بنام خدا

مجموعه درس وگزیده ی سوالات ۴ گزینه ای درس

هندسه تحلیلی و جبرخطی

فصل یک - بردار

خلاصه مطالبی که باید در این فصل یاد گرفت به شرح زیر است:

۱) طول یک پاره خط

۲) نوشتن مختصات یک بردار با دو نقطه ابتدایی و انتهایی

۳) قرینه یک نقطه نسبت به یک نقطه دیگر ، یک صفحه ؛ و ....

۴) بردار یکه هم جهت با بردار دیگر

۵) ضرب داخلی دوبردار

۶) زاویه بین دو بردار

۷) دو بردار موازی

۸) دو بردار عمود بر هم

۹) تصویر یک بردار بر بردار دیگر

۱۰) قرینه یک بردار نسبت به بردار دیگر

۱۱) ضرب خارجی دو بردار

۱۲) مساحت مثلث و متوازی الاضلاع روی دو بردار

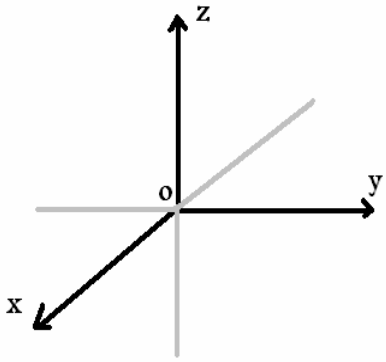
۱۳) حجم یک متوازی السطوح

۱۴)رابطه بین ضرب داخلی و خارجی

۱۵) ضرب سه گانه

۱۶) زاویه بین بردار و سه محور مختصات

هر نقطه در R^3 با سه تایی (a,b,c) نشان داده میشوددر R^3 سه محور **ox ,oy, oz** داریم که در شکل زیر نمایش داده شده است.



محور های مختصات سه بعدی فضا را به ..... قسمت تقسیم میکنند.

محور های **oz,oy,ox** سه صفحه نیز تشکیل میدهند.

۱) صفحه **xoy** شامل دو محور **ox** و **oy** که معادله آن به صورت $z = 0$ میباشد

۲) صفحه **xoz** شامل دو محور **ox** و **oz** که معادله آن به صورت $y = 0$ میباشد

۳) صفحه ..... شامل دو محور..... و..... که معادله آن به صورت..... میباشد.

اگر $A=(x,y,z)$ نقطه دلخواهی در فضا باشد.تصویر A روی صفحات ومحورهای مختلف به صورت زیر است؟

۱) تصویر **A** روی صفحه ی **xoy** برابر است با: $A'=(x,y,0)$

۲) تصویر **A** روی صفحه ی **xoz** برابر است با: $A'=(x,\circ,z)$

۳) تصویرنقطه **A** روی صفحه ی**yoz** برابر است با: .....

۴) تصویر نقطه **A** روی محور **ox** برابر است با: $A'=(x,\circ,\circ)$

۵) تصویر نقطه **A** روی محور **oy** برابر است با: $A'=(\circ,y,\circ)$

۶) تصویر نقطه **A** روی محور **.....**برابر است با: .....

سوال) اگر نقطه $(m^۲+m,m,m+۱)$ روی فصل مشترک صفحات **yoz** و **xoz** قرار داشته باشد.کدام نقطه زیر در صفحه **yz** واقع است؟

الف) $(۱,m,۲)$ ب) $(m+۱,۲,m)$ ج) $(m-۱,۲,m)$ د) $(m,m^۲-۱,۲)$

قرینه نقطه یA **نسبت به محور های مختصات و صفحات xoy, yoz , xoz:**

۱) قرینه نقطه ی **A** نسبت به محور **ox** برابر است با: $A'(x,-y,-z)$

۲) قرینه نقطه ی **A** نسبت به محور **oy**برابر است با: .....

۳) قرینه نقطه ی **A** نسبت به محور **oz** برابر است با: .....

۴) قرینه نقطه ی **A** نسبت به صفحه **xoz** برابر است با: $A'(x,-y,z)$

۵) قرینه نقطه ی **A** نسبت به صفحه **xoy** برابر است با: .....

۶) قرینه نقطه ی **A** نسبت به صفحه **yoz** برابر است با: .....

فاصله ی نقطه ی A **از محور های مختصات و صفحات** xoy , xoz , yoz **:**

۱) فاصله نقطه ی **A** از صفحه **xoy** برابر است با: $|z|$

۲) فاصله نقطه ی **A** از صفحه**xoz** برابر است با: **.....**

۳) فاصله نقطه ی **A** از صفحه**yoz** برابر است با: .....

