\alpha)^۲ = ۹ \Rightarrow \alpha = ۱$

و یا اینکه می تون گفت : مرکز دایره‌ی مورد نظر روی این نیمساز است پس مختصات مرکز به صورت $(\alpha,۳\alpha)$ است و چون بر محور طول ها مماس است پس : $R = ۳ = ۳\alpha \Rightarrow \alpha = ۱$

۱۷) شعاع دایره به مرکز $O(۱,-۲)$ و مماس بر خط $\mathbf{x + ۵ = ۲y}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) ۵   ۴) ۱۰

مثال) شعاع دایره ای که بر محورهای مختصات و خط $\mathbf{۳x + ۴y = ۱۲}$ مماس شود کدام است؟

۱) فقط ۱   ۲) فقط ۲   ۳) فقط ۳   ۴) ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۶

جواب : گزینه ۴ صحیح است. بدیهی است که مرکز این دایره در ناحیه‌ی اوّل و بر روی نیمساز ناحیه اوّل و یا در ناحیه‌ی دوم یا چهارم و بر روی نیمساز ناحیه دوم و یا چهارم واقع است. پس :

$$C(\alpha, \alpha) \Rightarrow r = \frac{|۳a + ۴\alpha - ۱۲|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = |\alpha| \Rightarrow \begin{cases} ۷\alpha - ۱۲ = ۵\alpha \Rightarrow \alpha = ۶ \\ ۷\alpha - ۱۲ = -۵\alpha \Rightarrow \alpha = ۱ \end{cases}$$

و یا

$$C(-\alpha, \alpha) \Rightarrow r = \frac{|-۳a + ۴\alpha - ۱۲|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = |\alpha| \Rightarrow \begin{cases} \alpha - ۱۲ = ۵\alpha \Rightarrow \alpha = -۳ \\ \alpha - ۱۲ = -۵\alpha \Rightarrow \alpha = ۲ \end{cases}$$

۱۸) دایره‌ی $\mathbf{x^۲ + y^۲ + kx - ۲y = ۰}$ در مبدأ مختصات بر نیمساز ربع اوّل و سوم مماس است. شعاع دایره چقدر است؟

۱) ۱   ۲) ۱/۵   ۳) ۲   ۴) $\sqrt{۲}$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۱)

مثال) دایره ای به مرکز $(2,-1)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x - y = 1$، محور xها را با کدام طول، قطع می کند؟

۱) ۳ و ۱ ۲) ۴ و ۱ ۳) ۳ و ۲ ۴) ۴ و ۱/۵ (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۵)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : چون خط فوق بر دایره مماس است، بنابراین فاصله‌ی مرکز دایره از این خط، برابر شعاع دایره است. لذا :

$$x - y - 1 = 0 \Rightarrow R = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x-2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

روش دوم : نقطه تلاقی خط مماس را با خطی که از نقطه C بر خط مماس عمود باشد را بدست می آوریم

$$x - y = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = -1 \Rightarrow y+1 = -(x-2) \Rightarrow x+y=1$$

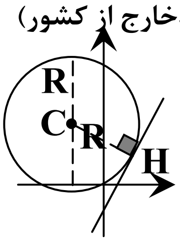
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{(1-2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$$

$$\xrightarrow{y=0} (x-2)^2 + 1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

نکته : خط مماس بر دایره بر شعاع دایره در نقطه‌ی تماس عمود است پس هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می گذرد.

مثال) دایره ای بر خط به معادله‌ی $y = 2x - 1$ مماس است و تمام قائم های آن دایره از نقطه‌ی $(-1,2)$ می گذرند. بیشترین فاصله‌ی نقاط این دایره از محور xها کدام است؟

۱) $2 + \sqrt{5}$ ۲) $3 + \sqrt{2}$ ۳) ۵ ۴) ۶ (کنکور سراسری ریاضی۸۹خارج از کشور)



جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$2x - y - 1 = 0 \Rightarrow R = CH = \frac{|-2-2-1|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}$$

$$Max = y_C + R = 2 + R = 2 + \sqrt{5}$$

۱۹) به ازای کدام مقدار m خط به معادله‌ی $y = mx + 2$ بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ و ۰ ۲) $\frac{4}{3}$ و ۰ ۳) $-\frac{2}{3}$ و ۱ ۴) $\frac{2}{3}$ و ۱ (کنکور سراسری تجربی۹۱خارج از کشور)

مثال) به ازای کدام مقدار a دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله‌ی $x + 3y = 0$ مماس است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۵ (کنکور سراسری تجربی ۸۵)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : فاصله‌ی مرکز دایره از خط برابر شعاع دایره است.

$$O(1,-2) \text{ و } R = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4a} = \sqrt{5-a} \text{ و } OH = \frac{|1-6|}{\sqrt{1+9}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$R = OH \Rightarrow \sqrt{5-a} = \frac{5}{\sqrt{10}} \Rightarrow 5-a = \frac{25}{10} \Rightarrow a = 5 - \frac{25}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

روش دوم : معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و دایره دارای ریشه مضاعف است.

$$x+3y=0 \Rightarrow x=-3y \Rightarrow (-3y)^2 + y^2 - 2(-3y) + 4y + a = 0$$

$$\Rightarrow 10y^2 + 10y + a = 0 \text{ و } \Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 100 - 40a = 0 \Rightarrow a = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}$$

۲۰) معادله کلی اقطار دایره ای به فرم $(m-2)x + 3y = 6$ است و خط $4x - 3y + 2 = 0$ بر این دایره مماس است، شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

نکته : دایره ای که بر دو خط موازی مماس است، مرکزش روی محور تقارن آن دو خط و شعاعش نصف فاصله‌ی بین دو خط موازی است. به طوری که اگر دایره ای که بر دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ مماس باشد، آنگاه مرکزش روی خط $ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0$ واقع و شعاعش $R = \frac{|c-c'|}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ است.

مثال) شعاع های دایره هایی که بر دو خط $3x + 4y = 10$ و $6x + 8y = 15$ مماس می شوند کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰/۵ ۳) ۱/۷۵ ۴) ۰/۲۵

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$3x+4y-10=0 \text{ و } 3x+4y-\frac{15}{2}=0 \text{ و } 2R = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\left|-10+\frac{15}{2}\right|}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 0/25$$

مثال) معادله‌ی دایره ای که بر دو خط $y = x + 3$ و $y = x - 1$ مماس و طول مرکز آن برابر ۱ است، کدام است؟

۱) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$ ۲) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

۳) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ۴) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ (کنکور سراسری ریاضی ۷۴)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. مرکز دایره $C(1,2) \Leftarrow$ معادله‌ی محور تقارن دو خط موازی $y = x + 1$

$$2R = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|3+1|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$$

۲۱)دایره‌ی گذرابرمبدأمختصات، بردو خط به معادلات $y = 2x$ و $y = 2x + 10$، مماس است. مختصات مرکز این دایره، کدام است؟

۱) $(-3,2)$ ۲) $(-3,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(-1,2)$ (کنکور سراسری ریاضی ۹۵ خارج از کشور)

مثال) نقطه‌ی $M(2\sqrt{5},b)$ مرکز دایره ای است که بر دو خط به معادلات $y=2x$ و $x=2y$ مماس است. شعاع دایره کوچک تر، کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱/۵   ۳) ۲   ۴) ۲/۵   (کنکور سراسری ریاضی ۹۲ خارج از کشور)

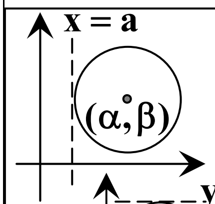
جواب : گزینه ۳ صحیح است. $R=OH=OH'$ و $x=2y \Rightarrow x-2y=0$ و $y=2x \Rightarrow 2x-y=0$

$$\Rightarrow \frac{\left|4\sqrt{5}-b\right|}{\sqrt{4+1}}=\frac{\left|2\sqrt{5}-2b\right|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow \begin{cases} 4\sqrt{5}-b=2\sqrt{5}-2b \Rightarrow b=-2\sqrt{5} \Rightarrow R=\dfrac{\left|4\sqrt{5}+2\sqrt{5}\right|}{\sqrt{5}}=6 \\ 4\sqrt{5}-b=2b-2\sqrt{5} \Rightarrow b=2\sqrt{5} \Rightarrow R=\dfrac{\left|4\sqrt{5}-2\sqrt{5}\right|}{\sqrt{5}}=2 \end{cases}$$

۲۲) معادله دسته خط قائم بر دایره ای به صورت $(1+m)x+(m-2)y=3$ است. و خط $4x-3y+8=0$ بر این دایره مماس می باشد، معادله‌ی این دایره کدام است؟

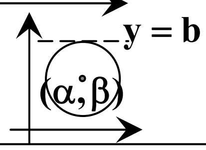
۱) $x^2+y^2-2x+2y+7=0$ ۲) $x^2+y^2+2x+2y-7=0$

۳) $x^2+y^2+2x+2y+7=0$ ۴) $x^2+y^2-2x+2y-7=0$



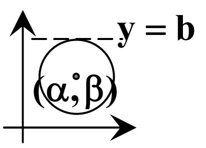
نکته : معادله دایره ای که مرکز آن $C(\alpha,\beta)$ بوده و بر خط $x=a$ مماس است به صورت زیر است.

$$r=\left|\alpha-a\right| \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(\alpha-a)^2$$



نکته : معادله دایره ای که مرکز آن $C(\alpha,\beta)$ بوده و بر خط $y=b$ مماس است به صورت زیر است.

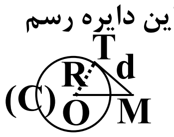
$$r=\left|b-\beta\right| \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(b-\beta)^2$$



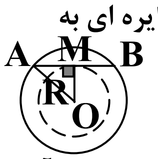
نکته : معادله دایره ای که مرکز آن $C(\alpha,\beta)$ بوده و بر خط $y=b$ مماس است به صورت زیر است.

$$r=\left|b-\beta\right| \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(b-\beta)^2$$

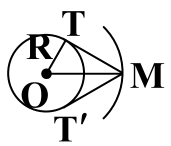
نکته : الف : مکان هندسی نقطه ای از صفحه‌ی دایره‌ی $C(O,R)$ که از آن نقطه می توان مماس های به طول d بر این دایره رسم کرد دایره ای است به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R^2+d^2}$.



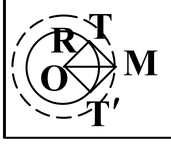
ب : مکان هندسی نقطه‌ی در صفحه‌ی دایره $C(O,R)$ که از آن به توان وترهای به طول K در این دایره رسم نمود، دایره ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R^2-(\frac{K}{2})^2}$ است.



ج : مکان هندسی نقطه ای از صفحه‌ی دایره $C(O,R)$ که از آن ها می توان دو مماس با زاویه‌ی α بر این دایره رسم کرد (که از آن نقطه به توان دایره فوق را با زاویه α رئویت کرد)، دایره ای به مرکز O و شعاع $R'=OM=\dfrac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ است.



نکته : مکان هندسی نقاطی از صفحه دایره که به توان از آن نقاط دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم نمود (دایره را به زاویه‌ی قائمه رویت نمود) دایره ای است هم مرکز با آن و به شعاع $R\sqrt{2}$



مثال) چند نقطه روی خط $x = 4$ یافت می شود که از آنها دایره‌ی $(x-1)^2 + y^2 = 4$ به زاویه‌ی قائمه رویت شود؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) بی شمار   ۴) صفر   (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۴)

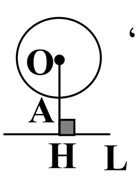
جواب : گزینه ۴ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که به توان از آن نقاط دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم نمود (دایره را به زاویه‌ی قائمه رویت نمود) دایره ای است هم مرکز با آن و به شعاع $R\sqrt{2}$ پس،

$O(1,0)$ و $R = 2$ و $R' = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ و $(x-1)^2 + y^2 = 8$

تعداد ریشه های معادله‌ی حاصل از تقاطع خط و دایره جواب مسئله است. $\xrightarrow{x=4} (4-1)^2 + y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = -1$

این معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

نکته : نقطه‌ی متغیر A را روی دایره‌ی $C(O,R) : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ و نقطه‌ی متغیر H را روی خط L به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ درنظرمی گیریم. در صورتی که خط AH از مرکز این دایره بگذرد و بر خط L عمود باشد، نزدیکترین و دورترین فاصله نقطه H از نقطه‌ی A متمایز با آن از رابطه های $AH = |OH \pm R|$ بدست می آیند.

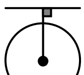


باید توجه داشت که اگر $C(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد آنگاه $OH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

مثال) فاصله‌ی نزدیکترین نقاط دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ از خط به معادله‌ی $3x + 4y = 15$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱   ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲   (کنکور سراسری ریاضی۹۰خارج از کشور)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. فاصله‌ی مرکز دایره را از خط تعیین و طول شعاع را از آن کم می کنیم.

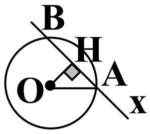


$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1,-2)$ و $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = 3$

$CH = \frac{|3\alpha + 4\beta - 15|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3 - 8 - 15|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow \min = 4 - 3 = 1$ فاصله‌ی مرکز از خط مماس

کار در کلاس : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و روی خط به معادله‌ی $x + y = 2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند. (راهنمایی : می دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم شود آن وتر را نصف می کند.)

(ص۴۳کتاب جدید)



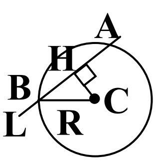
مثال) معادله‌ی دایره ای که نقطه‌ی $C(1,2)$ مرکز آن باشد و از خط $L : 3x + 4y - 1 = 0$ وتری به طول ۴ جدا کند، کدام است؟

۱) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ ۲) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

۳) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$ ۴) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 8$

جواب : گزینه ۳ درست است. $AB = 4 \Rightarrow BH = 2$ و $CH = \frac{|3\times 1 + 4\times 2 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow$

$R^2 = CH^2 + BH^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$



۲۳) اگر خط D به معادله‌ی $y-2x+m=0$ و دایره‌ی C به معادله‌ی $x^2+y^2-2x+4y=0$، متقاطع (غیر مماس) باشند، آنگاه حدود m کدام است؟

۱) $-1<m<9$ ۲) $m<9$ ۳) $m>9$ یا $m<-9$ ۴) $-5\sqrt{5}+4<m<5\sqrt{5}+4$

مثال) خط $3x-4y-6=0$ دایره $x^2+y^2-2x+4y=5$ را در دو نقطه قطع می کند، فاصله‌ی این دو نقطه چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۹

جواب : گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : $R^2=10$ و $(x-1)^2+(y+2)^2=10 \Rightarrow O(1,-2)$

فاصله‌ی مرکز دایره از این خط را محاسبه می کنیم : $OH=\dfrac{|3+8-6|}{\sqrt{9+16}}=1$

$$AH^2=R^2-OH^2=10-1=9 \Rightarrow AH=3 \Rightarrow AB=2AH=6$$

روش دوم : $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{2}$ و $(x-1)^2+(y+2)^2=10 \Rightarrow (x-1)^2+(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{3}{2}+2)^2=10$

$$\Rightarrow 25x^2-20x-140=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \Rightarrow y=-3 \\ x=\dfrac{14}{5} \to y=\dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{(\dfrac{14}{5}+2)^2+(\dfrac{3}{5}+3)^2}=6$$

مثال) خط $mx-y+1=0$ دایره $x^2+y^2-2y=3$ را در دو نقطه قطع می کند، فاصله‌ی این دو نقطه چقدر است؟

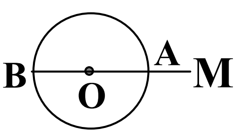
۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

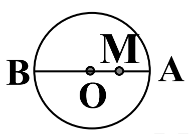
جواب : گزینه ۲ صحیح است. $R=2$ و $x^2+(y-1)^2=2^2 \Rightarrow O(0,1)$ فاصله‌ی مرکز دایره از این خط را محاسبه می کنیم :

یعنی خط از مرکز دایره می گذرد. $\Leftarrow$ (فاصله‌ی مرکز دایره از خط) $OH=\dfrac{|0-1+1|}{\sqrt{m^2+1}}=0 \Rightarrow$

پس نقاط تقاطع خط با دایره، A و B دو سر قطر دایره هستند، پس : $AB=2R=4$

نکته : نزدیکترین و دورترین فاصله نقطه از یک دایره : هرگاه از نقطه M در صفحه‌ی یک دایره، به نقطه O مرکز آن دایره خطی وصل کنیم تا محیط دایره را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند، MA و MB را به ترتیب نزدیکترین و دورترین فاصله‌ی نقطه‌ی M تا دایره گوییم و به صورت زیر محاسبه می کنیم.





$$\min=MA=|OM-R| \quad و \quad \max=MB=OM+R$$

نکته : الف : شعاع دایره برابر است با نصف مجموع نزدیکترین و دورترین فاصله‌ی نقطه‌ی M (داخل دایره) از این دایره

ب : شعاع دایره برابر است با نصف تفاضل نزدیکترین و دورترین فاصله‌ی نقطه‌ی M (خارج دایره) از این دایره

مثال) کمترین فاصله نقطه روی دایره $(x-8)^2+(y+15)^2=4$ از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۱ (کنکور آزاد تجربی ۸۶)

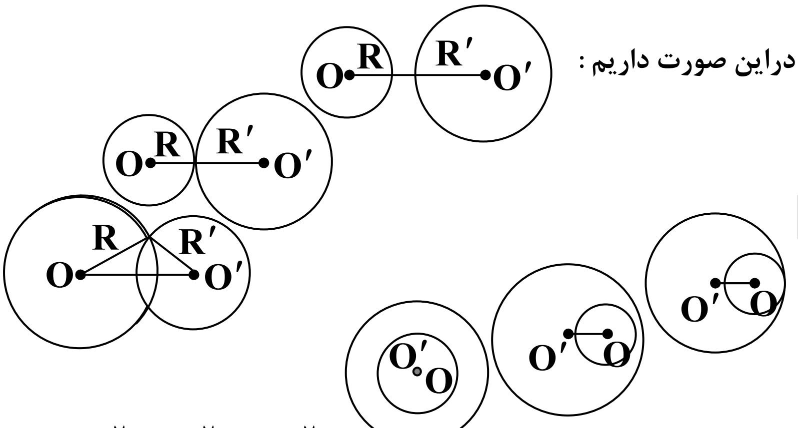
جواب : گزینه ۲ صحیح است. $(x-8)^2+(y+15)^2=4 \Rightarrow O'(8,-15)$ و $O(0,0) \Rightarrow$

$OO'=\sqrt{64+225}=\sqrt{289}=17$ و $R=2 \Rightarrow$ کمترین فاصله مبدأ از نقاط روی دایره $|OO'-R|=|17-2|=15$

۲۴) شعاع دایره به مرکز $(-2,2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2+y^2-2x+4y+1=0$، کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۴ (کنکور سراسری تجربی۹۳ خارج از کشور)

نکته : وضعیت نسبی دو دایره :



دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظرمی گیریم. دراین صورت داریم :

۱) دو دایره متخارج $\Leftrightarrow OO' > R+R'$

۲) دو دایره مماس خارج $\Leftrightarrow OO' = R+R'$

۳) دو دایره متقاطع $\Leftrightarrow |R-R'| < OO' < R+R'$

۴) دو دایره مماس داخل $\Leftrightarrow OO' = |R-R'|$

۵) دو دایره متداخل $\Leftrightarrow 0 < OO' < |R-R'|$

۶) دو دایره متحدالمرکز $OO'=0$ یا $O=O'$

نکته : اگر دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ بر هم عمود باشند آنگاه $OO'^2 = R^2 + R'^2$

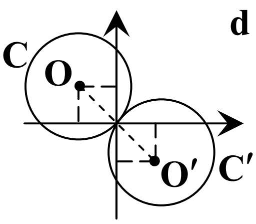
نکته : شرط لازم و کافی برای آنکه دو دایره به معادله های $C(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $C'(x,y)=x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ بر هم عمود باشند آنستکه $aa'+bb'=2(c+c')$

مثال) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(-1,1)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی $x^2+y^2-2x+2y=0$ از مماس بیرونی باشد.

حل : مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می آوریم :

$$x^2+y^2-2x+2y=0 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=2 \Rightarrow O'(1,-1) \text{ و } r'=\sqrt{2}$$

و چنانچه از هندسه‌ی ۲ می دانیم اگر $d=OO'$ طول خط المرکزین دو دایره‌ی مماس خارج باشد، $d=r+r'$



بنابراین داریم :

$$d=OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$d=r+r'=2\sqrt{2} \Rightarrow r+\sqrt{2}=2\sqrt{2} \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله‌ی دایره‌ی (C) را می نویسیم :

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2 \Rightarrow x^2+y^2+2x-2y=0$$ (ص۴۳کتاب جدید)

مثال)معادله دایره ای که مرکزش نقطه $O(۲,-۲)$ و بر دایره به معادله $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۴$ مماس خارج است، کدام است؟

۱) $(x-۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱$ ۲) $(x-۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴$

۳) $(x-۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۹$ ۴) $(x-۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱۶$

جواب : گزینه ۲ درست است. مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می آوریم :

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y = ۴ \Rightarrow (x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۹ \Rightarrow O'(-۱,۲) \text{ و } r' = ۳$$

می دانیم اگر $d = OO'$ طول خط المرکزین دو دایره‌ی مماس خارج باشد، $d = r + r'$

بنابراین داریم : $d = OO' = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۲+۲)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$

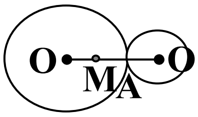
$$d = r + r' = ۵ \Rightarrow r + ۳ = ۵ \Rightarrow r = ۲$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله‌ی دایره‌ی (C) را می نویسیم : $(x-۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴$

مثال)دو دایره C و C' در نقطه‌ی $(۰,۱)$ مماس برونی هم هستند، اگر قائم های بر دایره C همواره از نقطه‌ی $(۲,-۳)$ بگذرد، مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{۵}$ کدام است؟

۱) $(-۱,۳)$ ۲) $(-۱,۲)$ ۳) $(۱,-۲)$ ۴) $(۱,-۱)$ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۴)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل :خط مماس بر دایره بر شعاع دایره در نقطه‌ی تماس عمود است پس هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می گذرد. و درنتیجه نقطه‌ی $O(۲,-۳)$ مرکز دایره C است.شیب خط OA برابر $m = \frac{۱+۳}{۰-۲} = -۲$



و معادله‌ی آن به صورت $y = -۲x + ۱$ است. بنابراین مختصات نقطه‌ی O' به صورت $O'(\alpha, -۲\alpha + ۱)$ است.

$$O'A = \sqrt{۵} \Rightarrow (۰-\alpha)^۲ + (۱ + ۲\alpha - ۱)^۲ = ۵ \Rightarrow ۵\alpha^۲ = ۵ \Rightarrow \alpha = \pm۱$$

اگر $\alpha = ۱$ آنگاه $O'(۱,-۱)$ که در این صورت دو دایره مماس درونی می شوند. بنابراین مقدار $\alpha = ۱$ قابل قبول نیست.

اگر $\alpha = -۱$ آنگاه $O'(-۱,۳)$ که در این صورت دو دایره مماس برونی می شوند. بنابراین مقدار $\alpha = -۱$ قابل قبول نیست.

روش دوم :خط مماس بر دایره بر شعاع دایره در نقطه‌ی تماس عمود است پس هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می گذرد. و درنتیجه نقطه‌ی $O(۲,-۳)$ مرکز دایره C است. نقطه‌ی O' مرکز دایره C' بر روی خطی که از دو نقطه‌ی $A(۰,۱)$ و $O(۲,-۳)$ می گذرد واقع است.

$$OA: y - ۱ = \frac{-۳-۱}{۲-۰}(x-۰) \Rightarrow y = -۲x + ۱$$

از طرفی تنها مختصات گزینه های ۱ و ۴ در این معادله صدق می کنند. حال به بررسی گزینه ها می پردازیم. اگر $O'(-۱,۳)$ باشد داریم :

$$R = OA = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (۱+۳)^۲} = ۲\sqrt{۵} \text{ و } OO' = \sqrt{(-۱-۲)^۲ + (۳+۳)^۲} = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

ودرنتیجه $OO' = ۲\sqrt{۵} + \sqrt{۵} = R + R'$ بنابراین در این حالت دو دایره مماس برونی اند.

روش سوم : خط مماس بر دایره بر شعاع دایره در نقطه‌ی تماس عمود است پس هر خط عمود بر دایره از مرکز دایره می گذرد.

و درنتیجه نقطه‌ی $O(۲,-۳)$ مرکز دایره C است. $R = OA = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (۱+۳)^۲} = ۲\sqrt{۵}$

نقطه‌ی M را وسط OA اختیار می کنیم بدیهی است که نقطه‌ی A وسط $O'A$ قرار دارد.

$$A(۰,۱) \Rightarrow M = \frac{O+A}{۲} = (۱,-۱) \text{ و } A = \frac{O'+M}{۲} \Rightarrow O' = ۲A - M = (-۱,۳)$$

مثال)دایره‌ی C بر دایره به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۴$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(۸,۷)$ می گذرد. شعاع دایره‌ی C کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) ۸   ۴) ۹   (کنکور سراسری ریاضی۹۶خارج از کشور)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. هر خط قائم بر دایره‌ی C از نقطه‌ی $O(8,7)$ که همان مرکز دایره است می گذرد.

$$x^2+y^2-4x+2y=4 \Rightarrow O'(2,-1) \text{ و } R'=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+16}=3$$

$$d=OO'=\sqrt{(2-8)^2+(-1-7)^2}=10 \xrightarrow{\text{مماس خارج}} OO'=R+R' \Rightarrow 10=R+3 \Rightarrow R=7$$

۲۵) دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2x+6y=8$ و $x^2+y^2+8x-4y+12=0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مماس خارج   ۲) مماس داخل   ۳) متقاطع   ۴) متخارج   (کنکور سراسری تجربی ۸۷)

مثال)به ازای کدام مقدار a، دو دایره به معادلات $x^2+y^2+4x=0$ و $x^2+y^2-2x+8y+a=0$ مماس خارج یکدیگرند؟

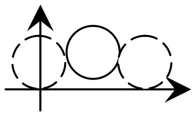
۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸   (کنکور سراسری ریاضی ۹۰)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $O(-2,0)$ و $R=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$ و $O'(1,-4)$ و $R'=\frac{1}{2}\sqrt{4+64-4a}=\sqrt{17-a}$

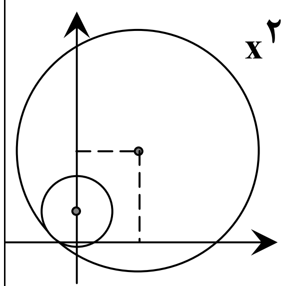
$OO'=\sqrt{9+16}=5$ (دو دایره مماس خارج اند.) $OO'=R+R' \Rightarrow 5=2+\sqrt{17-a} \Rightarrow 9=17-a \Rightarrow a=8$

مثال) چند دایره به شعاع ۲ وجود دارد که بر محور طول ها و دایره‌ی $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ مماس باشد؟

۱) صفر   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) بیشمار   (کنکور آزاد ریاضی۸۷خارج از کشور)



جواب : گزینه ۲ صحیح است. با توجه به آنکه پایین ترین نقطه‌ی $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ کمتر از ۲ واحد با محور طول ها فاصله دارد، اگر دایره به شعاع ۲ را بر روی محور طول ها بغلتانیم، در دو مکان بر دایره فوق مماس می شود. پس دو دایره با شرایط مذکور وجود دارد.



فعالیت۳: معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و با دایره‌ی $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس داخل باشد.

۱) معادله‌ی دایره‌ی فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید.

$$(x-\cdots)^2+(y-\cdots)^2=\cdots \Rightarrow O'(\cdots,\cdots) \text{ و } r'=\cdots$$

۲) طول خط المرکزین دو دایره را به دست آورید. $d=OO'=\sqrt{(0-2)^2+(1-3)^2}=\cdots$

۳) با توجه به آنچه از هندسه ۲ می دانیم، داریم : $d=|r-r'| \Rightarrow |r-\cdots|=2\sqrt{2} \Rightarrow r-\cdots=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r=\cdots$

۴) با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می نویسیم : $(x-0)^2+(y-1)^2=(\cdots \pm 2\sqrt{2})^2$

چرا مسئله دو جواب دارد؟   (ص۴۴کتاب جدید)

کار در کلاس : وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :   (ص۴۴کتاب جدید)

الف) $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۳$ و $x^۲ + y^۲ - ۱۰x - ۱۴y + ۷۳ = ۰$

ب) $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۱$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + ۱ = ۰$

ج) $x^۲ + y^۲ = ۹$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + ۱ = ۰$

د) $x^۲ + y^۲ = ۴$ و $x^۲ + y^۲ - ۸x - ۴y + ۱۹ = ۰$

مثال) دو دایره $x^۲ + ۲x + y^۲ = ۰$ و $x^۲ - ۲x + y^۲ = ۸$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) مماس داخل   ۲) مماس خارج   ۳) متقاطع   ۴) متخارج   (کنکورآزاد تجربی۸۲)

جواب : گزینه ۱ درست است. $OO' = R' - R = ۳ - ۱ = ۲$ و $OO' = ۲$ و $R' = ۳$ و $O'(۱,۰)$ و $R = ۱$ و $O(-۱,۰)$

مثال) به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۴y + b = ۰$ مماس داخل اند؟

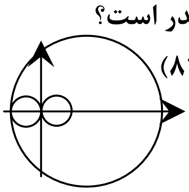
۱) ۵-   ۲) ۴-   ۳) ۳-   ۴) ۲-   (کنکور سراسری ریاضی ۸۶-۱۳۸۵)

جواب : گزینه ۲ درست است. $R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ - ۴b} = \sqrt{۴ - b}$ و $O'(۰,۲)$ و $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۴} = \sqrt{۲}$ و $O(-۱,۱)$

$OO' = |R' - R| \Rightarrow \sqrt{۲} = \left|\sqrt{۴ - b} - \sqrt{۲}\right| \Rightarrow \sqrt{۴ - b} - \sqrt{۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow b = -۴$ و $OO' = \sqrt{۱ + ۱} = \sqrt{۲}$

مثال) شعاع کوچکترین دایره ای که بر دو دایره $(x - ۱)^۲ + y^۲ = ۱$ و $(x - ۳)^۲ + y^۲ = ۲۵$ مماس است چقدر است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۰/۵   ۴) ۱/۵   (کنکور آزاد ریاضی ۸۴)



جواب : گزینه ۱ صحیح است. چون $R' = ۵$ و $O'(۳,۰)$ و $R = ۱$ و $O(۱,۰)$ پس دو دایره متداخلند.

در نتیجه دایره مطلوب دایره ای به مرکز $(-۱,۰)$ و به شعاع ۱ است.

مثال) دو دایره $x^2-4x+y^2=0$ و $x^2+4x+y^2=5$ نسبت به هم چه وضعی دارد؟

۱) مماس داخلند. ۲) مماس خارجند. ۳) متخارج اند. ۴) متقاطعند. (کنکور آزاد تجربی۸۶)

جواب : گزینه ۴ درست است. $C:(x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow O(2,0)$ و $R=2$

$C':(x+2)^2+y^2=9 \Rightarrow O'(-2,0)$ و $R'=3$ و $OO'=|2-(-2)|=4$ و $|R-R'|<OO'<R+R'$

مثال) دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2x=1$ و $x^2+y^2=9$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) متخارجند. ۲) متداخلند. ۳) متقاطعند. ۴) مماس خارج اند. (کنکور سراسری تجربی ۶۴)

جواب:گزینه۲صحیح است. $x^2+y^2-2x=1 \Rightarrow O(1,0)$ و $r=\frac{1}{2}\sqrt{4+4}=\sqrt{2}$ و $x^2+y^2=9 \Rightarrow O'(0,0)$ و $r'=3$

پس $OO'=1$ در نتیجه $OO'<r'-r$

نکته : الف : اندازه‌ی مماس مشترک های خارجی دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ برابر است با :

$$TT'=\sqrt{OO'^2-(R-R')^2}$$

حالت خاص : اندازه‌ی مماس مشترک های خارجی دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ که مماس برونی نیز باشند برابر است با : $2\sqrt{RR'}$

نکته : الف : اندازه‌ی مماس مشترک های داخلی دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ برابر است با :

$$TT'=\sqrt{OO'^2-(R+R')^2}$$

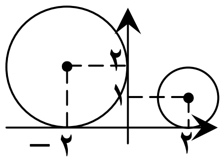
مثال) طول مماس مشترک دو دایره‌ی $x^2+y^2-4x+3=0$ و $x^2+y^2-10x+21=0$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{10}$ ۴) $2\sqrt{2}$ (کنکور آزاد تجربی ۷۸)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. نقاط $O(2,0)$ و $O'(5,0)$ مراکز دو دایره و $R=\frac{1}{2}\sqrt{16-12}=1$ و $R'=\frac{1}{2}\sqrt{100-84}=2$ شعاع های دو دایره و $OO'=3$ خط المرکزین این دو دایره می باشند و چون $OO'=R+R'=3$ پس دو دایره مماس برونی اند. لذا فقط مماس مشترک خارجی آن دو قابل محاسبه است. $TT'=\sqrt{OO'^2-(R-R')^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$

مثال) مماس مشترک های خارجی دو دایره $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ و $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ در کدام نقطه متقاطع اند؟

۱) $(0,6)$ ۲) $(6,0)$ ۳) $(3,0)$ ۴) $(0,3)$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۵)



جواب : گزینه ۲ صحیح است. مماس مشترک های خارجی دو دایره با خط المرکزین همرسند.

مطابق شکل محور طول ها یکی از مماس مشترک های خارجی دو دایره است.

محل تقاطع محور طول ها به خط O_1O_2 جواب مسأله است.

$O_1(2,1)$ و $O_2(-2,2)$ و (معادله‌ی خط المرکزین) $O_1O_2: y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$$\Rightarrow y-1=\frac{1}{-4}(x-2) \Rightarrow y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2} \xrightarrow{y=0} -\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow (6,0)$$

فعالیت ۴ : می خواهیم وضعیت خط به معادله‌ی $x+y=4$ و دایره‌ی $x^2+y^2-2y-3=0$ را تعیین کنیم.

روش اوّل : از معادله‌ی خط $y=4-x$، را در معادله‌ی دایره جایگزین می کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات

نقطه های برخورد از معادله حاصل به دست می آید.) : $x^2+(4-x)^2-2(4-x)-3=0 \Rightarrow \cdots$

با ساده کردن معادله‌ی حاصل و تعیین علامت Δ، نشان دهید معادله‌ی فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم : معادله‌ی دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصله‌ی مرکز دایره از خط را بیابید.

چگونه تشخیص می دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (ص۴۵کتاب جدید)

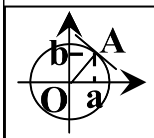
سؤال:اگر در معادله‌ی حاصل از برخورد خط و دایره، $\Delta > 0$ یا $\Delta = 0$ شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت ها فاصله‌ی مرکز دایره از خط چگونه است؟ (ص۴۵کتاب جدید)

مثال) خط $4x+3y+6=0$ نسبت به دایره به معادله $4x^2+4y^2-8x-12=0$ چه وضعی دارد؟

۱) قائم بر دایره است.   ۲) مماس بر این دایره است.

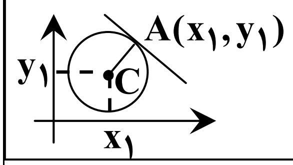
۳) دایره را قطع می کند.   ۴) دایره را قطع نمی کند.

جواب : گزینه ۲ درست است. $R=\frac{1}{2}\sqrt{4+12}=2$ و $C(1,0) \Rightarrow OH=\frac{|4+0+6|}{\sqrt{16+9}}=2 \Rightarrow OH=R$



نکته : معادله خطی که در نقطه $A(a,b)$ واقع بر دایره $x^2+y^2=R^2$ بر این دایره مماس باشد، به صورت $ax+by=R^2$ می باشد.

نکته الف : معادله خط مماس بر دایره به معادله $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ در نقطه (x_1,y_1) واقع بر آن به صورت زیر است. $(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)=R^2$



ب : معادله خطی که در نقطه $A(x_1,y_1)$ واقع بر دایره $x^2+y^2+ax+by+c=0$ بر این دایره مماس باشد، به صورت $x_1x+y_1y+\frac{a}{2}(x+x_1)+\frac{b}{2}(y+y_1)+c=0$ می باشد.

مثال) در نقطه‌ی $A(2,3)$ روی دایره‌ی $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید. (ص۴۵کتاب جدید)

مثال) معادله خط مماس بر دایره به معادله $x^{۲} + y^{۲} - ۴x + ۲y - ۳ = ۰$ در نقطه $M(۴,۱)$ واقع بر دایره کدام است؟

۱) $۳x + ۳y - ۱ = ۰$ ۲) $۳x - ۳y + ۱ = ۰$

۳) $x - y + ۱ = ۰$ ۴) $x + y - ۵ = ۰$

جواب : گزینه ۴ درست است. روش اوّل : با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است. با تعیین مختصات مرکز دایره شیب OA را تعیین می کنیم و از آنجا شیب مماس را به دست آورده و معادله آن را تعیین می کنیم.

$$x^{۲} + y^{۲} - ۴x + ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)^{۲} + (y + ۱)^{۲} = ۸ \Rightarrow O(۲,-۱)$$

$$m_{OM} = \frac{۴ - ۲}{۱ + ۱} = ۱ \Rightarrow m_d = -۱ \Rightarrow y - ۱ = -(x - ۴) \Rightarrow d \text{ معادله مماس } : x + y - ۵ = ۰$$

روش دوم :
$$xx_{۱} + yy_{۱} + \frac{a}{۲}(x + x_{۱}) + \frac{b}{۲}(y + y_{۱}) + c = ۰$$

و
$$M(۴,۱) \Rightarrow ۴x + y + \frac{(-۴)}{۲}(x + ۴) + \frac{۲}{۲}(y + ۱) - ۳ = ۰ \Rightarrow ۲x + ۲y - ۱۰ = ۰ \Rightarrow x + y - ۵ = ۰$$

تمرین ۱) معادله‌ی دایره ای را بنویسید که :

الف) $O(۱,۱)$ مرکز آن بوده و $A(۳,۲)$ نقطه ای از آن باشد.

ب) $O(۲,۱)$ مرکز آن بوده و بر خط $۳x + ۴y = ۰$ مماس باشد.

پ) $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $x + y = ۱$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x + ۳y = ۶$ بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و $y = ۲x - ۱$ شامل قطری از آن باشد.

مثال)دایره ای، محور xهارادردونقطه به طول های۱و۳قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳ (کنکور سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : مرکز این دایره روی خط به معادله‌ی $y = x$ و $x > 0$، قرار دارد. درنتیجه می توانیم مختصات مرکز آن را به صورت $C(\alpha,\alpha)$ در نظر می گیریم. فاصله‌ی مرکز دایره از هر نقطه‌ی دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است. چون دو نقطه‌ی $A(1,0)$ و $B(3,0)$ بر این دایره واقع اند. پس :

$$R = CA = CB \Rightarrow \sqrt{(\alpha-1)^2+(\alpha-0)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2+(\alpha-0)^2}$$
$$\Rightarrow (\alpha-1)^2+\alpha^2 = (\alpha-3)^2+\alpha^2 \Rightarrow 4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = 2$$
$$\Rightarrow R = CA = \sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2} = \sqrt{5}$$

روش دوم : معادله‌ی گسترده‌ی دایره را می نویسیم : $x^2+y^2+ax+by+c=0$

مرکز این دایره روی خط به معادله‌ی $y = x$ و $x > 0$، قرار دارد.

$$C(\alpha=-\frac{a}{2},\beta=-\frac{b}{2}) \text{ و } y = x \Rightarrow -\frac{a}{2} = -\frac{b}{2} \Rightarrow a = b \qquad (1)$$

چون دو نقطه‌ی $A(1,0)$ و $B(3,0)$ بر این دایره واقع اند. پس :

$$\begin{cases} 1+0+a+0+c=0 \quad (2) \\ 9+0+3a+0+c=0 \quad (3) \end{cases} \xrightarrow{(3)-(2)} 2a+8=0 \Rightarrow a=-4 \Rightarrow c=3 \quad (4)$$

$$(1),(4) \Rightarrow b = a = -4$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-4x-4y+3=0 \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{16+16-12} = \sqrt{5}$$

روش سوم : چون دو نقطه‌ی $A(1,0)$ و $B(3,0)$ بر این دایره واقع اند. پس عمودمنصف پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می کند، از مرکز دایره عبور می کند. لذا کافی است عمودمنصف پاره خط AB را نوشته با خط داده شده، یعنی $y = x$ قطع دهیم. مرکز دایره حاصل می گردد.

$$m_{AB} = 0 \text{ و } m' = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{0} \text{ و } M(2,0) \text{ و } \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} y = x \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow C\begin{cases} \alpha = x = 2 \\ \beta = y = 2 \end{cases} \Rightarrow R = CA = \sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2} = \sqrt{5}$$

مثال) دایره ای از دو نقطه‌ی $(0,1)$ و $(3,0)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳ (کنکور سراسری تجربی۹۰خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادله‌ی $x - y = 2$، قرار دارد. درنتیجه می توانیم مختصات مرکز آن را به صورت $C(\alpha+2,\alpha)$ در نظر می گیریم. فاصله‌ی مرکز دایره از هر نقطه‌ی دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است. چون دو نقطه‌ی $A(0,1)$ و $B(3,0)$ بر این دایره واقع اند. پس :

$$R = CA = CB \Rightarrow \sqrt{(\alpha+2-0)^2+(\alpha-1)^2} = \sqrt{(\alpha+2-3)^2+(\alpha-0)^2}$$
$$\Rightarrow (\alpha+2)^2+(\alpha-1)^2 = (\alpha-1)^2+\alpha^2 \Rightarrow 4\alpha+4=0 \Rightarrow \alpha=-1$$
$$\Rightarrow R = CA = \sqrt{(-1+2)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{5}$$

روش دوم : معادله‌ی گسترده‌ی دایره را می نویسیم : $x^2+y^2+ax+by+c=0$

از طرفی قطر هر دایره از مرکز آن می گذرد، پس مختصات مرکز دایره در معادله‌ی قطر دایره صدق می کند. لذا داریم :

$C(\alpha=-\frac{a}{۲},\beta=-\frac{b}{۲})$ و $x-y=۲\Rightarrow -\frac{a}{۲}+\frac{b}{۲}=۲\Rightarrow a-b=-۴$ (۱)

$$\begin{cases} ۰+۱+۰+b+c=۰(۲) \\ ۹+۰+۳a+۰+c=۰(۳) \end{cases} \xrightarrow{(۳)-(۲)} ۳a-b+۸=۰\Rightarrow ۳a-b=-۸(۴)$$

$(۱),(۴)\Rightarrow a=-۲$ و $b=۲\xrightarrow{(۱)} c=-۳$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x+۲y-۳=۰\Rightarrow R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴+۱۲}=\sqrt{۵}$$

روش سوم : اگر دایره از دو نقطه‌ی $A(۰,۱)$ و $B(۳,۰)$ عبور کند، عمودمنصف پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می کند، از مرکز دایره عبور می کند. لذا کافی است عمودمنصف پاره خط AB را نوشته با خط داده شده، یعنی $y=x-۲$ قطع دهیم. مرکز دایره حاصل می گردد. $m_{AB}=-\frac{۱}{۳}$ و $m'=-\frac{۱}{m_{AB}}=۳$ و $M(\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ و $y-\frac{۱}{۲}=۳(x-\frac{۳}{۲})\Rightarrow y=۳x-۴$

$$\begin{cases} y=x-۲ \\ y=۳x-۴ \end{cases}\Rightarrow C\begin{cases} \alpha=x=۱ \\ \beta=y=-۱ \end{cases}\Rightarrow R=CA=\sqrt{(۰-۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=\sqrt{۵}$$

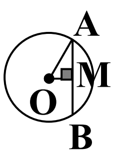
تمرین۲) حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a$ بتواند معادله‌ی یک دایره باشد.   (ص۴۵کتاب جدید)

۲۶) به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، منحنی به معادله‌ی $۲x^۲+(a^۲-۷)y^۲+۴y+a=۰$ یک دایره است؟

۱) $\{-۳\}$ ۲) $\{۳\}$ ۳) $\{-۳,۳\}$ ۴) ϕ (کنکور سراسری تجربی۸۵خارج از کشور)

نکته(وضعیت نقطه نسبت به دایره):هر دایره به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R و با معادله‌ی $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ صفحه رابه سه بخش درون، رو و برون افرازمی کند.معادله‌ی $C(x,y)=(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲-R^۲$ را در نظر می گیریم :

الف : **داخل دایره**، مجموعه‌ی نقطه هایی مانند $M(x_۱,y_۱)$ می باشندکه فاصله‌ی آن ها از مرکز دایره، کمتر از شعاع دایره است. درنتیجه : $OM<R\Leftrightarrow OM^۲<R^۲\Leftrightarrow (x_۱-\alpha)^۲+(y_۱-\beta)^۲<R^۲\Leftrightarrow C(x_۱,y_۱)<۰$



در این حالت که نقطه‌ی M درون دایره قراردارد نمی توان مماس بر دایره رسم کرد. اندازه کوتاهترین وتری از دایره مانند AB که از نقطه M می گذرد در رابطه زیر صدق می کند. $AB=۲\sqrt{-C(x_۱,y_۱)}$

زیرا: $(\frac{AB}{۲})^۲=R^۲-OM^۲=R^۲-(x_۱-\alpha)^۲-(y_۱-\beta)^۲=-C(x_۱,y_۱)\Rightarrow AB=۲\sqrt{-C(x_۱,y_۱)}$

ب : **روی دایره**، مجموعه‌ی نقطه هایی مانند $M(x_1,y_1)$ هستند که فاصله‌ی آن ها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.

درنتیجه: $OM = R \Leftrightarrow OM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2 = R^2 \Leftrightarrow C(x_1,y_1)=0$

در این حالت که نقطه‌ی M روی دایره قراردارد از این نقطه فقط می توان یک مماس بر دایره رسم کرد.

ج : **خارج دایره**، مجموعه‌ی نقطه هایی مانند $M(x_1,y_1)$ هستند که فاصله‌ی آن ها از مرکز دایره، بیشتر از شعاع دایره است.

درنتیجه : $OM > R \Leftrightarrow OM^2 > R^2 \Leftrightarrow (x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2 > R^2 \Leftrightarrow C(x_1,y_1)>0$

در این حالت که نقطه‌ی M برون دایره قراردارد می توان دو مماس مساوی بردایره رسم کرد که اندازه مماس MT بر این دایره در رابطه زیر صدق می کند. $MT=\sqrt{C(x_1,y_1)}$

زیرا : $MT^2 = OM^2 - R^2 = (x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2 - R^2 = C(x_1,y_1) \Rightarrow MT=\sqrt{C(x_1,y_1)}$

تمرین۳) وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.   (ص۴۵کتاب جدید)

مثال) حدود k برای آن که نقطه $M(-2,3)$ داخل دایره به معادله $x^2+y^2+ky=9$ باشد، کدام است؟

۱) $k>-\frac{3}{4}$ ۲) $k<-\frac{4}{3}$ ۳) $k<-\frac{3}{4}$ ۴) $k>-\frac{4}{3}$

جواب : گزینه ۲ درست است. $M(-2,3) \Rightarrow 4+9+3k-9<0 \Rightarrow k<-\frac{4}{3}$

۲۷) اگر از نقطه $A(2,m)$ بتوانیم دو مماس بر دایره به معادله $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ رسم کنیم حدود m کدام است؟

۱) $m>-3$ ۲) $m<1$ ۳) $-3<m<1$ ۴) $m>1$ یا $m<-3$

۲۸) طول قطعه مماسی که از نقطه $A(4,1)$ بر دایره به معادله $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ رسم شود برابر کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) $2\sqrt{3}$ (کنکور سراسری ریاضی۸۴- ۱۳۸۳)

نکته : کوچکترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.

مثال) طول کوتاهترین وتری از دایره $x^2-4x+y^2-2y=4$ که از نقطه $A(1,1)$ می گذرد، چقدر است؟

۱) ۲   ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) ۱   (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۳)

جواب : گزینه ۳ درست است. روش اوّل : $C(2,1)$ و $R=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+16}=3$ و $CA=\sqrt{(2-1)^2+(0-0)^2}=1$

$$(\frac{BC}{2})^2=R^2-CA^2=9-1=8\Rightarrow BC^2=32\Rightarrow BC=4\sqrt{2}$$

روش دوم : $\Rightarrow f(x,y)=x^2-4x+y^2-2y-4\Rightarrow -\frac{BC^2}{4}=1-4+1-2-4=-8\Rightarrow BC=4\sqrt{2}$

مثال) چند وتر به طول ۳ در دایره $x^2+(y-1)^2=25$ می توان رسم کرد که از نقطه $(2,3)$ بگذرد؟

۱) ۱   ۲) بی شمار   ۳) صفر   ۴) ۲   (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۵)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. فرض کنیم AB طول کوتاهترین وتر ممکن و گذرنده از نقطه‌ی $(2,3)$ باشد.

داریم : $AB=2\sqrt{-C(x_0,y_0)}=2\sqrt{-(2^2+(3-1)^2-25)}=2\sqrt{17}>8$

چون وتر داده شده از کوتاهترین وتر، کوچکتر است، پس هیچ وتری نمی توان رسم کرد. (هندسه ۳ دوازدهم ۹۸-۹۷)

تمرین۴) وضعیت هر یک از جفت دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2-2x=4$

ب) $x^2+(y-1)^2=1$ و $(x-1)^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

د) $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-6x-2y+9=0$

(ص۴۵کتاب جدید)

تمرین۵) نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله‌ی دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله‌ی مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید. (ص۴۵کتاب جدید)

مثال) شعاع دایره گذرا بر سه نقطه‌ی $(0,0)$ و $(2,1)$ و $(1,-2)$، برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۳)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : برای بدست آوردن دایره محیطی مثلث بهتر است از معادله گسترده دایره استفاده کنیم.

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ \begin{cases} (0,0)\Rightarrow 0+0+0+0+c=0 \\ (2,1)\Rightarrow 4+1+2a+b+c=0 \\ (1,-2)\Rightarrow 1+4+a-2b+c=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-3x+y=0$$

$$\Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{10}{4}\Rightarrow R=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

روش دوم : به سادگی دیده می شود مثلث فوق قائم الزاویه است. بنابراین شعاع آن نصف اندازه وتر است. درنتیجه :

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

تمرین۶) وضعیت هر یک از خطوط و دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید : (ص۴۵کتاب جدید)

الف) $3x+4y=0$ و $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

ب) $x+y=2$ و $x^2+y^2=2$

ج) $x+y=1$ و $x^2+y^2-2x-2y=2$

مثال) معادله قطری از دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۰$ عمود بر خط $y = x$، کدام است؟

۱) $y + x = ۲$ ۲) $y + ۲x = ۲$ ۳) $۲y + x = ۱$ ۴) $y + x = ۱$ (کنکور سراسری تجربی ۷۶)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. می دانیم حاصل ضرب شیب های دو خط عمود بر هم ۱- می باشد. مرکز این دایره نقطه‌ی $C(۱,۰)$ است. از طرفی شیب خط $y = x$ به صورت $m = ۱$ می باشد و چون قطر باید بر خط $y = x$ عمود باشد پس شیب آن $m' = -۱$ خواهد بود درنتیجه معادله‌ی قطر به صورت زیر محاسبه می شود.

$$y - ۰ = -۱(x - ۱) \Rightarrow y + x = ۱$$

مثال) به ازای کدام مقدار a زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x + y = ۱$ و خط به معادله‌ی $۳x + ۲y = a$ در نقطه‌ی تلاقی آن ها، ۹۰ درجه است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵   (کنکور سراسری ریاضی۹۶)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : شیب خط مماس بر دایره در نقطه تماس با آن برابر است با مشتق به ازای مختصات نقطه تماس پس $m = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{۲x - ۲}{۲y + ۱}$ از طرفی شیب خط $۳x + ۲y = a$ برابر است با $m' = -\frac{A}{B} = -\frac{۳}{۲}$ و چون خط مماس و این خط بر هم عمودند پس:

$$mm' = -۱ \Rightarrow -\frac{۲x - ۲}{۲y + ۱} \times (-\frac{۳}{۲}) = -۱$$

$$\xrightarrow{۳x+۲y=a} ۶x - ۶ = -۴(\frac{a - ۳x}{۲}) - ۲ \Rightarrow ۶x - ۶ = -۲a + ۶x - ۲ \Rightarrow a = ۲$$

روش دوم : با توجه به اینکه خط مماس بر شعاع دایره در نقطه‌ی تماس با آن عمود است پس خط به معادله‌ی $۳x + ۲y = a$ قائم بردایره است به عبارت دیگر مرکز دایره روی این خط واقع است.

$$C(-\frac{A}{۲}, -\frac{B}{۲}) = (۱, -\frac{۱}{۲}) \Rightarrow ۳ \times ۱ + ۲(-\frac{۱}{۲}) = a \Rightarrow a = ۲$$

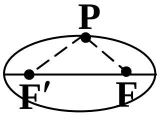
۲۹) هر خط قائم بر دایره، از نقطه‌ی $(۱,-۲)$ می گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - ۱$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۲   ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۳   ۴) $۳\sqrt{۲}$ (کنکور سراسری تجربی ۸۸)

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۱	۳	۴	۳	۲	۳	۴	۴	۱	۴	۲	۳	۳	۴	۳	۴	۲	۴	۲	۴

۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹
۳	۴	۱	۲	۱	۱	۴	۲	۴

فعالیت ۱ : یک تکه نخ در نظر گرفته و دو سر آن را مطابق شکل در دو نقطه‌ی F و F' ثابت کنید. فرض کنید طول نخ L باشد و $L > FF'$ یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی ای به گونه ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته ای خواهد بود که بیضی نام دارد.



۱) یک نقطه‌ی دلخواه روی شکل رسم شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله های این نقطه از دو نقطه‌ی ثابت F و F' برابر چیست؟

۲) یک نقطه‌ی دلخواه مانند A در درون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی ثابت F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از F و F' کوچکتر از L است.

(راهنمایی : پاره خط FA را از سمت A امتداد دهید تا بیضی را قطع کند سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۳) یک نقطه‌ی دلخواه مانند D بیرون بیضی رسم شده در نظر بگیرید و آن را به دو نقطه‌ی F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقطه‌ی مورد نظر از F و F' بزرگتر از L است.

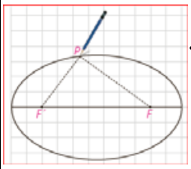
(راهنمایی : اگر نقطه‌ی D محل برخورد FB با بیضی باشد، $F'D$ را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده کنید.)

۴)ازمراحل(۱)تا(۳)متوجه وجودچه ویژگی مشترکی در همه‌ی نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه‌ی دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

۵) با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

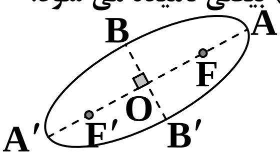
بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو . . . . یک مقدار . . . . است.

دو نقطه‌ی ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به دست آوردیم و آنها Fو F' را نامیدیم کانون های بیضی نام دارند.(ص۴۷کتاب جدید)



طریقه رسم بیضی : برای رسم بیضی دو نقطه‌ی ثابت F و F' (به نام کانون) را در یک صفحه در نظر می گیریم.
یک تکه نخ را به طول ثابت $L > FF'$ در نظر گرفته و دو سر آن را در محل دو کانون F و F' ثابت می کنیم.
سپس یک مداد را داخل این نخ قرار داده و با گرداندن مداد داخل نخ، بیضی را رسم می کنیم.

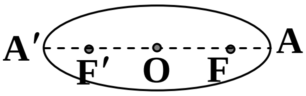
فعالیت۲:بیضی مقابل را در نظر بگیرید. AA' قطر بزرگ (قطرکانونی) و BB' قطر کوچک (قطر ناکانونی) بیضی نامیده می شود.



F و F'کانون های بیضی هستند و نقطه‌ی O، وسط پاره خط FF'، مرکز بیضی است.

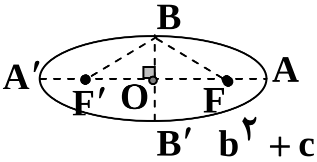
فرض کنید اندازه‌ی پاره خط های OA، OB و OC را به ترتیب با a، b و c نمایش دهیم.

بنابراین فاصله‌ی دو کانون بیضی برابر $2c$ است.



۱) در ترسیم بیضی با نخ و مداد دو وضعیت را که مداد در نقاط A و A' قرار می گیرد در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که $FA = F'A'$ و از آنجا نتیجه بگیرید $OA' = OA$ و لذا اندازه‌ی قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.



ب) نشان دهید طول نخ مورد نظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

۲) الف) در رسم بیضی وضعیتی را که مداد در نقطه‌ی B قرار دارد در نظر بگیرید و نشان دهید $b^2 + c^2 = a^2$

ب) با انجام همین کار برای نقطه‌ی B' نتیجه بگیرید $OB'^2 + c^2 = a^2$ و با توجه به آن نتیجه بگیرید $OB' = OB = b$ و لذا اندازه‌ی قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است.   (ص۴۸کتاب جدید)

بیضی : مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه‌ی ثابت و متمایز F و F' (به نام کانون) در آن صفحه مقدار مثبت و ثابت $2a$ باشد. ($F'F < 2a$)

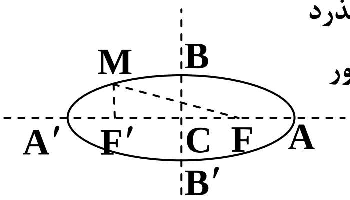
نکته : اگر نقطه‌ی M بر روی بیضی به کانون های F و F' باشد آنگاه : $MF + MF' = 2a$ و بعکس

نتیجه : الف : اگر نقطه‌ی M درون بیضی به کانون های F و F' باشد آنگاه : $MF + MF' < 2a$

ب : اگر نقطه‌ی M برون بیضی به کانون های F و F' باشد آنگاه : $MF + MF' > 2a$

فاصله‌ی کانونی : طول پاره خط $F'F$ را فاصله‌ی کانونی بیضی می نامند.

محورهای کانونی و ناکانونی بیضی و مرکز بیضی : خطی را که از کانون های بیضی می گذرد محور کانونی و خط عمود منصف پاره خط $F'F$ را محور ناکانونی بیضی می نامند. محل برخورد دو محور کانونی و ناکانونی بیضی را مرکز بیضی می نامند و با C نامگذاری می نمایند. می توان ثابت کرد که محورهای کانونی و ناکانونی بیضی محورهای تقارن بیضی و مرکز بیضی مرکز تقارن آن می باشند.



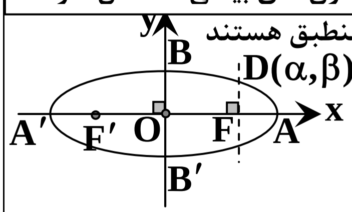
رئوس بیضی : محل برخورد محورهای کانونی و ناکانونی بیضی با نمودار آن را بترتیب رأس های کانونی و ناکانونی بیضی می نامند. و آنها را معمولاً با A' و A و B' و B نامگذاری می کنند.

بیضی افقی و قائم : هرگاه محور کانونی بیضی موازی محور طول ها باشد بیضی را افقی و هرگاه محور کانونی بیضی موازی محور عرض ها باشد بیضی را قائم می نامند.

بیضی : می توان ثابت کرد که مکان هندسی نقطه ای از صفحه که از یک دایره واقع در آن صفحه و یک نقطه‌ی ثابت واقع در درون آن دایره به‌یک فاصله باشد بیضی است.

طریقه رسم بیضی با معلوم بودن مرکز و a و b و نوع آن: ابتدا نقطه‌ی $C(\alpha,\beta)$ (مرکز بیضی) را مشخص می کنیم، سپس به اندازه‌ی a در طرفین مرکز روی محور کانونی و به اندازه‌ی b در طرفین مرکز روی محور ناکانونی حرکت می کنیم و نقاط حاصل را A'، A، B' و B می نامیم با داشتن این نقاط بیضی را رسم می کنیم. بهتر است در انتها کانون های بیضی مشخص شوند.

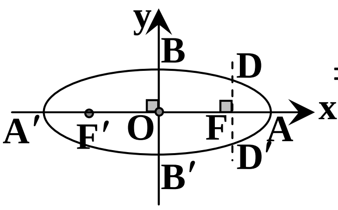
کار در کلاس : مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله‌ی F از هر دو نقطه‌ی O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه‌ی F بر AA' عمودکرده ایم بیضی را در نقطه‌ی D قطع کرده باشد، مختصات D را به دست آورید (ص۴۸کتاب جدید)



مثال : طول وتری که از یک کانون بیضی (یا هذلولی) می گذرد و بر محور کانونی عمود است از رابطه $MN=\frac{۲b^۲}{a}$ محاسبه می شود، که در آن a و b به ترتیب نصف قطر کانونی و ناکانونی بیضی (یا هذلولی) می باشند.

اثبات : روش اوّل : بدون آنکه از کلیت مسأله کاسته شود فرض کنیم مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و $OF=C$ و $a=OA$ است. اگر خطی که در نقطه‌ی F بر AA' عمود کرده ایم بیضی را در دو نقطه‌ی D و D' قطع کرده باشد، مختصات D و D' را به دست می آوریم.

جواب : $F'(-c,۰)$ و $F(c,۰)$ و $A'(-a,۰)$ و $A(a,۰)$ و $D(c,-\beta)$ و $D(c,\beta)$



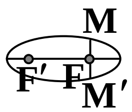
$$DF+DF'=۲a\Rightarrow\sqrt{(c-c)^۲+(\beta-۰)^۲}+\sqrt{(c+c)^۲+(\beta-۰)^۲}=۲a$$

$$\Rightarrow\sqrt{۴c^۲+\beta^۲}=۲a-\sqrt{\beta^۲}\Rightarrow ۴c^۲+\beta^۲=۴a^۲-۴a|\beta|+\beta^۲\Rightarrow a|\beta|=a^۲-c^۲$$

$$\Rightarrow|\beta|=\frac{a^۲-c^۲}{a}=\frac{b^۲}{a}\Rightarrow\beta=\pm\frac{b^۲}{a}\Rightarrow D(c,\frac{b^۲}{a})\ \text{و}\ D'(c,-\frac{b^۲}{a})$$

$$DD'=\sqrt{(c-c)^۲+(\frac{b^۲}{a}+\frac{b^۲}{a})}=\frac{۲b^۲}{a}$$

روش دوم : در بیضی داریم : $MF'^۲=MF^۲+F'F^۲\Rightarrow MF'^۲-MF^۲=F'F^۲$ و $MF'+MF=۲a$

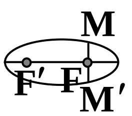


$$\Rightarrow(MF'-MF)(MF'+MF)=(۲c)^۲\Rightarrow MF'-MF=\frac{۴c^۲}{۲a}=\frac{۲c^۲}{a}$$

$$\begin{cases}MF'+MF=۲a\\ MF'-MF=\frac{۲c^۲}{a}\end{cases}\xrightarrow{-}۲MF=۲(a-\frac{c^۲}{a})\Rightarrow MF=a-\frac{c^۲}{a}=\frac{a^۲-c^۲}{a}=\frac{b^۲}{a}$$

$$\Rightarrow MM'=۲MF=\frac{۲b^۲}{a}$$

نکته : طول وتری که از یک کانون بیضی (یا هذلولی) می گذرد و بر محور کانونی عمود است از رابطه $MN=\frac{۲b^۲}{a}$ محاسبه می شود، که در آن a و b به ترتیب نصف قطر کانونی و ناکانونی بیضی (یا هذلولی) می باشند.



۱)در بیضی به مرکز مبدأ مختصات و رأس $A(۲,۰)$ و کانون $F(۱,۰)$، یک خط از این کانون بر قطر بزرگ آن عمود می کنیم، تا بیضی را در M و N قطع کند اندازه وتر MN کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳   ۴) ۴

فعالیت ۳ : در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برایر a و c بیضی مورد نظر را رسم می کنیم. می دانیم که $0 \le c \le a$ و لذا $0 \le \frac{c}{a} \le 1$ دقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی چه ارتباطی با مقدار کسر $\frac{c}{a}$ دارد. در رسم بیضی به صورت تقریبی ابتدا دو کانون F و F' را به فاصله‌ی $2c$ از هم در نظر بگیرید، سپس نقاط A و A' را بر خط FF' به گونه ای انتخاب کنید که فاصله‌ی A تا F و فاصله‌ی A' تا F' برابر $a-c$ و اندازه‌ی AA' برابر $2a$ باشد، سپس با استفاده از رابطه‌ی $b^2 = a^2 - c^2$ نقاط B و B' را مشخص کنید و بیضی را بطور تقریبی رسم کنید :

۱) $c=1$ و $a=4$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{1}{4}$

۲) $c=2$ و $a=8$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{1}{4}$

۳) $c=1$ و $a=2$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

۴) $c=2$ و $a=4$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

۵) $c=3$ و $a=4$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$

۶) $c=6$ و $a=8$ ؛ $\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$

(ص۴۹کتاب جدید)

با توجه به آنچه دیدید هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ به یک نزدیک شود شکل بیشی کشیده تر شده و شکل بیضی به پاره خط نزدیکتر می شود و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ به صفر نزدیک شود کشیدگی شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره نزدیکتر می شود. به این سبب مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامیم.

در حالتی که $\frac{c}{a}=1$ بیضی تبدیل به یک پاره خط و در حالتی که $\frac{c}{a}=0$ بیضی تبدیل به یک دایره می شود. چرا؟

مثال) ثابت کنید $A'A=2a$ قطر بزرگ بیضی و $B'B=2b$ قطر کوچک بیضی است.

جواب : $a,b,c>0 , c^2=a^2-b^2>0 \Rightarrow (a-b)(a+b)>0 \Rightarrow a-b>0 \Rightarrow a>b \Rightarrow 2a>2b$

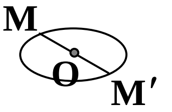
نکته : خروج از مرکز بیضی (کشیدگی بیضی) : کسر $e=\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می نامند. باید توجه داشت که در بیضی همواره $0<e<1$ است.

نکته : رابطه‌ی عمومی بیضی : $a^2=b^2+c^2$

نتیجه : الف : $c^2=a^2-b^2$ و $b^2=a^2-c^2$

ب : اگر $e \to 0$ آنگاه $c \to 0$ در نتیجه $a \to b$ بنابراین شکل بیضی به‌یک دایره میل می کند. و اگر $e \to 1$ آنگاه $c \to a$ در نتیجه $b \to 0$ بنابراین شکل بیضی به‌یک پاره خط میل می کند.

نکته : خروج از مرکز بیضی : $e=\sqrt{1-(\frac{2b}{2a})^2}$ و یا $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$



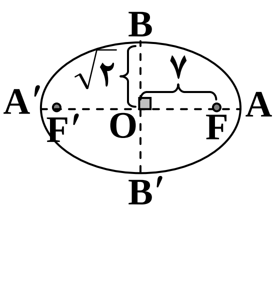
نکته : قطرهای بیضی وترهای از بیضی هستند که از مرکز بیضی می گذرند.

اگر MM' وتر دلخواهی از بیضی باشد همواره داریم : $2b=B'B \le M'M \le A'A=2a$

۲) نقاط $F(1,1)$ و $F'(-3,1)$ کانون های یک بیضی می باشند که بر محور xها مماس است. طول قطر بزرگ این بیضی کدام است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

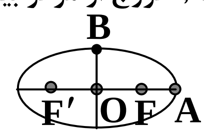
۳) در بیضی به کانون های F و F' (شکل مقابل) چند قطر وجود دارد که طول آن ها عدد طبیعی باشد؟



۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۷   ۴) ۸

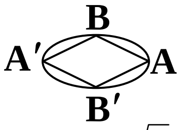
۴) در بیضی شکل مقابل مساحت مثلث OAB سه برابر مساحت مثلث FBF' است , خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$



(کنکور آزاد ریاضی ۷۵)

مثال) در شکل زیر، مساحت لوزی $۱۶\sqrt{۶}$ و طول قطر کوچک بیضی $۴\sqrt{۳}$ است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۸}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$

جواب : گزینه۴ درست است. $۲b = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow b = ۲\sqrt{۳}$ و $\frac{۱}{۲}(۲a)(۲b) = ۱۶\sqrt{۶} \Rightarrow ۲a \times ۲\sqrt{۳} = ۱۶\sqrt{۶} \Rightarrow a = ۴\sqrt{۲}$

$$\Rightarrow e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - \frac{۱۲}{۳۲}} = \sqrt{\frac{۲۰}{۳۲}} = \sqrt{\frac{۱۰}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۴}$$

و یا

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۳۲ - ۱۲ = ۲۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۴\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}$$

۵) قطر بزرگ بیضی دو برابر قطر کوچک آن است. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ (کنکور سراسری تجربی ۷۵)

مثال) اگر فاصله کانونی یک بیضی و قطر کوچک آن را نصف کنیم خروج از مرکز بیضی جدید چند برابر می شود؟

۱) ۰/۵ برابر ۲) ۱ برابر ۳) ۲ برابر ۴) ۴ برابر

جواب : گزینه ۲ صحیح است. اگر خروج از مرکز بیضی $e = \frac{c}{a}$ باشد.

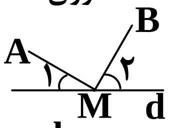
$$e' = \frac{c'}{a'} = \frac{\frac{۱}{۲}c}{\sqrt{b'^۲ + c'^۲}} = \frac{\frac{۱}{۲}c}{\sqrt{\frac{۱}{۴}b^۲ + \frac{۱}{۴}c^۲}} = \frac{\frac{c}{۲}}{\frac{\sqrt{b^۲ + c^۲}}{۲}} = \frac{c}{a} = e$$

مثال) خروج از مرکز بیضی که رأس های کانونی آن $A(۲/۵,۰)$ و $A'(-۲/۵,۰)$ و $F(۱/۵,۰)$ یک کانون آن باشد , کدام است؟

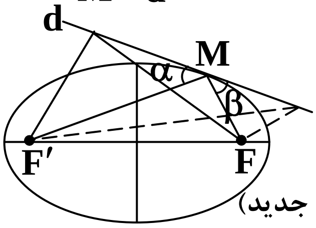
۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $a = ۲/۵$ و $c = ۱/۵ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۱/۵}{۲/۵} = \frac{۳}{۵}$

یادآوری : در پایه یازدهم دیدیم که کوتاه ترین مسیر از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و با عبور از خط d، از نقطه ای مانند M روی خط d می گذرد، به گونه ای که دو زاویه‌ی ایجاد شده $M_۱$ و $M_۲$ با هم برابرند.



فعالیت ۴ : فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد.



۱) مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲) دو زاویه‌ی α و β نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

۳) با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه‌ی داخلی یک بیضی آینه ای باشد و از یکی از کانون های بیضی اشعه‌ی نوری بربدنه‌ی داخلی بیضی تابیده شود،انعکاس نور ز کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟ (ص۴۷کتاب جدید)

مثال)مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت F و F' درآن صفحه برابر مقدار معین ۲ باشندکدام است؟

۱) بیضی ۲) یک پاره خط

۳) هیچ شکل حقیقی نیست ۴) بسته به طول $F'F$ می تواند هر کدام از گزینه های ۱ و ۲ و ۳ باشد.

جواب : گزینه ۴ صحیح است. اگر $F'F < ۲$ باشد مکان بیضی است. اگر $F'F = ۲$ باشد مکان یک پاره خط است. اگر $F'F > ۲$ هیچ شکل حقیقی حاصل نمی گردد.

۶) مکان هندسی مرکز دایره هایی که بر دو دایره‌ی متداخل مفروض با مراکز متمایز O و O' و شعاع های R و R' مماس داخل باشد کدام است؟

۱) بیضی به کانون های O و O' ۲) بیضی به رأس های O و O'

۳) دایره ۴) دایره ای به قطر OO' (کنکور آزاد ریاضی ۶۷)

مثال)نقاط $F(۴,۰)$ و $F'(-۴,۰)$ کانون ها و $M(۰,-۳)$ نقطه ای از یک بیضی می باشند طول کوچکترین قطر این بیضی کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

جواب : روش اوّل : $۲a = MF' + MF = ۲a = \sqrt{(-۴-۰)^۲ + (۰+۳)^۲} + \sqrt{(۴-۰)^۲ + (۰+۳)^۲} = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$

$۲c = F'F = ۸ \Rightarrow c = ۴ \Rightarrow b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow b = ۳ \Rightarrow ۲b = B'B = ۶$

روش دوم : گزینه ۲ صحیح است. $C(۰,۰)$ مرکز بیضی $\Rightarrow B = M(۰,-۳) \Rightarrow b = CB = ۳ \Rightarrow ۲b = B'B = ۶$

مثال) اگر مجموع فاصله های نقطه M از دو نقطه ثابت $F(۲,۰)$ و $F'(-۲,۰)$ برابر ۶ باشد، مختصات یکی از رأس های کانونی شکل حاصل برابر است با :

۱) $(۲,-۳)$ ۲) $(-۳,۰)$ ۳) $(۴,۰)$ ۴) $(۲,۳)$

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳$ و $C(\alpha,\beta) = (-۲+۲,۰) = (۰,۰)$ و $A'(\alpha - a,\beta) = (-۳,۰)$

نکته : کمترین و بیشترین فاصله‌ی یک نقطه از بیضی تا کانون ها (قانون اوّل کپلر) : مسیر حرکت سیاره ها به دورخورشیدیک بیضی است که خورشید در یکی از کانون های این بیضی قرار دارد کمترین و بیشترین فاصله‌ی سیاره ها از خورشید همان فاصله‌ی رئوس کانونی تا کانون ها می باشد که به ترتیب عبارتند از : $a - c$ و $a + c$

مثال) حاصل ضرب فاصله‌ی رأس کانونی یک بیضی از دو کانون بیضی کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}b$ ۲) $۲b$ ۳) $۲b^۲$ ۴) $b^۲$

جواب گزینه ۴ صحیح است. فاصله‌ی یک رأس بیضی از دو کانون $a - c$ و $a + c$ می باشد.

حاصل ضرب فاصله ها $= (a-c)(a+c) = a^۲ - c^۲ = b^۲$

مثال) اگر فاصله‌ی یک کانون تا نزدیکترین رأس به آن برابر ۲ باشد و فاصله‌ی کانون تا رأس ناکانونی برابر ۵ باشد، وتری که از کانون بیضی می گذرد و بر قطر کانونی آن عمود است، بیضی را در دو نقطه قطع می کند فاصله‌ی بین این دو نقطه کدام است؟

۱) ۳/۲ ۲) ۴/۸ ۳) ۶/۴ ۴) ۹/۶

جواب : گزینه ۳ صحیح است. فاصله‌ی کانون تا نزدیکترین رأس به آن $= a - c = ۲$

فاصله‌ی کانون تا رأس ناکانونی= $|BF| = a = ۵ \Rightarrow ۵ - c = ۲ \Rightarrow c = ۳$

$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow$ طول وتر کانونی $= \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲ \times ۱۶}{۵} \times \frac{۲}{۲} = ۶/۴$

۷) اگر $B(۱,۶)$ و $F(۴,۲)$ به ترتیب یک رأس ناکانونی و کانون یک بیضی افقی باشند، وتری که از کانون بیضی می گذرد و بر قطر کانونی آن عمود است، بیضی را در دو نقطه قطع می کند فاصله‌ی بین این دو نقطه کدام است؟

۱) ۱/۶   ۲) ۳/۲   ۳) ۴/۸   ۴) ۶/۴

مثال) اگر فاصله‌ی یک رأس کانونی بیضی از دو کانون آن بترتیب ۴ و ۱۴ باشند خروج از مرکز بیضی چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

جواب : گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases} a + c = ۱۴ \\ a - c = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۹ \\ c = ۵ \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۹}$$

۸) طول قطر کوچک بیضی $۴\sqrt{۲}$ و فاصله‌ی کانون تا نزدیکترین رأس , ۲ واحد است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$ (کنکور سراسری ریاضی ۷۴)

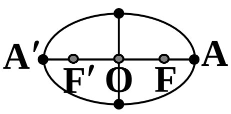
مثال) در یک بیضی، فاصله‌ی یک کانون از دورترین نقطه‌ی بیضی، سه برابر فاصله‌ی همان کانون از نزدیکترین نقطه‌ی بیضی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$ (کنکور سراسری ریاضی ۷۹)

جواب : گزینه ۳ درست است.

$$a + c = ۳(a - c) \Rightarrow ۴c = ۲a \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۲}{۴} \Rightarrow e = \frac{۱}{۲}$$

مثال) در بیضی شکل مقابل، $OF = ۴$ و $F'A = ۸$ خروج از مرکز این بیضی کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

جواب گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{cases} c = OF = ۴ \\ F'A = ۸ \Rightarrow F'O + OA = c + a = ۸ \end{cases} \Rightarrow a = ۵ \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

۹) نقاط F و F'، کانون های یک بیضی و M نقطه ای روی آن بیضی است. اگر $MF = ۸$، $MF' = ۶$ و MF بر MF' عمود باشد، خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۷}$ ۲) $\frac{۶}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

مثال)چندنقطه روی محیط دایره $x^۲ + y^۲ = ۱۶$ وجوددارد که مجموع فواصل آنها از دو نقطه $A(۳,۰)$ و $B(-۳,۰)$ برابر ۱۰ باشد.

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) صفر   ۴) ۱   (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۰)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه‌ی ثابت $A(۳,۰)$ و $B(-۳,۰)$ در آن صفحه مقدار مثبت و ثابت ۱۰ باشد بیضی به مرکز مبدأ مختصات و به معادله‌ی زیر است.

$$۲c = FF = AB = ۶ \Rightarrow c = ۳ \text{ و } ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵ \Rightarrow b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow \frac{x^۲}{۲۵} + \frac{y^۲}{۱۶} = ۱$$

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۱۶ \\ \frac{x^۲}{۲۵} + \frac{y^۲}{۱۶} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۱۶ \\ \frac{x^۲}{۲۵} + \frac{۱۶ - x^۲}{۱۶} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ y^۲ = ۱۶ \Rightarrow y = \pm ۴ \end{cases}$$

نقاط برخورد عبارتند از : $\Rightarrow E(۰,۴)$ و $E'(۰,-۴)$

روش دوم : مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطه‌ی ثابت $A(۳,۰)$ و $B(-۳,۰)$ در آن صفحه مقدار مثبت و ثابت ۱۰ باشد بیضی به مرکز مبدأ مختصات است.

$$۲c = FF = AB = ۶ \Rightarrow c = ۳ \text{ و } ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵ \Rightarrow b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow b = ۴$$

چون $b = ۴ = R$ پس دایره و بیضی در دو نقطه بر هم مماس اند. (هندسه ۳ دوازدهم ۹۸-۹۷)

۱۰) چند نقطه روی محورهای مختصات وجود دارد که مجموع فواصلشان از دو نقطه $F(۱,۲)$ و $F'(-۴,۲)$ برابر ۶ باشد؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۴   (کنکور آزاد تجربی ۸۶)

۱۱) مختصات کانون F یک بیضی با عرض مثبت که بر چهار خط $x = -۱$, $x = ۵$, $y = -۴$ و $y = ۶$ مماس باشد , کدام است؟

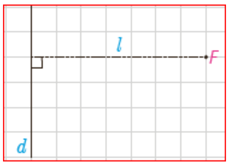
۱) $(۲,۵)$ ۲) $(۲,۳)$ ۳) $(۱,۵)$ ۴) $(۱,۳)$ (کنکور سراسری تجربی ۷۵)

مثال) یک بیضی افقی ($F'F$ موازی محور x ها است) در نقاط $(۴,۰)$ و $(۰,۲)$ بر محورهای مختصات مماس است. فاصله کانونی بیضی چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $a = ۴$ و $b = ۲$ و $۲c = F'F = ۲\sqrt{a^۲ - b^۲} = ۲\sqrt{۱۶ - ۴} = ۴\sqrt{۳}$

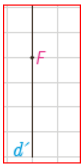
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۳	۱	۳	۱	۳	۱	۴	۱	۱	۳	۱									



فعالیت ۵ : یک خط d ثابت مانند و یک نقطه‌ی ثابت مانند F خارج آن در نظر بگیرید و فرض کنید فاصله‌ی F از خط d برابر l باشد.

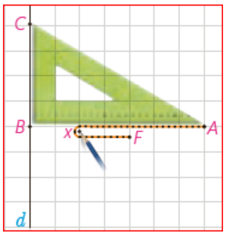
یک نقطه بیابید که فاصله‌ی آن از خط d و نقطه‌ی F یکسان باشد.

آیا می توانید نقطه‌ی دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از نقطه‌ی F خطی موازی خط d رسم کنید و آن را d' بنامید.

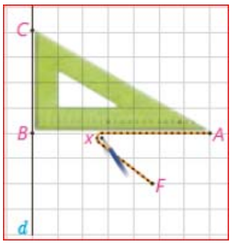


تمام نقاط واقع بر خط d' فاصله شان از خط d برابر l است. حال توضیح دهید چگونه می توانید نقاطی بر خط d' بیابید که از نقطه‌ی F و خط d به یک فاصله باشد.

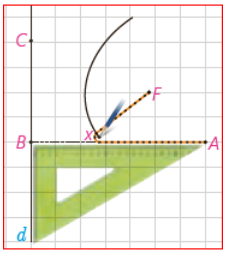
اگر مسئله پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که فاصله‌ی یکسانی از خط d و نقطه‌ی F قرار دارند، آیا می توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط مورد نظر ارائه می گردد.



فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا مانند شکل به نام های A، B و C باشند. یک سر تکه نخ به طول AB را در رأس A از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطه‌ی F ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع BC بر خط d واقع باشد و نقطه‌ی F بر ضلع AB قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به گونه ای به نخ گیر دهید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشد. در این حالت فاصله‌ی نقطه ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط d و از نقطه‌ی F نسبت به هم چگونه است؟



حال در حالتی که ضلع BC کماکان بر خط d واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع BC چسبیده باشد و هر دو تکه‌ی نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطه‌ی در حال حرکت نوک مداد را در هر حالت با X نمایش دهیم. پاره خط های BX و FX هر کدام نمایانگر چه خصوصیتی از نقطه‌ی X هستند و بین آنها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟

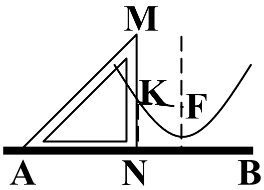


توضیح دهید که با ادامه این کار نقاطی که توسط مداد رسم می شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟

(دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع BC بر خط d در هر دو طرف نقطه‌ی F می توان حرکت داد.)

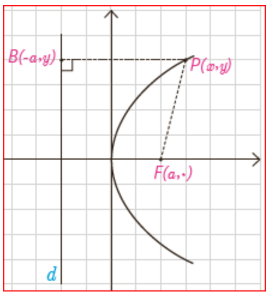
شکل حاصل از فعالیت قبل سهمی نام دارد. در این حالت نقطه‌ی F را کانون سهمی و خط d را خط هادی سهمی می نامیم و اگر از F بر d خطی عمود رسم کنیم سهمی را در نقطه ای قطع می کند که به آن رأس سهمی می گوییم.   (ص۵۰کتاب جدید)

سهمی : مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.