۴) فاصله نقطه ی **A** از محور **ox** برابر است با: $\sqrt{y^۲+z^۲}$

۵) فاصله نقطه ی **A** از محور**oy** برابر است با: **.....**

۶) فاصله نقطه ی **A** از محور**oz** برابر است با: **.....**

اگر $A(x,y,z)$, $B(x',y',z')$ **دو نقطه در فضا باشند . فاصله دو نقطه** A , B **یا همان طول بردار**AB **برابر است با:**

$$AB=\sqrt{(x-x')^۲+(y-y')^۲+(z-z')^۲}$$

مختصات وسط AB **برابر است با:** $M(\frac{x+x'}{۲},\frac{y+y'}{۲},\frac{z+z'}{۲})$

مثال۱) قرینه ی نقطه ی $A(۱ , ۲ , -۱)$, $B(۲ ,۱ ,۴)$ نسبت به محور **x** ها A' و B' می نامیم . فاصله ی A' و B' چه عددی است؟

۱) $\sqrt{۱۷}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۱۹}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

مثال۲) اگر فاصله ی نقطه ی **A** از سه محور مختصات به ترتیب ۴ و۳ و۲ باشد.آنگاه فاصله ی **A** از مبدا مختصات چقدر است؟

۱) $\sqrt{۱۷}$ ۲) $\sqrt{\frac{۲۱}{۲}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۲۹}{۲}}$ ۴) $\sqrt{۱۹}$

جمع بردار ها :(روش جبری – روش هندسی)

ضرب اسکالر در یک بردار: (روش جبری – روش هندسی)

قرینه یک بردار: (روش جبری – روش هندسی)

تفریق دو بردار: (روش جبری – روش هندسی)

نکته : اگر داشته باشیم $\overrightarrow{a} = r \times \overrightarrow{b}$ در این صورت بین دو بردار $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}$ چه رابطه ای برقرار است؟

الف) بردار $\overrightarrow{a}$ ، $\mathbf{r}$ برابر بردار $\overrightarrow{b}$ است.

ب) اگر $\mathbf{r}$ منفی باشد دو بردار مختلف الجهت و اگر مثبت باشد هم جهت میباشند.

ج) دو بردار موازی هستند

د) اگر $\mathbf{r}$ مثبت باشد زاویه بین دو بردار صفر درجه و اگر $\mathbf{r}$ منفی باشد زاویه بین دو بردار ۱۸۰ درجه است.

ضرب داخلی دو بردار:

اگر $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}$ دو بردار باشنددو نوع تعریف برای ضرب داخلی داریم:

الف) روش ماتریسی: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

ب) روش هندسی: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta$ (که θ زاویه بین دو بردار می باشد)

مثال) اگر $a(2,3,4)$, $b(4,5,-2)$ باشد ابتدا ضرب داخلی دو بردار را بیابید و سپس زاویه بین دو بردار را بدست آورید.

مثال) اگر $|\overrightarrow{a}| = 5$ و همچنین داشته باشیم: $\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{a}$ در اینصورت ضرب داخلی دو بردار $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}$ را بیابید.

مثال) در مساله قبل اگر داشته باشیم: $\overrightarrow{b} = -3\overrightarrow{a}$ مساله را حل کنید.

ویژگیهای ضرب داخلی:

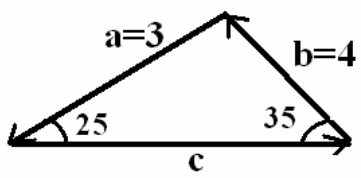
۱) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$

۲) $\overrightarrow{ra} \cdot \overrightarrow{b} = r(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$

۳) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$

۴) $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$

****مثال**) باتوجه به شکل زیر حاصل $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ را بیابید.



مساله: به فرض آنکه $|a| = ۳$, $|b| = ۵$ مقدار λ را چنان بیابید که بردار های $(a+\lambda b)$, $(a-\lambda b)$ برهم عمود باشند.

تعریف بردار یکه: برداری را یکه میگوییم که اندازه آن یک باشد.مثلا بردار $(\frac{۲}{۹}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳})$ یکه است.زیرا:

$$\sqrt{(\frac{۱}{۳})^۲ + (\frac{۲}{۳})^۲ + (\frac{۲}{۳})^۲} = \sqrt{\frac{۹}{۹}} = ۱$$

و اگر $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ برداری دلخواه باشد. بردار $e_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ را یکه هم جهت با $\vec{a}$ می نامیم.(یعنی برداری که با بردار $\vec{a}$ همجهت است و اندازه آن برابر یک است.)

مساله: بردار یکه هم جهت $u(۲, -۳, ۱)$ را بیابید

تصویر و قرینه ی یک بردار نسبت به بردار دیگر:

با توجه به شکل $\vec{a'}$ تصویر بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ و $\vec{a''}$ قرینه ی بردار $\vec{a}$ نسبت به بردار $\vec{b}$ می باشد.و داریم:

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}} \times \vec{b} \quad \text{و} \quad \vec{a''} = ۲\vec{a'} - \vec{a}$$

مثال) اگر $\vec{b}(۳,-۱,۰)$, $\vec{a}(۲,۳,۱)$ در اینصورت تصویر بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ و قرینه بردار $\vec{a}$ نسبت به بردار $\vec{b}$ را بیابید.