طریقه‌ی رسم سهمی یک تکه نخ و گونیا : خط کشی مانند AB به عنوان هادی در نظر گرفته و یک تکه نخ به اندازه‌ی طول یک ضلع MN از یک گونیا را نیز انتخاب می کنیم یک سر نخ را در نقطه‌ی M ثابت می کنیم و سردیگر را در نقطه‌ی F، یعنی کانون سهمی. مداد را مطابق شکل در یک نقطه‌ی K قرار داده به طوری که تکه نخ بین نقاط F، K و M محکم قرار گرفته باشد. با لغزاندن گونیا در امتداد AB نوک مداد یک سهمی را رسم می کند.

فعالیت ۶ : ۱) فرض کنید نقطه‌ی $F(a,۰)$، که در آن a مثبت است، کانون سهمی و خط هادی d موازی محور y ها به معادله‌ی $x=-a$ باشد و نقطه‌ی $P(x,y)$ نقطه ای دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم : $|PF|=|PB|$. چرا؟

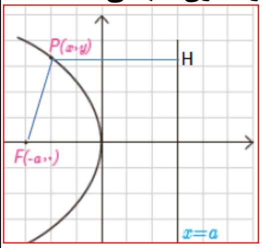


بنابراین $\sqrt{(x-a)^۲+(y-۰)^۲}=\sqrt{(x+a)^۲+(y-y)^۲}$

با به توان۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارت خواهیم داشت : $y^۲=۴ax$

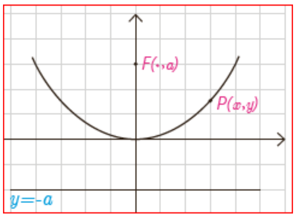
دقت کنید که a برابر با فاصله‌ی کانون تا رأس سهمی و همچنین فاصله‌ی رأس سهمی تا خط هادی است و فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر $۲a$ است. در این حالت عدد مثبت a را فاصله‌ی کانونی سهمی می نامند

و چنان که دیده می شود خطی که از کانون به خط هادی سهمی عمود می شود که در اینجا محور x هاست محور تقارن سهمی است که به آن محور کانونی سهمی یا محور سهمی هم می گوییم.



۲) در حالتی که خط هادی سهمی موازی محور y ها به معادله‌ی $x = a$ باشد ولی کانون $F(-a,0)$ در سمت چپ آن قرار داشته باشد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله‌ی سهمی به صورت $y^2 = -4ax$ است. در این حالت محور x ها محور سهمی است.

۳) در حالتی که خط هادی d موازی محور x ها به معادله‌ی $y = -a$ و کانون $F(0,a)$ در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله‌ی سهمی به صورت $x^2 = 4ay$ است.



در این حالت محور y ها محور سهمی است.

(در واقع این معادله همان $y = \frac{1}{4a}x^2$ که در پایه‌ی دهم به عنوان معادله‌ی سهمی با آن آشنا شدید.)

۴) در حالتی که خط هادی d موازی محور x ها به معادله‌ی $y = a$ و کانون $F(0,-a)$ در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادله‌ی سهمی به صورت $x^2 = -4ay$ است.

در این حالت محور ها محور سهمی است.   (ص۵۱و۵۲کتاب جدید)

مطالب فوق در باره‌ی سهمی با رأس واقع در مبدأ مختصات را می توان در جدول زیر خلاصه کرد.

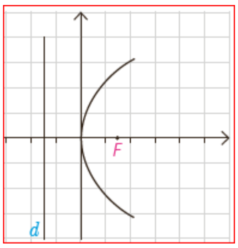
(ص۵۲کتاب جدید)

دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی ($a>0$)
رو به راست	محور x	$x=-a$	$(a,0)$	$y^2=4ax$
رو به چپ	محور x	$x=a$	$(-a,0)$	$y^2=-4ax$
رو به بالا	محور y	$y=-a$	$(0,a)$	$x^2=4ay$
رو به پایین	محور y	$y=a$	$(0,-a)$	$x^2=-4ay$

مثال : معادله‌ی $y^2 = 6x$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص کنید؟

حل : این معادله‌ی یک سهمی است که دهانه‌ی آن رو به راست است و محور آن محور x هاست.

با قرار دادن $4a = 6$ داریم $a = \frac{3}{2}$. لذا کانون آن $F(\frac{3}{2},0)$ و خط هادی آن موازی محور y ها و به معادله‌ی $x = -\frac{3}{2}$ است و رأس آن مبدأ مختصات است. شکل تقریبی آن به صورت مقابل است.

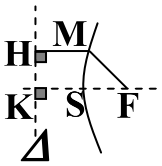


انتقال (محورها) : دیدیم که معادله‌ی $y^2 = 4ax$ یک سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات، کانون آن $F(a,0)$، خط هادی آن موازی محور yها به معادله‌ی $x=-a$، محور آن محور xها (خط $y=0$) و دهانه‌ی آن رو به راست است. حال با توجه به آنچه در باره‌ی انتقال می دانیم می توان گفت معادله‌ی $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ معادله‌ی همان سهمی است که به اندازه‌ی h به سمت راست (در صورت منفی بودن h به سمت چپ) و به اندازه‌ی k به سمت بالا (در صورت منفی بودن k به سمت پایین) انتقال یافته است. لذا رأس آن به مختصات (h,k)، کانون آن $F(a+h,k)$، خط هادی آن موازی محور yها به معادله $x=-a+h$، محور آن خط $y=k$ و دهانه‌ی آن کماکان رو به راست است. (ص۵۳کتاب جدید)

دهانهٔ سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادلهٔ سهمی
رو به راست	خط $y=k$	$x=-a+h$	$(a+h\ ,k)$	$(y-k)^2 = 4a(x-h)$
رو به چپ	خط $y=k$	$x=a+h$	$(-a+h\ ,k)$	$(y-k)^2 = -4a(x-h)$
رو به بالا	خط $x=h$	$y=-a+k$	$(h,\ a+k)$	$(x-h)^2 = 4a(y-k)$
رو به پایین	خط $x=h$	$y=a+k$	$(h,-a+k)$	$(x-h)^2 = -4a(y-k)$

۱) چند نقطه روی سهمی وجود دارد که از رأس و کانون به یک فاصله باشد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار



سهمی : مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت Δ در آن صفحه و یک نقطه ثابت F خارج از Δ و در آن صفحه به‌یک فاصله باشند، نقطه ثابت F را کانون و خط ثابت Δ را خط هادی سهمی می نامیم.

نکته : اگر از نقطه‌ی M روی سهمی عمود MH را بر خط هادی رسم کنیم داریم : $MF = MH$

محور کانونی سهمی : خطی که از کانون سهمی می گذرد و بر خط هادی آن عمود است را محور کانونی سهمی می نامیم. می توان ثابت کرد که محور سهمی، محور تقارن آن می باشد.

رأس سهمی : محور سهمی شاخه‌ی سهمی را در نقطه ای مانند S قطع می کند که به آن رأس سهمی می گویند. اگر محور کانونی سهمی خط هادی را در نقطه‌ی K قطع کند، نقطه‌ی S رأس سهمی وسط پاره خط FK قرار دارد.

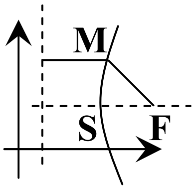
نکته : هر چه دهانه‌ی سهمی بازتر شود کانون دورتر از رأس سهمی است.

نوع سهمی :

الف : هرگاه محور سهمی موازی محور طول ها باشد (یا خط هادی سهمی موازی محور عرض ها باشد) سهمی را افقی می نامیم.

ب : هرگاه محور سهمی موازی محور عرض ها باشد (یا خط هادی سهمی موازی محور طول ها باشد) سهمی را قائم می نامیم.

مختصات کانون و خط هادی و معادله‌ی محور تقارن و معادله سهمی :



الف : هرگاه $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی افقی باشد آنگاه $F\left|\begin{matrix}\alpha + a\\ \beta\end{matrix}\right.$ (کانون) و $x = \alpha - a$ (خط هادی) و $y=\beta$ (محور تقارن) و $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$ (معادله‌ی سهمی) و a پارامتر سهمی می باشد.

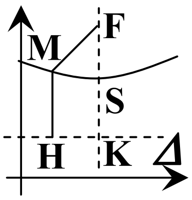
تذکر : اگر $0 < a$ باشد دهانه‌ی سهمی به طرف راست و اگر $a < 0$ باشد، دهانه‌ی سهمی به طرف چپ خواهد بود.

تذکر : در سهمی افقی متغیر x از درجه‌ی یک و متغیر y از درجه‌ی دو می باشد.

حالت خاص : هرگاه $S(0,0)$ رأس سهمی افقی باشد آنگاه $F\left|\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right.$ (کانون) و $x = -a$ (خط هادی) و $y = 0$ (محور تقارن) و

$y^2 = 4ax$ (معادله‌ی سهمی) و a پارامتر سهمی می باشد.

ب : هرگاه $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی قائم باشد آنگاه $F\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta + a \end{matrix}\right.$ (کانون) و $y = \beta - a$ (خط هادی) و $x = \alpha$ (محور تقارن) و



$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$ (معادله‌ی سهمی) و a پارامتر سهمی می باشد.

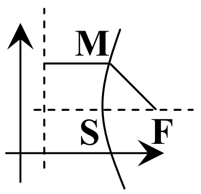
تذکر : اگر $0 < a$ باشد دهانه‌ی سهمی به طرف بالا و اگر $a < 0$ باشد، دهانه‌ی سهمی به طرف پایین خواهد بود.

تذکر : در سهمی قائم متغیر y از درجه‌ی یک و متغیر x از درجه‌ی دو می باشد.

حالت خاص : هرگاه $S(0,0)$ رأس سهمی قائم باشد آنگاه $F\left|\begin{matrix} 0 \\ a \end{matrix}\right.$ (کانون) و $y = -a$ (خط هادی) و $x = 0$ (محور تقارن) و

$x^2 = 4ay$ (معادله‌ی سهمی) و a پارامتر سهمی می باشد.

مختصات کانون و خط هادی و معادله‌ی محور تقارن و معادله سهمی :



الف : هرگاه $S(h,k)$ رأس سهمی افقی باشد آنگاه $F\left|\begin{matrix} h + a \\ \beta \end{matrix}\right.$ (کانون) و $x = h - a$ (خط هادی)

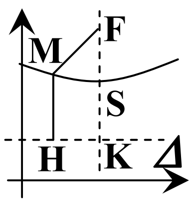
و $y = k$ (محور تقارن) و $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ (معادله‌ی سهمی) و a پارامتر سهمی می باشد.

تذکر : اگر $0 < a$ باشد دهانه‌ی سهمی به طرف راست و اگر $a < 0$ باشد، دهانه‌ی سهمی به طرف چپ خواهد بود.

تذکر : در سهمی افقی متغیر x از درجه‌ی یک و متغیر y از درجه‌ی دو می باشد.

حالت خاص : هرگاه $S(0,0)$ رأس سهمی افقی باشد آنگاه $F\left|\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right.$ (کانون) و $x = -a$ (خط هادی) و $y = 0$ (محور تقارن) و

$y^2 = 4ax$ (معادله‌ی سهمی) و a پارامتر سهمی می باشد.



ب : هرگاه $S(h,k)$ رأس سهمی قائم باشد آنگاه $F\left|\begin{matrix} h \\ k + a \end{matrix}\right.$ (کانون) و $y = k - a$ (خط هادی)

و $x = h$ (محور تقارن) و $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ (معادله‌ی سهمی) و a پارامتر سهمی می باشد.

تذکر : اگر $0 < a$ باشد دهانه‌ی سهمی به طرف بالا و اگر $a < 0$ باشد، دهانه‌ی سهمی به طرف پایین خواهد بود.

تذکر : در سهمی قائم متغیر y از درجه‌ی یک و متغیر x از درجه‌ی دو می باشد.

حالت خاص : هرگاه $S(0,0)$ رأس سهمی قائم باشد آنگاه $F\left|\begin{matrix} 0 \\ a \end{matrix}\right.$ (کانون) و $y = -a$ (خط هادی) و $x = 0$ (محور تقارن) و

$x^2 = 4ay$ (معادله‌ی سهمی) و a پارامتر سهمی می باشد.

مثال) در سهمی گذرا از نقطه‌ی $M(۴,۴)$ که خطوط $y=۲$ و $x=۲$ به ترتیب محور کانونی و خط هادی سهمی می باشند، کوتاه ترین فاصله بین نقاط سهمی و خط هادی آن چقدر است؟

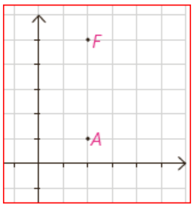
۱) ۰/۵   ۲) ۲   ۳) ۱/۵   ۴) ۱

جواب : گزینه ۴ صحیح است. چون محور کانونی بر حسب y می باشد پس سهمی افقی است درنتیجه :

$$F\left|\begin{array}{l}\alpha + a = a + ۲ + a = ۲a + ۲ \\ \beta = ۲\end{array}\right.$$ و خط هادی $x = \alpha - a = ۲ \Rightarrow \alpha = a + ۲$ و محور کانونی $y = \beta = ۲$

$$MF = MH \Rightarrow \sqrt{(۲a + ۲ - ۴)^۲ + (۲ - ۴)^۲} = |۴ - ۲| \Rightarrow (۲a - ۲)^۲ + ۴ = ۴ \Rightarrow a = ۱$$

مثال : معادله‌ی سهمی به رأس $A(۲,۱)$ و کانون $F(۲,۵)$ را بیابید و معادله‌ی خط هادی آن را بنویسید.



حل : با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت :

۱) $a = ۴$ (چرا؟)

۲) معادله خط هادی آن $y = -۳$ است. چرا؟

۳) دهانه سهمی رو به بالاست. چرا؟

لذا معادله آن به صورت $(x-h)^۲ = ۴a(y-k)$ است و خواهیم داشت : $(x-۲)^۲ = ۱۶(y-۱)$ (ص۵۳کتاب جدید)

۲) نقطه‌ی $S(-۱/۶,-۱)$، رأس سهمی است. هر پرتو که موازی محور x ها بر این سهمی بتابد، به نقطه‌ی $(-۰/۹,-۱)$ باز می تابد. این سهمی محور y ها را با کدام عرض، قطع می کند؟

۱) ۴، ۶-   ۲) ۳، ۵-   ۳) ۲، ۴-   ۴) ۰، ۲-   (کنکور سراسری تجربی ۹۴ خارج از کشور)

۳) اگر مرکز دایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ کانون یک سهمی قائم رو به بالا باشد و دایره در رأس سهمی به آن مماس باشد معادله سهمی کدام است؟

۱) $x^۲ = ۴(y-۱)$ ۲) $(x-۱)^۲ = ۴y$ ۳) $x^۲ = ۴(y+۱)$ ۴) $(x+۱)^۲ = ۴y$

مثال) سهمی به مختصات رأس $(۴,۱)$ و مختصات کانون $(۴,۰)$، محور x ها را در دو نقطه‌ی A و B قطع می کند، طول پاره خط AB کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۴   ۳) ۲   ۴) ۱

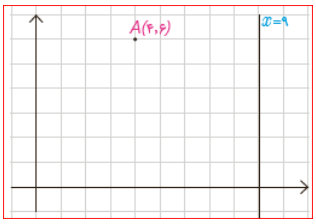
جواب : گزینه ۲ صحیح است. نوع سهمی قائم و تقعر آن رو به پایین است.

$$a = y_F - y_S = ۰ - ۱ = -۱ \Rightarrow (x-\alpha)^۲ = ۴a(y-\beta) \Rightarrow (x-۴)^۲ = ۴(-۱)(y-۱) \Rightarrow$$

$$x^۲ - ۸x + ۴y + ۱۲ = ۰ \xrightarrow{y=۰} (x-۶)(x-۲) = ۰ \Rightarrow x-۶=۰ \Rightarrow x=۶ \text{ یا } x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

$$A(۶,۰) \text{ یا } B(۲,۰) \Rightarrow AB = \sqrt{(۲-۶)^۲ + (۰-۰)^۲} = ۴ \ (\text{ویا } |x_۲ - x_۱| = |۶-۲| = ۴)$$

مثال : مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس $A(۴,۶)$ و خط هادی $x = ۹$ بنویسید.



حل : با توجه به جایگاه رأس و خط هادی سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت :

۱) $a = ۵$ چرا؟

۲) کانون آن به مختصات $F(-۱,۶)$ است، چرا؟

۳) دهانه سهمی رو به چپ است. چرا؟

لذا معادله آن به صورت است $(y-k)^۲ = -۴a(x-h)$ و خواهیم داشت : $(y-۶)^۲ = -۲۰(x-۴)$ (ص۵۴کتاب جدید)

مثال) سهمی که رأس آن $(۱,۱)$ و خط هادی $y = ۵$ است. محور x ها را در دو نقطه قطع می کند فاصله این دو نقطه کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۹۰)

جواب : گزینه۰ صحیح است. روش اوّل : طبق تعریف، سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن ها از یک نقطه‌ی ثابت (کانون سهمی)، برابر با فاصله‌ی آن ها از یک خط ثابت (خط هادی سهمی) باشد، پس : $\beta < ۱$ و $S(۱,۱)$ و $y = ۵ \Rightarrow F(۱,\beta)$

$$M(x,y) \in \text{سهمی} \Rightarrow MF = ML \Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-\beta)^۲} = |y-۵| \xrightarrow{(۱,۱)} ۱-\beta = \pm ۴$$

$$\Rightarrow \beta = ۵ \text{ غ ق ق و } \beta = -۳ \Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲ + (y+۳)^۲} = |y-۵| \Rightarrow (x-۱)^۲ = -۱۶(y-۱)$$

$$\xrightarrow{y=۰} x-۱ = \pm ۴ \Rightarrow A(-۳,۰) \text{ و } B(۵,۰) \Rightarrow AB = |x_۲ - x_۱| = |۵-(-۳)| = ۸$$

روش دوم : $S(\alpha=۱,\beta=۱), y=۵ \Rightarrow \beta - a = ۵ \Rightarrow ۱-a=۵ \Rightarrow a=-۴ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۴(-۴)(y-۱)$

$\xrightarrow{y=۰} x-۱=\pm ۴ \Rightarrow A(-۳,۰) \text{ و } B(۵,۰) \Rightarrow AB = |x_۲ - x_۱| = |۵-(-۳)| = ۸$ بنابراین هر ۴ گزینه غلط است.

مثال) مختصات کانون سهمی به معادله‌ی $y^۲ - ۴y + ۴x = ۰$ کدام است؟

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۱,۳)$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $(۰,۴)$ (کنکور سراسری ریاضی ۷۴)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.   رأس سهمی افقی $y^۲ - ۴y + ۴x = ۰ \Rightarrow (y-۲)^۲ = -۴(x-۱) \Rightarrow S(\alpha=۱,\beta=۲)$

$۴a = -۴ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow F(\alpha+a,\beta) = (۰,۲)$

۴) مختصات رأس سهمی که کانون آن $F(۳,۵)$ و معادله خط هادی آن $x = -۳$ باشد، کدام است؟

۱) $(-۳,۳)$ ۲) $(-۳,۵)$ ۳) $(۰,۵)$ ۴) $(۳,۰)$ (کنکور سراسری تجربی۸۰)

مثال) تمام دایره های به مرکز $M(x,y)$ واقع بر سهمی به معادله‌ی $y^۲ + ۸y - ۸x = ۰$ گذرنده بر کانون آن، بر کدام خط ثابت همواره مماس هستند؟

۱) $y = -۶$ ۲) $y = -۲$ ۳) $x = -۴$ ۴) $x = ۰$

جواب : گزینه ۳ درست است. چون مکان هندسی مرکز دایره هایی که از نقطه‌ی ثابت F غیر واقع بر خط δ گذشته و بر خط δ مماس باشد یک سهمی است پس باید معادله‌ی خط هادی سهمی را به دست آوریم. $\Rightarrow y^۲ + ۸y + ۱۶ - ۸(x+۲) = ۰$

$\Rightarrow (y+۴)^۲ = ۸(x+۲) \Rightarrow S(\alpha = -۲, \beta = -۴)$ و $۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow x = \alpha - a = -۲ - ۲ = -۴$

۵) سهمی با کانون $F(۲,۳)$ و خط هادی به معادله‌ی $x = -۴$، محور x ها را با کدام طول، قطع می کند؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$ (کنکور سراسری تجربی۹۶خارج از کشور)

مثال) سهمی با کانون $F(۱,۱)$ و خط هادی به معادله‌ی $x = ۳$، محور yها را در دو نقطه‌ی A و B قطع می کند، طول پاره خط AB، چه قدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۵ (کنکور سراسری ریاضی ۸۳)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. چون معادله‌ی خط هادی $x = ۳$ است پس سهمی افقی می باشد.

روش اوّل : طبق تعریف، سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آنها از یک نقطه‌ی ثابت (کانون سهمی)، برابر با فاصله‌ی آنها از یک خط ثابت (خط هادی سهمی) باشد، پس :

$M(x,y) \in \text{سهمی} \Rightarrow MF = ML \Rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۱)^۲} = |x-۳| \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۴(x-۲)$

$\xrightarrow{x=۰} (y-۱)^۲ = ۸ \Rightarrow y = ۱ \pm ۲\sqrt{۲} \Rightarrow A(۰, ۱-۲\sqrt{۲})$ و $B(۰, ۱+۲\sqrt{۲}) \Rightarrow AB = \sqrt{۰ + ۳۲} = ۴\sqrt{۲}$

روش دوم : رأس سهمی وسط فاصله‌ی کانون از خط هادی سهمی است پس : $S(\alpha = ۲, \beta = ۱)$ از طرفی کانون سمت چپ خط هادی واقع است پس سهمی افقی و $a < ۰$ است. $|۲a| = FH = ۴ \Rightarrow a = -۱$

و درنتیجه : $(y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha) \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۴(x-۲)$

$\xrightarrow{x=۰} (y-۱)^۲ = ۸ \Rightarrow y = ۱ \pm ۲\sqrt{۲} \Rightarrow A(۰, ۱-۲\sqrt{۲})$ و $B(۰, ۱+۲\sqrt{۲}) \Rightarrow AB = \sqrt{۰ + ۳۲} = ۴\sqrt{۲}$

روش سوم : $a = \frac{x_F - x_L}{۲} = \frac{۱-۳}{۲} = -۱$ و $S(\frac{x_F + x_L}{۲}, y_F) = (\frac{۱+۳}{۲}, ۱) = (۲,۱)$

و درنتیجه : $(y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha) \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۴(x-۲)$

$\xrightarrow{x=۰} (y-۱)^۲ = ۸ \Rightarrow y = ۱ \pm ۲\sqrt{۲} \Rightarrow A(۰, ۱-۲\sqrt{۲})$ و $B(۰, ۱+۲\sqrt{۲}) \Rightarrow AB = \sqrt{۰ + ۳۲} = ۴\sqrt{۲}$

روش چهارم : $F\left|\begin{array}{l}\alpha + a = ۱\\ \beta = ۱\end{array}\right.$ و $x = \alpha - a = ۳$ و $\begin{cases}\alpha + a = ۱\\ \alpha - a = ۳\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = ۲\\ a = -۱\end{cases} \Rightarrow (y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha) \Rightarrow$

و درنتیجه : $(y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha) \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۴(x-۲)$

$\xrightarrow{x=۰} (y-۱)^۲ = ۸ \Rightarrow y = ۱ \pm ۲\sqrt{۲} \Rightarrow A(۰, ۱-۲\sqrt{۲})$ و $B(۰, ۱+۲\sqrt{۲}) \Rightarrow AB = \sqrt{۰ + ۳۲} = ۴\sqrt{۲}$

نکته : فاصله‌ی کانون سهمی از خط هادی آن برابر است با : $|2a|$

مثال) دهانه سهمی به معادله $y^2 + a(x-y) = 0$ رو به راست باز می شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است، مختصات رأس این سهمی کدام است؟

۱) $(-1,-2)$ ۲) $(0,-2)$ ۳) $(0,-1)$ ۴) $(1,2)$

جواب : گزینه۱ درست.روش اوّل : فاصله کانون تا خط هادی آن را $2A$ می نامیم. $2A = 2 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y^2 + 4y - 4x = 0$

$f'_y = 0 \Rightarrow 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$ و $4 - 8 - 4x = 0 \Rightarrow x = -1$ و $S(-1,-2)$

روش دوم : $2A = 2 \Rightarrow A = 1$ و $(y - \frac{a}{2})^2 = -a(x - \frac{a}{4}) \Rightarrow a = -4$ و $S(\frac{a}{4},\frac{a}{2}) = (-1,-2)$

۶) دهانه سهمی به معادله $y^2 + a(x-y) = 0$ رو به راست باز می شود و فاصله کانون تا خط هادی آن ۲ واحد است، مختصات کانون این سهمی کدام است؟

۱) $(-1,-2)$ ۲) $(0,-2)$ ۳) $(0,-1)$ ۴) $(1,2)$ (کنکور سراسری تجربی ۸۲)

۷) فاصله کانون از خط هادی سهمی $(x+1)^2 = y + x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲ (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۶)

مثال) محور تقارن یک سهمی با رأس $(-1,3)$ موازی محور x ها است. اگر این سهمی از نقطه‌ی $(5,9)$ بگذرد، فاصله‌ی کانون تا خط هادی آن، کدام است؟

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴ (کنکور سراسری تجربی۹۶)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. چون طول رأس سهمی از طول نقطه روی سهمی کوچکتر و محور تقارن سهمی موازی محور طول هاست پس سهمی افقی و دهانه آن به راست باز می شود. $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$

$$\Rightarrow (y-3)^2 = 4a(x+1) \xrightarrow{(5,9)} (9-3)^2 = 4a(5+1) \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow |2a| = 3$$

مثال) خط به معادله‌ی $y = 1$ محور تقارن و خط $x = 2$ خط هادی در یک سهمی اند. اگر این سهمی از نقطه‌ی $(3,2)$ بگذرد، فاصله‌ی کانون تا خط هادی آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲ (کنکور سراسری تجربی ۸۳)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. خط $y = 1$ محور تقارن (کانونی) و سهمی از نقطه‌ی $M(3,2)$ در سمت راست خط هادی می گذرد. پس سهمی افقی و دهانه‌ی آن به راست باز می شود یعنی $a > 0$ است.

$$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha) \Rightarrow (y-1) = 4a(x-\alpha) \xrightarrow{M} (2-1)^2 = 4a(3-\alpha) \Rightarrow 1 = 4a(3-\alpha) \quad (1)$$

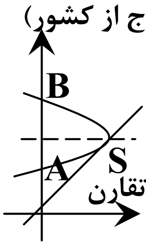
$$x = \alpha - a = 2 \Rightarrow \alpha = a + 2 \xrightarrow{(1)} 1 = 4a(3-a-2) \Longrightarrow 4a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow |2a| = 1$$

۸) فاصله‌ی کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور yها را در دو نقطه به عرض های ۱ و ۵- قطع می کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$ (کنکور سراسری ریاضی ۹۴ خارج از کشور)

مثال) یک سهمی محور که محور تقارن آن موازی محورهای مختصات است، محور yها را در دو نقطه‌ی به عرض های ۱ و ۵ قطع می کند و رأس آن بر روی نیمساز ناحیه‌ی اوّل است. فاصله‌ی کانون سهمی تا خط هادی، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$ (کنکور سراسری ریاضی ۹۲ خارج از کشور)



جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : با توجه به شکل برای تعیین عرض رأس سهمی که محور عرض ها را در دو نقطه‌ی $A(۰,۱)$ و $B(۰,۵)$ قطع کرده و بر روی نیمساز ناحیه‌ی اوّل واقع است. بهترین روش، رسم شکل سهمی در دستگاه مختصات است. با توجه به نمودار مقابل، چون دو نقطه‌ی A و B دو نقطه‌ی هم طول روی این سهمی اند. معادله‌ی محور تقارن سهمی برابر $y=\frac{۱+۵}{۲}=۳$ می باشد. در نتیجه مختصات رأس سهمی $S(۳,۳)$ است و با توجه به معادله‌ی سهمی افقی داریم :

$$(y-۳)^۲=۴a(x-۳)\Rightarrow(۵-۳)^۲=۴a(۰-۳)\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow|۲a|=\frac{۲}{۳}\ \text{(فاصله‌ی کانون سهمی تا خط هادی)}$$

روش دوم : رأس سهمی بر روی نیمساز ناحیه‌ی اوّل واقع است پس $\alpha>۰$ و $S(\alpha,\alpha)$ با توجه به معادله‌ی سهمی افقی داریم :

$$(y-\alpha)^۲=۴a(x-\alpha)\Rightarrow\begin{cases}A(۰,۱)\Rightarrow(۱-\alpha)^۲=۴a(۰-\alpha)\\ B(۰,۵)\Rightarrow(۵-\alpha)^۲=۴a(۰-\alpha)\end{cases}\Rightarrow(۱-\alpha)^۲=(۵-\alpha)^۲\Rightarrow$$

$$\begin{cases}۱-\alpha=۵-\alpha\Rightarrow ۱=۵\ \otimes\\ ۱-\alpha=\alpha-۵\Rightarrow\alpha=۳\end{cases}\Rightarrow(۱-۳)^۲=۴a(۰-۳)\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow|۲a|=\frac{۲}{۳}\ \text{(فاصله‌ی کانون سهمی تاخط هادی)}$$

۹)معادله‌ی دایره ای که مرکز آن کانون سهمی به معادله‌ی $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+۲$ و مماس بر خط هادی این سهمی باشد، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۶x+۴y+۱۲=۰$ ۲) $x^۲+y^۲-۴x+۶y+۸=۰$

۳) $x^۲+y^۲+۶x-۴y+۵=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-۶x+۳y+۹=۰$

(کنکور سراسری ریاضی۸۴خارج از کشور)

مثال : معادله یک سهمی به صورت $y = x^۲ + ۳x + ۵$ داده شده است. آن را به یکی از حالت های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.

حل : داریم : $y = x^۲ + ۳x + ۵ \Rightarrow y = x^۲ + ۳x + (\frac{۳}{۲})^۲ = y - ۵ + \frac{۹}{۴} \Rightarrow (x + \frac{۳}{۲})^۲ = y - \frac{۱۱}{۴}$

لذا معادله‌ی یک سهمی است که دهانه آن رو به بالا، رأس آن $(-\frac{۳}{۲}, \frac{۱۱}{۴})$ و $۴a = ۱$ و درنتیجه $a = \frac{۱}{۴}$ است.

بنابراین $F = (h, a + k) = (-\frac{۳}{۲}, ۳)$ کانون آن و خط هادی آن به معادله $y = -a + k = \frac{۵}{۲}$ است.

معادله محور سهمی به صورت $x = h = -\frac{۳}{۲}$ است.

نکته : معادله‌ی گسترده (کلی) سهمی : معادله‌ی $Ax^۲ + Bx + Cy + D = ۰$ و $Ay^۲ + By + Cx + D = ۰$ باشرط $AC \neq ۰$ معادله‌ی یک سهمی می باشد که به آن معادله‌ی گسترده‌ی (کلی) سهمی می گویند. برای استاندارد کردن معادله‌ی یک سهمی : مراحل زیر را انجام می دهیم : ۱) دسته بندی و فاکتورگیری از ضریب متغیر درجه ۲ ۲) تبدیل به مربع کامل

نکته : اگر در معادله سهمی مشتق جزئی نسبت به متغیر درجه دوم بگیریم معادله‌ی محور تقارن سهمی حاصل می شود.

نکته : سهمی با هر کدام از اطلاعات زیر مشخص می شود :

الف : معلوم بودن حداقل دو تا از سه مورد کانون و رأس و خط هادی. ب : معلوم بودن سه نقطه‌ی متمایز روی سهمی

نکته :روش سریعتر برای تعیین رأس و پارامتر سهمی : وقتی معادله به صورت ضمنی باشد، a پارامتر سهمی برابر منهای ضریب جمله ای که معادله نسبت به آن درجه‌ی اوّل است تقسیم بر چهار برابر ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم است. به عبارت دیگر در سهمی های $Ax^۲ + Bx + Cy + D = ۰$ و $Ay^۲ + By + Cx + D = ۰$ داریم : $a = -\frac{C}{۴A}$ یا $۴a = -\frac{C}{A}$

همچنین برای پیدا کردن رأس، نسبت به متغیری که از درجه‌ی دوم است مشتق گرفته مساوی صفر قرار می دهیم طول یا عرض رأس سهمی مشخص می شود، سپس آن را در معادله‌ی سهمی قرار می دهیم عرض یا طول رأس نیز به دست می آید.

مثال : در سهمی $۲x^۲ - ۸x + ۴y - ۷ = ۰$ داریم :

$$f'_x = ۴x - ۸ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow ۲ \times ۲^۲ - ۸ \times ۲ + ۴y - ۷ = ۰ \Rightarrow y = \frac{۱۵}{۴} \Rightarrow S(۲, \frac{۱۵}{۴}) \text{ و } a = \frac{-۴}{۴ \times ۲} = \frac{-۱}{۲}$$

مثال) نمودار منحنی $x^۲ + y^۲ = (x + ۱)^۲ + (۲y + ۱)^۲$ چه شکلی است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) هذلولی ۴) سهمی (کنکور آزاد تجربی ۹۰)

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$\Rightarrow x^۲ + y^۲ = x^۲ + ۲x + ۱ + ۴y^۲ + ۴y + ۱ \Rightarrow ۳y^۲ + ۴y + ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow$ نمودار منحنی سهمی است.

مثال) مکان هندسی نقطه $M(\sin^۲ \alpha, \cos \alpha - ۱)$، کدام مقطع مخروطی است؟

۱) بیضی ۲) دایره ۳) سهمی ۴) هذلولی (کنکور سراسری ریاضی۶۵)

جواب : گزینه۳ درست است. $x = \sin^۲ \alpha$ و $y = \cos \alpha - ۱ \Rightarrow (y + ۱)^۲ = \cos^۲ \alpha \Rightarrow x + (y + ۱)^۲ = ۱$

۱۰) نقطه‌ی $S(۲,۱)$ رأس یک سهمی است که محور تقارن آن موازی محور y ها است. و از نقطه‌ی $(۰,۵)$ می گذرد. معادله‌ی خط هادی آن، کدام است؟

۱) $y=\frac{۱}{۴}$ ۲) $y=\frac{۱}{۲}$ ۳) $y=\frac{۳}{۴}$ ۴) $y=\frac{۳}{۲}$ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۲)

۱۱) در سهمی به معادله $۳x^{۲}+۴y-۶x+۱۱=۰$، معادله خط هادی، کدام است؟

۱) $y=-\frac{۵}{۳}$ ۲) $y=-\frac{۴}{۳}$ ۳) $y=-\frac{۲}{۳}$ ۴) $y=-\frac{۱}{۳}$(کنکور سراسری ریاضی۸۸خارج از کشور)

مثال) به ازای کدام مقادیر a، خط هادی سهمی $۲y^{۲}-۱۲y+ax+۸=۰$، به معادله‌ی $x=\frac{۲۱}{۸}$ است؟

۱) ۱۲ و ۳   ۲) ۱۶ و ۳   ۳) ۱۲ و ۵   ۴) ۱۶ و۵   (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۷)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل : $\Rightarrow ۲(y^{۲}-۶y+۹-۹)=-ax-۸ \Rightarrow (y-۳)^{۲}=-\frac{a}{۲}(x-\frac{۱۰}{a})$

$\Rightarrow \alpha=\frac{۱۰}{a}$ و $۴a'=-\frac{a}{۲} \Rightarrow a'=-\frac{a}{۸} \Rightarrow x=\alpha-a' \Rightarrow \frac{۲۱}{۸}=\frac{۱۰}{a}+\frac{a}{۸} \Rightarrow a^{۲}-۲۱a+۸۰=۰$

$\Rightarrow (\alpha-۵)(\alpha-۱۶)=۰ \Rightarrow \alpha=۵$ یا $\alpha=۱۶$

روش دوم : $a'=-\frac{C}{۴A}=-\frac{-a}{۴(۲)}=\frac{a}{۸}$ و $f'_y=۴y-۱۲=۰ \Rightarrow y=۳$

$۲\times۹-۳۶+ax+۸=۰ \Rightarrow x=\frac{۱۰}{a}=\alpha \Rightarrow x=\alpha-a' \Rightarrow \frac{۲۱}{۸}=\frac{۱۰}{a}+\frac{a}{۸}$

$a^{۲}-۲۱a+۸۰=۰ \Rightarrow (\alpha-۵)(\alpha-۱۶)=۰ \Rightarrow \alpha=۵$ یا $\alpha=۱۶$

۱۲) اگر خط به معادله‌ی $x=-۱$ خط هادی سهمی $۲y^{۲}-۴y=ax$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۳,۴)$ از کانون سهمی کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) ۵   ۴) ۶ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی خارج از کشور ۹۷)

مثال) به ازای کدام مقدار a کانون سهمی به معادله‌ی $۲y^۲ + ay - ۳x = ۰$ بر روی محور yها است؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۳ ۳) ± ۴ ۴) ± ۶ (کنکور سراسری ریاضی ۹۱)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : چون y از درجه ۲ و کانون آن بر روی محور yها است درنتیجه سهمی افقی و $F(\alpha + A, \beta) = (۰, \beta)$ کانون آن می باشد.

$$۲y^۲ + ay - ۳x = ۰ \Rightarrow y^۲ + \frac{a}{۲}y + \frac{a^۲}{۱۶} = \frac{۳}{۲}x + \frac{a^۲}{۱۶}$$

$$\Rightarrow (y + \frac{a}{۴})^۲ = \frac{۳}{۲}(x + \frac{a^۲}{۲۴}) \Rightarrow \alpha = -\frac{a^۲}{۲۴} \text{ و } ۴A = \frac{۳}{۲} \Rightarrow A = \frac{۳}{۸}$$

$$\alpha + A = ۰ \Rightarrow -\frac{a^۲}{۲۴} + \frac{۳}{۸} \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = \pm ۳$$

روش دوم : $f'_y = ۰ \Rightarrow ۴y + a = ۰ \Rightarrow y = -\frac{a}{۴} \Rightarrow ۲(-\frac{a}{۴})^۲ + a(-\frac{a}{۴}) - ۳x = ۰ \Rightarrow ۳x = -\frac{a^۲}{۸} \Rightarrow x = -\frac{a^۲}{۲۴}$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{a^۲}{۲۴} \text{ و } A = -\frac{C}{۴A'} = \frac{۳}{۸} \text{ و } \alpha + A = ۰ \Rightarrow -\frac{a^۲}{۲۴} + \frac{۳}{۸} = ۰ \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = \pm ۳$$

۱۳) فاصله‌ی رأس سهمی تا خط هادی در سهمی $y^۲ - y + x = -۲$ چه قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱   ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$ (کنکور آزاد تجربی ۸۸ پزشکی صبح)

رسم سهمی : ۱) نوشتن صورت استاندارد سهمی

۲) یافتن مختصات رأس سهمی، مقدار a (فاصله کانونی)، مختصات F (کانون) و معادله‌ی خط هادی آن

۳) رسم خط هادی و محور تقارن سهمی

۴)درکانون سهمی خطی برمحورتقارن آن عمودمی کنیم و دو نقطه به فاصله $|۲a|$ از کانون (در دو طرف کانون) روی آن جدا می کنیم.

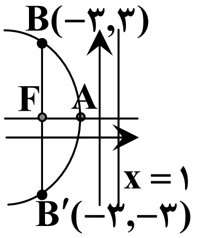
۵) رسم نمودار با در نظر گرفتن اینکه شاخه‌ی سهمی همواره از رأس می گذرد و کانون داخل شاخه‌ی سهمی قرار می گیرد و خط هادی شاخه‌ی سهمی را قطع نمی کند صورت می پذیرد.

مثال : نمودار معادله $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ را رسم کنید.

حل : ابتدا معادله را به حالت استاندارد تبدیل می کنیم $y^۲ - ۲y + ۱^۲ = -۸x - ۹ + ۱ \Rightarrow (y - ۱)^۲ = -۸(x + ۱)$

لذا معادله فوق یک سهمی با رأس $A(h, k) = (-۱, ۱)$ است که دهانه آن رو به چپ است. داریم : $۴a = -۸ \Rightarrow a = -۲$

و بنابراین $F(-a + h, k) = (-۳, ۱)$ و معادله خط هادی آن به صورت $x = a + h = ۱$ است.



در این صورت نقاط B و B' که هم طول با F و به فاصله $۲a = ۴$ از F باشند

یعنی $B(-۳, ۵)$ و $B'(-۳, -۳)$ نیز بر سهمی واقع اند.

فاصله هر یک از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید حال با وصل کردن نقاط B و A و B' به صورت یک منحنی و ادامه آن شکل تقریبی سهمی مورد نظر را به دست آورید.   (ص۵۵کتاب جدید)

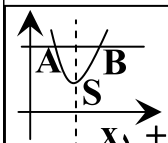
وترکانونی: وتری است که ازکانون سهمی عمودبرمحورسهمی رسم شودوبه آن محدودباشد.طول وترکانونی سهمی برابر $|۴a|$است.

۱۴) وتری از سهمی به معادله‌ی $y^{۲} = ۴(x + y)$ از کانون بر محور آن عمود باشد، قطری از یک دایره است. معادله‌ی این دایره کدام است؟

۱) $x^{۲} + y^{۲} - ۴y = ۰$ ۲) $x^{۲} + y^{۲} + ۴y = ۰$

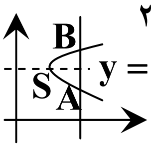
۳) $x^{۲} + y^{۲} - ۲y = ۲$ ۴) $x^{۲} + y^{۲} - ۲x + ۲y = ۲$ (کنکور سراسری تجربی۸۷خارج از کشور)

نکته : الف : اگر دو نقطه $A(x_{۱},\beta)$ و $B(x_{۲},\beta)$ (با عرض های برابر) روی یک سهمی باشند معادله‌ی محور تقارن (میانگین طول ها) به صورت $x = \frac{x_{۱} + x_{۲}}{۲}$ و رأس سهمی $S(\frac{x_{۱} + x_{۲}}{۲},\cdot\cdot\cdot)$ و نوع سهمی قائم است.