مثال) نقاط $C(۱,۱,۲)$, $B(۰,۱,-۱)$, $A(-۱,۲,۰)$ مفروضند. اندازه تصویر و قرینه ی بردار $۲\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ بر بردار $\overrightarrow{BC}$ چیست؟

زوایای یک بردار با محور های ox,oy,oz:

اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ یک بردار دلخواه باشد:

زاویه بردار a با محور ox:
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{i}}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

زاویه بردار a با محور oy:
$$\cos\beta = \frac{\vec{a}.\vec{j}}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

زاویه بردار a با محورoz:
$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}.\vec{k}}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

و از آنجا که میدانیم بردار $(\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|})$ یک بردار یکه است پس داریم:

$$(\frac{a_1}{|\vec{a}|})^2 + (\frac{a_2}{|\vec{a}|})^2 + (\frac{a_3}{|\vec{a}|})^2 = 1 \quad --- \rightarrow \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

در نتیجه می توان مختصات یک بردار را با توجه به اندازه و زاویه ای که با محور های مختصات میسازد به صورت زیر نوشت:

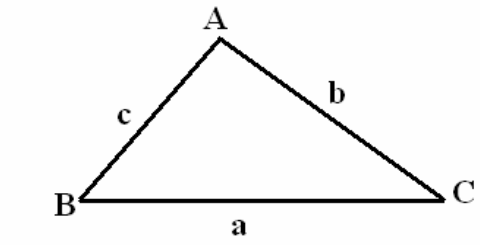
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (|a|\cos\alpha, |a|\cos\beta, |a|\cos\gamma)$$

مساله: اگر $|a| = 2$ باشد و با محور **ox** زاویه ۶۰ و با محور **oy** زاویه ۴۵ بسازد

الف) بردار **a** با محور **oz** چه زاویه ای میسازد ب) مختصات بردار **a** را بیابید

قضیه کسینوس ها:

در مورد مثلث دلخواه مقابل داریم:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

(با استفاده از خواص ضرب داخلی برای این قضیه یه اثبات بنویسین!)

اثبات:

مساله: دو نیروی $|F_۲| = ۵N$, $|F_۱| = ۳N$ با یکدیگر زاویه ۶۰ درجه می سازند.وبر یک نقطه اثر میکنند برآیندابن دو نیرو چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۷

مساله: دو نیرو با اندازه های مساوی با هم زاویه ۶۰ درجه می سازند. و برآیند آنها $۵\sqrt{۳}$ نیوتن است. اندازه هر نیرو چقدر است؟

۱) $۳\sqrt{۵}$ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۸

مساله: اندازه برآیند دو بردار عمود بر هم۶ واحد است اگر زاویه بین برآیندو یکی از بردارها ۳۰ باشد.طول بردار کوچکتر چند واحد است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

(نکته: زاویه برآیند با بردار بزرگتر ، کوچکتر است)

مساله: اگر اندازه تفاضل دو بردارها اندازه هر یک از آنها برابر باشد.زاویه بین آنها چقدر است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

مساله: برآیندکدام دسته از نیروهای زیر ممکن است صفر شود؟

۱) ۱ و۳ و۵ ۲) ۲ و۷و ۴ ۳) ۳ و۴ و۵ ۴) ۳و۳و۷

مساله: اگر $|\overrightarrow{a}| = ۱۱$, $|\overrightarrow{b}| = ۲۳$ و $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = ۳۰$ باشد. $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|$ چقدر است ؟ ۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۲۲ ۴) ۲۵

مساله: در صورتیکه $|\overrightarrow{a}| = ۲$, $|\overrightarrow{b}| = ۱$ و زاویه بین $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ برابر ۶۰ باشد.اندازه بردار های زیر را بیابید.

الف) $۳\overrightarrow{a} + ۴\overrightarrow{b}$

ب) $۳\overrightarrow{a} - ۴\overrightarrow{b}$

ج) $-۳\overrightarrow{a} - ۳\overrightarrow{b}$

مساله: اگر $۲\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} = ۰$ و $|\overrightarrow{a}| = ۱$, $|b| = ۴$, $|\overrightarrow{c}| = ۲$ باشد. حاصل عبارت $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}$ چقدر است؟

۱) $\frac{-۱۷}{۲}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲}$ ۳) $\frac{-۱۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲}$

مساله: اگر $|a| = |b|$ و بردار های $(۵a + ۳b)$, $(a + ۳b)$ بر هم عمود باشند آنگاه زاویه بین دو بردار $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{a}$ چقدر است؟

۱) $Arc\cos\frac{۷}{۹}$ ۲) $\pi - \arccos\frac{۷}{۹}$ ۳) ۳۰ ۴) $\arccos\frac{۵}{۹}$

نا مساوی کشی- شوارتز

اگر **a** و **b** دو بردار دلخواه باشند .نامساوی $|a.b| \le |a||b|$ را داریم که به نامساوی کشی- شوارتز معروف است.

تمرین : اگر داشته باشیم $b(2,1,2)$, $a(x,y,z)$ بطوریکه $|a| = 6$ در اینصورت ماکزیمم مقدار $2x + y + 2z$ را بیابید.

تمرین : اگر داشته باشیم $b(2,1,2)$, $a(x,y,z)$ بطوریکه $a.b = 6$ در اینصورت مینیمم مقدار $|a|$ را بیابید.

تمرین: اگر **a** و **b** دو بردار غیر صفر باشند. ثابت کنید **a** بر **b** عمود است اگر وتنها اگر $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2$

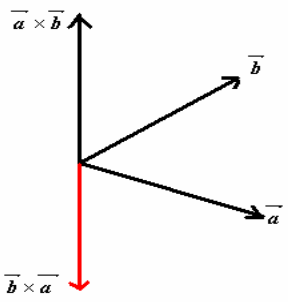
تمرین : فرض کنید **a** و **b** دو بردار باشند و **a-b** و **a+b** غیر صفر باشند. شرط لازم وکافی برای عمود بودن **a-b** بر **a+b** را بیابید.

تمرین : ثابت کنید : $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$ (تعبیر هندسی این فرمول چیست؟)

تعریف ضرب خارجی دو بردار

اگر $\vec{a}$, $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر باشند ضرب خارجی $\vec{a}$, $\vec{b}$ را به صورت $\vec{a} \times \vec{b}$ نشان می دهیم و: $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \sin\theta$

و از لحاظ هندسی $\vec{a} \times \vec{b}$ برداری است که هم بر $\vec{a}$ و هم بر $\vec{b}$ عمود است.



و بردار $\vec{b} \times \vec{a}$ همراستا با $\vec{a} \times \vec{b}$ و در جهت خلاف آن می باشد یعنی : $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

اگر $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$ و $\vec{b} = (y_1, y_2, y_3)$ دو بردار باشند آنگاه داریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

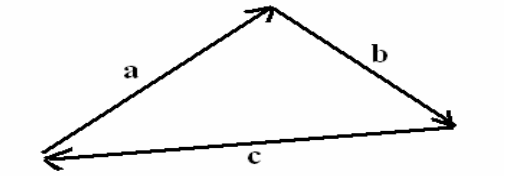
تمرین: اگر $a=(۲,۳,۱)$, $b(۳,-۲,۵)$ در اینصورت حاصل $\vec{b}\times\vec{a}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ را بیابید.

ویژگی های ضرب خارجی:

۱) $a\times b=-b\times a$ ۲) $a\times(b\pm c)=(a\times b)\pm(a\times c)$

۳) $a\times a=۰$ ۴) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$

***مساله:** در شکل مقابل اندازه بردارهای $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ به ترتیب ۳ و ۵ و۶ است. حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$, $\vec{b}$ کدام است؟



۱) ۲- ۲) ۱-

۳) ۱ ۴) ۲

مساله: اگر $|v\times w|=\sqrt{۳}\,(v.w)$ باشد زاویه بین دو بردار چقدر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

مساله : درصورتیکه $|v_۱\times v_۲|=۴$ باشداندازه بردار $(v_۱+v_۲)\times(۳v_۱-v_۲)$ چقدر است؟

۱) ۸ ۲) ۰ ۳) ۱۶ ۴) ۴

مساله: اگر $a\times b=a\times c$ و $b\neq c$ کدام نتیجه نادرست است؟

۱) **a** عمود بر **b-c** ۲) **a** موازی **b-c** ۳) $a.(b\times c)=۰$ ۴) **a,b,c** موازی یک صفحه اند

مساله : حاصل ضرب داخلی دو بردار با اندازه های مساوی، برابر با مربع اندازه هر یک از دو بردار است.زاویه بین دو بردار چند درجه است؟

۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

روابط بین $a.b$, $a\times b$:

$$\left.\begin{array}{l} a.b = |a|\,|b|\cos\theta \\ |a\times b| = |a|\,|b|\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow (a.b)^{۲} + (|a\times b|)^{۲} = |a|^{۲}\,|b|^{۲}$$

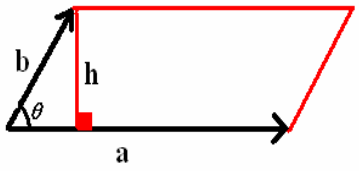
ورابطه دوم به صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} a.b = |a|\,|b|\cos\theta \\ |a\times b| = |a|\,|b|\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{|a\times b|}{a.b}$$

تمرین: اگر $|a| = ۳$, $|b| = ۲۶$ و $|a\times b| = ۷۲$ باشد مقدار $a.b$ چقدر است؟

مساحت متوازی الاضلاع ومثلث:

فرض کنید a , b دو بردار غیر صفرند که زاویه بین آنها θ است.