$x = \frac{x_{۱} + x_{۲}}{۲}$

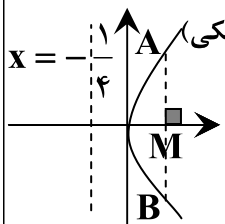
ب : اگر دو نقطه $A(\alpha, y_{۱})$ و $B(\alpha, y_{۲})$ (با طول های برابر) روی یک سهمی باشند معادله‌ی محور تقارن(میانگین عرض ها) به صورت $y = \frac{y_{۱} + y_{۲}}{۲}$ و رأس سهمی $S(\cdot\cdot\cdot,\frac{y_{۱} + y_{۲}}{۲})$ و نوع سهمی افقی است.



$y = \frac{y_{۱} + y_{۲}}{۲}$

مثال) نقاط $A(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$ و $B(\frac{۱}{۴},-\frac{۱}{۲})$ متعلق به‌یک سهمی هستند که خط $x = -\frac{۱}{۴}$ خط هادی آن است. مختصات رأس سهمی کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۴},۰)$ ۲) $(\frac{۱}{۲},۰)$ ۳) $(۰,۰)$ ۴) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴})$ (کنکور آزاد تجربی ۸۱ پزشکی)



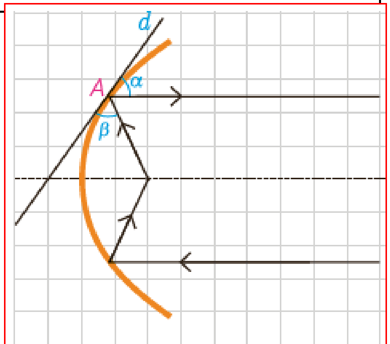
جواب : گزینه ۳ صحیح است.چون وتر کانونی AB عمود بر محور کانونی و $M(\frac{۱}{۴},۰)$ وسط AB است، پس محور کانونی $y = ۰$ در نتیجه $S(۰,۰)$ رأس سهمی است.

۱۵) یک سهمی محور x ها را در دو نقطه به طول های ۱ و ۵ قطع کرده و خط هادی آن به معادله‌ی $y = -۲$ است. عرض رأس این سهمی کدام است؟

۱) ۱- ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$ (کنکور سراسری تجربی۸۴خارج از کشور)

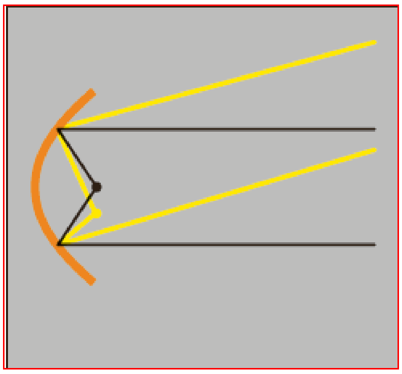
ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها و کاربردهای آن

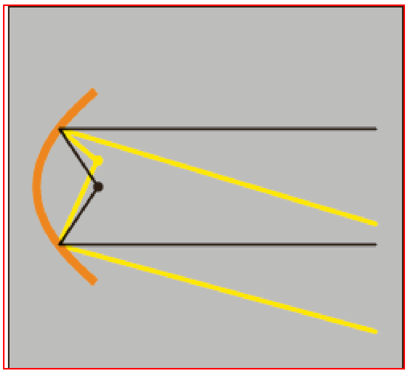
یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. درواقع اگر خط d برسهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه‌های α و β برابرند.



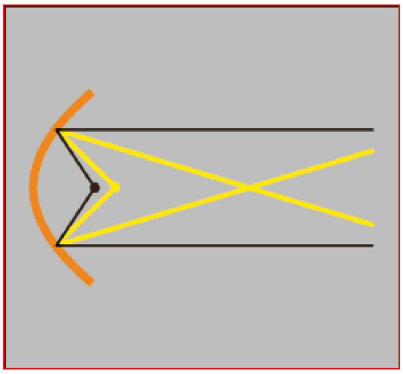
از این ویژگی در ساخت بسیاری از وسایل استفاده شده است. به‌طور مثال چراغ جلوی اتومبیل‌ها را معمولاً به‌گونه‌ای می‌سازند که جداره پشت لامپ به‌حالت سهمی باشد و جنس آینه‌ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می‌دهند. در این‌صورت حتی شعاع‌های نوری که به عقب تابیده می‌شوند پس از برخورد به جداره سهمی پشت لامپ به‌صورت شعاع‌هایی موازی با محور سهمی به‌جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری به‌وجود می‌آورند.

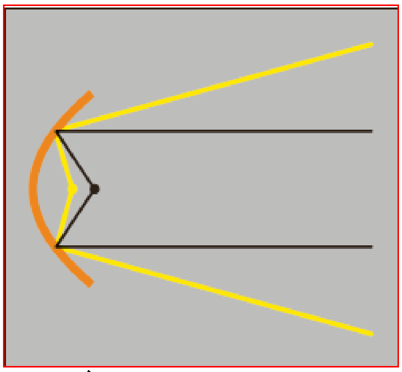
با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین‌تر، شعاع‌های نور کماکان موازی باهم (نه موازی با محور) اما روبه بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می‌کنند.





اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد شعاع‌های نور باهم موازی خارج نمی‌شوند.





۱۶) خط هادی یک سهمی به معادله‌ی $x=\frac{13}{4}$ است. هر پرتوی که از نقطه‌ی $(-\frac{5}{4},-2)$ بر این سهمی بتابد، در امتداد محور xها باز می تابد. این سهمی محور xها را با کدام طول قطع می کند؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{5}{4}$ (کنکور سراسری و آزاد تجربی ۹۴)

۱۷) عمق یک آینه‌ی سهموی در مرکز آن ۹ واحد و قطر قاعده‌ی آن ۶۰ واحد است. فاصله‌ی کانون تا رأس آن کدام است؟

۱) ۱۵   ۲) ۲۰   ۳) ۲۲/۵   ۴) ۲۵   (کنکور سراسری تجربی ۹۲ خارج از کشور)

نکته : مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود بر هم بر یک سهمی می توان رسم کرد، خط هادی آن سهمی است.

مثال) از نقطه‌ی $A(0,\alpha)$ دو خط مماس عمود بر هم بر منحنی به معادله $y=\frac{1}{2}x^2+3$ رسم شده است، α کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲   ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$ (کنکور سراسری ریاضی ۹۰)

جواب : گزینه ۴ صحیح است.روش اوّل : اوّلاً : مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط دو مماس عمود بر هم بر یک سهمی می توان رسم کرد، خط هادی آن سهمی است. ثانیاً : معادله خط هادی سهمی به معادله $(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$ به صورت $y=\beta-a$ می باشد.

$$y=\frac{1}{2}x^2+3\Rightarrow x^2=2(y-3)\Rightarrow \beta=3 \text{ و } 4a=2\Rightarrow a=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=y=\beta-a=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

روش دوم : ابتدا معادله‌ی خط مماس بر منحنی را از نقطه $A(0,\alpha)$ با شیب مفروض m می نویسیم :

$$y-\alpha=m(x-0)\Rightarrow y=mx+\alpha$$

می دانیم معادله تلاقی خط مماس با منحنی ریشه‌ی مضاعف دارد پس :

$$y=\frac{1}{2}x^2+3=mx+\alpha\Rightarrow x^2-2mx-2\alpha+6=0\Rightarrow \Delta'=m^2+2\alpha-6=0$$

فرض کنیم m_1 و m_2 ریشه های این معادله باشند.شرط عمود بودن دو خط آن است که : $m_1m_2=-1$

در نتیجه : $\frac{c}{a}=-1\Rightarrow 2\alpha-6=-1\Rightarrow \alpha=\frac{5}{2}$

نکته: وضعیت یک نقطه‌ی نسبت به سهمی : اگر $A(x_1,y_1)$ نقطه ای در صفحه‌ی سهمی باشد آنگاه :

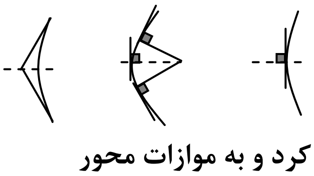
الف : نقطه‌ی A بیرون تقعر سهمی قرار دارد. $\Leftrightarrow f(x_1,y_1)>0$

ب : نقطه‌ی A روی سهمی قرار دارد. $\Leftrightarrow f(x_1,y_1)=0$

ج : نقطه‌ی A درون تقعر سهمی قرار دارد. $\Leftrightarrow f(x_1,y_1)<0$

نکته : از هر نقطه واقع بر محور تقارن سهمی و بیرون از تقعر آن می توان دو مماس با طول های مساوی بر سهمی رسم کرد.

نکته : از هر نقطه واقع بر محور تقارن سهمی و بیرون از تقعر آن می توان یک قائم بر سهمی رسم کرد ولی از هر نقطه واقع بر محور تقارن سهمی و درون تقعر آن می توان سه قائم بر سهمی رسم کرد.



نکته : به موازات هر امتداد دلخواه به جزء امتداد محور تقارن همواره یک مماس بر سهمی می توان رسم کرد و به موازات محور تقارن هیچ مماسی بر سهمی نمی توان رسم کرد.

مثال) از کدام نقطه زیر می توان دو مماس هم اندازه بر سهمی $y^{۲} + ۴x - ۲y + ۱ = ۰$ رسم کرد؟

۱) $(۲,۱)$ ۲) $(-۲,۱)$ ۳) $(۳,۲)$ ۴) $(۲,-۱)$

جواب : گزینه ۱ صحیح است. از هر نقطه واقع بر محور تقارن سهمی و بیرون از تقعر آن می توان دو مماس با طول های مساوی بر سهمی رسم کرد. $f'_y = ۰ \Rightarrow ۲y - ۲ = ۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow$ گزینه ۳ و ۴ نادرست است.

$(۲,۱) \Rightarrow f(۲,۱) = ۱ + ۸ - ۲ + ۱ = ۸ > ۰ \Rightarrow$ نقطه بیرون سهمی است.

$(-۲,۱) \Rightarrow f(-۲,۱) = ۱ - ۸ - ۲ + ۱ = -۸ < ۰ \Rightarrow$ نقطه درون سهمی است.

مثال) دو منحنی $x^{۲} - ۴y = ۱$ و $\frac{x^{۲}}{۴} + ۱۶y^{۲} = ۱$

۱) در چهار نقطه متقاطع اند. ۲) فقط در دو نقطه متقاطع اند.

۳) در دو نقطه متقاطع و در یک نقطه مماس اند. ۴) فقط در دو نقطه مماس اند. (کنکور آزاد تجربی ۸۷)

جواب:گزینه۳صحیح است.روش اوّل : $x^{۲} - ۴y = ۱$ و $\frac{x^{۲}}{۴} + ۱۶y^{۲} = ۱ \Rightarrow \frac{۴y+۱}{۴} + ۱۶y^{۲} = ۱ \Rightarrow ۶۴y^{۲} + ۴y - ۳ = ۰$

$y = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۹۲}}{۶۴} = \frac{-۲ \pm ۱۴}{۶۴} = \frac{۳}{۱۶}$ یا $\frac{-۱}{۴}$

$y = \frac{۳}{۱۶} \Rightarrow x^{۲} - \frac{۳}{۴} = ۱ \Rightarrow x^{۲} = \frac{۷}{۴} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۷}}{۲}$

$y = \frac{-۱}{۴} \Rightarrow x^{۲} - \frac{۳}{۴} = ۱ \Rightarrow x^{۲} + ۱ = ۱ \Rightarrow x = ۰$ ریشه مضاعف

روش دوم : رسم دو منحنی سهمی و بیضی

مثال) سهمی $y = x^{۲} - ۲$ و بیضی $x^{۲} + ۴y^{۲} = ۴$ چه وضعی دارند؟

۱) در چهار نقطه متقاطع اند. ۲) در دو نقطه متقاطع اند.

۳) یکدیگر را قطع نمی کنند. ۴) بر هم مماس اند. (کنکور آزاد تجربی۸۷خارج از کشور)

جواب : روش اوّل : $y = x^{۲} - ۲ \Rightarrow x^{۲} + ۴y^{۲} = ۴ \Rightarrow x^{۲} + ۴(x^{۲} - ۲)^{۲} = ۴ \Rightarrow ۴x^{۴} - ۱۵x^{۲} + ۱۲ = ۰$

$\Rightarrow x^{۲} = \frac{۱۵ \pm ۸}{۸} \Rightarrow x^{۲} = \frac{۷}{۸}$ یا $\frac{۲۳}{۸} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{۷}{۸}}$ یا $x = \pm\sqrt{\frac{۲۳}{۸}} \Rightarrow$ معادله‌ی چهار جواب دارد.

روش دوم : گزینه ۱ صحیح است. رسم دو منحنی سهمی و بیضی

مثال) چند نقطه روی منحنی $y = x^{۲} - ۲x + ۳$ وجود دارد که از محور طول ها به فاصله‌ی $\sqrt{۵}$ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۲ (کنکور آزاد تجربی عصر ۸۸)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل : رسم سهمی و مقایسه آن با رأس سهمی

روش دوم : $A(x, y = x^{۲} - ۲x + ۳) \Rightarrow |y| = \sqrt{۵} \xrightarrow{y>۰} x^{۲} - ۲x + ۳ = \sqrt{۵} \Rightarrow x^{۲} - ۲x + ۳ - \sqrt{۵} = ۰$

$\Rightarrow \Delta = b^{۲} - ۴ac = ۴ - ۱۲ + ۴\sqrt{۵} > ۰ \Rightarrow$ معادله دو ریشه دارد

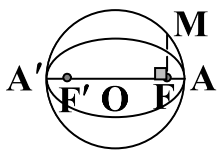
تمرین۱) دو نقطه‌ی A و B روی یک بیضی و F و F' کانون های بیضی اند. A به کانون F' نزدیک تر و B به کانون F نزدیک تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید :

الف) در حالتی که دو پاره خط AF و BF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی اند.

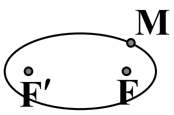
ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی الساقین است و

M روی قطر کوچک بیضی است. (ص۵۷کتاب جدید)

تمرین۲) قطر دایره C، مانند شکل ، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده ایم تا دایره را در نقطه ای مانند M قطع کند. ثابت کنید با MF نصف قطر کوچک بیضی برابر است. (ص۵۷کتاب جدید)



تمرین۳) در شکل مقابل نقطه‌ی M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه‌ی M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$ (ص۵۷کتاب جدید)

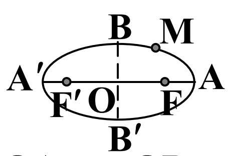


تمرین۴) نقطه‌ی M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

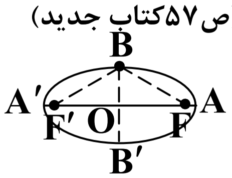
ب) نشان دهید مثلث MFF' قائم الزاویه است.

ج) طول های MF و MF' را به دست آورید. (ص۵۷کتاب جدید)



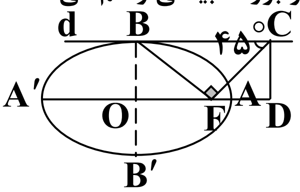
$OA = ۵ \quad OB = ۳ \quad OF = ۴$

تمرین۵)دربیضی مقابل طول قطربزرگ دوبرابر طول قطر کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی FBF' چند درجه است؟(ص۵۷کتاب جدید)



تمرین۶) در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطه‌ی B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می کنیم و در نقطه‌ی F عمودی بر BF رسم می کنیم تا خط d را در نقطه‌ی C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم تا آن را در نقطه ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.

(ص۵۷کتاب جدید)



تمرین۷) سهمی $y^۲ = ۲x - ۴y$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین مختصات نقاط برخورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید. (ص۵۵کتاب جدید)

تمرین۸) مختصات رأس و کانون سهمی به معادله‌ی $y = ax^{۲} + bx + c$ $(a \neq ۰)$ را به دست آورید.   (ص۵۸کتاب جدید)

نکته : الف : در سهمی $y = ax^{۲} + bx + c$ می توان نوشت : $y = a(x + \frac{b}{۲a})^{۲} + \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a}$ لذا نقطه $S(-\frac{b}{۲a}, \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a})$ رأس سهمی است.

ب : در سهمی $x = ay^{۲} + by + c$ می توان نوشت : $x = a(y + \frac{b}{۲a})^{۲} + \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a}$ لذا نقطه $S(\frac{۴ac - b^{۲}}{۴a}, -\frac{b}{۲a})$ رأس سهمی است.

۱۸) اگر نقطه $S(۲,-۳)$ رأس سهمی به معادله $x = y^{۲} + by + c$ باشد، مقدار bc کدام است؟

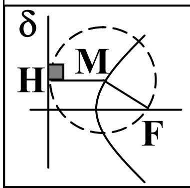
۱) ۳۳   ۲) ۴۴   ۳) ۵۵   ۴) ۶۶

تمرین۹) معادله سهمی را بنویسید که $S(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد.   (ص۵۸کتاب جدید)

تمرین۱۰) سهمی $y^{۲} = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره ای رسم می کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید. (ص۵۸کتاب جدید)

تمرین۱۱) سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و برعکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید. (ص۵۸کتاب جدید)

نکته : در صفحه، مکان هندسی مرکز دایره هایی که از نقطه‌ی ثابت F غیر واقع بر خط δ گذشته و بر خط δ مماس باشد یک سهمی است.

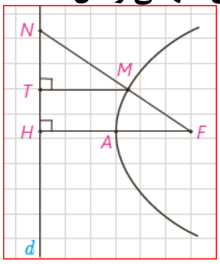


۱۹) مکان هندسی مرکز دایره هایی که از نقطه‌ی $A(۱,-۱)$ گذشته و بر خط $x = ۵$ مماس باشند کدام است؟

۱) $y^{۲} + ۲y + ۸x = ۲۷$ ۲) $y^{۲} + ۲y - ۶x = ۲۷$

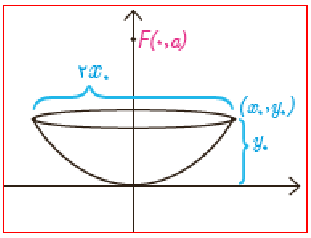
۳) $y^{۲} + ۲y + ۸x = ۲۳$ ۴) $y^{۲} + ۲y + ۸x + ۲۳ = ۰$

تمرین۱۲) در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه‌ی دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه‌ی M، MT را بر عمود کرده ایم.



ثابت کنید : $$\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$$ (ص۵۸کتاب جدید)

تمرین۱۳) یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده‌ی فاصله‌ی کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می توان با داشتن یک دیش فاصله‌ی کانونی آن را به دست آورید. او از معلمش خواست که فرمولی برای محاسبه‌ی فاصله‌ی کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت : باید قطر دهانه‌ی دیش را در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه‌ی گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله‌ی کانونی دیش است.



دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید. (ص۵۸کتاب جدید)

تمرین۱۴) فرض کنید از مثلث ABC، اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه‌ی رسم این مثلث را توضیح دهید. (ص۵۸کتاب جدید)

تمرین۱۵)سهمی $y = x^{2}$ و دو خط موازی $d_1 : y = ax + b$ و $d_2 : y = ax + b'$ را که با سهمی متقاطع اند، در نظر بگیرید.

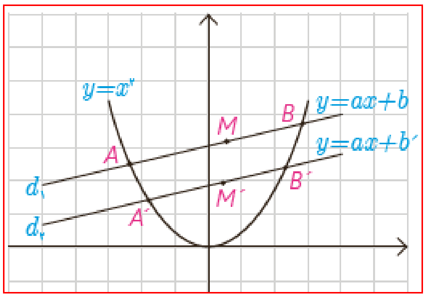
الف) معادله‌ی درجه‌ی دومی تشکیل دهید که ریشه های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y = x^{2}$ باشد.

ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه‌ی M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه‌ی M را به دست آورید.

پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط d_2 به جای d_1 انجام دهید و مختصات نقطه‌ی M' (نقطه‌ی وسط پاره خط از نقاط تقاطع d_2 و سهمی) به دست آورید.

ت) خط MM' نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟

ث) با استفاده از نتایج قسمت های قبل روشی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

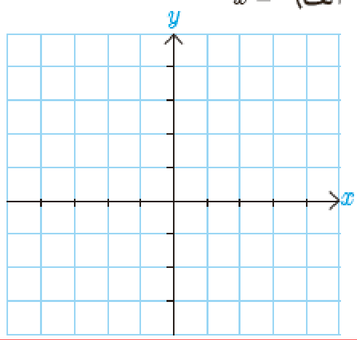


(ص۵۹کتاب جدید)

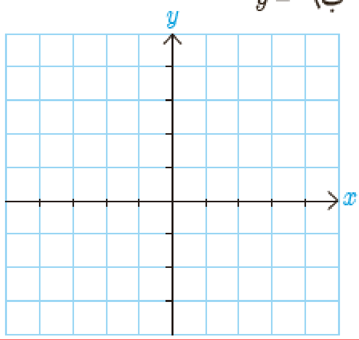
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۳	۲	۳	۳	۲	۲	۳	۳	۱	۳	۱	۱	۳	۱	۱	۳	۴	۴	۳	

کار در کلاس : ۱) برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن را تعیین نمایید.

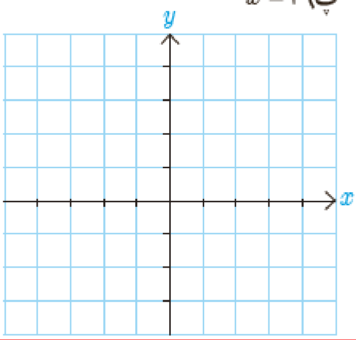
الف) $x = 0$



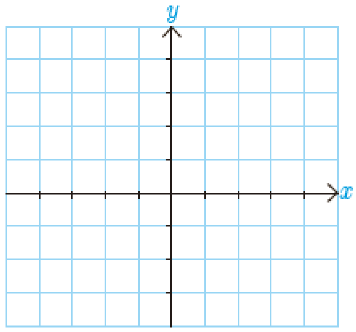
ب) $y = 0$



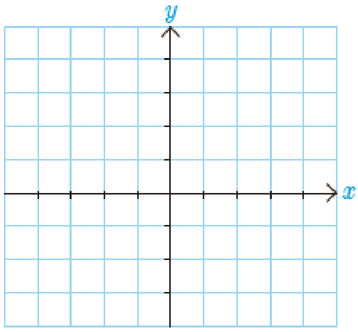
پ) $x = 1$



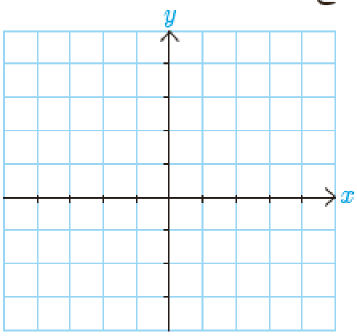
ت) $x = 1 \ , \ -1 \leq y < 3$



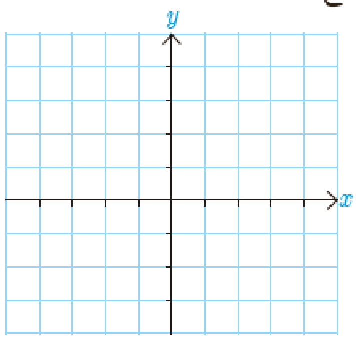
ث) $y = x^2 \ , \ -1 < x \leq 2$



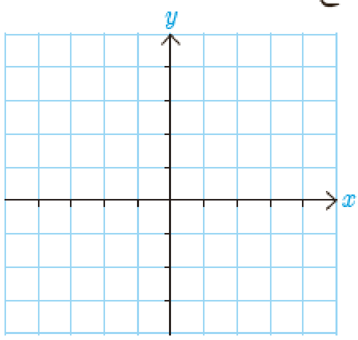
ج) $y = x^2 \ , \ 1 \leq x \leq 2$



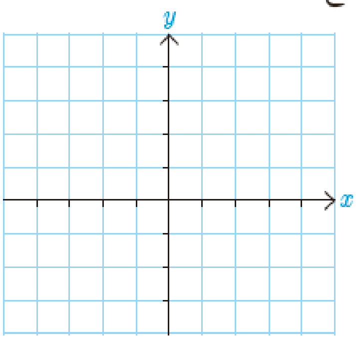
چ) $-1 \leq x \leq 1 \ , \ 1 \leq y \leq -2$



ح) $x^2 < y \leq 2$

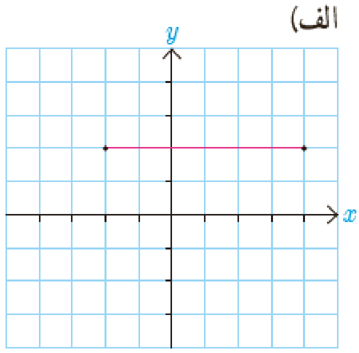


خ) $y \geq x^2$

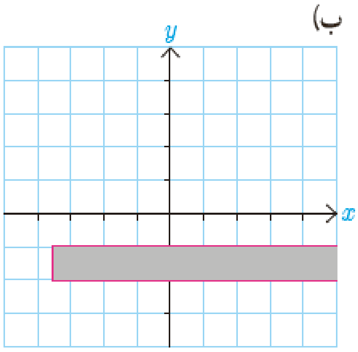


۲) در هر یک از شکل های رو به رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی های دیگری که از شکل دریافت می کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید. (ص۶۳کتاب جدید)

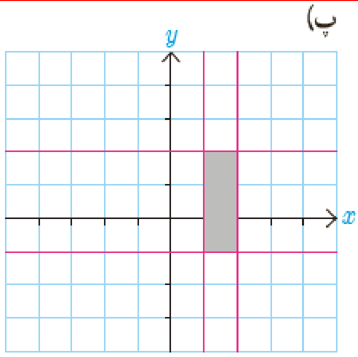
الف)



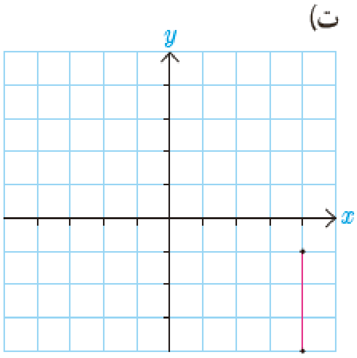
ب)



پ)



ت)

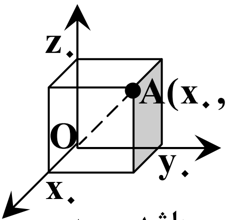


مختصات فضایی سه بعدی $R^3=\{(x,y,z): x,y,z\in R\}$: این دستگاه از سه محور دو به دو عمود بر هم $x'Ox$، $y'Oy$ و $z'Oz$ تشکیل شده است. این سه محور فضا را به سه صفحه xOy، yOz و xOz و هشت ناحیه تقسیم می کنند
اگر A نقطه ای در فضا باشد سه صفحه از نقطه A طوری می گذرانیم که به ترتیب با صفحه های yOz، xOz و xOy موازی باشد (به بیان دیگر سه صفحه از نقطه A طوری می گذرانیم که به ترتیب بر محورهای طول ها، و عرض ها و ارتفاع ها عمود باشند.)
این صفحه ها به ترتیب محور های $x'Ox$، $y'Oy$ و $z'Oz$ را در x_0 (طول) و y_0 (عرض) و z_0 (ارتفاع) قطع می کنند. به (x_0,y_0,z_0) مختصات نقطه‌ی A می گوییم. باید توجه داشت در این تعریف x_0 و y_0 و z_0 را به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ و ارتفاع از مبدأ نقطه‌ی A می نامند.

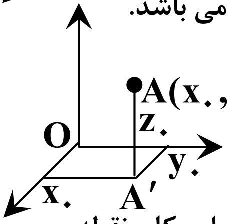
توجه : هر عضو از $R^3=\{(x,y,z): x,y,z\in R\}$ یک نقطه را در فضا به شکل منحصر به فرد مشخص می کند. و هم چنین به هر نقطه در فضا به طور منحصر به فرد یک سه تای مرتب (x_0,y_0,z_0) نظیر می کنند بنابراین بین نقاط فضا و مجموعه R^3 تناظر یک به‌یک وجود دارد لذا به این دستگاه، دستگاه مختصات فضایی R^3 می گویند.

مبدأ مختصات : محل برخورد سه محور را مبدأ مختصات می نامند که مختصات آن $O(0,0,0)$ است.

طریقه‌ی یافتن مکان نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ در دستگاه مختصات فضایی R^3 :



مکعب مستطیلی بنا می کنیم که‌یک رأس آن مبدأ مختصات بوده و سه‌یال آن به اندازه های x_0 (طول) و y_0 (عرض) و z_0 (ارتفاع) بر محور طول ها و عرض ها و ارتفاع ها واقع شده باشد انتهای قطری از مکعب مستطیل که یک سر آن مبدأ مختصات است مکان نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ در دستگاه مختصات فضایی R^3 می باشد.



روش مختصر : ابتدا x_0 (طول) را روی محور طول ها و y_0 (عرض) را روی محور عرض ها پیدا می کنیم و از این نقاط خطوطی به ترتیب موازی محور طول ها و عرض ها رسم می کنیم این خطوط همدیگر را در نقطه‌ی قطع A' می کنند. از نقطه‌ی A' به اندازه‌ی z_0 (ارتفاع) به موازات محور ارتفاع ها حرکت می کنیم.
(توجه شود که اگر z_0 مثبت باشد به سمت بالا و اگر z_0 منفی باشد به سمت پایین حرکت می کنیم.) نقطه‌ی حاصل مکان نقطه‌ی $A(x_0,y_0,z_0)$ در دستگاه مختصات فضایی R^3 می باشد.

معرفی صفحه ها و محورهای مختصات در فضا :

الف) صفحه xOy : $\{(x,y,z): z=0\}$ یا $\{(x,y,0): x,y\in R\}$

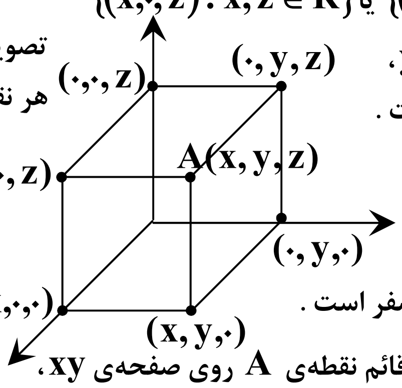
ب) صفحه yOz : $\{(x,y,z): x=0\}$ یا $\{(0,y,z): y,z\in R\}$

پ) صفحه xOz : $\{(x,y,z): y=0\}$ یا $\{(x,0,z): x,z\in R\}$

ت) محور x ها : $\{(a,0,0): a\in R\}$

ث) محور y ها : $\{(0,b,0): b\in R\}$

ج) محور z ها : $\{(0,0,c): c\in R\}$



تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی yz، هر نقطه روی این صفحه طولش صفر است .

تصویر قائم نقطه‌ی A روی محور z ها، هر نقطه روی این محور طول و عرضش صفر است .

تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی xz، هر نقطه روی این صفحه عرضش صفر است .

تصویر قائم نقطه‌ی A روی محور y ها، هر نقطه روی این محور طول و ارتفاعش صفر است .

تصویر قائم نقطه‌ی A روی محور x ها، هر نقطه روی این محور عرض و ارتفاعش صفر است .

تصویر قائم نقطه‌ی A روی صفحه‌ی xy، هر نقطه روی این صفحه ارتفاعش صفر است .

در تصویر قائم هر نقطه بر محورهای مختصات (یا صفحه های مختصات)، مؤلفه‌ی نظیر آن محور (یا آن صفحه) تغییر نکرده ولی دو مؤلفه غیر همنام با آن محور (یا مؤلفه غیرهمنام با آن صفحه) صفر خواهد بود.

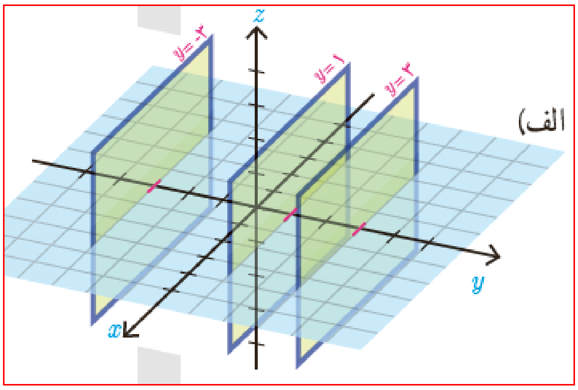
فعالیت۱: ۱)مختصات چند نقطه راکه دررابطه $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ صدق کند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

۲) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله $x = 0$ دارد؟ (ص۶۷کتاب جدید)

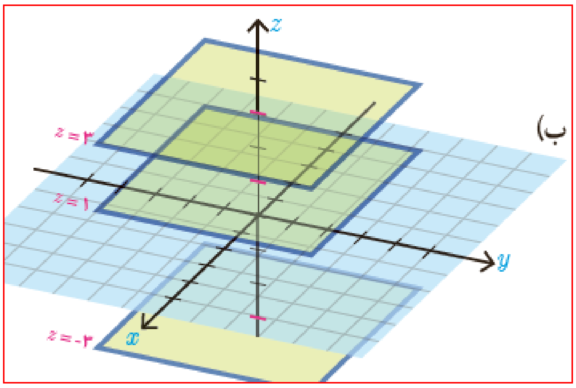
مثال : روی صفحه‌ی $z = 1$ نقاط $A = (1,2,1)$ و $B = (2,2,1)$ و $C = (3,2,1)$ را در نظر می گیریم، مؤلفه‌ی دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحه‌ی مزبور ($z = 1$) تمام نقاطی که مؤلفه‌ی دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می دهند (نمودار آن یک خط است به معادلات $\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$) (ص۶۷کتاب جدید)

کار در کلاس : ۱) در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند. (ص۶۷کتاب جدید)

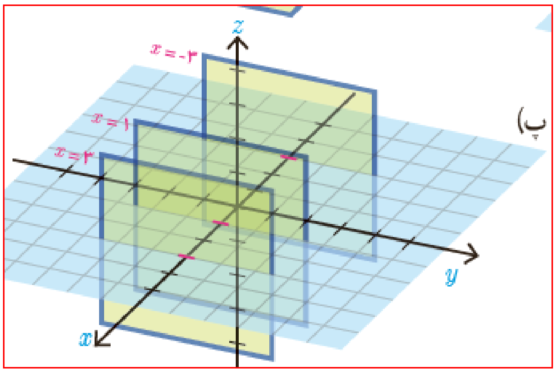
الف)



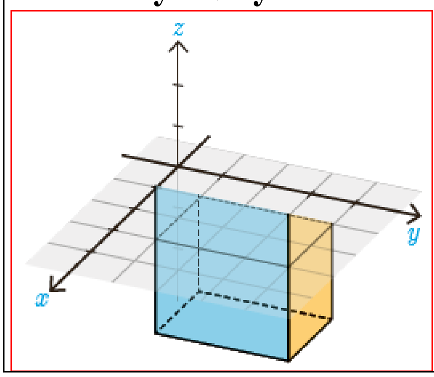
ب)



پ)



۲)وجه های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت هایی از صفحات به معادلات $x = 1$، $x = 3$، $y = 1$، $y = 4$، $z = -2$ و $z = 2$ هستند.



الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه ها قرار دارند.

پ) معادلات مربوط به هر یک از یال های این مکعب مستطیل را بنویسید.

(دقت کنید که یال ها پاره خط اند و نه خط)

ت) مختصات رأس های این مکعب مستطیل را بنویسید.

ث)روابط مشخص کننده یکی ازوجه های مکعب رانوشته ایم.روابط مشخص کننده پنج وجه دیگر را شما مشخص کنید.
$$\begin{cases} ۱ \le x \le ۳ \\ ۱ \le y \le ۴ \\ z = ۲ \end{cases}$$

ج) مختصات نقطه ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه ای را بیابید که روی یکی از وجه های آن و غیر واقع بر بال ها باشد.

ج) شرط اینکه نقطه ای درون این مکعب یا روی یکی از وجه های آن باشد چیست؟

ح) روابطی را بنویسید که مشخص کننده‌ی حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعب داده شده باشند.   (ص۶۸کتاب جدید)

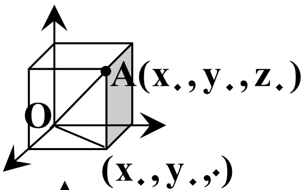
مثال) اگر نقطه‌ی $A(m^۲ + m, m, m + ۱)$ روی فصل مشترک صفحه های yOz و xOz قرار داشته باشد کدام نقطه‌ی زیر بر روی صفحه‌ی yOz واقع است؟

۱) $B(۱, m, ۲)$ ۲) $C(m + ۱, ۲, m)$ ۳) $D(m - ۱, ۲, m)$ ۴) $E(m, m^۲ - ۱, ۲)$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. فصل مشترک صفحه های yOz و xOz همان محور ارتفاع ها می باشد که طول و عرض نقطه روی این محور صفر است پس :
$$\begin{cases} m^۲ + m = ۰ \Rightarrow m = ۰, m = -۱ \xrightarrow{\ \cap\ } m = ۰ \\ m = ۰ \end{cases}$$

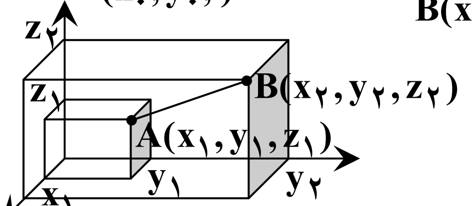
از طرفی هر نقطه روی صفحه yOz باشد طول آن صفر است. $m = ۰ \Rightarrow E(۰, -۱, ۲)$

دستور تعیین فاصله در فضا (دستور تعیین اندازه‌ی پاره خط در فضا) :



الف) فاصله نقطه $A(x_۰, y_۰, z_۰)$ از مبدأ مختصات برابر است با $|OA| = \sqrt{x_۰^۲ + y_۰^۲ + z_۰^۲}$

و یا $|OA| = \sqrt{x_A^۲ + y_A^۲ + z_A^۲}$



ب) فاصله بین دو نقطه (اندازه پاره خط) در فضا : هرگاه $A(x_۱, y_۱, z_۱)$ و $B(x_۲, y_۲, z_۲)$ دو نقطه د ر فضا باشند فاصله بین آن ها (اندازه پاره خط) برابر است با :

$$|AB| = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲ + (z_۲ - z_۱)^۲}$$

و یا
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲ + (z_B - z_A)^۲}$$

مثال) به ازای چند مقدار مثبت m فاصله بین دو نقطه $A(-۱,۱,m)$ و $B(۲,m,-۳)$ برابر ۷ می باشد.

۱) ۴   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

جواب : گزینه ۴ درست است. $|AB| = ۷ \Rightarrow \sqrt{(۲+۱)^۲ + (m-۱)^۲ + (-۳-m)^۲} = ۷ \Rightarrow$

$۹ + m^۲ - ۲m + ۱ + ۹ + ۶m + m^۲ = ۴۹ \Rightarrow ۲m^۲ + ۴m - ۳۰ = ۰ \Rightarrow m^۲ + ۲m - ۱۵ = ۰ \Rightarrow m = ۳$

۱) اگر A نقطه ای به طول ۳ واقع بر محور طول ها و $B(۳,۲,۰)$ و C نقطه ای واقع در صفحه xOz و A و B و C سه رأس یک مثلث باشند نوع این مثلث همواره کدام است؟

۱) متساوی الساقین ۲) قائم الزاویه   ۳) متساوی الاضلاع   ۴) نامشخص

مثال) نقطه‌ی A در صفحه‌ی xOy قرار دارد. اگر طولش دو برابر عرض آن باشد و فاصله مبدأ مختصات تا A برابر $۲\sqrt{۵}$ باشد مجموع مختصات A کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۸

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $A(۲x,x,۰)$ و $\sqrt{۴x^۲ + x^۲} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow |x|\sqrt{۵} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow |x| = ۲ \Rightarrow x = \pm ۲$

$A(۴,۲,۰) \Rightarrow \sum = ۶$ و $A(-۴,-۲,۰) \Rightarrow \sum = -۶$

مثال) مساحت مربعی که نقاط $A(۱,-۱,۲)$ و $B(-۱,۱,۰)$ دو رأس مقابل آن هستند، کدام است؟

۱) ۱   ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) ۶   ۴) ۱۲

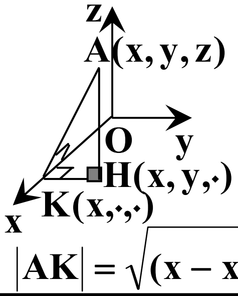
جواب : گزینه ۳ درست است. (هر مربع نوعی لوزی است)

$$AB = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۱+۱)^۲ + (۰-۲)^۲} = \sqrt{۴+۴+۴} = \sqrt{۱۲} \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۱۲} \times \sqrt{۱۲} = ۶$$

۲) فاصله‌ی بین دو نقطه ای که هر کدام مؤلفه های برابر دارند و از مبدأ مختصات به فاصله $۲\sqrt{۳}$ هستند، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۳}$ ۴) $۸\sqrt{۳}$

فاصله‌ی نقطه از محورهای مختصات : برابر با فاصله‌ی آن نقطه از پای عمود (از تصویر قائم آن نقطه بر روی آن محور) است . چون در محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از محورهای مختصات، مؤلفه های نظیر به نظیر از هم کم می شوند، لذا فاصله‌ی هر نقطه از یک محور برابر با جذر مجموع مجذور مؤلفه های غیر همنام خواهد بود .



در شکل زیر بنا به قضیه‌ی سه عمود در هندسه‌ی ۲ داریم : $Ak \perp Ox$ درنتیجه فاصله‌ی نقطه $A(x,y,z)$:

الف) از محور x ها برابر $\sqrt{y^۲ + z^۲}$ است .