مساحت متوازی الاضلاع = ارتفاع ضربدر قاعده = $h\times|\vec{a}|$

$$\sin\theta = \frac{h}{|b|} \rightarrow h = |b|\times\sin\theta$$

$$|b|\times\sin\theta\times|a| = |a\times b| \quad \text{= مساحت متوازی الاضلاع}$$

و مساحت مثلث تولید شده توسط بردار های a , b برابر است با : $\frac{۱}{۲}\times|a\times b|$

تمرین: مساحت مثلثی با رئوس $R(-۱,۱,۲)$, $Q(۲,۱,-۱)$, $P(۱,-۱,۰)$ را بیابید.

مساله: مساحت متوازی الاضلاعی که مختصات سه راس آن بصورت $O(۰,۰,۰)$, $A(۱,۲,۳)$, $B(۱,-۲,۱)$ باشد کدام است؟

۱) $\sqrt{۲۱}$ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $۲\sqrt{۲۱}$ ۴) $۳\sqrt{۷}$

ضرب سه تایی از بردار ها: (دوبارسوال کنکور بوده است)

$$a.(b\times c)=b.(c\times a)=c.(a\times b)=$$
$$=-b.(a\times c)=-c.(b\times a)$$

حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار a, b, c ساخته میشودبرابر است با : $V=\left|\ a.(b\times c)\ \right|$

تمرین: حجم متوازی السطوحی که توسط بردار های $\overrightarrow{a}=i+k$, $\overrightarrow{b}=j+k$, $\overrightarrow{c}=i+j$ تولید میشود را پیدا کنید.

نکته : *شرط آنکه سه بردار* a, b, c *هم صفحه باشند. آنستکه:* $a.(b\times c)=0$

مساله : نشان دهید بردار های $\overrightarrow{a}=(2,3,-1)$, $\overrightarrow{b}=(1,-1,3)$, $\overrightarrow{c}(1,9,-11)$ هم صفحه اند.

تست های بردارها هندسه تحلیلی

۱- اگر بردار های a و b قطر های مستطیلی به ابعاد ۳ و۴ باشند. حاصل $|a\times b|$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۲- به ازای کدام مقدار m چهار نقطه $D=(m,m,m)$, $C=(1,1,1)$, $B=(2,3,4)$, $A=(0,1,2)$ در یک صفحه قرار دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳)همه مقادیر ۴) هیچ مقدار

۳- اندازه تصویر قائم بردار $a=(2,3,4)$ روی صفحه yz کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۵

۴- اگر $|a|=1, |b|=2, |c|=3$ و $a+b+c=0$, $a.b+b.c+c.a$ برابر کدام است؟

۱) ۷ ۲) -۷ ۳) ۱۴ ۴) -۱۴

۵- اگر a,b بردار های واحد باشند. $a.(a\times b)$ برابر کدام است.

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۱ ۴) صفر

۶- اگر بین سه بردار a, b, c شرط $a+b+c=0$ برقرار باشد. $a\times b$ برابر کدام است.

۱) ۰ ۲) $-b\times c$ ۳) $c\times a$ ۴) $a\times c$

۷- اگر $(\hat{a,b})=\frac{\pi}{3}$ و $u=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}$. زاویه بین a,u برابر کدام است.

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۸- اگر بردار های واحد a,b,c دو به دو برهم عمود باشند زاویه بین دوبردار $(a-b)$ و $(b-c)$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۱۲۰ ۳) ۶۰ ۴) ۳۰

۹- بردارهای a,b,c اضلاع یک مثلث و s مساحت آن است. $|(2c-b)\times(c+2b)|$ برابر باکدام است.

۱) $5s$ ۲) $2s$ ۳) $10s$ ۴) $4s$

۱۰- اگر $|a|=2, |b|=4$ و زوایای a و b با محور x ها ۶۰ و ۳۰ باشد. اندازه تصویر $a+b$ روی محور x ها کدام است.

۱) $1-\sqrt{3}$ ۲) $2+\sqrt{3}$ ۳) $1+2\sqrt{3}$ ۴) $2-\sqrt{3}$

۱۱- مساحت چهار ضلعی $ABCD$ برابر با کدام است؟

۱) $|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$ ۲) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$ ۳) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}|$ ۴) $|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AB}|$

۱۲- $A(-1,2,4), B(-1,3,0), C(3,-1,4)$ راس های یک مثلث هستند. مساحت این مثلث برابر با کدام است؟

۱) $2\sqrt{26}$ ۲) $\sqrt{26}$ ۳) $2\sqrt{13}$ ۴) $4\sqrt{13}$

۱۳- اگر $|a|=5$ و زوایای a با محورهای y,z به ترتیب ۶۰ و۴۵ باشد بردار a کدام است؟

۱) $(\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$ ۲) $(\pm\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2})$ ۳) $(\frac{5}{2},\frac{5}{2},-\frac{\sqrt{5}}{2})$ ۴) $(\pm\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2})$

۱۴- تصویر بردار $a(1,1,1)$ بر امتداد بردار $b(2,0,2)$ کدامست؟

۱) (۲و۰و۲) ۲) (۱و۰و۱) ۳) (-۲و۰و-۲) ۴) $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