ب) از محور y ها برابر $\sqrt{x^۲ + z^۲}$ است .

پ) از محور z ها برابر $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ است .

زیرا $|AK| = \sqrt{(x-x)^۲ + (y-۰)^۲ + (z-۰)^۲} = \sqrt{y^۲ + z^۲}$

نکته : فاصله نقطه از قرینه اش نسبت به محورهای مختصات : فاصله نقطه $A(x,y,z)$ از قرینه A نسبت به :

الف) محور x ها برابر $۲\sqrt{y^۲+z^۲}$ است .

ب) محور y ها برابر $۲\sqrt{x^۲+z^۲}$ است .

پ) محور z ها برابر $۲\sqrt{x^۲+y^۲}$ است .

۳) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲,۳)$ از محور x ها چقدر است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۱۴}$ ۴) $\sqrt{۱۳}$ (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۱)

فاصله‌ی نقطه از صفحه های مختصات : برابر با فاصله‌ی آن نقطه از پای عمود (از تصویر قائم آن نقطه بر روی آن صفحه) است . چون در محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه از صفحه های مختصات، مؤلفه های نظیر به نظیر از هم کم می شوند، لذا فاصله‌ی هر نقطه از یک صفحه برابر با قدرمطلق مؤلفه‌ی غیر همنام با آن صفحه خواهد بود . فاصله‌ی نقطه $P(x_۰,y_۰,z_۰)$ از

الف) صفحه xy برابر $|z_۰|$ است .
ب) صفحه yz برابر $|x_۰|$ است .

پ) صفحه xz برابر $|y_۰|$ است .
ت) قرینه اش نسبت به صفحه xy برابر $۲|z_۰|$ است .

ث) قرینه اش نسبت به صفحه xz برابر $۲|y_۰|$ است .
ج) قرینه اش نسبت به صفحه yz برابر $۲|x_۰|$ است .

مثال:فاصله‌ی نقطه $P(۲,-۳,-۴)$ازصفحه xyبرابر $۴=|-۴|$واز صفحه yz برابر $۲=|۲|$ و از صفحه xz برابر $۳=|-۳|$ است .

مثال) اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۳,۲m-۱,۴)$ از محور عرض ها برابر فاصله‌ی آن از صفحه‌ی xoz باشد، m کدام است؟

۱) ۲و۳ ۲) ۲ و ۳- ۳) ۲- و ۳ ۴) ۲- و ۳-

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $\sqrt{۹+۱۶}=|۲m-۱| \Rightarrow ۲m-۱=\pm۵ \Rightarrow m=۳$ یا $m=-۲$

مختصات نقطه وسط یک پاره خط : اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند مختصات نقطه M وسط AB به صورت زیر است : $M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲})$ و

یا $M(\frac{x_A+x_B}{۲},\frac{y_A+y_B}{۲},\frac{z_A+z_B}{۲})$ و

یا به طور مختصر $M=\frac{A+B}{۲}$

دستور تعیین مختصات قرینه‌ی یک نقطه نسبت به نقطه‌ی دیگر : اگر نقطه‌ی B قرینه نقطه‌ی $A(x,y,z)$ نسبت به نقطه‌ی $M(a,b,c)$باشد آنگاه : $B(۲a-x,۲b-y,۲c-z)$ و یا به طورمختصر $M=\frac{A+B}{۲} \Rightarrow B=۲M-A$

(یعنی دو برابر مختصات نقطه‌ی وسط منهای مختصات نقطه‌ی اوّل)

مثال) نقاط E و F به ترتیب تصاویر قائم نقطه‌ی $A(۴,-۶,-۱۲)$ بر صفحه‌ی xoz و محور عرض ها می باشند، فاصله‌ی نقطه‌ی M وسط پاره خط EF از مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) ۷ ۴) ۱۴

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$E(۴,۰,-۱۲)$ ، $F(۰,-۶,۰)$ و $M(\frac{۴+۰}{۲},\frac{۰+(-۶)}{۲},\frac{-۱۲+۰}{۲})=(۲,-۳,-۶)$ لذا $|OM|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷$

۴) نقاط $A=(-۱,۰,۲)$ و $B=(۰,۱,۳)$ و $C=(۲,-۵,-۱)$ سه رأس مثلث ABC هستند طول میانه AM کدام است؟

۱) ۷   ۲) ۵   ۳) ۳   ۴) ۴

مثال) مجموع طول و عرض و ارتفاع قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۲,۶,۲)$ نسبت به نقطه‌ی $M(۳,۵,۲)$ کدام است؟

۱) ۸   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۱۰

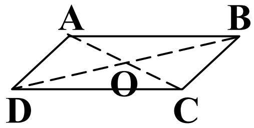
جواب : گزینه ۴ صحیح است. $B(۲a-x,۲b-y,۲c-z)=(۲\times۳-۲,۲\times۵-۶,۲\times۲-۲)=(۴,۴,۲)\Rightarrow\sum=۱۰$

مختصات مرکزثقل مثلث: در هر مثلث سه میانه همرسند و نقطه همرسی آن ها را مرکزثقل می نامند اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ و $C(x_۳,y_۳,z_۳)$ رئوس مثلث ABC باشند مختصات مرکزثقل مثلث به شکل زیر است :

$$G(\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳},\frac{y_۱+y_۲+y_۳}{۳},\frac{z_۱+z_۲+z_۳}{۳})$$

و یا به طور مختصر $G=\frac{A+B+C}{۳}$

رابطه‌ی بین مختصات رأس های متوازی الاضلاع : هر گاه AC و BD دو قطر یک متوازی الاضلاع و نقطه O محل برخورد این دو قطر باشد آنگاه :



$$x_A+x_C=x_B+x_D=۲x_O$$
$$y_A+y_C=y_B+y_D=۲y_O$$
$$z_A+z_C=z_B+z_D=۲z_O$$ و

(مجموع مختصات دو سر یک قطر برابر است با مجموع مختصات دو سر قطر دیگر)

یا به طور مختصر $A+C=B+D=۲O$

مثال) مختصات مرکزثقل مثلث ABC با رئوس $A(۱,۲,۳)$ و $B(۳,۱,۲)$ و $C(-۱,۳,-۱۴)$ کدام است؟

۱) $(-۱,۲,۳)$ ۲) $(۱,-۲,۳)$ ۳) $(-۱,-۲,۳)$ ۴) $(۱,۲,-۳)$

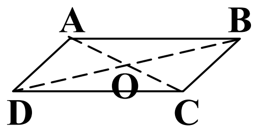
جواب : گزینه ۴ صحیح است. $G(\frac{۱+۳-۱}{۳},\frac{۲+۱+۳}{۳},\frac{۳+۲-۱۴}{۳})=(۱,۲,-۳)$

مثال) نقاط $A(۲,۱,۰)$ و $B(۳,-۱,۱)$ و $C(۲,۳,-۲)$ سه رأس متوالی متوازی الاضلاع $ABCD$ هستند. مجموع مؤلفه های رأس D کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

جواب: گزینه ۳ صحیح است. در هر متوازی الاضلاع مجموع مختصات دو سر یک قطر برابر است با مجموع مختصات دو سر قطر دیگر

روش اوّل :



$$x_A+x_C=x_B+x_D\Rightarrow ۲+۲=۳+x_D\Rightarrow x_D=۱$$
$$y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow ۱+۳=-۱+y_D\Rightarrow y_D=۵$$
$$z_A+z_C=z_B+z_D\Rightarrow ۰-۲=۱+z_D\Rightarrow z_D=-۳$$

درنتیجه $D(۱,۵,-۳)$ پس : $x_D+y_D+z_D=۱+۵-۳=۳$

روش دوم : $\frac{A+C}{۲}=\frac{B+D}{۲}\Rightarrow D=A+C-B=(۲+۲-۳,۱+۳+۱,۰-۲-۱)=(۱,۵,-۳)$

ویژگی های طول : اگر A و B دو نقطه در فضای $R^۳$ باشند آنگاه :

الف : $\begin{cases}x_A=x_B\\y_A=y_B\\z_A=z_B\end{cases}\Leftrightarrow |AB|=۰\Leftrightarrow A=B$ ب : $|AB|=|BA|$

پ : به ازای هر نقطه‌ی C از $R^۳$: $|AB|\le|AC|+|BC|$ (نامساوی مثلثی)

مختصات قرینه نقطه $p(x_0,y_0,z_0)$ نسبت به

- محور طول ها به صورت $p'(x_0,-y_0,-z_0)$ است .
- محور عرض ها به صورت $p'(-x_0,y_0,-z_0)$ است .
- محور ارتفاع ها به صورت $p'(-x_0,-y_0,z_0)$ است .
- مبداء مختصات به صورت $p'(-x_0,-y_0,-z_0)$ است .
- نقطه (a,b,c) به صورت $p'(2a-x_0,2b-y_0,2c-z_0)$ است .
- صفحه xOy به صورت $p'(x_0,y_0,-z_0)$ است .
- صفحه yOz به صورت $p'(-x_0,y_0,z_0)$ است .
- صفحه xOz به صورت $p'(x_0,-y_0,z_0)$ است .

نتیجه :در مختصات قرینه‌ی یک نقطه نسبت به یک محور(یا یک صفحه مختصات)، مؤلفه های غیر همنام با آن محور(یا آن صفحه) قرینه می شوند ولی مؤلفه های همنام ثابت می ماند .

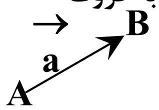
مثال) نقاط $A(1,0,-1)$ و $B(7,2,2)$ مفروضند، چند نقطه در فضا وجود دارد که مجموع فاصله های آن ها از دو نقطه‌ی A و B کمترین مقدار ممکن باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بیشمار

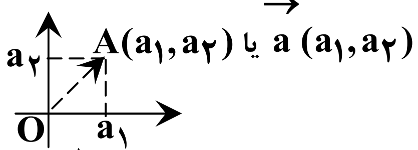
جواب : گزینه ۴ درست است. با توجه به نامساوی مثلثی اگر M نقطه‌ی دلخواهی در فضا باشد همواره داریم : $|MB|+|MA|\geq|AB|$ و مینیمم مجموع فاصله‌ی آن وقتی رخ می دهد که M بر روی پاره خط AB باشد.

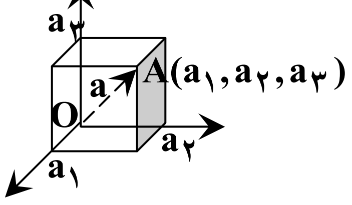
بردار (پیکان) $\overrightarrow{AB}$ در صفحه (یا فضا) : به پاره خط جهت دار با ابتدای A و انتهای B بردار (یا پیکان) $\overrightarrow{AB}$ گویند.

اندازه این بردار را با نماد $|\overrightarrow{AB}|$ نمایش می دهند، که بیانگر اندازه‌ی پاره خط AB است. اغلب جهت سهولت، بردارها را با حروف کوچک لاتین مانند $\vec{a}$ و اندازه‌ی طول آن ها را با $|\vec{a}|$ نمایش می دهند.



بردار در صفحه (یا فضا) :به هر پاره خط جهت دار که ابتدایش بر مبدأ مختصات و انتهایش برنقطه ای مانند $A=(a_1,a_2)$ در صفحه (یا $A=(a_1,a_2,a_3)$ در فضا) واقع است یک بردار گوییم و با نماد $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$ (یا $\overrightarrow{OA}(a_1,a_2,a_3)$) و یا به صورت ساده $\vec{a}=(a_1,a_2)$ (یا $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$) نمایش می دهیم.





اعداد حقیقی a_1، a_2 و a_3 مؤلفه های بردار نامیده می شوند.

نتیجه : هر نقطه نشان دهنده یک بردار با نقطه‌ی شروع مبدأ و برعکس هر بردار نشان دهنده‌ی یک نقطه (نقطه‌ی انتهای آن) می باشد. (هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس)

بردار صفر : برداری که ابتدا و انتهایش بر هم منطبق است را بردار صفر گویند.

قرارداد : مبدأ مختصات در صفحه یعنی $O=(0,0)$ (در فضا یعنی $O=(0,0,0)$) نمایشگر بردار $\vec{O}=(0,0)$ در صفحه (یا

بردار $\vec{O}=(0,0,0)$ در فضا) نامیده می شود.

طول (اندازه) یک بردار : الف) اندازه بردار $a(a_1,a_2)$ که با نماد $|\vec{a}|$ و یا مختصراً $|a|$ نمایش داده می شود، برابر است با :

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

ب) اندازه بردار $a(a_1,a_2,a_3)$ که با نماد $|\vec{a}|$ و یا مختصراً $|a|$ نمایش داده می شود، برابر است با : $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

مثال) اگر $a=(m-3,m,m)$ باشد، به ازای کدام مقدار m اندازه‌ی بردار برابر ۹ است؟

۱) ۱ یا $\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{4}{3}$ یا ۳   ۳) ۶- یا ۴   ۴) ۴- یا ۶

جواب : گزینه ۴ درست است.

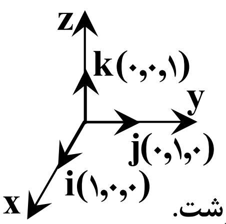
$$|a|=\sqrt{m^2-6m+9+m^2+m^2}=9\Rightarrow 3m^2-6m+9=81\Rightarrow m^2-2m-24=0\Rightarrow m=-4 \text{ یا } 6$$

دو بردار مساوی (هم ارز، همسنگ) : دو بردار هم اندازه و هم جهت را مساوی گویند.

نکته : دو بردار $a(a_1,a_2,a_3)$ و $b(b_1,b_2,b_3)$ مساویند اگروتنهااگر مؤلفه های آن ها نظیر به نظیر مساوی باشند.

یعنی $a_1=b_1$ و $a_2=b_2$ و $a_3=b_3$

دو بردار قرینه : دو بردار موازی و هم طول و مختلف الجهت را قرینه گویند. قرینه‌ی بردار $a=(a_1,a_2,a_3)$ به صورت $-a=(-a_1,-a_2,-a_3)$ می باشد.



بردار یکه : برداری است به طول واحد مانند بردار یکه $a(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2})$

بردارهای یکه محورهای مختصات : $i(1,0,0)$ و $j(0,1,0)$ و $k(0,0,1)$

نکته : هر بردار مانند $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ را می توان به صورت ترکیب خطی $a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ نوشت.

زیرا : $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)=(a_1,0,0)+(0,a_2,0)+(0,0,a_3)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$

نکته : برای هر بردار مانند $a(a_1,a_2,a_3)$

الف : a_1، a_2 و a_3 را مختصات یا اندازه‌ی جبری بردار a بر محورهای مختصات می نامند.

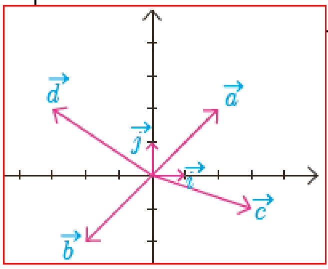
ب : $a_1i=(a_1,0,0)$، $a_2j=(0,a_2,0)$ و $a_3k=(0,0,a_3)$ را تصاویر قائم بردار a بر محورهای مختصات می نامند.

ج : $|a_1|$، $|a_2|$ و $|a_3|$ را اندازه‌ی تصاویر قائم بردار a بر محورهای مختصات می نامند.

قانون شارل : به ازای هر سه نقطه دلخواه A و B و C در فضا همواره داریم : $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}\Rightarrow\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$

در حالت خاص : $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=$ (مختصات ابتدا – مختصات انتها)

نتیجه : مختصات یک بردار با دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی (مختصات (تصاویر) یک بردار بر روی سه محور) : $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(x_B,y_B,z_B)-(x_A,y_A,z_A)=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$



مثال) بردارهای $\vec{a}=(۲,۲)$ ، $\vec{b}=(-۲,-۲)$ ، $\vec{c}=(۲,-۱)$ ، $\vec{d}=(-۳,۲)$ ، $\vec{i}=(۱,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱)$ در دستگاه مختصات رو به رو رسم شده اند. (ص۶۹کتاب جدید)

مثال) اگر $\vec{AB}=۴\vec{i}+۶\vec{j}+۲\vec{k}$ و نقطه $M(۳,-۱,۲)$ وسط پاره خط AB باشد عرض نقطه‌ی B کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۸

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{cases} y_B - y_A = ۶ \\ \dfrac{y_B + y_A}{۲} = -۱ \Rightarrow y_B + y_A = -۲ \end{cases} \Rightarrow ۲y_B = ۴ \Rightarrow y_B = ۲$$

مثال) اگر $\vec{AB}(۱,۲,۳)$ و $\vec{AC}(۳,۲,۱)$ باشند، مختصات $\vec{BC}$ کدام است؟

۱) $(۲,۰,-۲)$ ۲) $(۴,۰,-۲)$ ۳) $(۴,۴,۴)$ ۴) $(۲,۲,-۲)$

جواب : گزینه ۱ درست است.

$$\vec{BC}=\vec{BA}+\vec{AC}=(-۱,-۲,-۳)+(۳,۲,۱)=(۲,۰,-۲)$$

۵) نقاط $A(۵,-۴,۱)$ ، $B(-۱,۲,۴)$، مفروض هستند و $\vec{AM}=\frac{۲}{۳}\vec{AB}$، مقدار $|\vec{OM}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۴}$ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۴)

اندازه بردار $\vec{AB}$: اگر $A(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $B(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو نقطه از فضا باشند آنگاه اندازه بردار $\vec{AB}$ به صورت زیر می باشد

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(b_۱-a_۱)^۲+(b_۲-a_۲)^۲+(b_۳-a_۳)^۲}$$

نکته : مختصات تصویر و اندازه‌ی تصویر بردار $a(a_۱,a_۲,a_۳)$ بر روی

الف : صفحه‌ی xoy به ترتیب برابر است با : $a'=a_۱i+a_۲j=(a_۱,a_۲,۰)$ و $\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}$

ب : صفحه‌ی yoz برابر است با : $a'=a_۲j+a_۳k=(۰,a_۲,a_۳)$ و $\sqrt{a_۲^۲+a_۳^۲}$

پ : صفحه‌ی xoz برابر است با : $a'=a_۱i+a_۳k=(a_۱,۰,a_۳)$ و $\sqrt{a_۱^۲+a_۳^۲}$

مثال) اگر اندازه‌ی تصاویر بردار a بر صفحات xoy و yoz و xoz بترتیب $۳\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}$ باشد اندازه بردار a کدام است؟

۱) ۴   ۲) ۷   ۳) ۱۴   ۴) قابل محاسبه نیست.

جواب : گزینه ۴ درست است. روش اوّل :

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۱۸ \\ y^۲ + z^۲ = ۱۲ \\ x^۲ + z^۲ = ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^۲ - x^۲ = -۶ \\ x^۲ + z^۲ = ۲ \end{cases} \Rightarrow z^۲ = -۲$$

روش دوم : حل به روش نادرست : یعنی فرمول فوق شرط داشتن جواب دستگاه باید کنترل شود

$$\begin{cases} \sqrt{x^۲ + y^۲} = ۳\sqrt{۲} \\ \sqrt{y^۲ + z^۲} = ۲\sqrt{۳} \\ \sqrt{x^۲ + z^۲} = \sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۱۸ \\ y^۲ + z^۲ = ۱۲ \\ x^۲ + z^۲ = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲(x^۲ + y^۲ + z^۲) = ۳۲ \Rightarrow |a| = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

مثال) اندازه تصویر بردار $\vec{v}\,(۳,۱,۲)$ بر صفحه‌ی yoz کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۲۰}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۴}$ **(کنکور سراسری ریاضی ۷۴)**

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $\sqrt{۵} = \sqrt{۱+۴} = \sqrt{y^۲ + z^۲} =$ اندازه تصویر بردار $\vec{v}\,(۳,۱,۲)$ بر صفحه‌ی yoz

مثال) طول تصویر بردار $\vec{AB}$ که در آن $A(۱,۲,۳)$ و $B(۵,۵,۱)$ می باشد، بر صفحه‌ی xoy برابر است با :

۱) ۵   ۲) $\sqrt{۲۹}$ ۳) ۷   ۴) ۹   **(کنکور آزادریاضی۷۷)**

جواب : گزینه ۱ درست است. روش اوّل :

$۵ = \sqrt{۱۶+۹} = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲} =$ طول تصویر بردار AB بر صفحه xoy

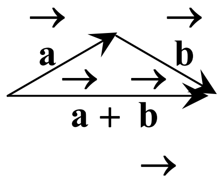
روش دوم : $\vec{AB} = (x_۲ - x_۱, y_۲ - y_۱, z_۲ - z_۱) = (۴,۳,-۲) \Rightarrow \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$

اعمال روی بردارها : جمع و تفریق بردارها :

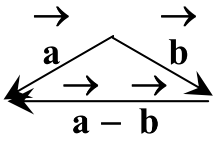
روش مختصاتی : اگر $a(a_۱, a_۲, a_۳)$ و $b(b_۱, b_۲, b_۳)$ دو بردار از فضا باشند آنگاه :

(مجموع و یا تفاضل دو بردار برابر با مجموع و یا تفاضل مؤلفه های همنام آن ها) $a \pm b = (a_۱ \pm b_۱, a_۲ \pm b_۲, a_۳ \pm b_۳)$

روش هندسی (روش مثلث) :

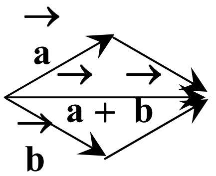


الف) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را طوری قرار می دهیم که ابتدای بردار $\vec{b}$ بر انتهای بردار $\vec{a}$ واقع شود برداری که ابتدای بردار $\vec{a}$ را به انتهای بردار $\vec{b}$ وصل می نماید بردار $\vec{a} + \vec{b}$ رامشخص می کند .



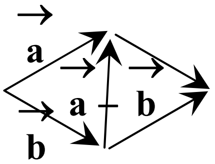
ب) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را طوری قرار می دهیم که ابتدای بردار $\vec{b}$ بر ابتدای بردار $\vec{a}$ واقع شود برداری که انتهای بردار $\vec{b}$ را به انتهای بردار $\vec{a}$ وصل می نماید تفاضل بردار $\vec{b}$ از بردار $\vec{a}$ یعنی بردار $\vec{a} - \vec{b}$ را مشخص می کند .

روش هندسی (روش متوازی الاضلاع) :



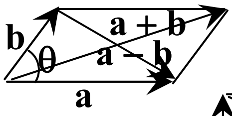
الف) با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازی الاضلاعی می سازیم که ابتدای این دو بردار یک رأس آن باشد بردار $\vec{a} + \vec{b}$ قطری از متوازی الاضلاع است که از ابتدای دو بردار می گذرد.

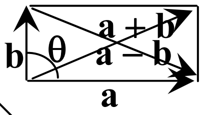
ب) با دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازی الاضلاعی می سازیم که ابتدای این دو بردار یک رأس آن باشد

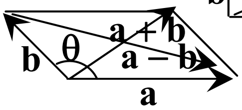


بردار $\vec{a} - \vec{b}$ قطری از متوازی الاضلاع است که انتهای بردار $\vec{b}$ را به انتهای بردار $\vec{a}$ وصل می کند .

نکته : هرگاه بردارهای هم مبدأ a و b دو ضلع مجاور یک متوازی الاضلاع و θ زاویه‌ی بین آنها باشد رابطه های زیر همواره بین دو بردار $a+b$ و $a-b$ برقرار است .







الف : $0 < \hat{\theta} < 90^\circ \Leftrightarrow |a+b| > |a-b|$

ب : $\hat{\theta} = 90^\circ \Leftrightarrow |a+b| = |a-b|$

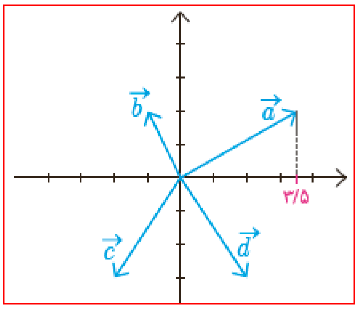
پ : $90 < \hat{\theta} < 180^\circ \Leftrightarrow |a+b| < |a-b|$

توجه: اگربردارهای a و b دو ضلع مجاور متوازی الاضلاع باشند آنگاه بردارهای $a+b$ و $a-b$ قطرهای آن متوازی الاضلاع خواهند بود .

نتیجه ۱ : اگر بردارهای a و b بر هم عمود باشند متوازی الاضلاع تبدیل به‌یک مستطیل می شود و در نتیجه قطرهای آن با هم برابر خواهند بود و بعکس . یعنی : $a \perp b \Leftrightarrow |a+b| = |a-b|$

نتیجه ۲ : اگر اندازه‌ی بردارهای a و b با هم برابر باشد متوازی الاضلاع تبدیل به لوزی می شود و درنتیجه قطرهای آن بر هم عمود بوده و نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار a و b خواهند شد و بعکس . یعنی $(a+b) \perp (a-b) \Leftrightarrow |a| = |b|$

کار در کلاس : در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده است.



الف) مختصات بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را یافته و آن را رسم کنید.

ب) قرینه بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را رسم کرده و مختصات آنها را به دست آورید.

ج) مؤلفه های بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{d} - \vec{c}$ را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هر یک را به دست آورید.

د) هر یک از بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ ، $\vec{c}$ ، $\vec{d}$ ، $\vec{a} + \vec{b}$ ، $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{d} - \vec{c}$ را بر حسب بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به دست آورید. (ص۷۳کتاب جدید)

مثال) اگر بردارهای $\mathbf{a}(۲,۱,۲)$ و $\mathbf{b}(۰,۲,۴)$ دو ضلع مجاور یک متوازی الاضلاع باشند آنگاه اندازه بزرگترین قطر این متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) ۳   ۲) $\sqrt{۲۰}$ ۳) ۷   ۴) ۱۰

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(۲,-۱,-۲)\Rightarrow|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(۲,۳,۶)\Rightarrow|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷$$

مثال) نقاط $\mathbf{A}(۴,۳,۰)$ ، $\mathbf{B}(۶,۴,۲)$ و $\mathbf{C}(۶,۶,۶)$ رأس های متوالی یک متوازی الاضلاع و نقطه‌ی $\mathbf{O}(۵,۴/۵,۳)$ مرکز تقارن آن است، اندازه بزرگترین قطر این متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) ۳   ۲) $\sqrt{۲۰}$ ۳) ۷   ۴) ۱۰

جواب: گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل :

$$\overrightarrow{\mathbf{BD}}=۲\overrightarrow{\mathbf{BO}}=۲(۵-۶,۴/۵-۴,۳-۲)=(۲,۱,۲)\Rightarrow\left|\overrightarrow{\mathbf{BD}}\right|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

$$\overrightarrow{\mathbf{AC}}=۲\overrightarrow{\mathbf{AO}}=۲(۵-۴,۴/۵-۳,۳-۰)=(۲,۳,۶)\Rightarrow\left|\overrightarrow{\mathbf{AC}}\right|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷$$

روش دوم :

$$\begin{cases}x_A+x_C=۲x_O\\ y_A+y_C=۲y_O\\ z_A+z_C=۲z_O\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=۱۰-۴=۶\\ y_C=۹-۳=۶\\ z_C=۶-۰=۶\end{cases}\Rightarrow \mathbf{a}=\overrightarrow{\mathbf{AB}}(۲,۱,۲)\ \text{و}\ \mathbf{b}=\overrightarrow{\mathbf{BC}}(۰,۲,۴)$$

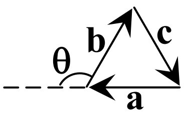
$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=(۲,-۱,-۲)\Rightarrow|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{۴+۱+۴}=۳$$

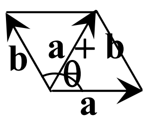
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(۲,۳,۶)\Rightarrow|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷$$

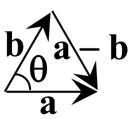
زاویه بین دو بردار : اگر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ مفروض باشند و از یک نقطه اختیاری $\mathbf{O}$ دو بردار $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ و $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ را به ترتیب برابر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ رسم کنیم، هر زاویه‌ی مثبت یا منفی یا صفر را که باید $\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ حول نقطه‌ی $\mathbf{O}$ دوران کند تا بر راستای $\overrightarrow{\mathbf{OB}}$ منطبق شود زاویه بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ می نامیم و آن را با نماد $(\mathbf{v},\mathbf{v}')$ نشان می دهیم. بنابراین $(\mathbf{v}',\mathbf{v})=-(\mathbf{v},\mathbf{v}')$

نکته : زاویه اصلی بین دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{v}'$ همواره به صورت $۰\le(\mathbf{v},\mathbf{v}')\le ۱۸۰$ است.

نکته:الف :هر گاه سه بردار هم اندازه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ اضلاع یک مثلث بوده و $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=۰$ باشدآنگاه زاویه‌ی بین دوبدوی این سه بردار۱۲۰درجه است.







ب : برای دو بردار متمایز $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$: اگر $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ آنگاه زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابر ۱۲۰ درجه و اگر $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ آنگاه زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابر ۶۰ درجه است.

مثال)اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دوبردارغیرصفروناموازی باشند. از کدام یک از گزینه های زیر می توان نتیجه گرفت که همواره $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمودند؟

۱) $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ ۲) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\perp(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ ۳) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ ۴) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمود باشند متوازی الاضلاع تبدیل به‌یک مستطیل می شود و در نتیجه قطرهای آن با هم برابر خواهند بود و بعکس.

مثال) بردارهای واحد $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با یکدیگر زاویه‌ی ۶۰ درجه می سازند زاویه‌ی بین بردار $\mathbf{a+b}$ با بردار $\mathbf{a}$ کدام است؟

۱) ۳۰ درجه   ۲) ۴۵ درجه   ۳) ۶۰ درجه   ۴) ۹۰ درجه   جواب : گزینه۱ صحیح است. بردار $\mathbf{a+b}$ قطر متوازی الاضلاعی است که با بردارهای واحد $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ساخته می شود و به این معنی است که متوازی الاضلاع فوق لوزی است، در نتیجه قطر $\mathbf{a+b}$ نیمساز زاویه‌ی بین این دو بردار است.

مثال) زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ ، ۶۰ درجه و بردارهای $\mathbf{a+b}$ و $\mathbf{a-b}$ عمود بر هم هستند. $|\mathbf{a+b}|$ چند برابر $|\mathbf{a}|$ است؟

۱) ۳   ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱   ۴) ۲

جواب : گزینه ۲ درست است. بردارهای $\mathbf{a+b}$ و $\mathbf{a-b}$ دو قطر متوازی الاضلاع اندکه با دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ساخته می شوند. چون بردارهای $\mathbf{a+b}$ و $\mathbf{a-b}$ عمود بر هم هستند یعنی دو قطر متوازی الاضلاع بر هم عمودند، پس متوازی الاضلاع فوق لوزی است. و چون زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ برابر ۶۰ درجه است پس بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a-b}$ سه ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع اند لذا $|\mathbf{a+b}|$ اندازه‌ی برابر ارتفاع این مثلث متساوی الاضلاع است.

$$|\mathbf{a+b}| = ۲\mathbf{h} = \frac{۲\times|\mathbf{a}|\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}|\mathbf{a}|$$

مثال) اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار ناصفر و $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=|\mathbf{a-b}|$ باشند، در این صورت زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a+b}$ چند درجه است؟

۱) ۹۰   ۲) ۶۰   ۳) ۴۵   ۴) ۳۰

جواب : گزینه ۴ درست است. بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a-b}$ سه ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع اند لذا زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابر ۶۰ درجه است. متوازی الاضلاعی که با دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ساخته می شود یک لوزی است قطر $\mathbf{a+b}$ نیمساز زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ می باشد در نتیجه زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a+b}$ برابر ۳۰ درجه است.

مثال) اگر بردارهای $(۳,۵,۸)$ و $(۱,۱,۴)$ قطرهای یک متوازی الاضلاع باشند محیط متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۷   ۳) ۲۰   ۴) ۲۱

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $\mathbf{a+b}=(۳,۵,۸)$ و $\mathbf{a-b}=(۱,۱,۴)$ و $(\mathbf{a+b})+(\mathbf{a-b})=(۴,۶,۱۲)$

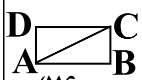
$\Rightarrow ۲\mathbf{a}=(۴,۶,۱۲)\Rightarrow \mathbf{a}=(۲,۳,۶)$ و $(\mathbf{a+b})-(\mathbf{a-b})=(۲,۴,۴)\Rightarrow ۲\mathbf{b}=(۲,۴,۴)\Rightarrow \mathbf{b}=(۱,۲,۲)$

$\Rightarrow |\mathbf{a}|=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷$ و $|\mathbf{b}|=\sqrt{۱+۴+۴}=۳\Rightarrow \mathbf{P}=۲(۳+۷)=۲۰$

۶) در مثلث $\mathbf{ABC}$ اگر $\mathbf{G}$ محل تلاقی سه میانه باشد حاصل $\overrightarrow{\mathbf{AG}}+\overrightarrow{\mathbf{BG}}+\overrightarrow{\mathbf{CG}}$ کدام است؟ ($\mathbf{I}$ مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و $\mathbf{M}$ مرکز دایره‌ی محیطی و $\mathbf{O}$ مبدأ مختصات است.)

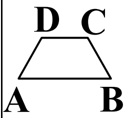
۱) $۳\overrightarrow{\mathbf{IG}}$ ۲) $\overrightarrow{\mathbf{o}}$ ۳) $۳\overrightarrow{\mathbf{OG}}$ ۴) $۳\overrightarrow{\mathbf{MG}}$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۷)

۷) در مستطیل $\mathbf{ABCD}$ حاصل $\overrightarrow{\mathbf{CA}}+\overrightarrow{\mathbf{DB}}$ کدام است؟



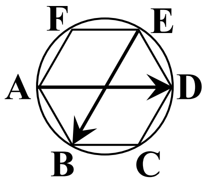
۱) $۲\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ ۲) $\overrightarrow{\mathbf{o}}$ ۳) $۲\overrightarrow{\mathbf{DA}}$ ۴) $۲\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ (کنکور آزاد تجربی ۷۶)

۸) در ذوزنقه‌ی $ABCD$ داریم : $AD = DC = CB = \frac{AB}{۲}$. در این صورت $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ هم سنگ است با :



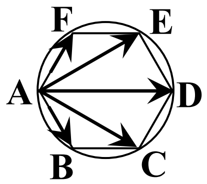
۱) $\overrightarrow{DC}$ ۲) $\overrightarrow{CD}$ ۳) $۲\overrightarrow{BC}$ ۴) $\overrightarrow{AB}$ (کنکور آزاد تجربی ۶۸)

۹) در شکل مقابل شش ضلعی منتظم در دایره $C(O,R)$ محاط است. حاصل عبارت $\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}\right|$ کدام است؟



۱) ۰ ۲) $۲R$ ۳) $۴R$ ۴) $۶R$

۱۰) در شکل مقابل دایره $C(O,R)$ به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده است. حاصل عبارت $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}\right|$ کدام است؟



۱) ۰ ۲) $۲R$ ۳) $۴R$ ۴) $۶R$

مثال) دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ به طول های مساوی با محور ox به ترتیب زوایای ۴۳ و ۷۵ درجه می سازند زاویه بردار $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ با محور ox چند درجه است؟

۱) ۵۷ ۲) ۵۸ ۳) ۵۹ ۴) ۶۰ (کنکور سراسری تجربی ۶۵ و کنکور آزاد ریاضی ۷۶)

جواب : گزینه ۳ درست است. $\frac{۴۳ + ۷۵}{۲} = \frac{۱۱۸}{۲} = ۵۹$

ضرب عدد (اسکالر) در بردار : حاصل ضرب عدد حقیقی r در بردار a برداری مانند b است که اندازه‌ی بردار b برابر $|r|$ در اندازه‌ی بردار a به طوری که

$b = ra, r > ۰, |b| = r|a|$

الف : اگر $r > ۰$ آنگاه دو بردار a و b موازی و هم جهت اند و زاویه بین آنها صفر درجه می باشد.

ب : اگر $r = ۰$ آنگاه بردار b، بردار صفر است.

پ : اگر $r < ۰$ آنگاه دو بردار a و b موازی و غیرهم جهت اند و زاویه بین آنها ۱۸۰ درجه می باشد.

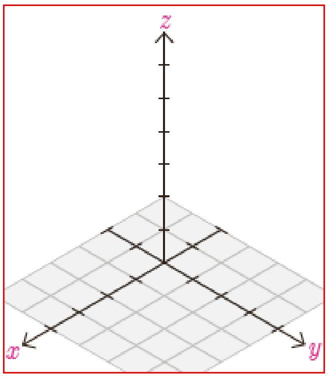
$b = ra, r < ۰, |b| = -r|a|$

نکته : برای دو بردار a و b داریم : $\big||a|b\big| = \big|a|b|\big| = |a||b|$

نکته : اگر بردارهای a و b بر هم عمود باشند آنگاه هر مضرب غیر صفر از بردارهای a و b بر هم عمود خواهند بود و در نتیجه متوازی الاضلاع حاصل ازمضارب این دو بردار تبدیل به‌یک مستطیل می شود و در نتیجه قطرهای آن با هم برابر خواهند بود.

یعنی : $a \perp b \Rightarrow |\alpha a + \beta b| = |\alpha a - \beta b|$

کار در کلاس : نقاط $A(2,3,1)$ و $B(-1,2,2)$ و $C(3,4,0)$ و $D(1,0,-1)$ را در یک دستگاه R^3 در نظر بگیرید، اگر $\vec a$ و $\vec b$ و $\vec c$ و $\vec d$ بردارهایی در R^3 با نقاط انتهایی به ترتیب A و B و C و D باشند و هر یک از بردارهای زیر را به دست آورید. $\vec a + 2\vec b =$ $\quad \vec a + (\vec b + \vec c) =$ $\quad (\vec a + \vec b) + \vec c =$ $\quad -2(\vec b + \vec c) =$ $\quad -2\vec b - 2\vec c =$



(ص۷۴کتاب جدید)

مثال) به ازای کدام مقدار m در تساوی $\vec{AC} + \vec{BC} + 2\vec{CD} = (m+5)\vec{AD}$ فقط نقاط A و B بر هم منطبق می شوند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۳

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $2\vec{AC} + 2\vec{CD} = (m+5)\vec{AD} \Rightarrow 2\vec{AD} = (m+5)\vec{AD} \Rightarrow m+5 = 2 \Rightarrow m = -3$

مثال) اگر چهار بردار $\vec{OA}$، $\vec{OB}$، $\vec{OC}$ و $\vec{OD}$ در تساوی $\vec{OA} - \vec{OB} = k(\vec{OD} - \vec{OC})$ صدق کنند، چهارضلعی $ABCD$ همواره کدام است؟ $(k > 1)$

۱) ذوزنقه ۲) لوزی ۳) متوازی الاضلاع ۴) مستطیل (کنکور سراسری تجربی ۷۳)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. نکته : هر گاه‌یک بردار در عدد مثبت k ضرب شود برداری است هم راستا با آن بردار بوده و طول آن نیز k برابر می گردد. $\Rightarrow \vec{BA} = k\vec{CD} \Rightarrow \vec{BA} \parallel \vec{CD}$ و $\vec{BA} \neq \vec{CD} \Rightarrow$ ذوزنقه

مثال)اگر a و b دو بردار عمود بر هم و $2a + 3b = (m, m+2, m-2)$ و $2a - 3b = (-1,1,9)$باشد، m کدام عدد است؟

۱) ± 1 ۲) ± 3 ۳) ± 5 ۴) ± 7

جواب : گزینه ۳ صحیح است. می دانیم : $a \perp b \Rightarrow |\alpha a + \beta b| = |\alpha a - \beta b|$

$$a \perp b \Rightarrow |2a + 3b| = |2a - 3b| \Rightarrow |2a + 3b|^2 = |2a - 3b|^2$$

$$\Rightarrow m^2 + (m+2)^2 + (m-2)^2 = 1 + 1 + 81 \Rightarrow 3m^2 = 75 \Rightarrow m = \pm 5$$

ضرب عدد (اسکالر) در مختصات بردار : حاصل ضرب عدد حقیقی r در بردار $a(a_1, a_2, a_3)$ به صورت زیر تعریف می شود : $ra(a_1, a_2, a_3) = (ra_1, ra_2, ra_3)$

۱۱) اگر $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ حاصل $\dfrac{|\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2|}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (کنکور آزاد ریاضی-۸۱)

نکته شرط توازی دو بردار : دو بردار $a(a_1,a_2,a_3)$ و $b(b_1,b_2,b_3)$ را موازی (یا هم راستا) گویند اگر و تنها اگر یکی از این دو بردار، مضرب غیرصفری از بردار دیگر باشد . مثلاً $\exists t \in R : a = tb$ بنابراین :

$$a \parallel b \Leftrightarrow \exists t \in R : a = bt \Leftrightarrow (a_1,a_2,a_3) = (b_1t, b_2t, b_3t) \quad (\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = t \ \ (b_1b_3b_3 \neq 0) \text{ و یا})$$

نتیجه : اگر $a(a_1,a_2,a_3)$ و $b(b_1,b_2,b_3)$ $(b_1b_2b_3 \neq 0)$ دو بردار موازی باشند آنگاه : $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

مثال) دو بردار $a(m-1,2,4)$ و $b(3,1,1-n)$ موازی اند، حاصل mn کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) ۱- ۴) ۷-

جواب : گزینه ۴ صحیح است $\frac{m-1}{3} = \frac{2}{1} = \frac{4}{1-n} \Rightarrow m - 1 = 6 \Rightarrow m = 7$ و $2 - 2n = 4 \Rightarrow n = -1 \Rightarrow mn = -7$

مثال) اگر بردار b موازی با بردار $a(1,2,-2)$ و $|b| = 6$ باشد، تصاویر بردار b کدام است؟

۱) $(2,4,4)$ ۲) $(-2,4,4)$ ۳) $(2,-4,4)$ ۴) $(2,4,-4)$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل : آزمون گزینه ها دیده می شود که در گزینه ۴ نسبت مؤلفه ها برابر و اندازه بردار ۶ است.

روش دوم : $b \parallel a \Rightarrow b = ra \Rightarrow b = (r,2r,-2r), |b| = |r||a| \Rightarrow 6 = |r|\sqrt{4+1+4}$
$\Rightarrow |r| = 2 \Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow b(\pm 2, \pm 4, \mp 4)$

روش سوم : $b \parallel a \Rightarrow b = ra \Rightarrow b(r,2r,-2r) \Rightarrow |b| = 6 \Rightarrow \sqrt{r^2 + 4r^2 + 4r^2} = 6 \Rightarrow \pm 3r = 6$
$\Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow b(\pm 2, \pm 4, \mp 4)$

نکته : اگر سه نقطه A و B و C بر یک استقامت (یک خط راست) باشند آنگاه $\vec{AB} \parallel \vec{AC}$ و $\vec{AB} \parallel \vec{BC}$ و $\vec{BC} \parallel \vec{AC}$

مثال) اگر نقاط $A(1,3,5)$، $B(2,6,8)$ و $C(3,9,m-4)$ سه نقطه‌ی واقع بر یک خط راست باشند، m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۵ ۴) صفر

جواب : گزینه ۳ صحیح $\vec{AB}(1,3,3)$ و $\vec{AC}(2,6,m-9)$ و $\vec{AB} \parallel \vec{AC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{3}{m-9} \Rightarrow m - 9 = 6 \Rightarrow m = 15$

مثال) چند نقطه در فضا دارند که فاصله‌ی آن از سه نقطه‌ی $A(1,2,3)$، $B(3,1,2)$ و $C(-3,4,5)$ به‌یک اندازه باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A = 3 - 1 = 2 \\ y_B - y_A = 1 - 2 = -1 \\ z_B - z_A = 2 - 3 = -1 \end{array}\right. \text{ و } \vec{AC}\left|\begin{array}{l} -4 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right. \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{AC}$$

۱۲) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار ناصفر باشندآنگاه زاویه بین دو بردار $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ و $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) حاده   ۳) قائمه   ۴) منفرجه   (کنکور سراسری تجربی ۶۷)

قضیه : به ازاء همه بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ و بردار صفر و تمام اعدادحقیقی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$، خواص زیربرقرارند :

۱) مجموعه بردارها نسبت به عمل جمع بردارها بسته است یعنی جمع دو بردار همواره‌یک بردار است .

۲) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (خاصیت جابجایی جمع)   ۳) $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$ (خاصیت شرکت پذیری جمع)

۴) $\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{o}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$ (بردار صفرعضو خنثی جمع)   ۵) $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{o}$ ($-\mathbf{a}$ بردار قرینه $\mathbf{a}$)

۶) $۱\mathbf{a}=\mathbf{a}$ ۷) $\mathbf{ro}=\mathbf{o}$ ۸) $۰\mathbf{a}=\mathbf{o}$ ۹) $\mathbf{r}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{ra}+\mathbf{rb}$

۱۰) $(\mathbf{r}+\mathbf{s})\mathbf{a}=\mathbf{ra}+\mathbf{sa}$ ۱۱) $\mathbf{r}(\mathbf{sa})=(\mathbf{rs})\mathbf{a}$

بردارجهت $\mathbf{a}$ (بردار یکه نظیر بردار $\mathbf{a}$) : به ازای هر بردار غیر صفر $\mathbf{a}$، بردار جهت $\mathbf{a}$ با برداری به اندازه واحد طول که موازی و هم جهت با $\mathbf{a}$ است مشخص می شود . این بردار را با نماد $\mathbf{e_a}$ نشان داده و به صورت زیر محاسبه می کنند . $\mathbf{e_a}=\frac{۱}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$

$\vec{e}_a \quad \vec{a}$

نکته : الف : دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم جهت اند اگر و تنها اگر $\mathbf{e_a}=\mathbf{e_b}$

ب : دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ مختلف الجهت اند اگر و تنها اگر $\mathbf{e_a}=-\mathbf{e_b}$

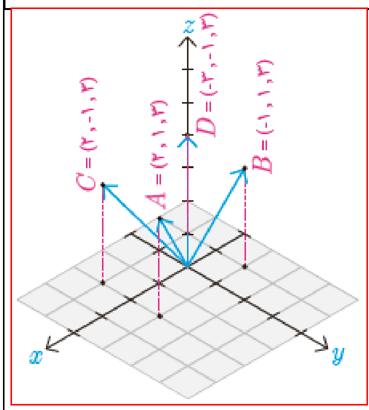
نتیجه : اگر $\mathbf{r}>۰$ باشد آنگاه $\mathbf{e_{ra}}=\mathbf{e_a}$ و اگر $\mathbf{r}<۰$ باشد آنگاه $\mathbf{e_{ra}}=-\mathbf{e_a}$

تمرین۱) چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده اند.

الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم مساحت و موازی هستند را بنویسید.

(ص۷۷کتاب جدید)



تمرین۲) نقاط با مختصات $P(۱,۰,۱)$، $Q(۰,-۱,-۲)$، $R(۳,۰,-۱)$ و $S(-۲,-۲,-۲)$ را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.
(ص۷۷کتاب جدید)

تمرین۳) در سؤال قبل طول پاره خط های PQ، RQ و PS را بیابید. **(ص۷۷کتاب جدید)**

تمرین۴)فرض کنید $P=(x_۰,y_۰,z_۰)$ و $Q(x_۱,y_۱,z_۱)$ مختصات نقطه M وسط پاره خط PQ را بیابید. **(ص۷۷کتاب جدید)**

تمرین۵) در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بیابید.

الف) $\vec{a}=(-\frac{۱}{۳},۰,۲)$ ، $\vec{b}=(\sqrt{۲},۱,۱)$ ، $r=۳$ ، $r\vec{a}-\vec{b}=?$

ب) $\vec{a}=۳\vec{i}+۲\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=(۳,۱,-۱)$ ، $r=-۱$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

ج) $\vec{a}=\sqrt{۲}\,\vec{i}-\vec{k}$ ، $\vec{b}=۳\vec{j}+\vec{k}$ ، $r=\frac{۱}{۵}$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$

د) $\vec{a}=۵\vec{k}+\vec{j}$ ، $\vec{b}=-\vec{k}+\vec{i}$ ، $r=\frac{۱}{۵}$ ، $r\vec{a}+\vec{b}=?$ **(ص۷۷کتاب جدید)**

تمرین۶) طول بردار $\vec{a}$ را در هر یک از حالات سؤال قبل بیابید. (ص۷۷کتاب جدید)

ضرب داخلی دو بردار (ضرب اسکالر، ضرب نقطه ای دو بردار) : فرض کنیم $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار غیر صفر و θ زاویه بین آن ها باشد. در این صورت ضرب داخلی $\mathbf{a}$ در $\mathbf{b}$ را که با نماد $\mathbf{a.b}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\mathrm{Cos}\theta \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi$$

قرارداد : اگرحداقل یکی از دو بردار $\mathbf{a}$ یا $\mathbf{b}$ صفر باشد آنگاه $\mathbf{a.b} = 0$

نتیجه (دستور تعیین زاویه‌ی بین دو بردار) : فرض کنیم $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار غیر صفر باشند و θ زاویه بین آن ها باشد.

در این صورت $\mathrm{Cos}\theta = \dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

مثال) اگر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با هم زاویه‌ی ۱۲۰ درجه بسازند و $|\mathbf{a}| = 3$ و $|\mathbf{b}| = 2$، حاصل ضرب داخلی این دو بردار چه قدر است؟

۱) ۱- ۲) ۲- ۳) ۳- ۴) ۴-

جواب : گزینه ۳ درست است. $\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = 3 \times 2 \times (-\frac{1}{2}) = -3$

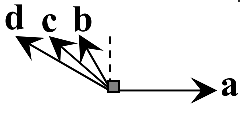
مثال) اگر $|\mathbf{b}| = -\mathbf{a.b} = 2|\mathbf{a}| = 2$ باشد، زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ کدام است؟

۱) ۶۰درجه ۲) ۹۰درجه ۳) ۱۲۰درجه ۴) ۱۸۰درجه

جواب : گزینه ۴ درست است. $|\mathbf{b}| = -\mathbf{a.b} = 2|\mathbf{a}| = 2 \Rightarrow |\mathbf{a}| = 1$

$$-\mathbf{a.b} = 2 \Rightarrow -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = 2 \Rightarrow -1 \times 1 \times 2\cos\theta = 2 \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = 180^\circ$$

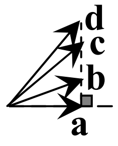
مثال) در شکل زیر حاصل ضرب داخلی کدام دو بردار از سایرین بزرگ تر است؟



۱) $\mathbf{a.b}$ ۲) $\mathbf{a.c}$ ۳) $\mathbf{a.d}$ ۴) هر سه یکسان است.

جواب : گزینه ۱ صحیح است. بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ را روی راستای بردار $\mathbf{a}$ تصویر می کنیم. تصویر این بردارها در خلاف جهت بردار $\mathbf{a}$ خواهند بود لذا اندازه‌ی جبری تصویر آن ها بر راستای بردار $\mathbf{a}$ منفی است در نتیجه هر کدام اندازه‌ی تصویر بزرگ تری بدهد منفی تر است. یعنی : $\mathbf{a.d} < \mathbf{a.c} < \mathbf{a.b}$

مثال) با توجه به شکل مقابل، حاصل عددی کدام گزینه بزرگتر است؟



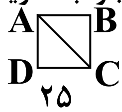
۱) $\mathbf{a.b}$ ۲) $\mathbf{a.c}$ ۳) $\mathbf{a.d}$ ۴) هر سه یکسان

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $\mathbf{a.b} = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}|\cos\theta) = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2$ و به طریق مشابه $\mathbf{a.c} = \mathbf{a.d} = |\mathbf{a}|^2$

مثال) نقاط $A(۲,۱,-۱)$ و $C(۲,-۲,۳)$ دو رأس غیر مجاور مربع $ABCD$ هستند. حاصل $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۲۵}{۲}$ ۳) $۲۵\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{\sqrt{۲}}$

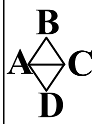
جواب : گزینه ۲ صحیح است. اندازه‌ی قطر مربع $۵ = \sqrt{۲۵} = \sqrt{(۲-۲)^۲+(-۲-۱)^۲+(۳+۱)^۲} = \left|\overrightarrow{AC}\right|$



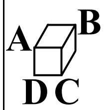
$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\right| = \frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$ اندازه‌ی ضلع مربع $\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos ۴۵^\circ = ۵\times\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲۵}{۲}$

۱۳) در لوزی شکل داده شده $۴ = \left|AC\right|$ و $۴ = \left|AD\right|$ مجموع حاصل ضرب های داخلی $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۸- ۳) ۸ ۴) ۱۶- (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۹)



مثال) در مکعب شکل زیر به ضلع ۳ حاصل ضرب داخلی $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ چقدر است؟



۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) صفر ۴) ۲ (کنکور ریاضی عصر آزاد ۸۵)

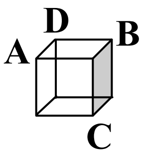
جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|AB\right|\left|AC\right|\cos ۶۰ = \sqrt{۲}\times ۳\times\sqrt{۲}\times ۳\times\frac{۱}{۲} = ۹$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \left|AC\right|\left|AD\right|\cos ۴۵ = \sqrt{۲}\times ۳\times ۳\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۹$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = ۹+۹ = ۱۸$$

۱۴) در مکعب شکل زیر اندازه هر ضلع مکعب ۱ است، حاصل $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$ کدام است؟

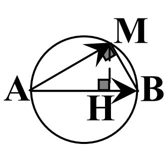


۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱-

مثال) نقاط A و B در صفحه مفروض اند. اگر $۴ = \left|AB\right|$ باشد، چند نقطه مانند M روی محیط دایره ای به قطر AB وجود دارد که $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = ۳۲$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۸)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : زاویه M محاطی و روبرو به قطر است پس قائمه می باشد لذا داریم :

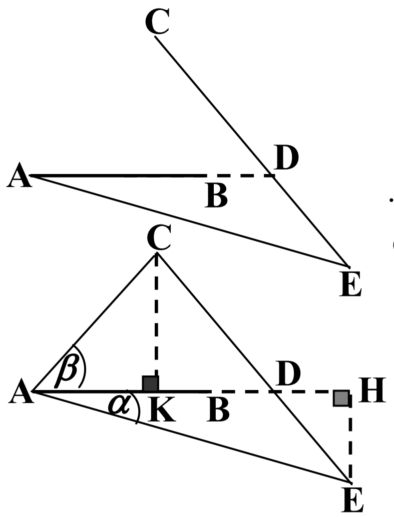


$$\cos A = \frac{\left|AH\right|}{\left|AM\right|} \Rightarrow \left|AH\right| = \left|AM\right|\cos A$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=۳۲\Rightarrow |AB||AM|\cos A=۳۲\Rightarrow ۴|AM|\cos A=۳۲\Rightarrow |AM|\cos A=۸\Rightarrow |AH|=۸$$

پس چنین نقطه ای وجود ندارد.

روش دوم : بنا به تعریف ضرب نقطه ای داریم : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=|AB||AM|\cos A$ چون $۰\le\hat{A}\le ۹۰$ پس $\cos A\le ۱$ ازطرفی $|AM|\le|AB|=۴$ در نتیجه همواره داریم : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=|AB||AM|\cos A\le ۱۶$



مثال) با توجه به شکل کدام گزینه عددی بزرگتراست؟

۱) $(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD})$ ۲) $(\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AE})$ ۳) $(\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AC})$ ۴) هرسه یکسان است.

(کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۳)

جواب : گزینه ۲ درست است.

$$(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD})=|AB||AD|\cos 0=|AB||AD|$$

$$(\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AE})=|AB||AE|\cos\alpha=|AB||AH|>|AB||AD|$$

$$(\overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AC})=|AD||AC|\cos\beta=|AD||AK|<|AD||AB|$$

خواص (ویژگی های) ضرب داخلی : فرض کنیم a و b و c سه بردار و $r\in R$ باشد دراین صورت :

الف : ضرب داخلی بردارها در فضا بسته نیست یعنی حاصل ضرب داخلی دو بردار یک بردار نیست.

ب : (ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد) $a.b=b.a$

اثبات : $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳=b_۱a_۱+b_۲a_۲+b_۳a_۳=\overrightarrow{b}.\overrightarrow{a}$

پ : در حالت کلی ضرب داخلی بردارها خاصیت شرکت پذیری ندارد.

ت : ضرب داخلی دو بردار دارای عضو خنثی نیست.

ث : ضرب داخلی دو بردار دارای عضو وارون نیست.

ج : ضرب داخلی بردارها دارای خاصیت حذف نمی باشد. به عبارت دیگر در حالت کلی $a.b=a.c\not\Rightarrow b=c$ و $a\neq o$

چ : $ra.b=a.(rb)=r(a.b)$

ح : $a.a=x^۲+y^۲+z^۲$ و $a.a\ge ۰\Rightarrow a.a=|a||a|$

اثبات : $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{a}=a_۱a_۱+a_۲a_۲+a_۳a_۳=a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲=\left|\overrightarrow{a}\right|^۲$

خ : حالت خاص : $i.i=j.j=k.k=۱$

د : (ضرب داخلی نسبت به اعمال جمع و تفریق بردارها دارای خاصیت پخشی است) $a.(b\pm c)=a.b\pm a.c$

اثبات : $\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=a_۱(b_۱+c_۱)+a_۲(b_۲+c_۲)+a_۳(b_۳+c_۳)$

$$=a_۱b_۱+a_۱c_۱+a_۲b_۲+a_۲c_۲+a_۳b_۳+a_۳c_۳$$

$$=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳+a_۱c_۱+a_۲c_۲+a_۳c_۳=\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}$$

ذ : ضرب داخلی دو بردار غیرصفر عددی است مثبت یا صفر یا منفی اگر و تنها اگر زاویه‌ی بین بردارها صفر یا حاده یا قائمه یا منفرجه

یا ۱۸۰ درجه باشد.

$$\begin{cases} a,b \neq ۰, a.b > ۰ \Leftrightarrow ۰ \leq \hat{\theta} < \dfrac{\pi}{۲} \\ a,b \neq ۰, a.b = ۰ \Leftrightarrow \hat{\theta} = \dfrac{\pi}{۲} \\ a,b \neq ۰, a.b < ۰ \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{۲} < \hat{\theta} \leq \pi \end{cases}$$

اثبات :

$$a,b \neq o \text{ و } a.b = ۰ \Leftrightarrow |a||b|\cos\theta = ۰ \underset{|\vec{b}| \neq ۰}{\overset{|\vec{a}| \neq ۰}{\Leftrightarrow}} \cos\theta = ۰ \overset{۰ \leq \theta \leq \frac{\pi}{۲}}{\Leftrightarrow} \hat{\theta} = \frac{\pi}{۲} \Leftrightarrow a \perp b$$

ر : حالت خاص : $i.j = ۰$ و $j.k = ۰$ و $k.i = ۰$

ز : $a.b = a.c \Rightarrow a \perp (b - c)$

ژ : اگر دو بردار بر هم عمود و یا حداقل یکی از آنها صفر باشد آن گاه ضرب داخلی دو بردار صفر است.

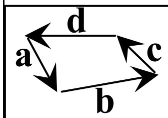
س : $\vec{a} \cdot \vec{o} = ۰$ و $\vec{o} \cdot \vec{a} = ۰$

مثال) ضرب درونی بردارها در فضا کدام ویژگی را دارد؟

۱) بسته بودن   ۲) جابجایی   ۳) شرکت پذیری   ۴) عضوخنثی   (کنکور سراسری ریاضی ۷۰)

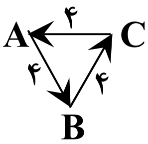
جواب : گزینه ۲ صحیح است.

نکته : اگر برآیند چند بردار صفر باشد، در این صورت نقطه‌ی ابتدایی اولین بردار و نقطه‌ی انتهایی آخرین بردار بر روی هم بوده اند . به عنوان مثال :



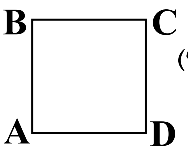
$\Leftrightarrow a + b + c + d = o$

۱۵) در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۴، حاصل $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ چه قدر است؟



۱) ۸-   ۲) ۲۴   ۳) ۲۴-   ۴) ۸   (کنکور آزاد ریاضی۸۹خارج از کشور)

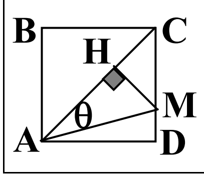
مثال) با توجه به شکل چند نقطه مانند M روی محیط مربع $ABCD$ وجود دارد که $\vec{AM} \cdot \vec{AC} = \frac{۱}{۲}|AC|^۲$



۱) ۱   ۲) صفر   ۳) ۲   ۴) بیشمار   (کنکور آزاد ریاضی صبح ۹۰)

جواب :. گزینه ۳ صحیح است.

$$\vec{AM} \cdot \vec{AC} = \frac{۱}{۲}|AC|^۲ \Rightarrow |\vec{AM}||\vec{AC}|\cos\theta = \frac{۱}{۲}|AC|^۲ \Rightarrow |\vec{AM}|\cos\theta = \frac{۱}{۲}|AC| \Rightarrow |AH| = \frac{۱}{۲}|AC|$$



پس H تصویر نقاط D و B است. لذا فقط دو نقطه D و B دارای چنین ویژگی هستند.

مثال) اگر $|\vec{a}|=۲$ و $|\vec{b}|=۳$ و $\vec{a}.\vec{b}=۴$ باشد، حاصل ضرب داخلی $(\vec{a}+۲\vec{b}).(۳\vec{a}+\vec{b})$ چقدر است؟

۱) ۲۸ ۲) ۵۸ ۳) ۳۰ ۴) ۵۰ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۹)

جواب: گزینه ۲ صحیح است. $(\vec{a}+۲\vec{b}).(۳\vec{a}+\vec{b})=۳|\vec{a}|^۲+۷\vec{a}.\vec{b}+۲|\vec{b}|^۲=۱۲+۲۸+۱۸=۵۸$

مثال) الف) تحقیق کنید به ازاء هر دو بردار u و v ,$(v\neq ۰)$ بردار $u-\frac{(u.v)v}{|v|^۲}$ بر بردار v عمود است.

جواب : $v.(u-\frac{(u.v)v}{|v|^۲})=v.u-\frac{(u.v)(v.v)}{|v|^۲}=v.u-v.u=۰$

ب) تحقیق کنید به ازاء هر سه بردار غیر صفر a و b و c بردار $b(a.c)-c(a.b)$ بر بردار a عمود است.

جواب : $a.[b(a.c)-c(a.b)]=(a.b)(a.c)-(a.c)(a.b)=۰$

مثال) در کدام حالت حاصل ضرب عددی بردار غیر صفر $\vec{a}$ در مجموع دو بردار غیر صفر $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ صفر نمی باشد؟

۱) بردار $\vec{X}$ قرینه بردار $\vec{Y}$ ۲) بردار $\vec{a}$ فقط بر یکی از دو بردار $\vec{X}$ یا $\vec{Y}$ عمود.

۳) سه بردار دو به دو عمود بر هم. ۴) بردار $\vec{a}$ بر صفحه دو بردار $\vec{X}$ و $\vec{Y}$ عمود. (کنکور سراسری ریاضی ۸۶)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $a\perp X, a\not\perp Y\Rightarrow a.(X+Y)=a.X+a.Y=۰+a.Y\neq ۰$

مثال)اگر a و b دو بردار هم اندازه بوده و دو بردار $a-۲b$ و $۵a+۴b$ بر هم عمود باشند زاویه‌ی بین دو بردار a و b کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $(a-۲b)\perp(۵a+۴b)\Rightarrow(a-۲b).(۵a+۴b)=۰\Rightarrow ۵|a|^۲-۶a.b-۸|b|^۲=۰$

$\xrightarrow{|a|=|b|}-۶\cos\theta-۳=۰\Rightarrow\cos\theta=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{۲\pi}{۳}$

مثال) اگر بردارهای a و b قطرهای یک مربع باشند، m چقدر باشد که $۲a-b$ و $a+mb$ قطرهای یک لوزی باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

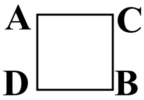
جواب : گزینه ۲ صحیح است. $|a|=|b|$ و $a\perp b\Rightarrow a.b=۰$ و $(۲a-b)\perp(a+mb)\Rightarrow(۲a-b).(a+mb)=۰$

$۲|a|^۲-m|b|^۲+(۲m-۱)a.b=۰\Rightarrow ۲|a|^۲=m|b|^۲\Rightarrow m=۲$

۱۶) اگر بردارهای a و b قطرهای یک مربع باشند، m چقدر باشد که $۳a-۲b$ و $۲a+mb$ قطرهای یک لوزی باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مثال) در مربع $ABCD$ به قطر ۲ حاصل $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ برابر است با :

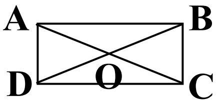


۱) ۸   ۲) ۶   ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۸\sqrt{۲}$ (کنکور ریاضی صبح آزاد ۸۴)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}.۲\overrightarrow{AB}=۲\left|\overrightarrow{AB}\right|^{۲}=۸$$

مثال) در مستطیل $ABCD$ به اضلاع $AB=۱۲$ و $BC=۵$ نقطه O نقطه تلاقی اقطار است حاصل ضرب داخلی $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}$ کدام است؟

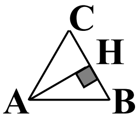


۱) $\frac{۱۶۹}{۲}$ ۲) ۹۷   ۳) ۶۱   ۴) $\frac{۹۷}{۲}$ (کنکور ریاضی صبح آزاد ۸۵)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $AC=\sqrt{۱۴۴+۲۵}=۱۳$ و $AO=\frac{۱۳}{۲}$

$$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}=|AO||AC|\cos ۰=\frac{۱۳}{۲}\times ۱۳=\frac{۱۶۹}{۲}$$

۱۷) در مثلث متساوی الاضلاع شکل زیر به ضلع ۲ حاصل $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$ چقدر است؟



۱) ۹   ۲) $\frac{۹}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) ۱۲   (کنکور ریاضی عصر آزاد ۸۴)

نکته : اگر a و b و c سه بردار دلخواه و $a+b$ و $a-b$ دو قطر بنا شده روی دو بردار a و b باشند، آنگاه داریم :

الف : $(a+b).(a-b)=|a|^{۲}-|b|^{۲}$ ب : $(a+b)\perp(a-b)\Leftrightarrow |a|=|b|$

پ : $|a\pm b|^{۲}=(a\pm b).(a\pm b)=|a|^{۲}+|b|^{۲}\pm ۲a.b$ ت : $|a+b|^{۲}+|a-b|^{۲}=۲(|a|^{۲}+|b|^{۲})$

ث : $|a+b|^{۲}-|a-b|^{۲}=۴a.b$ ج : $|a+b|\le|a|+|b|$ (نامساوی مثلثی)

چ : فرض کنید a و b دو بردار غیر صفر باشند اگر $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ آنگاه $|a\pm b|^{۲}=|a|^{۲}+|b|^{۲}$

ح : $|a+b+c|^{۲}=|a|^{۲}+|b|^{۲}+|c|^{۲}+۲a.b+۲a.c+۲b.c$

نتیجه : اگر $a+b+c=o$ آنگاه : $a.b+b.c+c.a=-\frac{۱}{۲}(|a|^{۲}+|b|^{۲}+|c|^{۲})$

مثال) اگر $e_۱$ و $e_۲$ دو بردار واحد و $|e_۱+e_۲|=\sqrt{۲}$ باشد حاصل $(e_۱-e_۲).(۳e_۱+e_۲)$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : $|e_۱ + e_۲| = \sqrt{۲} \Rightarrow |e_۱|^۲ + |e_۲|^۲ + ۲e_۱.e_۲ = ۲ \Rightarrow e_۱.e_۲ = ۰$

روش دوم : چون $|e_۱| = |e_۲| = ۱$ و $|e_۱ + e_۲| = \sqrt{۲}$ پس $e_۱ \perp e_۲$ در نتیجه : $e_۱.e_۲ = ۰$

$$(e_۱ - e_۲).(۳e_۱ + e_۲) = ۳|e_۱|^۲ - ۲e_۱.e_۲ - |e_۲|^۲ = ۳ - ۰ - ۱ = ۲$$

مثال) هرگاه e_a و e_b بردارهای واحد و $e_{a+b} = e_a + e_b$، اندازه‌ی بردار $e_a - e_b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۱/۵

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$|e_{a+b}|^۲ = |e_a + e_b|^۲ \Rightarrow ۱ = |e_a|^۲ + |e_b|^۲ + ۲|e_a||e_b|\cos\theta \Rightarrow ۱ = ۱ + ۱ + ۲\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{۱}{۲}$$

$$|e_a - e_b|^۲ = |e_a|^۲ + |e_b|^۲ - ۲|e_a||e_b|\cos\theta = ۱ + ۱ - ۲(-\frac{۱}{۲}) = ۳ \Rightarrow |e_a - e_b| = \sqrt{۳}$$

۱۸) برای دو بردار غیر صفر a و b که $|a + b| < |a - b|$ و زاویه بین آنها θ است، حدود θ کدام است؟

۱) $۰ \le \theta < \frac{\pi}{۲}$ ۲) $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲} \le \theta \le \pi$ ۴) $\frac{\pi}{۲} < \theta \le \pi$

مثال) اگر $a = (۲-,۰,۱)$، $|b| = \sqrt{۵}$ و $a.b = -۴$ باشد، اندازه بردار $a - b$ چند برابر اندازه بردار $a + b$ است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۲

جواب :گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : $\frac{|a - b|}{|a + b|} = ۳ \Leftarrow ۹ = \frac{۱۸}{۲} = \frac{۵ + ۵ - ۲(-۴)}{۵ + ۵ + ۲(-۴)} = \frac{|a|^۲ + |b|^۲ - ۲a.b}{|a|^۲ + |b|^۲ + ۲a.b} = \frac{|a - b|^۲}{|a + b|^۲}$

روش دوم : $|a| = \sqrt{۵}$ و $a.b = -۴ \Rightarrow \sqrt{۵} \times \sqrt{۵}\cos\theta = -۴ \Rightarrow \cos\theta = -\frac{۴}{۵}$

$$|a - b|^۲ = |a|^۲ + |b|^۲ - ۲|a||b|\cos\theta = ۵ + ۵ - ۲ \times \sqrt{۵} \times \sqrt{۵} \times (-\frac{۴}{۵}) = ۱۸ \Rightarrow |a - b| = ۳\sqrt{۲}$$

$$|a + b|^۲ = |a|^۲ + |b|^۲ + ۲|a||b|\cos\theta = ۵ + ۵ + ۲ \times \sqrt{۵} \times \sqrt{۵} \times (-\frac{۴}{۵}) = ۲ \Rightarrow |a - b| = \sqrt{۲} \Rightarrow \frac{|a - b|}{|a + b|} = ۳$$

۱۹) اگر $a = (-۱,۱,۱)$، $|b| = \sqrt{۲}$ و $a.b = -۲$ باشد، اندازه بردار $a - b$ چند برابر اندازه بردار $a + b$ است؟

۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲۷

مثال)دوبردار a و bمفروض اند،اگر $|a|^۲ + |b|^۲ = ۱۵$ و $|a + b| = ۳|a - b|$،آنگاه حاصل ضرب داخلی دوبردار aو b کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۶- ۴) ۸-

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $|a+b| = ۳|a-b| \Rightarrow |a|^۲ + |b|^۲ + ۲a.b = ۹(|a|^۲ + |b|^۲ - ۲a.b)$

$\Rightarrow ۲۰a.b = ۸(|a|^۲ + |b|^۲) \Rightarrow ۲۰a.b = ۸ \times ۱۵ \Rightarrow a.b = ۶$

مثال) با فرض $|a| = ۲$ و $|b| = ۳$ و $|c| = \sqrt{۷}$ و $a+b+c=\circ$ زاویه‌ی بین دو بردار a و b کدام است؟

۱) ۳۰ درجه　　۲) ۶۰ درجه　　۳) ۱۲۰ درجه　　۴) ۱۵۰ درجه

جواب : گزینه۳ درست است.

$$\Rightarrow |a+b|^۲ = |-c|^۲ \Rightarrow ۴ + ۹ + ۲a.b = ۷ \Rightarrow a.b = -۳ \Rightarrow \cos\theta = \frac{-۳}{۲\times ۳} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۱۲۰^\circ$$

مثال) اگر a، b و c سه بردار با اندازه های ۴ و ۳ و ۵ باشند به طوری که $a+b+c=o$ حاصل $a.b+b.c$ کدام است؟

۱) ۲۵-　　۲) ۱۶　　۳) ۹-　　۴) ۱۶-

جواب : گزینه ۳ صحیح است.روش اوّل : $a.b + b.c = b.(a+c) = b.(-b) = -|b|^۲ = -۹$

روش دوم : با توجه به رابطه‌ی $a+b=-c \Rightarrow |a+b|^۲ = |-c|^۲ \Rightarrow a.b = \frac{۱}{۲}(|c|^۲ - |a|^۲ - |b|^۲)$

می توان نوشت : $a.b + b.c = \frac{۱}{۲}(|c|^۲ - |a|^۲ - |b|^۲) + \frac{۱}{۲}(|a|^۲ - |b|^۲ - |c|^۲) = -|b|^۲ = -۹$

۲۰) اگر بردارهای $v_۲ + v_۱$ و $v_۲ - v_۱$ هر دو بر بردار $v_۳$ عمود باشند و سه بردار هم صفحه باشند و $|v_۱| = ۴$ و $|v_۲| = ۳$ حاصل ضرب داخلی $(v_۱ - v_۲).(v_۱ + v_۲)$ چقدر است؟

۱) ۵　　۲) ۷　　۳) ۱　　۴) ۲　　(کنکور آزاد ریاضی ۸۲ صبح)

۲۱) اگر بردار $a(m,۲,-۱)$ و $|b| = \sqrt{۴۱}$، دو بردار $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

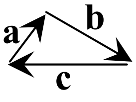
۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) ۶　　(کنکور سراسری ریاضی ۸۵)

۲۲) اگر $|\vec{b}| = |\vec{a}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ باشند، آنگاه زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چند درجه است؟

۱) ۱۰۵　　۲) ۱۲۰　　۳) ۱۳۵　　۴) ۱۵۰　　(کنکور سراسری تجربی ۸۸)

مثال)درشکل مقابل اندازه بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ و ۶ است.حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

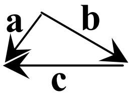
۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) ۲　　(کنکور سراسری ریاضی۸۰)



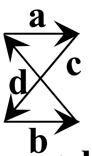
جواب : گزینه۳ درست است.

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c} \Rightarrow |a|^2+|b|^2+2a.b=|c|^2 \Rightarrow 2a.b=2 \Rightarrow a.b=1$$

۲۳)درشکل مقابل اندازه بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب برابر ۳ و ۵ و ۶ است.حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کدام است؟



۱) ۲-   ۲) ۱-   ۳) ۱   ۴) ۲



مثال) در شکل مقابل، اگر $|a|=|b|=2$ و $|c|=|d|=3$ باشند، آنگاه حاصل $a.b-c.d$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۵   ۳) ۱-   ۴) ۵-

جواب : گزینه ۲ درست است. $a+b+c+d=0 \Rightarrow a+b=-c-d \Rightarrow (a+b).(a+b)=(-c-d).(-c-d)$

$$\Rightarrow |a|^2+2a.b+|b|^2=|c|^2+2c.d+|d|^2 \Rightarrow 4+2a.b+4=9+2c.d+9 \Rightarrow a.b-c.d=5$$

۲۴) اگر $|\vec{a}|=|\vec{b}|=6$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=18$ آنگاه $|\vec{a}-\vec{b}|$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶   (کنکور نظام قدیم تجربی ۷۵)

مثال)درمتوازی الاضلاعی اندازه دو ضلع مجاورآن ۶ و ۸ و اندازه یکی از قطرهای آن $2\sqrt{14}$ می باشد اندازه قطر دیگر آن کدام است؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۱   ۳) ۱۲   ۴) ۱۳

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $(2\sqrt{14})^2+x^2=2(6^2+8^2) \Rightarrow x^2=144 \Rightarrow x=12$

مثال) مجموع مربع های طول های دو قطر متوازی الاضلاعی که روی دو بردار a و b با طول های $|a|=3\sqrt{2}$ و $|b|=2\sqrt{3}$ بنا می شود، کدام است؟

۱) ۴۸   ۲) ۵۴   ۳) ۶۰   ۴) ۶۴

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $|a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)=2(18+12)=60$

۲۵) اگر $|\vec{a}|=2|\vec{b}|=2$ و $\vec{a}\,.\,\vec{b}=0$ آنگاه $|\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{a}-\vec{b}|$ کدام است؟

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) $\sqrt{5}$ (کنکور سراسری تجربی ۸۶خارج از کشور)

۲۶) اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار باشند بطوری که $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=۴$ و $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=۲\sqrt{۳}$، حاصل $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲   ۴) ۳

مثال) نقاط $A(۱,۲,-۲)$ و $B(۵,۲,۱)$ مفروضند اگر M نقطه متغیری باشد بگونه ای که $|MA|+|MB|$ کمترین مقدار ممکن باشد $|MA|+|MB|$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۵   ۴) ۷

جواب : گزینه ۳ درست است. $|AB|\le|MA|+|MB|\Rightarrow \min=|AB|=\sqrt{۱۶+۰+۹}=۵$

۲۷) سه بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ با اندازه‌ی ۳ و ۴ و ۷ واحددر رابطه‌ی $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{o}$ صدق می کنند، مقدار $\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a}$ کدام است؟

۱) ۳۷-   ۲) ۱۹-   ۳) ۱۹   ۴) ۳۷   (کنکور سراسری ریاضی۸۷خارج از کشور)

مثال)فرض کنید $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول های۱ و۳ با این خاصیت که $\mathbf{a}+\mathbf{b}+۲\mathbf{c}=\mathbf{o}$. مقدار $\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a}$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) ۵-   ۴) ۵

جواب :گزینه ۳ صحیح $\mathbf{a}+\mathbf{b}+۲\mathbf{c}=\mathbf{o}\Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=-\mathbf{c}\Rightarrow |\mathbf{a}|^۲+|\mathbf{b}|^۲+|\mathbf{c}|^۲+۲(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a})=|-\mathbf{c}|^۲$

$\Rightarrow ۱+۹+۲(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a})=۰\Rightarrow \mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{b}.\mathbf{c}+\mathbf{c}.\mathbf{a}=-۵$

مثال) اگر $|\vec{a}|=۲$ و $|\vec{b}|=۳$ و $|\vec{c}|=۶$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=۰$ باشد اندازه $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ کدام است؟

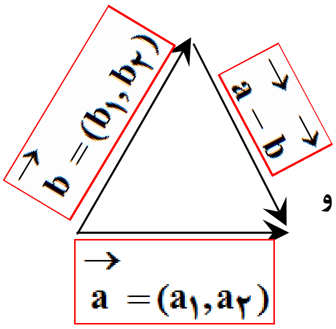
۱) ۱   ۲) ۵   ۳) ۷   ۴) ۹   (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۶)

جواب : گزینه ۳ درست است. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|=\sqrt{|\mathbf{a}|^۲+|\mathbf{b}|^۲+|\mathbf{c}|^۲+۲(\mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}+\mathbf{b}.\mathbf{c})}=\sqrt{۴+۹+۳۶}=۷$

فرض کنید $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲)$ دو بردار غیر صفر و θ ($۰\le\theta\le\pi$) زاویه‌ی بین آنها باشد آنگاه داریم :

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲} \quad و \quad |\vec{b}|=\sqrt{b_۱^۲+b_۲^۲}$$

و



$$\vec{a}-\vec{b}=(a_۱-b_۱,a_۲-b_۲)\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(a_۱-b_۱)^۲+(a_۲-b_۲)^۲}$$

با استفاده از قضیه کسینوس ها می توان نوشت :

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2(a_1b_1+a_2b_2)=-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

با انتخاب $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ می توان نوشت : $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

ودرنتیجه $\cos\theta=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a.b}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

به طور مشابه ضرب داخلی دو بردار در R^3 نیز قابل تعریف است. (ص۷۸کتاب جدید)

تعریف ضرب درونی مختصاتی: اگر $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار در R^3 باشند، دراین صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم. $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

به عبارت دیگر : $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

مثال) حاصل ضرب داخلی دو بردار $v_1(-1,3,4)$ و $v_2(2,-1,0)$ برابر است با :

۱) ۶ ۲) ۵- ۳) ۲ ۴) ۵ (کنکور آزاد ریاضی۷۲)

جواب : گزینه ۲ درست است. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=-1\times2+3\times(-1)+4\times0=-5$

۲۸) اگر $a=4i-5j+3k$ و $b=i+2j+3k$ حاصل ضرب داخلی بردار $a+b$ در بردار $a-b$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۳۶ ۴) ۶۴

مثال) اگر $a=(1,2,0)$ و $b=(m,m,-1)$ دو بردار و $|a+b|=|a-b|$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

جواب : گزینه ۲ صحیح است. متوازی الاضلاعی که دو قطرش با هم برابر باشد مستطیل است پس $a\perp b$

و درنتیجه : $a.b=0\Rightarrow m+2m=0\Rightarrow m=0$

۲۹) بردار $a(2,3,6)$ و بردار b موازی با a می باشد اگر $a.b=98$ باشد تصاویر بردار b کدام است؟

۱) $(12,6,4)$ ۲) $(1,8,12)$ ۳) $(4,6,12)$ ۴) $(2,3,6)$

۳۰) دو نقطه‌ی ثابت $A(2,4,-4)$ و $B(-2,-4,4)$ و نقطه‌ی متغیر M را در نظر می گیریم. اگر $\vec{AM}$ بر $\vec{BM}$ عمود باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی M از مبدأ مختصات چند واحد است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۳۶

نتیجه : فرض کنید $a(a_1,a_2,a_3)$ و $b(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند، دراین صورت

$a,b \neq o$ و $a \perp b \Leftrightarrow a.b = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

به عبارت دیگر : $a,b \neq o$ و $a \perp b \Leftrightarrow a.b = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

مثال) اگر بردارهای $u(-2a,2,-3)$ و $v(-5,2,3a+2)$ بر هم عمود باشند، مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

جواب : گزینه۳ درست است. $u \perp v \Rightarrow 10a + 4 - 9a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$

مثال) دو بردار a و b با تصویر های $(1, \alpha+1, 2\alpha)$ و $(2,0,-1)$ مفروض اند، به ازای کدام مقادیر α بردارهای $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم اند؟

۱) ۰/۴ و ۱- ۲) ۰/۶ و ۱- ۳) ۰/۴ و ۱ ۴) ۰/۶ و ۱ (کنکور سراسری ریاضی ۸۹)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : $(a+b) \perp (a-b) \Rightarrow (a+b).(a-b) = 0 \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow$

$$\sqrt{1 + (\alpha+1)^2 + (2\alpha)^2} = \sqrt{4+0+1} \Rightarrow 5\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 5 \Rightarrow 5\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \text{ و } \alpha = -\frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0/6$$

روش دوم : $(a+b) = (3, \alpha+1, 2\alpha-1)$ و $(a-b) = (-1, \alpha+1, 2\alpha+1) \Rightarrow (a+b) \perp (a-b) \Rightarrow$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \Rightarrow -3 + (\alpha+1)^2 + (2\alpha+1)(2\alpha-1) = 0 \Rightarrow 5\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \text{ و } \alpha = -\frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0/6$$

۳۱) با فرض $a = (3, m, 5)$ و $b = (3-m, 7, 0)$، به ازای یک مقدار m دو بردار $a+b$ و $a-b$ عمود بر هم هستند. زاویه‌ی بین دو بردار a و b در این حالت، چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۵)

مثال) نقاط $A(0,1,2)$ و $B(m,2,3)$ و $C(1,0,2)$ سه راس مثلث ABC هستند که در راس A قائمه است. m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱-

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $\vec{AB}(m,1,1)$ و $\vec{AC}(1,-1,0)$ و $\vec{AB}.\vec{AC}=0 \Rightarrow m-1+0=0 \Rightarrow m=1$

نتیجه : فرض کنید $a(a_1,a_2,a_3)$ و $b(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند، دراین صورت

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

به عبارت دیگر :

$$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

۳۲) زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{v_1}(2,3,-3)$ و $\vec{v_2}(3,2,4)$ چقدر است؟

۱) ۱۲۰ درجه ۲) ۹۰ درجه ۳) ۶۰ درجه ۴) ۳۰ درجه (کنکور آزاد ریاضی ۶۸)

مثال) زاویه‌ی بین بردارهای واقع بر نیمسازهای دو صفحه xoy و yoz چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

جواب : گزینه ۳ صحیح است. نیمساز های این دو صفحه بردارهای $a(1,1,0)$ و $b(0,1,1)$ می باشد و $|a|=|b|=\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{a.b}{|a||b|}=\frac{0+1+0}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\hat{\theta}=60^\circ$$

۳۳) بر روی دو بردار $a=3i+3j$ و $b=i-j-2k$ متوازی الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$ (کنکور سراسری ریاضی ۹۲ خارج از کشور)

نتیجه : اگر نقاط A و B و C سه راس مثلث ABC باشند آنگاه اندازه‌ی زاویه‌ی A به صورت زیر خواهد بود .

$$\cos\hat{A}=\frac{\vec{AB}.\vec{AC}}{|AB||AC|}$$

۳۴) سه نقطه‌ی $A(2,1,0)$، $B(3,-1,2)$ و $C(-1,1,3)$، رأس های مثلثی هستند. $\cos A$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۳)

نکته : هرگاه $a(a_1, a_2, a_3)$ و $b(b_1, b_2, b_3)$ دو بردار دلخواه باشند، آنگاه :

الف) $|a.b| \le |a||b|$ (نامساوی کشی – شوارتز)

ب) (نکته تستی) $|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

پ : $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$

۳۵) اگر a و b دو بردار و $a.b = -2$ و $|a| = \sqrt{2}$ باشند آنگاه حداقل مقدار $|b|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $-\sqrt{2}$

۳۶) اگر $ax - y + \sqrt{3}z = 10$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ باشند، در این صورت حدود a کدام است؟

۱) $-4 \le a \le 4$ ۲) $a \le -4$ ۳) $a \ge 4$ ۴) $a \ge 4$ یا $a \le -4$

۳۷) اگر $x + 2y - 2z = 3$ باشد می نیمم مقدار $x^2 + y^2 + z^2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۹

مثال) هرگاه a_1، a_2 و a_3 سه عدد حقیقی باشند حداکثر $\dfrac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

جواب : گزینه ۲ صحیح $(1a_1 + 1a_2 + 1a_3)^2 \le (1+1+1)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \Rightarrow Max(\dfrac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}) = 3$

۳۸) اگر $3x + 4y - 6z = 41$ باشد می نیمم مقدار $9x^2 + 4y^2 + z^2$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۳۱ ۳) ۴۱ ۴) ۵۱

۳۹)سه عددحقیقی x ، y و z درتساوی $x^{2}+y^{2}+z^{2}=4$ صدق می کنند.بیش ترین مقدار عبارت $2x-2y+z$، کدام است؟

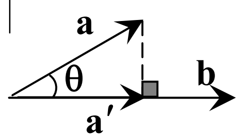
۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۶

۴۰) فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x,2y,-2z)$ تا مبدأ مختصات برابر ۶ است بیشترین مقدار $2x-4y-2z$ کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۹   ۳) ۱۸   ۴) ۲۷

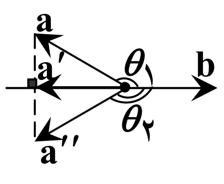
تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را که زاویه‌ی بین آنها θ است با فرض $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ در نظر می گیریم. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ که آن را با $\vec{a'}$ نمایش می دهیم به صورت زیر محاسبه می شود :

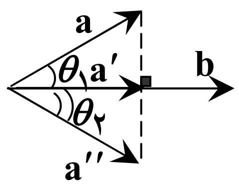
$$\vec{a'}=r\vec{b}\quad(\vec{a}-\vec{a'}).\vec{b}=0\Rightarrow(\vec{a}-r\vec{b}).\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}-r\vec{b}.\vec{b}=0\Rightarrow r=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{2}}$$



$$\Rightarrow\vec{a'}=r\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{2}}\vec{b}$$

تصویر و قرینه یک بردار روی یک محور : فرض کنیم a و b دو بردار غیر صفر و θ زاویه‌ی بین آن ها باشد. در این صورت از لحاظ هندسی a' تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار غیر صفر b، برداری موازی با بردار b است.