۱۵ - در مثلث به اضلاع $|BC|=۵$,$|AC|=۴$,$|AB|=۳$ حاصل $|AB\times AC|$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۳۰ ۴) ۱۲

۱۶ - اگر بردار a با سه محور مختصات زاویه های مساوی بسازد با بردار $b(۱,۲,-۳)$ چه زاویه ای می سازد؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۹۰

۱۷- اگر a,b,c سه بردار باشند .حاصل $(a+b).[(b+c)\times(c+a)]$ کدام است؟

۱) $a.(b\times c)$ ۲) $۲a.(b\times c)$ ۳) $۳a.(b\times c)$ ۴) صفر

۱۸ - نقطه $A(۵,۳,۴)$ مفروض است . اگر A',A'' تصویر های A بر صفحه xy و محور z ها باشد طول پاره خط $A'A''$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۵\sqrt{۲}$ ۴) ۶

۱۹- اگر a,b دو بردار همراستا نباشند و e_a , e_b بر دار های یکه هم جهت a,b باشد زاویه بین دو بردار $U=e_a+e_b$, $V=e_a-e_b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

۲۰- اندازه قرینه بردار $a=(\sqrt{۳},۳,-۲)$ نسبت به راستای بردار $b(۱,۱,۱)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) $\sqrt{۵}$

۲۱- اگر بین سه بردار یکه a,b,c رابطه $۳a-۴b+۲c=۰$ برقرار باشد زاویه بین a,b کدام است.

۱) ۶۰ ۲) $\arccos\frac{۲}{۳}$ ۳) $Arc\cos\frac{۷}{۸}$ ۴) $Arc\cos\frac{۳}{۵}$

۲۲ - اگر بین سه بردار غیر صفر a,b,c رابطه $a\times b=b\times c$ بر قرار باشد کدام گزاره همواره درست است؟

۱) $a.(b\times c)=۰$ ۲) $a=c$ ۳) $a\times c=۰$ ۴) $a=-c$

۲۳- اگر مساحت مثلث ABC برابر ۳ واحد باشد. حاصل $\left|۳\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB}\right|+\left|۲\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰

۲۴- اگر در مثلث قائم الزاویه ABC قائمه در A داشته باشیم $|BC|=a$,$|AB|=c$, $|AC|=b$ حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ کدام است؟

۱) $b^۲$ ۲) $-b^۲$ ۳) $c^۲$ ۴) $-c^۲$

۲۵- به ازای کدام مقدار m,n سه نقطه *(۲و۱و۰) و (۱و۱-و۱) و (۳و m و n-۱)* بر یک استقامتند.

۱) ۱و۰ ۲) ۲و۰ ۳) ۰و۳ ۴) ۴و۰

۲۶- اگر $A(۲,۱,۲)$ $B(۰,۳,۱)$ $C(۰,۱,۲)$ و مبدا مختصات رئوس یک هرم سه پهلو باشند. حجم این هرم کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) ۳

۲۷- اگر $(۳a+۲b)\times(۲a+b)=i+j-k$ باشد اندازه بردار $a\times b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۸- اگر بین سه بردار یکه a,b,c رابطه $۳a+۴b+۵c=۰$ برقرار باشد .مقدار $|۲a\times۳b|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۳

۲۹- اندازه برداری $۳\sqrt{۲}$ و اندازه تصویر قائم آن بر صفحات xy,yz به ترتیب ۲ و۴ است اندازه تصویرآن بر صفحه xz کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۳۰ - اگر فاصله های نقطه M از محور های مختصات به ترتیب $\sqrt{۷}$, ۴ , $\sqrt{۱۵}$ باشد فاصله M از مبدا مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۷}$ ۲) $\sqrt{۱۹}$ ۳) $\sqrt{۲۱}$ ۴) $\sqrt{۲۳}$

۳۱- اگر زاویه بین دوبردار a,b برابر ۶۰ باشد اندازه بردار $u=\frac{a}{|a|}-\frac{2b}{|b|}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{3}$

۳۲ - اگر اندازه های تصاویر قائم بردار V بر صفحات مختصات $\sqrt{6}, \sqrt{5}, \sqrt{3}$ باشد آنگاه اندازه بردار V کدام است؟

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $\sqrt{7}$ ۴) $\sqrt{8}$

۳۳- اگر سه بردار $u=(a,b,c)$, $v=(b,c,a)$, $w=(c,a,b)$ هم صفحه باشند. حاصل عبارت $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴- اگر a,b,c سه بردار باشند. $(a\times b)\times c$ همواره برابر کدام است؟

۱) $(a.c)b-(b.c)a$ ۲) $(a.b)c-(a.c)b$

۳) $(a.b)c-(c.b)a$ ۴) $(c.b)a-(c.a)b$

۳۵ - اگر a,b دو بردار غیر صفر و $|a+b|=|a-b|$ آنگاه زاویه بین a,b کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