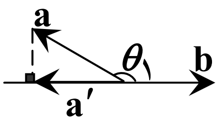
حال اگر $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه a' موازی و همجهت با b خواهد بود

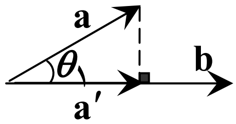
و اگر $\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$ باشد آنگاه a' موازی و مختلف الجهت با b خواهد بود.

الف) تصویر قائم بردار a روی امتداد بردار غیر صفر b برابر است با :
$$a'=\frac{a.b}{|b|^{2}}b$$

ب) قرینه بردار a روی امتداد بردار غیر صفر b برابراست با :
$$a''=2a'-a=\frac{2a.b}{|b|^{2}}b-a$$

نتیجه : الف : اندازه‌ی تصویر قائم بردار $\mathbf{a}$ روی امتداد بردار نا صفر $\mathbf{b}$ برابر است با $|\mathbf{a}'| = \dfrac{|\mathbf{a}.\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$





ب : $|\mathbf{a}''| = |\mathbf{a}|$ یعنی اندازه بردار $\mathbf{a}$ برابر اندازه قرینه بردار $\mathbf{a}$ نسبت به بردار $\mathbf{b}$ است.

پ : $\hat{\theta}_۱ = \hat{\theta}_۲$ یعنی بردار $\mathbf{b}$ نیمساز زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a}''$ است.

ت : $\mathbf{a}.\mathbf{a}' = \mathbf{a}''.\mathbf{a}'$ ث : $\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{a}''}{۲}$ و $\mathbf{a}+\mathbf{a}'' = ۲\mathbf{a}'$

ج : $\mathbf{a} = ۲\mathbf{a}' - \mathbf{a}'' = \dfrac{۲\mathbf{a}''.\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^۲}\mathbf{b} - \mathbf{a}''$ چ : $\mathbf{a}' = \dfrac{\mathbf{a}''.\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^۲}\mathbf{b}$

ح : $|\mathbf{a}'| = \pm|\mathbf{a}|\cos\theta_۱$ و $|\mathbf{a}'| = \dfrac{|\mathbf{a}''.\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$ خ : $|\mathbf{a}'| \le |\mathbf{a}|$ د : $\mathbf{a}'.\mathbf{a} = |\mathbf{a}'|^۲ \ge ۰$

مثال : تصویر قائم بردار $\vec{a} = (۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (۱,-۱,۰)$ بیابید.   (ص۸۰کتاب جدید)

حل : $|\vec{b}| = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲} = \sqrt{۲}$ و $\vec{a}\,.\,\vec{b} = ۲\times۱ + (-۱)(-۱) + ۲\times۰ = ۳$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = \frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰) = (\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲},۰)$$

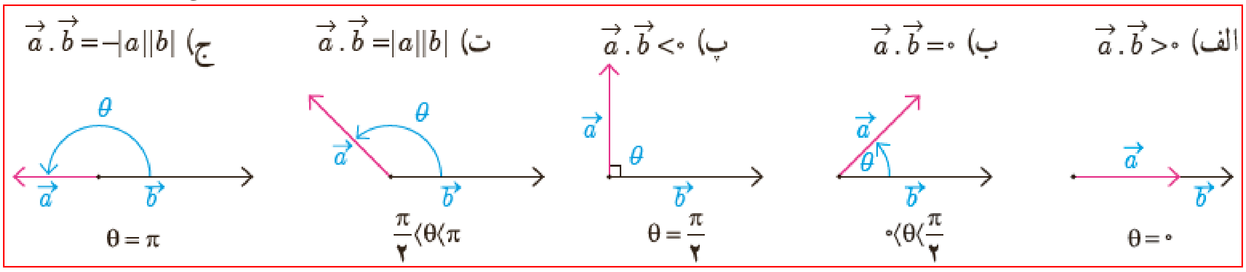
کار در کلاس :

۱) تصویر بردار $\mathbf{i} = (۱,۰,۰)$ بر امتداد بردار $\mathbf{j} = (۰,۱,۰)$ را بیابید.

۲) نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می شود.

۳) نشان دهید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند آنگاه تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ برابر خود $\vec{a}$ می شود.

۴) هر یک از حالات زیر را با شکل های داده شده نظیر کنید.   (ص۸۰کتاب جدید)



تمرین۱) برای هر یک از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که در زیر آمده است تصویر قائم $\vec{a}$ را بر امتداد $\vec{b}$ به دست آورید.

الف) $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=\vec{i}$

ب) $\vec{a}=(2,3,1)$ و $\vec{b}=(3,2,1)$

ج) $\vec{a}=(1,-1,0)$ و $\vec{b}=(-1,2,4)$ (ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۲) فرض کنید $\vec{b}$ و $\vec{a}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به ترتیب به طول های۱ و۲ و۳ با این خاصیت که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$. مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ را محاسبه کنید. (ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۳) سه بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. (ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۴) اگر $\vec{a} = (۱,-۳,۴)$ و $\vec{b} = (۳,-۴,۲)$ و $\vec{c} = (-۱,۱,۴)$ باشند آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را به دست آورید. (ص۸۴کتاب جدید)

مثال) دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با معلومات $|\mathbf{a}| = ۵$ و $|\mathbf{b}| = ۷$ و $\mathbf{a} - \mathbf{b} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۳\mathbf{k}$ مفروض اند. تصویر قائم بردار $\mathbf{b}$ بر روی بردار $\mathbf{a}$، چند برابر بردار $\mathbf{a}$ است؟

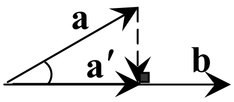
۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۱/۲ ۴) ۱/۴ (کنکور سراسری ریاضی ۹۵ خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^۲ = |\mathbf{a}|^۲ + |\mathbf{b}|^۲ - ۲|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \Rightarrow ۴ + ۱ + ۹ = ۲۵ + ۴۹ - ۲ \times ۵ \times ۷\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۶۰}{۷۰} = \frac{۶}{۷}$$

اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ یعنی θ حاده باشد داریم : $\cos\theta = \frac{|\mathbf{b}'|}{|\mathbf{b}|} \Rightarrow |\mathbf{b}'| = |\mathbf{b}|\cos\theta$ پس: $\frac{|\mathbf{b}'|}{|\mathbf{a}|} = \frac{۷ \times \frac{۶}{۷}}{۵} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲$

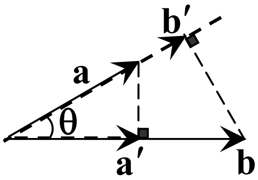
مثال)اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابر ۳۰ درجه و $\mathbf{a}'$ تصویر قائم بردار $\mathbf{a}$ روی امتداد بردار نا صفر $\mathbf{b}$ باشد، زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a} - \mathbf{a}'$ چند درجه است؟



۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

جواب : گزینه ۴ صحیح است. بدیهی است که بردارهای $\mathbf{a} - \mathbf{a}'$ و $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$ بر بردار $\mathbf{b}$ عمودند.

مثال) اگر $\mathbf{a}'$ تصویر قائم بردار $\mathbf{a}$ روی امتداد بردار $\mathbf{b}$ و $\mathbf{b}'$ تصویر قائم بردار $\mathbf{b}$ روی امتداد بردار $\mathbf{a}$ و θ زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}.\mathbf{b} = ۲$ باشد. حاصل $\mathbf{a}'.\mathbf{b}'$ کدام است؟



۱) $۲\cos^۲\theta$ ۲) $\cos^۲\theta$ ۳) ۲ ۴) ۱

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $\cos\theta = \frac{|\mathbf{a}'|}{|\mathbf{a}|} \Rightarrow |\mathbf{a}'| = |\mathbf{a}|\cos\theta$ و $|\mathbf{b}'| = |\mathbf{b}|\cos\theta$

$$\mathbf{a}'.\mathbf{b}' = |\mathbf{a}'||\mathbf{b}'|\cos\theta = |\mathbf{a}|\cos\theta \times |\mathbf{b}|\cos\theta \times \cos\theta = \mathbf{a}.\mathbf{b}\cos^۲\theta = ۲\cos^۲\theta$$

۴۱) تصویر قائم بردار $(۳,۶,-۰)$ روی امتداد بردار $(۲,-۱,-۲)$، کدام بردار است؟

۱) $(۲,-۱,-۲)$ ۲) $(-۲,۱,۲)$ ۳) $(۴,-۲,-۴)$ ۴) $(۱,-۳,۲)$ (کنکور سراسری ریاضی ۸۲)

نکته : اندازه‌ی جبری تصویر بردار $\mathbf{a}$ روی امتداد بردار $\mathbf{b}$ برابر است با : $p_{\mathbf{b}}^{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}.\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳}{\sqrt{b_۱^۲ + b_۲^۲ + b_۳^۲}}$

۴۲) طول تصویر بردار $\vec{v}_1(۱,۲,۲)$ بر بردار $\vec{v}_2(۲,۱,۲)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۸ (کنکور آزاد ریاضی ۷۵)

مثال) اگر اندازه‌ی تصویر قائم بردار a در راستای بردار $b=(۲,-۱,۲)$ برابر ۳ باشد، مقدار مثبت $a.b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$|a'|=\frac{|a.b|}{|b|}=۳\Rightarrow|a.b|=۳|b|=۳\sqrt{۴+۱+۴}=۹$$

تعریف ضرب خارجی (ضرب برداری) : فرض کنیم $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند.

ضرب خارجی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود :

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

این تعریف را به صورت زیر نیز نمایش می دهند.

(قطر فرعی- قطر اصلی , قطر اصلی- قطر فرعی, قطر فرعی- قطر اصلی)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

مثال) اگر $\vec{v}_1(۱,۲,۳)$ و $\vec{v}_2(۲,۱,۳)$ باشد،اندازه‌ی بردار $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۹ (کنکور آزاد ریاضی۸۶خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{v}_1\times\vec{v}_2=(۱,۲,۳)\times(۲,۱,۳)=(۳,۳,-۳)\Rightarrow\left|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right|=\sqrt{۹+۹+۹}=۳\sqrt{۳}$$

۴۳) اگر $\vec{v}_1(-۱,۱,۲)$ و $\vec{v}_2(-۲,۳,-۱)$ باشد زاویه بردار $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ با کدام محور بزرگتراست؟

۱) xها ۲) yها ۳) zها ۴)باهرسه محوریکسان است.(کنکور ریاضی آزاد عصر۸۲)

مثال) اگر $a=(۵,۴,۲)$ و $b=(۲,-۱,۳)$ تصویر بردار $a\times b$ روی محور yها کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۱- ۳) ۱۳ ۴) ۱۳-

جواب : گزینه ۲ صحیح است. منظور مؤلفه عرض است.

$$a\times b=(۵,۴,۲)\times(۲,-۱,۳)=(۱۴,-۱۱,-۹)$$

خواص جبری ضرب خارجی : فرض کنید a و b و c سه بردار و $\lambda \in R$ است در این صورت داریم :

الف : ضرب خارجی دو بردار بسته است یعنی حاصل ضرب خارجی هر دو بردار یک بردار است.

ب : $a \times b = -b \times a$ (ضرب خارجی در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد.)

پ : $a \times \vec{0} = \vec{0}$

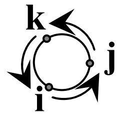
ت : $\lambda a \times b = a \times \lambda b = \lambda(a \times b)$

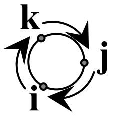
ث : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ و $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$

ج) درحالت کلی $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$ (ضرب خارجی در حالت کلی خاصیت شرکت پذیری ندارد.)

مثال : $i \times (i \times k) \neq (i \times i) \times k$

چ : ضرب خارجی عضو وارون ندارد.

نکته : الف : $k \times i = j$ و $j \times k = i$ و $i \times j = k$ 

ب : $i \times k = -j$ و $k \times j = -i$ و $j \times i = -k$ 

مثال) عمل ضرب برونی دو بردار در مجموعه بردارهای واقع در فضا کدام خاصیت را ندارد؟ (کنکور سراسری ریاضی ۶۹)

۱) بسته بودن ۲) جابجایی ۳) پخش پذیری نسبت به اعداد ۴) پخش پذیری نسبت به جمع بردارها

جواب : گزینه ۲ صحیح است. اگر a و b دو بردار باشند آنگاه : $a \times b = -b \times a$ یعنی ضرب خارجی در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد.

مثال : بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ در R^3 در نظر بگیرید. حاصل $\vec{i} \times \vec{j}$ و $\vec{j} \times \vec{i}$ را به دست آورید. (ص۸۱کتاب جدید)

حل :

$$\vec{i} \times \vec{j} = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0\times0 - 0\times1, 0\times0 - 1\times0, 1\times1 - 0\times0) = (0,0,1) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = (0,1,0) \times (1,0,0) = (1\times0 - 0\times0, 0\times1 - 0\times0, 0\times0 - 1\times1) = (0,0,-1) = -\vec{k}$$

مثال) اگر i و j و k بردارهای واحد باشند حاصل $(i \times (i \times j)) \times k$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $-i$ ۳) j ۴) $-k$ (کنکور سراسری ریاضی ۹۱)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $(i \times (i \times j)) \times k = (i \times k) \times k = -j \times k = -i$

۴۴) حاصل $i.(j \times k) - 2j.(k \times i) - 3k.(j \times i)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

مثال) اگر $2a + b = (1,4,2)$ و $a + 2b = (2,2,1)$ باشند اندازه‌ی ضرب خارجی $|a \times b|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۹۱)

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$(2a + b) \times (a + 2b) = (1,4,2) \times (2,2,1) \Rightarrow 2a \times a + 4a \times b + b \times a + 2b \times b = (0,3,-6)$$

$$\Rightarrow 3a \times b = (0,3,-6) \Rightarrow a \times b = (0,1,-2) \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5}$$

توجه : $\begin{vmatrix} 2a & b \\ a & 2b \end{vmatrix} = 3a \times b$

مثال) اگر $(a \times b).(b \times 2a) = -50$ باشد اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی دو بردار a و b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۵

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $(a \times b).(b \times 2a) = -50 \Rightarrow (a \times b).(-2(a \times b)) = -50$

$$\Rightarrow -2(a \times b).(a \times b) = -50 \Rightarrow |a \times b|^2 = 25 \Rightarrow |a \times b| = 5$$

۴۵) اگر $|a \times b| = 4$، اندازه‌ی بردار $(a + b) \times (3a - b)$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) صفر ۳) ۱۶ ۴) ۴ (کنکور آزاد ریاضی ۷۸)

مثال) اگر $(a - b) \times (b + a) = 2i - 4j + 4k$ اندازه بردار $a \times b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب : گزینه ۳ درست است. $|(a - b) \times (b + a)| = \sqrt{4 + 16 + 16} \Rightarrow 2|a \times b| = 6 \Rightarrow |a \times b| = 3$

۴۶) اگر CD موازی AB باشد و نقطه M از C به D حرکت کند، بردارضرب خارجی $\vec{AB} \times \vec{AM}$ چگونه تغییر می کند؟

D M C

A ⟶ B

۱) طول آن کم می شود ولی جهت آن تغییر نمی کند. ۲) طول آن ثابت است ولی جهت آن تغییر می کند.

۳) طول و جهت آن ثابت است. ۴) طول و جهت آن تغییر می کند. (کنکور ریاضی آزادعصر ۸۳)

قضیه : فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. در این صورت $a.(a \times b) = 0$ و $b.(a \times b) = 0 \Rightarrow a, b \perp (a \times b)$

نکته : فرض کنید a و b دو بردار دلخواه باشند. هر مضرب غیر صفر از $a \times b$ بر a و b و بر تمام ترکیبات خطی a و b عمود می باشند. به عبارت دیگر $r, m, n \in R, r \neq 0 \Rightarrow r(a \times b).(ma + nb) = 0$

مثال) بردارهای a، b و c با شرط $(a - c) \times b = a \times c$ مفروض اند، الزاماً کدام نتیجه حاصل می شود؟

۱) $a.(b.c) = 0$ ۲) $a.(b \times c) = 0$ ۳) $a \times (b \times c) = o$ ۴)هرسه بردارموازی اند. (کنکورسراسری ریاضی۹۱خارج)

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$(a - c) \times b = a \times c \Rightarrow a \times b - c \times b = a \times c \xrightarrow{a.} a.(a \times b) + a.(b \times c) = a.(a \times c) \Rightarrow a.(b \times c) = 0$$

مثال) اگر $a = b \times c$ و $b = a \times c$ و $c = a \times b$، مقدار $|a||b||c|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۸

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $a = b \times c \Rightarrow a \perp b, c$ و $b = a \times c \Rightarrow b \perp a, c$ و $c = a \times b \Rightarrow c \perp a, b$

درنتیجه سه بردار a و b و c دو به دو بر هم عمودند.

$$|a| = |b \times c| = |b||c| \sin 90 = |b||c| \text{ و } |b| = |a \times c| = |a||c| \sin 90 = |a||c| \text{ و } |c| = |a \times b| = |a||b| \sin 90 = |a||b|$$

حال طرفین سه رابطه‌ی قبل را در هم ضرب می کنیم. $|a||b||c| = (|a||b||c|)^2 \Rightarrow |a||b||c| = 1$

مثال) قرینه بردار غیر صفر $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نسبت به راستای بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ همواره کدام است؟

۱) بردار صفر　۲) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$　۳) $-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$　۴) $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. بردار غیر صفر $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ بر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و هر ترکیب خطی از این دو بردار عمود است.

مثال) هرگاه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار ناصفر و ناموازی و $\mathbf{a}+\mathbf{b}\neq 0$ و $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq 0$ آن گاه زاویه بین بردارهای $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ کدام است؟

۱) ۳۰ درجه　۲) ۴۵ درجه　۳) ۶۰ درجه　۴) ۹۰ درجه

جواب : گزینه ۴ درست است. $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\mathbf{b}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0+0=0\Rightarrow(\mathbf{a}+\mathbf{b})\perp(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

۴۷) دو بردار با تصاویر $\mathbf{a}=(1,2,-1)$ و $\mathbf{b}=(2,4,\mathbf{m})$ مفروض اند، به ازای کدام مقادیر $\mathbf{m}$، اندازه بردار $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ برابر صفر است؟

۱) فقط $\mathbf{m}=-2$　۲) فقط $\mathbf{m}=\pm 2$　۳) هیچ مقدار $\mathbf{m}$　۴) هر مقدار $\mathbf{m}$　(کنکور سراسری ریاضی ۸۸)

۴۸) اگر $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$ باشند، مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ ساخته شود، کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$　۲) $2\sqrt{2}$　۳) ۳　۴) $2\sqrt{3}$

(کنکور سراسری و آزاد ریاضی خارج از کشور ۹۷)

مثال) سه بردار $\mathbf{v}_1=(1,-1,\mathbf{a})$، $\mathbf{v}_2=(2,\mathbf{b},1)$ و $\mathbf{v}_3=(\mathbf{c},3,2)$، دو به دو عمود بر هم هستند، $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ کدام است؟

۱) ۵　۲) ۶　۳) ۷　۴) ۸　(کنکور سراسری ریاضی ۹۳ خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : چون سه بردار $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$، دو به دو عمود بر هم هستند، پس حاصل ضرب داخلی دو به دوی آن ها صفر است.

$$\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2=0\Rightarrow(1,-1,\mathbf{a}).(2,\mathbf{b},1)=0\Rightarrow 2-\mathbf{b}+\mathbf{a}=0\Rightarrow \mathbf{a}-\mathbf{b}=-2\quad(1)$$

$$\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_3=0\Rightarrow(1,-1,\mathbf{a}).(\mathbf{c},3,2)=0\Rightarrow \mathbf{c}-3+2\mathbf{a}=0\Rightarrow 2\mathbf{a}+\mathbf{c}=3\quad(2)$$

$$\mathbf{v}_2.\mathbf{v}_3=0\Rightarrow(2,\mathbf{b},1).(\mathbf{c},3,2)=0\Rightarrow 2\mathbf{c}+3\mathbf{b}+2=0\Rightarrow 3\mathbf{b}+2\mathbf{c}=-2\quad(3)$$

$$(2)-2(1)\Rightarrow\begin{cases}2\mathbf{b}+\mathbf{c}=7\\3\mathbf{b}+2\mathbf{c}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{b}=16\\\mathbf{c}=-25\end{cases}\xrightarrow{(1)}\mathbf{a}=14\Rightarrow\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=5$$

روش دوم : چون بردار $\mathbf{v}_1$ بر دو بردار $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ عمود است پس بر صفحه‌ی شامل این دو بردار نیز عمود بوده و در نتیجه بر هر ترکیب خطی از این دو بردار از آن جمله بردار $\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2$ نیز عمود است. در نتیجه :

$$\mathbf{v}_1.(\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_2)=0\Rightarrow(1,-1,\mathbf{a}).(\mathbf{c}-2,3-\mathbf{b},1)=0\Rightarrow\mathbf{c}-2+\mathbf{b}-3+\mathbf{a}=0\Rightarrow\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=5$$

روش سوم : چون بردار $\mathbf{v}_1$ بر دو بردار $\mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3$ عمود است پس بر صفحه‌ی شامل این دو بردار نیز عمود بوده و در نتیجه با حاصل ضرب خارجی این دو بردار موازی است. در نتیجه : $\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3=(2,\mathbf{b},1)\times(\mathbf{c},3,2)=(2\mathbf{b}-3,\mathbf{c}-4,6-\mathbf{bc})$

$$\Rightarrow\frac{2\mathbf{b}-3}{1}=\frac{\mathbf{c}-4}{-1}=\frac{6-\mathbf{bc}}{\mathbf{a}}\Rightarrow\begin{cases}2\mathbf{b}+\mathbf{c}=7\\2\mathbf{ab}+\mathbf{bc}=3\mathbf{a}+6\\\mathbf{ac}-\mathbf{bc}=4\mathbf{a}-6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{a}=14\\\mathbf{b}=16\\\mathbf{c}=-25\end{cases}\Rightarrow\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=5$$

مثال) زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a} \times (\mathbf{a}+\mathbf{b})$ و $\mathbf{b} \times (\mathbf{a}-\mathbf{b})$، کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۹۰ درجه　　۳) ۴۵ درجه　　۴) ۱۸۰ درجه

جواب : گزینه ۴ درست است.

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{b} \text{ و } \mathbf{b}\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{b}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}\Rightarrow\hat{\theta}=۱۸۰^\circ$$

۴۹) کدام بردار بر دو بردار $\mathbf{a}=\mathbf{i}-۲\mathbf{k}$ و $\mathbf{b}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}$ عمود است؟

۱) $(۲,۱,۱)$　　۲) $(۲,۱,-۱)$　　۳) $(۲,-۱,۱)$　　۴) $(۲,-۱,-۱)$

مثال) اگر $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(۲,-۲,۳)$ و $\mathbf{b}-\mathbf{a}=(۲,۲,۱)$ باشد قرینه‌ی بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نسبت به بردار $۳\mathbf{a}-۲\mathbf{b}$ کدام است؟

۱) $(۴,۲,-۴)$　　۲) $(۴,-۲,۴)$　　۳) $(۴,-۲,-۴)$　　۴) $(-۴,۲,۴)$

جواب : گزینه ۳ صحیح است.　$۲\mathbf{a}=(۰,-۴,۲)\Rightarrow\mathbf{a}=(۰,-۲,۱)$ و $۲\mathbf{b}=(۴,۰,۴)\Rightarrow\mathbf{b}=(۲,۰,۲)$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(۰,-۲,۱)\times(۲,۰,۲)=(-۴,۲,۴)$

چون بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ بر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود است پس بر صفحه‌ی شامل آنها نیز عمود است و درنتیجه $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ بر بردار $۳\mathbf{a}-۲\mathbf{b}$ نیز عمود است بنابراین قرینه‌ی بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نسبت به بردار $۳\mathbf{a}-۲\mathbf{b}$ به صورت $(۴,-۲,-۴)$ می باشد.

۵۰)اگربردار $\vec{a}\,(x,y,z)$ بربردارهای $\vec{b}\,(۱,-۱,۲)$ و $\vec{c}\,(۲,۰,۱)$ عمود باشد و $|\vec{a}|=۲$ باشد $x+y+z$ کدام می تواند باشد؟

۱) $\frac{۱۰}{\sqrt{۱۴}}$　　۲) $\frac{۱۲}{\sqrt{۱۴}}$　　۳) $\frac{۶}{\sqrt{۱۴}}$　　۴) $\frac{۸}{\sqrt{۱۴}}$　　(کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۷)

مثال) بردار $\mathbf{a}$ به طول ۴، بر محور xها و بردار $(-۱,۲,-۲)$ عمود است. طول تصویر قائم $\mathbf{a}$ روی محور yها کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$　　۲) ۱　　۳) $\sqrt{۲}$　　۴) ۲

جواب : گزینه ۱ درست است.فرض کنید $\mathbf{b}=(-۱,۲,-۲)$،در این صورت $\mathbf{b}\times\mathbf{i}=(۰,-۲,-۲)$ بر محور xها و بردار $\mathbf{b}$ عمود است. پس $\mathbf{a}=r(۰,-۲,-۲)$، $r\in\mathbb{R}$ و چون $|\mathbf{a}|=۴$. در نتیجه $\sqrt{r^۲(۰+۴+۴)}=۴\Rightarrow r^۲=۲\Rightarrow r=\pm\sqrt{۲}$

و داریم : $\mathbf{a}=\pm۲\sqrt{۲}(۰,-۲,-۲)=(۰,\mp۲\sqrt{۲},\mp۲\sqrt{۲})$

قضیه : اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار غیرصفر و θ زاویه بین آنها باشد آنگاه

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta$$

اثبات :

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=|(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)|^2$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

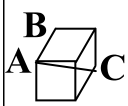
$$=a_2^2b_3^2-2a_2a_3b_2b_3+a_3^2b_2^2+a_3^2b_1^2-2a_1a_3b_1b_3+a_1^2b_3^2+a_1^2b_2^2-2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2\theta=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2(1-\cos^2\theta)=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\theta$$

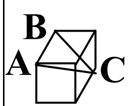
$$\Rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

مثال) شکل مقابل، مکعبی به طول یال ۲ را نمایش می دهد، اندازه‌ی $\vec{AB}\times\vec{AC}$ کدام است؟



۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) ۸   ۴) $8\sqrt{2}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $\vec{AB}\times\vec{AC}=|AB||AC|\sin B\hat{A}C=2\sqrt{2}|AC|\times\frac{|BC|}{|AC|}=2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=8$



مثال) هرگاه $|a|=2$ و $|b|=3$ و زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر ۱۵۰ درجه باشد. $|a\times(a\times b)|$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۶   ۴) ۹

جواب : گزینه ۳ صحیح است. چون : $a\perp(a\times b)$ پس :

$$|a\times(a\times b)|=|a||a\times b|\sin 90=|a|(|a||b|\sin150)\times1=4\times3\times\frac{1}{2}=6$$

مثال) زاویه‌ی بین دو بردار یکه‌ی a و b برابر $\frac{\pi}{3}$ است. اندازه‌ی بردار $(a+b)\times(a\times b)$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $|a+b|^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|\cos\frac{\pi}{3}=1+1+2\times1\times1\times\frac{1}{2}=3\Rightarrow|a+b|=\sqrt{3}$

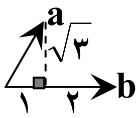
$$|a\times b|=|a||b|\sin\frac{\pi}{3}=1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(a+b)\perp(a\times b)\Rightarrow|(a+b)\times(a\times b)|=|a+b||a\times b|\sin 90=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{3}{2}$$

نکته : هرگاه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو بردار دلخواه با شرایط $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ و $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ و $\mathbf{a} \not\perp \mathbf{b}$ باشند داریم : $\tan(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{\mathbf{a}.\mathbf{b}}$

مثال) در شکل مقابل، اندازه‌ی بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ کدام است؟

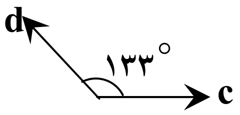
۱) ۲ ۲) ۶ ۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

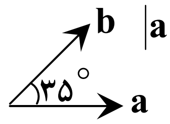


جواب : گزینه ۳ صحیح است. $|\mathbf{a}|^{۲} = ۱ + ۳ = ۴ \Rightarrow |\mathbf{a}| = ۲ \Rightarrow (\mathbf{a}; \mathbf{b}) = ۶۰^{\circ}$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin ۶۰ = ۲ \times ۳ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$$

مثال) در شکل زیر بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ بردارهای واحد هستند کدام گزینه <u>صحیح</u> است؟





۱) $\mathbf{a}.\mathbf{b} < \mathbf{c}.\mathbf{d}$ ۲) $|\mathbf{c} + \mathbf{d}| > |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ ۳) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| > |\mathbf{c} - \mathbf{d}|$ ۴) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| < |\mathbf{c} \times \mathbf{d}|$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos ۳۵ = \cos ۳۵ > ۰$

و $\mathbf{c}.\mathbf{d} = |\mathbf{c}||\mathbf{d}| \cos ۱۳۳ = \cos ۱۳۳ < ۰$ پس $\mathbf{a}.\mathbf{b} < \mathbf{c}.\mathbf{d}$ نادرست می باشد،لذا گزینه ۱ نادرست است.

می دانیم اگر زاویه ای افزایش یابد اندازه‌ی مجموع دو بردار کاهش و اندازه‌ی تفاضل آن دو بردار افزایش می یابد لذا گزینه ۲ و ۳ نادرست اند.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin ۳۵ = \sin ۳۵ \quad \text{و} \quad |\mathbf{c} \times \mathbf{d}| = |\mathbf{c}||\mathbf{d}| \sin ۱۳۳ = \sin ۱۳۳ = \sin(۱۸۰ - ۴۷) = \sin ۴۷$$

چون $\sin ۳۵ < \sin ۴۷$ درنتیجه $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| < |\mathbf{c} \times \mathbf{d}|$

۵۱) اگر $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{۳}\mathbf{a}.\mathbf{b}$ باشد،زاویه بین دو بردار چقدر است؟

۱) $\dfrac{\pi}{۶}$ ۲) $\dfrac{\pi}{۳}$ ۳) $\dfrac{\pi}{۴}$ ۴) $\dfrac{\pi}{۲}$ (کنکور آزاد ریاضی ۷۹)

مثال) اگر $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{o}$ و $|\mathbf{a}| = ۲$ و $|\mathbf{b}| = \sqrt{۲}$ مساحت تولید شده توسط دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابر یک واحد و زاویه‌ی بین این دو بردار حاده باشد،طول بردار $\mathbf{c}$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $s = \dfrac{۱}{۲}|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta = ۱ \Rightarrow \dfrac{۱}{۲} \times ۲ \times \sqrt{۲} \sin \theta = ۱ \Rightarrow \sin \theta = \dfrac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \hat{\theta} = \dfrac{\pi}{۴}$

$$|-\mathbf{c}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \Rightarrow |\mathbf{c}|^{۲} = |\mathbf{a}|^{۲} + |\mathbf{b}|^{۲} + ۲|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta = ۴ + ۲ + ۲ \times ۲\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰ \Rightarrow |\mathbf{c}| = \sqrt{۱۰}$$

مثال) اگر دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمود بوده و $|\mathbf{a}| = ۳$ و $|\mathbf{b}| = ۴$ باشد اندازه بردار $(۳\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - ۳\mathbf{b})$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

جواب : گزینه ۴ درست است. $|(۳\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - ۳\mathbf{b})| = ۱۰|\mathbf{b} \times \mathbf{a}| = ۱۰|\mathbf{b}||\mathbf{a}| \mathrm{Sin} ۹۰ = ۱۰ \times ۴ \times ۳ \times ۱ = ۱۲۰$

نکته (اتحادلاگرانژ) : برای هر دو بردار غیر صفر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ همواره داریم : $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^{۲} = |\mathbf{a}|^{۲}|\mathbf{b}|^{۲} - (\mathbf{a}.\mathbf{b})^{۲}$

نتیجه : الف : $(\mathbf{a}.\mathbf{b})^{۲} = |\mathbf{a}|^{۲}|\mathbf{b}|^{۲} - |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^{۲}$ ب : $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^{۲} + (\mathbf{a}.\mathbf{b})^{۲} = |\mathbf{a}|^{۲}|\mathbf{b}|^{۲}$

مثال) اگر $|a| = 10$ و $|b| = 2$ و $a.b = 12$ در این صورت $|a \times b|$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

جواب : گزینه ۳ درست است. $|a \times b|^2 + 12^2 = 10^2 \times 2^2 \Rightarrow |a \times b|^2 = 256 \Rightarrow |a \times b| = 16$

مثال) اگر $|a| = 3$ و $|b| = 5$ و $|a + b| = \sqrt{58}$ باشد. اندازه‌ی $a \times b$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱۲

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $|a + b| = \sqrt{58} \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2a.b = 58 \Rightarrow 9 + 25 + 2a.b = 58 \Rightarrow a.b = 12$

$|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a.b)^2 = 9 \times 25 - 144 = 81 \Rightarrow |a \times b| = 9$

۵۲) اگر $|a| = 3$ و $|b| = 26$ و $|a \times b| = 72$ در این صورت $|a.b|$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

مثال) اگر a و b دو بردار باشند به طوری که $|a \times b| = 72$، $a.b = 30$ و $|a| = 3$، آنگاه $|b|$ کدام است؟

۱) ۲۶ ۲) ۲۴ ۳) ۲۲ ۴) ۲۰

جواب : گزینه ۱ درست است. $|a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a.b)^2 \Rightarrow 5184 + 900 = 9 \times |b|^2 \Rightarrow |b|^2 = 676 \Rightarrow |b| = 26$

۵۳)زاویه بین دوبردار a و b کمتر از ۹۰ درجه است، $|\vec{a}| = 6$، $|\vec{b}| = 5$ و $|a \times (a + b)| = 18$ حاصل $a.(a + b)$ کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴ (کنکور سراسری ریاضی ۸۵)

نکته مهم : برای هر دو بردار غیر صفر a و b، a با b موازی است اگروفقط اگر $a \times b = o$

نتیجه : اگر $\vec{AB} \times \vec{AC} = o$ باشد آنگاه سه نقطه‌ی A و B و C بر یک استقامتند و بعکس.

مثال) اگر $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = o$ ($\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = o$) و بردارهای v_1 و v_2 غیرصفر باشند آنگاه الزاماً :

۱) $\vec{v_1} = -\vec{v_2}$ ۲) $\vec{v_1} = \vec{v_2}$ ۳) $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$ ۴) $\vec{v_1} \parallel \vec{v_2}$ (کنکور سراسری ریاضی ۷۶)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = o \Rightarrow |\vec{v_1}||\vec{v_2}| \sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ یا $\pi \Rightarrow \vec{v_1} \parallel \vec{v_2}$

۵۴) اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ و $\vec{b} \neq \vec{c}$ آنگاه کدام نتیجه گیری نادرست است؟

۱) $\vec{a}$ عمود بر $\vec{b} - \vec{c}$ ۲) $\vec{a}$ موازی $\vec{b} - \vec{c}$

۳) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ۴) $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ موازی یک صفحه (کنکور سراسری ریاضی ۷۹)

۵۵) اگر $\vec{b}=(۱,۲,۳)$ و $\vec{c}=(-۱,۱,۱)$ چنان باشد که $|\vec{a}|=۹$ و $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ،مجموع مؤلفه های بردار $\vec{a}$ کدام عدد می تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۵

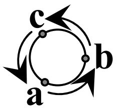
مثال) اگر برای سه بردار $a=(۱,۲,۱)$، $b=(\alpha,۱,۳)$ و $c=(۲,\beta,۱)$، رابطه‌ی $a\times b=a\times c$ برقرار باشد، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $a\times b=a\times c \Rightarrow a\times(b-c)=o \Rightarrow a \,||\, b-c$ و $b-c=(\alpha-۲,۱-\beta,۲)$

$$\Rightarrow \frac{\alpha-۲}{۱}=\frac{۱-\beta}{۲}=\frac{۲}{۱} \Rightarrow \alpha-۲=۲ \Rightarrow \alpha=۴ \text{ و } ۱-\beta=۴ \Rightarrow \beta=-۳ \Rightarrow \alpha+\beta=۱$$

نکته : اگر برای سه بردار a و b و c داشته باشیم : $a+b+c=o$ آنگاه : $a\times b=b\times c=c\times a$



مثال) اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند و $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=o$ آنگاه $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر کدام است؟

۱) $\vec{c}\times\vec{b}$ ۲) $\vec{a}\times\vec{c}$ ۳) $\vec{b}\times\vec{a}$ ۴) $\vec{c}\times\vec{a}$ (کنکور سراسری ریاضی ۷۴)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $a\times b=a\times(-a-c)=-a\times a-a\times c=c\times a$

۵۶) برای سه بردار a و b و c داریم $a+b+c=۰$ و $|b\times c|=۲$ در این صورت حاصل $۲|a\times b|-۳|b\times c|+۴|c\times a|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

نکته : اگر بردارهای a و b و c و d در شرایط $a\times b=c\times d$ و $a\times c=b\times d$ صدق کنند آنگاه : $(a-d)\,||\,(b-c)$

۵۷)چهار بردار a، b، c و d در دو رابطه‌ی $a\times c=d\times b$ و $a\times d=c\times b$ صدق می کنند، الزاماً دو بردار غیر صفر $a+b$ و $c+d$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مساوی ۲) قرینه ۳) عمود ۴) موازی (کنکور سراسری ریاضی ۹۳ خارج از کشور)

مثال) اگر $\mathbf{v}\times\mathbf{v}'=\mathbf{o}$ و بردارها ناصفر باشند،آن گاه لزوماً...