۳۶- اگر a,b,c سه بردار به اندازه های $|a|=2$, $|b|=\sqrt{2}$, $|c|=1$ باشند و $2a-3b=4c$ باشد اندازه بردار $a+2b$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) ۴ ۴) $3\sqrt{3}$

۳۷ - دو نقطه $A=(2,3,1)$, $B=(3,1,5)$ مفروضند. اندازه تصویر پاره خط AB بر صفحه xy کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{6}$

۳۸- سه بردار $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{L}$ مفروضند اگر بردار $\overrightarrow{L}$ با پیکان $\overrightarrow{AB}$ همراستا باشد کدام رابطه درست است؟

۱) $\overrightarrow{L}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{L}.\overrightarrow{OB}=0$ ۲) $\overrightarrow{L}.\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{L}.\overrightarrow{OB}=0$

۳) $\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ ۴) $\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{L}\times\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

۳۹-اگر دو بردار $a=2i-j+3k$, $b=i+2j+4k$ دو ضلع مجاور یک مثلث باشند. طول ضلع سوم مثلث برابر است با:

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{11}$ ۳) $\sqrt{12}$ ۴) $\sqrt{13}$

پرسش های امتحانات ورودی دانشگاهها

۱- اگر $V_1\times V_2=0$ و دو بردار V_1 , V_2 غیر صفر باشند الزاماً : (سراسری ۷۶)

۱) $V_1=-V_2$ ۲) $V_1=V_2$ ۳) $V_1\perp V_2$ ۴) $V_1\,|\,|\,V_2$

۲- در مثلث ABC اگر $|c|=4$, $|b|=3$, $|a|=2$ آنگاه $\cos A$ برابر است؟(سراسری ۷۷)

۱) $\frac{7}{8}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۳- قرینه بردار $a=j+3k$ نسبت به راستای بردار $b=i-k$ کدام است؟(سراسری۷۷)

۱) $-i+3k$ ۲) $-3i-j$ ۳) $2i-j+k$ ۴) $3i+j$

۴- سه بردار a,b,c غیر موازی با یک صفحه اند. حاصلضرب $a.(b\times c)$ برابر با کدام است؟(سراسری نظام قدیم۷۷)

۱) $c.(a\times b)$ ۲) $b.(a\times c)$ ۳) $c.(c\times b)$ ۴) $(c\times b).a$

۵- حاصلضرب درونی دو بردار با اندازه های مساوی برابر با مربع هر یک از دو بردار است. زاویه بین آنها چند درجه است؟(سراسری ۷۸)

۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

۶- اگر $V_1 = ۲i - j + ۳k \quad , \quad V_۲ = -i + ۲k$ اندازه تصویر بردار $V_1 \times V_۲$ روی محور **oy** کدام است؟ (سراسری ۷۸)

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) -۵ ۴) -۷

۷- اگر $\left|V_1 \times V_۲\right| = ۴$ اندازه $(V_1 + V_۲) \times (۳V_1 - V_۲)$ چقدر است؟(آزاد۷۸)

۱) ۸ ۲) صفر ۳) ۱۶ ۴) ۴

۸- اگر $a \times b = a \times c$ و $b \neq c$ کدام نتیجه گیری نادرست است؟(سراسری۷۹)

۱) **a** عمود بر **(b-c)** ۲) **a** موازی با **(b-c)**

۳) $a.(b-c) \neq ۰$ ۴) **a,b,c** موازی با یک صفحه اند

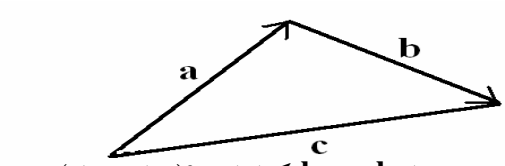
۹- اگر $\left|V_1.V_۲\right| = \sqrt{۳}\left|V_1 \times V_۲\right|$ زاویه بین دو بردار چقدر است ؟(آزاد۷۹)

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۹۰

۱۰- در شکل مقابل اندازه های **a,b,c** به ترتیب ۶و۵و۳ است . حاصلضرب داخلی دوبردار **a,b** کدام است؟(سراسری ۸۰)

۱) -۲ ۲) -۱

۳) ۱ ۴) ۲



۱۱- اگر $a = ۲i + ۳j + k \quad , \quad b = i - j + k$ آنگاه کسینوس زاویه بین دو بردار **a-b** و **b** کدام است؟(سراسری ۸۱)

۱) $-\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$ ۲) $-\sqrt{\frac{۵}{۱۷}}$ ۳) $\sqrt{\frac{۳}{۱۷}}$ ۴) $\sqrt{\frac{۵}{۱۷}}$

۱۲ – دو بردار **b,a** به طولهای ۵ و۸ واحد مفروضند. مساحت تولیدشده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است اگر زاویه بین دو بردار کمتر از قائمه باشد. اندازه تفاضل دو بردار کدام است ؟(سراسری ۸۱)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۶/۵ ۴) ۷/۵