۱) $\mathbf{v}=-\mathbf{v}'$ ۲) $\mathbf{v}=\mathbf{v}'$ ۳) $\mathbf{v}\perp\mathbf{v}'$ ۴) $\mathbf{v}\parallel\mathbf{v}'$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $|\mathbf{v}\times\mathbf{v}'|=|\mathbf{o}|\Rightarrow|\mathbf{v}||\mathbf{v}'|\sin\theta=۰\xrightarrow{\mathbf{v},\mathbf{v}'\neq\mathbf{o}}\sin\theta=۰\Rightarrow\theta=۰$ یا $۱۸۰\Rightarrow\mathbf{v}\parallel\mathbf{v}'$

نتیجه مهم : برای هر بردار غیر صفر $\mathbf{a}$ همواره داریم : $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{o}$

تعبیرهندسی ضرب برداری : برای هر دو بردار غیر صفر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ که زاویه بین آنها θ است داریم :

الف) $\mathbf{a},\mathbf{b}\perp(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ یعنی $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ بر صفحه شامل دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ عمود است.

ب) مساحت متوازی الاضلاعی است که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو ضلع مجاورش می باشند $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$

پ) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{o}$ اگروتنهااگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ همراستا باشند.

ت) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ برداری است که جهت آن از قاعده دست راست بدست می آید،یعنی اگر انگشت اشاره دست راست به طرف $\mathbf{a}$ و انگشت وسطی به طرف $\mathbf{b}$ باشد،آنگاه انگشت شست جهت $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ را نشان می دهد.

نتیجه:مساحت متوازی الاضلاعی است که $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ دو قطر آن می باشند. $\frac{۱}{۲}|\mathbf{c}\times\mathbf{d}|=\frac{۱}{۲}|\mathbf{c}||\mathbf{d}|\sin\theta'$ که در آن θ' زاویه‌ی بین دو قطر است.

مثال) عدد حاصل ضرب داخلی دو بردار، $\sqrt{۳}$ برابر با مساحت متوازی الاضلاعی است که روی آن دو بردار ساخته می شود. زاویه بین آن دو بردار کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

جواب : گزینه ۱ صحیح است.روش اوّل : $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\sqrt{۳}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\Rightarrow\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}{\mathbf{a}.\mathbf{b}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۶}$

روش دوم : $\mathbf{a}.\mathbf{b}=\sqrt{۳}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\Rightarrow|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta=\sqrt{۳}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\Rightarrow\cos\theta=\sqrt{۳}\sin\theta\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۶}$

۵۸) اگر $|\mathbf{a}|=۲$، $|\mathbf{b}|=۴$ و زاویه‌ی بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برابر ۱۲۰ درجه باشد،مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $۵\mathbf{a}+۳\mathbf{b}$ و $۴\mathbf{a}+۶\mathbf{b}$ ساخته می شود چقدر است؟

۱) $۳۶\sqrt{۳}$ ۲) $۹۴\sqrt{۳}$ ۳) $۷۲\sqrt{۳}$ ۴) $۱۸۸\sqrt{۳}$

۵۹) اگر $\mathbf{a}=(۱,-۲,۳)$ و $\mathbf{b}=(۲,۰,۱)$،مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $\mathbf{a}+۳\mathbf{b}$ و $۲\mathbf{a}+۵\mathbf{b}$،کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) $۵\sqrt{۳}$ (کنکور سراسری ریاضی ۸۷)

۶۰)اگر $|\mathbf{a}| = ۲۷$ و $|\mathbf{b}| = ۵$ و $\mathbf{a.b} = ۸۱$ باشدآنگاه مساحت متوازی الاضلاعی که بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دوضلع مجاورآن هستند کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۱۰۸ ۴) ۲۱۶

مثال)اگر $|\mathbf{a}| = ۳$ و $|\mathbf{b}| = ۵$ و $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = ۴$ ،آنگاه مساحت متوازی الاضلاعی که بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو ضلع مجاور آن هستند کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل : $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^۲ = |\mathbf{a}|^۲ + |\mathbf{b}|^۲ - ۲\mathbf{a.b} \Rightarrow ۱۶ = ۹ + ۲۵ - ۲\mathbf{a.b} \Rightarrow \mathbf{a.b} = ۹$

$$\Rightarrow |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = ۹ \Rightarrow ۱۵\cos\theta = ۹ \Rightarrow \cos\theta = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \sin\theta = \frac{۴}{۵} \Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta = ۳ \times ۵ \times \frac{۴}{۵} = ۱۲$$

روش دوم : $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^۲ = |\mathbf{a}|^۲ + |\mathbf{b}|^۲ - ۲\mathbf{a.b} \Rightarrow ۱۶ = ۹ + ۲۵ - ۲\mathbf{a.b} \Rightarrow \mathbf{a.b} = ۹$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^۲ = |\mathbf{a}|^۲|\mathbf{b}|^۲ - (\mathbf{a.b})^۲ = ۳^۲ \times ۵^۲ - (۹)^۲ = ۲۲۵ - ۸۱ = ۱۴۴ \Rightarrow s = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ۱۲$$

۶۱) مساحت متوازی الاضلاعی که با دو بردار $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ساخته می شود،کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

مثال) بردار $\mathbf{a} = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت متوازی الاضلاعی که بر روی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{a} \times \mathbf{k}$ ساخته شود کدام است؟

۱) $\sqrt{۸۴}$ ۲) $\sqrt{۹۶}$ ۳) $\sqrt{۱۰۲}$ ۴) $\sqrt{۱۰۵}$ (کنکور سراسری ریاضی۸۶خارج از کشور)

جواب : گزینه ۴ صحیح است. روش اوّل :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{k} = (۱,۲,-۴) \times (۰,۰,۱) = (۲,-۱,۰) \Rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{a} = (۲,-۱,۰) \times (۱,۲,-۴) = (۴,۸,۵)$$

$$s = |(\mathbf{a} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{a}| = \sqrt{۱۶ + ۶۴ + ۲۵} = \sqrt{۱۰۵}$$

روش دوم : $\mathbf{a} \times \mathbf{k} = (۱,۲,-۴) \times (۰,۰,۱) = (۲,-۱,۰) \Rightarrow s = |\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{k})| = |\mathbf{a}||\mathbf{a} \times \mathbf{k}|\sin ۹۰ = \sqrt{۲۱} \times \sqrt{۵} = \sqrt{۱۰۵}$

۶۲) اگر بردارهای $(۶,۴,۲)$ و $(۲,۴,۲)$ قطرهای یک متوازی الاضلاع باشند مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $۸\sqrt{۵}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۵}$

مثال) اگر بردارهای $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = -۲\mathbf{i} + (m + ۱)\mathbf{j}$ قطرهای یک لوزی باشند،مساحت آن چقدر است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a.b} = ۰ \Rightarrow -۲m + m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۱ \Rightarrow \mathbf{a} = (۱,۱,۲)$ و $\mathbf{b} = (-۲,۲,۰)$

روش اوّل : $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-۴,-۴,۴) \Rightarrow s = \frac{۱}{۲}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶ + ۱۶ + ۱۶} = ۲\sqrt{۳}$

روش دوم:مساحت هرلوزی برابراست بانصف حاصل ضربدوقطرآن $s = \frac{۱}{۲}|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۱ + ۴} \times \sqrt{۴ + ۴} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴۸} = ۲\sqrt{۳}$

نتیجه : مساحت مثلثی که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ دو ضلع مجاورش می باشند از دستور زیر بدست می آید. $\frac{۱}{۲}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$

نتیجه : مساحت متوازی الاضلاعی است که $\mathbf{a}$ یک ضلع و $\mathbf{b}$ یک قطر آن می باشند $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$

مثال) اگر بردارهای $\mathbf{a}=(۱,۲,۲)$ و $\mathbf{b}=(-۲,۱,۱)$ به ترتیب یک ضلع و یک قطر متوازی الاضلاعی باشند مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(۱,۲,۲)\times(-۲,۱,۱)=(۰,-۵,۵)\Rightarrow s=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{۰+۲۵+۲۵}=۵\sqrt{۲}$

۶۳) مساحت متوازی الاضلاعی که نقاط $A(۱,۰,-۱)$ و $B(۲,۱,۰)$ و $C(۰,۱,-۲)$ سه رأس متوالی آن باشند کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۹

نکته : اگر نقاط A، B و C سه رأس مثلث ABC باشند آنگاه مساحت این مثلث از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$s_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\right|$$

نکته : اگر نقاط A، B و C سه رأس مثلث ABC باشند آنگاه مساحت این مثلث از رابطه های زیر به دست می آید.

$$s_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}\left\|\begin{matrix}x_A-x_B & x_A-x_C\\ y_A-y_B & y_A-y_C\end{matrix}\right\|$$

نکته : اگر نقاط A، B و C سه رأس متوالی یک متوازی الاضلاع باشند آنگاه مساحت این متوازی الاضلاع از رابطه های زیر به دست می آید.

$$s_{\text{متوازي الاضلاع}}=\left\|\begin{matrix}x_A-x_B & x_A-x_C\\ y_A-y_B & y_A-y_C\end{matrix}\right\|$$

مثال)دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به طول های ۵ و ۸ واحد مفروض اند مساحت مثلث تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویه بین دو بردار کمتر از قائمه باشد،اندازه تفاضل دو بردارکدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۶/۵ ۴) ۷/۵ (کنکور سراسری ریاضی ۸۱)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$|\mathbf{a}|=۵ \text{ و } |\mathbf{b}|=۸ \text{ و } s=\frac{۱}{۲}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\frac{۱}{۲}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha\Rightarrow\frac{۱}{۲}\times۵\times۸\sin\alpha=۱۲\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow$$

$$\cos\alpha=\frac{۴}{۵}\Rightarrow|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^۲=|\mathbf{a}|^۲+|\mathbf{b}|^۲-۲|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha=۲۵+۶۴-۲\times۵\times۸\times\frac{۴}{۵}=۲۵\Rightarrow|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=۵$$

۶۴) دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به طول های ۳ و ۴ واحد با یکدیگر زاویه ۳۰ درجه می سازند مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $\mathbf{a}-۲\mathbf{b}$ و $۳\mathbf{a}+۲\mathbf{b}$ تولید شود کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸ (کنکور سراسری ریاضی ۸۴)

مثال) اگر $|\vec{a}|=۳$ و $|\vec{b}|=۲$ و $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{۱۸}{۵}$ مساحت مثلثی که روی دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ساخته می شود چقدر است؟

۱) $\frac{۲۴}{۵}$ ۲) $\frac{۱۸}{۵}$ ۳) $\frac{۱۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳۶}{۵}$ (کنکور آزاد ریاضی عصر ۸۶)

جواب : روش اوّل : $|a\times b|^۲=|a|^۲|b|^۲-(a.b)^۲=۳۶-\frac{۳۲۴}{۲۵}=\frac{۵۷۶}{۲۵}\Rightarrow|a\times b|=\frac{۲۴}{۵}\Rightarrow s=\frac{۱}{۲}|a\times b|=\frac{۱۲}{۵}$

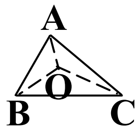
روش دوم : گزینه ۳ درست است. $\cos\theta=\frac{\frac{۱۸}{۵}}{۳\times۲}=\frac{۳}{۵}$ و $\sin\theta=\frac{۴}{۵}\Rightarrow s=\frac{۱}{۲}|a||b|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۳\times۲\times\frac{۴}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$

۶۵) مساحت مثلث با سه رأس $A(۱,-۲,۳)$ ، $B(۲,۰,۱)$ و $C(-۳,۲,۱)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳۵}$ ۲) $\sqrt{۴۲}$ ۳) $\sqrt{۵۴}$ ۴) $\sqrt{۶۵}$ (کنکور سراسری ریاضی ۸۹)

مثال) در مثلث ABC اگر $A=(۱,۲,۰)$ و $B=(-۱,۱,۱)$ و $C=(۲,۰,-۱)$ باشد. و O نقطه‌ی دلخواه درون مثلث باشد آنگاه حاصل $|\vec{OA}\times\vec{OB}|+|\vec{OA}\times\vec{OC}|+|\vec{OB}\times\vec{OC}|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۷۰}$ ۲) $۲\sqrt{۳۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳۵}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳۵}$



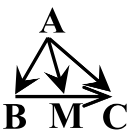
جواب : گزینه ۴ صحیح است. $\vec{AB}=(-۲,-۱,۱)$ و $\vec{AC}=(۱,-۲,-۱)\Rightarrow\vec{AB}\times\vec{AC}=(۳,-۱,۵)$

$$|\vec{OA}\times\vec{OB}|+|\vec{OA}\times\vec{OC}|+|\vec{OB}\times\vec{OC}|=۲s_{\Delta OAB}+۲s_{\Delta OAC}+۲s_{\Delta OBC}=۲s_{\Delta ABC}$$

$$=|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{۹+۱+۲۵}=\sqrt{۳۵}$$

مثال) اگر هر یک از اضلاع مثلث ABC را یک بردار و مساحت مثلث ABC را s در نظر بگیریم،حاصل عبارت $|(\vec{AB}+\vec{AC})\times(\vec{AB}+\vec{BC})|$ بر حسب s کدام است؟

۱) s ۲) $۲s$ ۳) $۴s$ ۴) $۸s$



جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل :

$$|(\vec{AB}+\vec{AC})\times(\vec{AB}+\vec{BC})|=|۲\vec{AM}\times\vec{AC}|=۴\times\frac{۱}{۲}\times|\vec{AM}\times\vec{AC}|=۴\times\frac{۱}{۲}s=۲s$$

روش دوم : $|(\vec{AB}+\vec{AC})\times(\vec{AB}+\vec{BC})|=|(\vec{AB}+\vec{AC})\times\vec{AC}|=|\vec{AB}\times\vec{AC}+\vec{AC}\times\vec{AC}|=|\vec{AB}\times\vec{AC}|=۲s$

تمرین۵) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}=(1,-3,2)$ و $\vec{b}=(-2,1,-5)$ پیدا کنید. (ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۶)سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ مثال بزنید که برای آنها $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ ولی $\vec{b}\neq\vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید. (ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۷)بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند به طوری که $|\vec{a}|=3$ و $|\vec{b}|=26$ و $|\vec{a}\times\vec{b}|=72$. مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را محاسبه کنید.

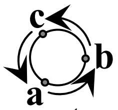
(ص۸۴کتاب جدید)

تمرین۸) مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $A=(3,5,7)$ و $B=(5,5,0)$ و $C=(-4,0,4)$ داده شده است را بیابید.
(ص۸۴کتاب جدید)

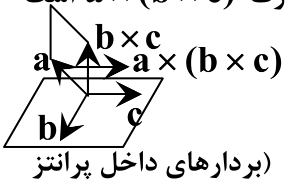
ضرب مختلط عددی (ضرب سه گانه عددی) : فرض کنید a و b و c سه بردار در فضا باشند در این صورت $a.(b\times c)$ را ضرب مختلط (سه گانه) عددی سه بردار a و b و c می نامند.

نکته : $a(a_1,a_2,a_3)$ و $b(b_1,b_2,b_3)$ و $c(c_1,c_2,c_3) \Rightarrow a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$

نکته : اگر a و b و c سه بردار در فضا باشند در این صورت $a.(b\times c)=b.(c\times a)=c.(a\times b)$



ضرب مضاعف برداری (ضرب سه گانه برداری) : منظور از ضرب مضاعف (سه گانه) برداری عبارت $a\times(b\times c)$ است که حاصل آن یک بردار است عمود بر صفحه‌ی شامل دو بردار a (بردار بیرون پرانتز) و $(b\times c)$ و همچنین موازی صفحه‌ی شامل دو بردار b و c (بردارهای درون پرانتز) می باشد.



نکته : فرض کنید a و b و c بردارهای دلخواه باشند،ثابت کنید : $a\times(b\times c)=(a.c)b-(a.b)c$ (بردارهای داخل پرانتز را به صورت تفاضل این دو بردار b و c می نویسیم و ضریب هر کدام را ضرب داخلی دو بردار دیگر قرار می دهیم.)

توجه:برای نوشتن حاصل $(b\times c)\times a$ کافیست ابتدا بردار را به صورت $-a\times(b\times c)$ قرینه نموده سپس از دستور بالا استفاده کنیم.

مثال) اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار غیر صفر باشند خلاصه شده $(2\mathbf{a}-\mathbf{b}).((\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}))$ کدام است؟

۱) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ۲) $2\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ۳) $3\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ۴) صفر   (کنکور سراسری ریاضی ۹۰)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. روش اوّل : چون $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار دلخواه و غیر صفر می باشند پس برای سادگی کار $\mathbf{a}=\mathbf{i}$ و $\mathbf{b}=\mathbf{j}$ و $\mathbf{c}=\mathbf{k}$ در نظر می گیریم. داریم :

$$(2\mathbf{a}-\mathbf{b}).((\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a}))=(2,-1,0).((0,1,1)\times(-1,0,1))=(2,-1,0).(1,-1,1)=2+1+0=3$$

از طرفی

$$3\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=3\mathbf{i}.(\mathbf{j}\times\mathbf{k})=3\mathbf{i}.\mathbf{i}=3$$

روش دوم :

$$=(2\mathbf{a}-\mathbf{b}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{c}\times\mathbf{c}-\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(2\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}-\mathbf{c}\times\mathbf{a})$$

$$=2\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-2\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{a})-2\mathbf{a}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})-\mathbf{b}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})-\mathbf{b}.(\mathbf{b}\times\mathbf{a})+\mathbf{b}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$$

$$=2\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=3\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

(**توجه** : این تست فقط در حالتی که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه بردار غیر صفر متمایز باشند برقرار است.)

مثال) اگر سه بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ مخالف صفر باشند زاویه بین بردار $\mathbf{b}$ و بردار $\mathbf{v}=\mathbf{a}(\mathbf{b}.\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{b}.\mathbf{a})$ چقدر است؟

۱) ۶۰ درجه   ۲) ۹۰ درجه   ۳) ۳۰ درجه   ۴) صفر درجه   (کنکور آزاد ریاضی ۷۳)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل :

$$\mathbf{b}.\mathbf{v}=\mathbf{b}.\left[\mathbf{a}(\mathbf{b}.\mathbf{c})-\mathbf{c}.(\mathbf{b}.\mathbf{a})\right]=(\mathbf{b}.\mathbf{a})(\mathbf{b}.\mathbf{c})-(\mathbf{b}.\mathbf{c})(\mathbf{b}.\mathbf{a})=0\Rightarrow \mathbf{b}\perp\mathbf{v}\Rightarrow\hat{\theta}=90^\circ$$

روش دوم :

$$\mathbf{v}=\mathbf{a}(\mathbf{b}.\mathbf{c})-\mathbf{c}(\mathbf{b}.\mathbf{a})=\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\perp\mathbf{b},(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$$

مثال) کدام گزینه در مورد بردار $(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}$ صحیح است؟

۱) موازی $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ۲) عمود بر $\mathbf{c}$ ۳) عمود بر $\mathbf{b}$ ۴) موازی $\mathbf{a}$

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}.\mathbf{c})\mathbf{a}=\mathbf{c}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$$

مثال) اگر $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ باشند. تصویر بردار $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ روی محور $\mathbf{x}$ ها،کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴   (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۲)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل :

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}1\\-2\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\3\\2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4\\-2\\3\end{vmatrix}\Rightarrow(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}-4\\-2\\3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}4\\1\\-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\\4\\4\end{vmatrix}$$

روش دوم : با استفاده از ویژگی های ضرب برداری و ضرب مختلط برداری می توان نوشت :

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=-\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=-((\mathbf{c}.\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{c}.\mathbf{a})\mathbf{b})=-((0+3-4)(1,-2,0)-(4-2+0)(0,3,2))=(1,4,4)$$

مثال) اگر $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ و $\mathbf{b}=3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ و $\mathbf{c}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ باشند. تصویر بردار $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ روی محور $\mathbf{x}$ ها،کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴   (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۲)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل :

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}1\\-2\\0\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\3\\2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4\\-2\\3\end{vmatrix}\Rightarrow(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}-4\\-2\\3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}4\\1\\-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1\\4\\4\end{vmatrix}$$

روش دوم : با استفاده از ویژگی های ضرب برداری و ضرب مختلط برداری می توان نوشت :

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=-\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=-((\mathbf{c}.\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{c}.\mathbf{a})\mathbf{b})=-((0+3-4)(1,-2,0)-(4-2+0)(0,3,2))=(1,4,4)$$

مثال)اگراندازه بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ به ترتیب۲و۲و۳وزاویه های بین دوبه دوی آن ها ۶۰ درجه باشد،حاصل $\left|\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\right|$ کدام است؟

۱) $4\sqrt{6}$ ۲) $6\sqrt{2}$ ۳) ۶   ۴) $3\sqrt{3}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$\left|\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\right|=\left|(\mathbf{a}.\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c}\right|=\left|(|\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos 60)\mathbf{b}-(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos 60)\mathbf{c}\right|$$

$$=\left|۲\times۳\times\frac{۱}{۲}b-۲\times۲\times\frac{۱}{۲}c\right|=|۳b-۲c|$$

$$|۳b-۲c|^{۲}=۹|b|^{۲}+۴|c|^{۲}-۱۲|b||c|\cos ۶۰=۳۶+۳۶-۱۲\times۲\times۳\times\frac{۱}{۲}=۳۶\Rightarrow|۳b-۲c|=۶$$

نکته : (اتحاد ژاکوبی) اگر a و b و c بردارهایی دلخواه باشند آنگاه : $a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=o$

مثال) اگر a و b و c سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند،مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟

۱) $a.(c\times b)$ ۲) $a.(b\times c)$ ۳) $b.(a\times c)$ ۴) $(a\times c).b$ (کنکور سراسری ریاضی۸۴)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $(a\times c).b=b.(a\times c)\rightarrow a.(c\times b)=b.(a\times c)$

نکته: بردارهای a و b و c درفضاهم صفحه اندا‌گروتنهااگر $a.(b\times c)=۰$ (و یا هر جایگشتی از ضرب سه گانه عددی a و b و c)

شرط آنکه سه برداردریک صفحه باشند: آن است که حجم متوازی السطوح حاصل ازآنهابرابرصفرباشد. $\begin{vmatrix}a_۱ & a_۲ & a_۳\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\\ c_۱ & c_۲ & c_۳\end{vmatrix}=۰$

نکته : اگر مؤلفه های بردارهای a و b و c در فضا نه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند آنگاه ضرب سه گانه عددی این سه بردار صفر و درنتیجه این سه بردار هم صفحه اند. باید توجه داشت عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

نکته : اگر بردار a با یکی از دو بردار b یا c موازی باشد آنگاه : $a.(b\times c)=۰$ یعنی بردارهای a و b و c هم صفحه اند.

نکته : اگر سه بردار a و b و c بردارهایی باشند با این خاصیت که $(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=o$ آنگاه بردارهای a و b و c در یک صفحه قرار می گیرند.

مثال : آیا بردارهای $\vec{a}=(۲,۳,-۱)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۳)$ و $\vec{c}=(۱,۹,-۱)$ در یک صفحه اند؟   (ص۸۴کتاب جدید)

حل : برای این منظور کافی است $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ را به دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی السطوح تولید شده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$\vec{b}\times\vec{c}=(-۱۶,۱۴,۱۰)\Rightarrow\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=-۳۲+۴۲-۱۰=۰\Rightarrow$ سه بردار در یک صفحه هستند.

۶۶)بین سه بردار a و b و c رابطه $(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=۰$ برقرار است. وضعیت این سه بردار نسبت به هم چگونه است؟

۱) موازی هم   ۲) منطبق بر هم   ۳) واقع در یک صفحه   ۴) دو به دو عمود بر هم

(کنکور سراسری و آزاد ریاضی خارج از کشور ۹۷)

۶۷) اگر $a(۱,-۲,۰)$ و $b(۱,۰,۱)$ و $c(m,۱,۱)$ مفروض باشند به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $(a\times b)+(b\times c)+(c\times a)=o$ برقرار است؟

۱) ۱   ۲) ۱-   ۳) ۰/۵   ۴) ۰/۵-

مثال) اگر بین سه بردار غیر صفر a و b و c رابطه $a\times b+b\times c=a\times c$ برقرار باشد،آنگاه این سه بردار نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

۱) برابرند. ۲) هم اندازه اند. ۳) در یک صفحه اند. ۴) دو به دو بر هم عمودند.

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $a.(a\times b)+a.(b\times c)=a.(a\times c)\Rightarrow a.(b\times c)=0\Rightarrow$ **سه بردار در یک صفحه اند.**

مثال)به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $a\times b+b\times c=a\times c$ بین سه بردار $a(2,-m,m)$ و $b(1,0,1)$ و $c(0,1,1)$برقرار است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $a.(a\times b)+a.(b\times c)=a.(a\times c)\Rightarrow a.(b\times c)=0\Rightarrow$ **سه بردار در یک صفحه اند.**

$$b\times c=(-1,-1,1)\Rightarrow a.(b\times c)=-2+m+m=0\Rightarrow m=1$$

مثال) $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ سه بردار و $(\vec{v}_1\times\vec{v}_2).\vec{v}_3=o$ کدام گزینه در مورد این سه بردار صحیح است؟

۱) $\vec{v}_1$ بر $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_2$ بر $\vec{v}_3$ عمود است. ۲) $\vec{v}_1\times\vec{v}_2$ موازی $\vec{v}_3$ است.

۳) $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ در یک صفحه اند. ۴) $\vec{v}_1$ بر، $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ عمود است. (کنکور سراسری ریاضی ۷۱)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $(\vec{v}_1\times\vec{v}_2).\vec{v}_3=o\Rightarrow\vec{v}_1\times\vec{v}_2\perp\vec{v}_3\Rightarrow$ **$\vec{v}_3$ بر صفحه شامل $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_2$ عمود است.**

پس $\vec{v}_1$ ، $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ در یک صفحه اند.

نکته:اگر p و q و r و s بردارهای دلخواه باشند،آنگاه بردارهای $a=p\times s$ و $b=q\times s$ و $c=r\times s$ در یک صفحه قرار دارند.

مثال) اگر a و b و c و d چهار بردار دلخواه باشند،آنگاه سه بردار $a\times d$ ، $b\times d$ و $c\times d$ نسبت به هم چگونه اند؟

۱) موازی یک صفحه اند. ۲) موازی هم اند.

۳) دو به دو عمود بر هم اند. ۴) مجموع آنها برابر صفر است. (کنکور سراسری ریاضی۸۵خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اوّل : سه بردار $a\times d$ ، $b\times d$ و $c\times d$ همگی عمود بر بردار d هستند و در نتیجه در صفحه ای عمود بر d (صفحه ای که بردار نرمالش d است) قرار می گیرند.

روش دوم : $(a\times d).(b\times d)\times(c\times d)=(a\times d).((b\times d).d)c-(b\times d).c)d)=(b\times d).c)(a\times d).d=0$

مثال) ساده شده عبارت $(a\times i).((b\times i)\times(c\times i))$ کدام است؟

۱) $a.(b\times c)$ ۲) $b.(a\times c)$ ۳) $a\times(b\times c)$ ۴) صفر

جواب : گزینه ۴ صحیح است. با توجه به تمرین کتاب چون بردارهای $(a\times i)$ و $(b\times i)$ و $(c\times i)$ در یک صفحه واقع اند پس :

$$(a\times i).((b\times i)\times(c\times i))=0$$

۶۸) سه بردار $(1,0,1)$، $(0,2,1)$ و $(m,0,2)$ در یک صفحه اند، m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱- ۴) ۱

۶۹) به ازای کدام مقدار m، بردار $a=(-3,10,m)$ برابر مجموع دو بردار هم راستا با بردارهای $(3,1,2)$ و $(-2,4,1)$ است؟

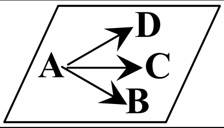
۱) ۱۰- ۲) ۸- ۳) ۹ ۴) ۱۱ (کنکور سراسری ریاضی۹۶خارج از کشور)

مثال) چند بردار به طول ۲ وجود دارد که بر هر سه بردار $a=(2,1,-1)$، $b=(1,2,2)$ و $c=(0,-3,-5)$ عمود باشد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بیشمار (کنکور آزاد ریاضی صبح ۸۸)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. پس سه بردار فوق در یک صفحه اند. $\Rightarrow 0 = 3 + 5 + 8- = a.(b\times c),(-4,5,-3) = b\times c$

پس دو بردار به طول ۲ وجود دارد که بر هر سه بردار a، b و c عمود باشد.



نکته : چهار نقطه‌ی دلخواه A، B، C و D در یک صفحه واقع اند اگرو تنها اگر $\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=0$

مثال) به ازای چه مقدار m چهار نقطه‌ی $A(1,0,2)$، $B(3,2,m)$، $C(-1,1,1)$ و $D(2,1,3)$ در یک صفحه قرار دارند؟

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۳- ۴) ۳

جواب : گزینه ۱ درست است.

$$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}2\\2\\m-2\end{vmatrix} \text{ و } \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}-2\\1\\-1\end{vmatrix} \text{ و } \overrightarrow{AD}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix} \text{ و } \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}2\\1\\-3\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=0\Rightarrow 4+2-3m+6=0\Rightarrow m=4$$

نکته(تعبیر هندسی ضرب مختلط عددی): حجم متوازی السطوحی که a و b و c سه‌یال مجاورآن هستند برابر است با : $|a.(b\times c)|$ و یا هر جایگشتی از ضرب سه گانه عددی a و b و c

مثال: حجم متوازی السطوحی رابه دست آورید که توسط بردارهای $\overrightarrow{a}=(1,1,0)$ و $\overrightarrow{b}=(1,0,1)$ و $\overrightarrow{c}=(0,1,1)$ تولید می شود.

جواب : $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=(1,1,-1)\Rightarrow V=|\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})|=|(1,1,0).(1,1,-1)|=|1+1+0|=2$ (ص۸۳کتاب جدید)

مثال) حجم متوازی السطوحی که با سه بردار $a=i+j+k$، $b=i-j+k$ و $c=i+j-k$ ساخته می شود کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

جواب : گزینه۲ درست است. $|a.(b\times c)|=|(1,1,1).(0,2,2)|=|0+2+2|=4$

مثال) اگر $c=a\times b$ و $|c|=2\sqrt{5}$ باشد،حجم متوازی السطوح ساخته شده روی بردارهای a، b و c کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) $\frac{10}{3}$

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $v=|c.(a\times b)|=|c.c|=|c|^2=(2\sqrt{5})^2=20$

۷۰)اگر $a=(2,-3,1)$ و $b=(1,2,-4)$ باشند.حجم متوازی السطوحی که برروی سه بردار a و b و $a\times b$ ساخته شود، کدام است؟

۱) ۲۲۵ ۲) ۲۳۰ ۳) ۲۴۵ ۴) ۲۵۰ (کنکور سراسری و آزاد ریاضی ۹۷)

مثال) اگر سه بردار به تصاویر $(2,a,1)$ و $(b,2,4)$ و $(2,1,c)$ یال های یک مکعب مستطیل باشند،حجم آن کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵ (کنکور سراسری ریاضی۹۰خارج از کشور)

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $v_1(2,a,1)$ و $v_2(b,2,4)$ و $v_3(2,1,c)$

اوّلاً : باید این سه بردار دو به دو بر هم عمود باشند. (یال های مکعب مستطیل)

$$\begin{cases} v_۱.v_۲=۰\\ v_۱.v_۳=۰\\ v_۲.v_۳=۰\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}۲b+۲a+۴=۰\\ ۴+a+c=۰\\ ۲b+۲+۴c=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\ b=۱\\ c=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_۱=(۲,-۳,۱)\\ v_۲=(۱,۲,۴)\\ v_۳=(۲,۱,-۱)\end{cases}\Rightarrow v_۲\times v_۳=\left|\begin{matrix}-۶\\ ۹\\ -۳\end{matrix}\right.$$

ثانیاً : حجم مکعب مستطیل (متوازی السطوح) قدرمطلق حاصل ضرب مختلط سه بردار است.

$$v=|v_۱.(v_۲\times v_۳)|=|-۱۲-۲۷-۳|=۴۲$$

۷۱) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار واقع بر نیمسازهای سه صفحه xoy و yoz و zox به ترتیب با طول های $\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$ با مؤلفه های غیر منفی ساخته می شود،چند واحد مکعب است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$ (کنکور سراسری ریاضی۸۴خارج از کشور)

مثال)بر روی سه بردار $a=۲i-j$ و $b=j+۳k$ و $c=۴i-k$ یک متوازی السطوح ساخته شده است. اگر قاعده این متوازی السطوح را بردارهای a و b تشکیل دهند،ارتفاع متوازی السطوح کدام است؟

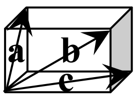
۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲ (کنکور سراسری ریاضی۸۹خارج از کشور)

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$a\times b=\left|\begin{matrix}۲\\ -۱\\ ۰\end{matrix}\right.\times\left|\begin{matrix}۰\\ ۱\\ ۳\end{matrix}\right.=\left|\begin{matrix}-۳\\ -۶\\ ۲\end{matrix}\right.\Rightarrow s=|a\times b|=\sqrt{۹+۳۶+۴}=۷ \quad \text{مساحت قاعده}$$

$$v=|c.(a\times b)|=|-۱۲-۲|=۱۴ \ \text{حجم متوازی السطوح} \Rightarrow ۱۴=۷h\Rightarrow h=۲ \ \text{ارتفاع متوازی السطوح}$$

نکته : حجم متوازی السطوحی که a و b و c قطرهای سه وجه مجاور آن هستند برابر است با : $\frac{۱}{۲}|a.(b\times c)|$



مثال) روی سه بردار $OA=(۳,۲,-۱)$ و $OB=(۲,۰,۱)$ و $OC=(۲,-۲,۱)$ یک متوازی السطوح ساخته شده است. حجم هرم هم حجم با این متوازی السطوح کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$\vec{OB}\times\vec{OC}=\left|\begin{matrix}۲\\ ۰\\ ۱\end{matrix}\right.\times\left|\begin{matrix}۲\\ -۲\\ ۱\end{matrix}\right.=\left|\begin{matrix}۲\\ ۰\\ -۴\end{matrix}\right.\Rightarrow v=\left|\vec{OA}.(\vec{OB}\times\vec{OC})\right|=|۶+۰+۴|=۱۰$$

مثال) با سه بردار هم آغاز $\vec{OA}=(۱,۰,۱)$ و $\vec{OB}=(۰,۲,۱)$ و $\vec{OC}=(۲,۲,۰)$ منشوری ساخته می شود که این سه بردار سه‌یال همرس آن می باشند. اگر قاعده این منشور،مثلث OAB باشد،ارتفاع منشور کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

جواب :گزینه ۲ درست است. حجم منشور نصف حجم متوازی السطوحی است که با بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ و $\vec{OC}$ ساخته می شود.

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}0\\2\\1\end{vmatrix}=(-2,-1,2)\Rightarrow \text{مساحت قاعده}\ s=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\frac{\sqrt{4+1+4}}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\text{حجم متوازی السطوح}=\left|\overrightarrow{OC}.(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\right|=\left|-4-2+0\right|=6\Rightarrow$$

$$\text{حجم منشور}=V=\frac{1}{2}\times 6=3\Rightarrow V=s\times h\Rightarrow 3=\frac{3}{2}\times h\Rightarrow h=2$$

مثال) اگر $a=b\times c=(1,2,-2)$، آن گاه حاصل $b.(c\times a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۹

جواب : گزینه ۴ صحیح است. $b.(c\times a)=a.(b\times c)=a.a=|a|^2=1+4+4=9$

مثال) اگر $c=a\times b$ و $|c|=2\sqrt{5}$ باشد، حجم متوازی السطوح ساخته شده روی بردارهای a، b و c کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۰ ۴) ۵

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $v=|c.(a\times b)|=|c.c|=|c|^2=(2\sqrt{5})^2=20$

۷۲) اگر $c=a\times b$ و حجم متوازی السطوح ساخته شده روی بردارهای a، b و c برابر ۴۹ واحد حجم باشد، $|a\times b|$ کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۷ ۳) ۱۴ ۴) ۹۸

مثال) دو بردار $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و بردار $\overrightarrow{OC}$ برابر حاصل ضرب برونی آنها را در نظرمی گیریم. اگر حجم متوازی السطوحی که سه پاره خط OA و OB و OC سه‌یال یک راس آن می باشند ۸۱ سانتیمتر مکعب باشد، اندازه $\left|\overrightarrow{OC}\right|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

جواب : گزینه ۲ صحیح است. $v=\left|\overrightarrow{OC}.(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\right|=\left|\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC}\right|\Rightarrow 81=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\Rightarrow\left|\overrightarrow{OC}\right|=9$

مثال) نقاط $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$ و $C(1,1,0)$ و $D(0,2,1)$ مفروضند. حجم متوازی السطوح به‌یال های BA و BC و BD کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

جواب : گزینه۲ درست است.

روش اوّل :
$$\overrightarrow{BA}\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}\ \text{و}\ \overrightarrow{BC}\begin{vmatrix}1\\0\\-1\end{vmatrix}\ \text{و}\ \overrightarrow{BD}\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}\ \text{و}\ \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}1\\0\\1\end{vmatrix}\Rightarrow V=\left|\overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD})\right|=|1+0+0|=1$$

روش دوم :
$$\overrightarrow{BA}\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}\ \text{و}\ \overrightarrow{BC}\begin{vmatrix}1\\0\\-1\end{vmatrix}\ \text{و}\ \overrightarrow{BD}\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}\Rightarrow V=\left|\overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD})\right|=\left\|\begin{matrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{matrix}\right\|=1$$

نکته : اگر $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه‌یال همرس یک هرم مثلث القاعده (چهاروجهی) باشند، آنگاه حجم هرم از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$v = \frac{۱}{۶}\left|\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\right|$$

نکته : اگر نقاط A ، B ، C و D چهار راس یک هرم مثلث القاعده (چهاروجهی) باشند، آنگاه حجم هرم از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$v = \frac{۱}{۶}\left|\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})\right|$$

نکته : هرگاه صفحه π محورهای مختصات را در نقاط $A(p,۰,۰)$ و $B(۰,q,۰)$ و $C(۰,۰,r)$ قطع کند حجم هرم $O-ABC$ از دستور $v = \frac{۱}{۶}|pqr|$ و مساحت مثلث ABC از دستور $S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}\sqrt{p^۲q^۲ + q^۲r^۲ + p^۲r^۲}$ و فاصله‌ی مبدأ مختصات از صفحه مثلث ABC از دستور $\frac{۱}{OH^۲} = \frac{۱}{p^۲} + \frac{۱}{q^۲} + \frac{۱}{r^۲}$ به دست می آید. که در آن O مبدأ مختصات و H پای عمودی است که از مبدأ بر صفحه مثلث ABC رسم می شود.

مثال) سه بردار $\mathbf{a} = (۱,۲,m-۱)$ و $\mathbf{b} = (۲,-۱,۰)$ و $\mathbf{c} = (۵,۰,۰)$ مفروض اند اگر حجم چهاروجهی ساخته شده روی این سه بردار برابر ۵ واحد سطح باشد حداقل مقدار m کدام است؟

۱) ۵- ۲) ۷- ۳) ۵ ۴) ۷

جواب : گزینه ۱ صحیح است. $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (۲,-۱,۰) \times (۵,۰,۰) = (۰,۰,۵)$

$$v = \frac{۱}{۶}\left|\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\right| = ۵ \Rightarrow \frac{۱}{۶}\left|۵(m-۱)\right| = ۵ \Rightarrow m - ۱ = \pm ۶ \Rightarrow m = -۵ \text{ یا } m = ۷$$

مثال) مختصات چهار راس هرمی $A(۱,۲,۳)$ و $B(۱,۲,۱)$ و $C(۱,۶,۱)$ و $D(-۱,۲,۴)$ است حجم هرم چقدر است؟ (کنکور ریاضی آزاد۸۷ صبح)

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

جواب : گزینه ۴ صحیح

$$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \\ -۲ \end{vmatrix}, \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} ۰ \\ ۴ \\ -۲ \end{vmatrix}, \overrightarrow{AD}\begin{vmatrix} -۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{vmatrix}, \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} ۴ \\ ۴ \\ ۸ \end{vmatrix}, v = \frac{۱}{۶}\left|\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})\right| = \frac{۱}{۶}\left|۰ + ۰ - ۱۶\right| = \frac{۸}{۳}$$

نکته : اگر $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ سه‌یال همرس یک منشور مثلث القاعده باشند، آنگاه حجم منشور از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$$v = \frac{۱}{۲}\left|\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\right|$$

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲	۲	۴	۳	۱	۲	۳	۲	۲	۴	۱	۱	۱	۳	۴	۳	۱	۴	۲	۲
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴	۲	۲	۴	۱	۱	۱	۳	۳	۳	۳	۲	۳	۱	۱	۴	۱	۳	۴	۳
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۲	۲	۳	۱	۳	۳	۴	۴	۳	۴	۲	۳	۳	۱	۴	۴	۴	۳	۳	۳
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲								
۲	۲	۳	۱	۴	۳	۳	۱	۱	۲	۱	۲								

موفق و سربلند باشید