۱۳- اگر $V_1 = ۲i + ۳j + k \quad , \quad V_۲ = i - j + k$ حاصل $\frac{\left|V_1 - ۲V_۲\right|}{\left|V_1 + ۲V_۲\right|}$ کدام است؟(آزاد۸۱)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۴- اگر اندازه دو بردار $V_۲ = ai + ۴j + ۳k \quad , \quad V_1 = ۲i + (a+۱)j + ۴k$ برابر باشد. کسینوس زاویه بین دو بردار کدام است؟(آزاد۸۱)

۱) $\frac{۱۶}{۲۹}$ ۲) $\frac{۲۴}{۲۹}$ ۳) $\frac{۴}{\sqrt{۲۹}}$ ۴) $\frac{۲۸}{۲۹}$

۱۵- خط Δ بر صفحه **p** عمود است چند صفحه موجود است که از خط Δ بگذرد وبر صفحه **p** عمود باشد؟(سراسری ۸۲)

۱) هیچ ۲) فقط دو صفحه ۳)فقط یک صفحه ۴) بی شمار

۱۶- تصویر قائم بردار (۶و۳-.و۰) روی امتداد بردار (۲- و۱- و۲) کدام بردار است؟(سراسری ۸۲)

۱)(۲- و۱- و۲) ۲) (۲ و۱ و۲-) ۳) (۴- و۲- و۴) ۴) (۱- و۳ و۲)

۱۷- اگر $\left|b\right| = ۲\sqrt{۶} \quad , \quad \left|a.b\right| = ۰$ اندازه بردار $a - b$ کدام است؟(سراسری۸۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۸- نقطه $A(a \ , \ b \ , ۴)$ بر روی خط گذرنده بر دو نقطه $(۰,-۱,۱)$, $(۰,۱,۲)$ واقع است ، دو تایی مرتب **(a،b)** کدام است ؟(سراسری۸۳)

۱) (-۱ ، ۳) ۲) (۲ ، -۱) ۳) (۲، ۱) ۴) (۳ ، ۱)

۱۹- اگر **a,b,c** سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند ، مقدار کدام گزینه با سایرین متفاوت است؟ (سراسری ۸۴)

۱) $a.(c \times b)$ ۲) $a.(b \times c)$ ۳) $b.(a \times c)$ ۴) $(a \times c).b$

۲۰-دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ به طولهای ۳ و۴ واحد با یکدیگر زاویه ۳۰ درجه میسازند. مساحت مثلثی که روی دو بردار $a+2b$, $3a-2b$ تولید میشود ،کدام است ؟ (سراسری۸۴)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۸

۲۱- اگر بردار $\overrightarrow{a}(m,2,-1)$ و $|b|=\sqrt{41}$ ، دوبردار $\mathbf{a+b}$ و $\mathbf{a-b}$ عمود بر هم باشند ، مقدار مثبت $\mathbf{m}$ کدام است؟(سراسری ۸۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۲- زاویه بین دو بردار a و b کمتر از ۹۰ درجه است، $|b|=5$, $|a|=6$ و $|a\times(a+b)|=18$ حاصل $a.(a+b)$ کدام است؟(سراسری۸۵)

۱) ۵۴ ۲) ۵۶ ۳) ۶۰ ۴) ۶۴

۲۳- در کدام حالت حاصلضرب عددی بردار غیر صفر $\mathbf{a}$ در مجموع دو بردار غیر صفر $\mathbf{X,Y}$ صفر نمی باشد؟(سراسری۸۶)

۱) بردار $\mathbf{X}$ قرینه بردار $\mathbf{Y}$. ۲) بردار $\mathbf{a}$ فقط بر یکی از دو بردار $\mathbf{X,Y}$عمود

۳) سه بردار دوبه دو عمود بر هم ۴) بردار $\mathbf{a}$ بر صفحه دو بردار $\mathbf{X,Y}$ عمود.

۲۴- خط گذرنده ازدو نقطه ی $B(2,1,-1)$, $A(-1,2,1)$ ازکدام نقطه به مختصات زیر میگذرد؟(سراسری۸۶)

۱) $(5,0,-3)$ ۲) $(5,0,-2)$ ۳) $(4,0,-3)$ ۴) $(4,0,-2)$

۲۵- معادله صفحه گذرا از نقطه (۲،۱-، ۱) و عمود بر خط به معادله $x=y=z-1$ از کدام نقطه به مختصات زیر میگذرد؟(سراسری ۸۶)

۱) $(1,4,-3)$ ۲) $(1,4,-2)$ ۳) $(1,4,2)$ ۴) $(1,4,3)$

۲۶- اگر $a=(1,-2,3)$, $b=(2,0,1)$ ، مساحت متوازی الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $2a+5b$ و $a+3b$ کدام است؟(سراسری ۸۷)

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $5\sqrt{3}$

۲۷- مبدا مختصات راس یک هرم مثلث القاعده است ، معادله سه ضلع قاعده آن $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+y=2 \\ z=0 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2z+y=2 \\ x=0 \end{cases}$ است ، حجم آن چند واحد مکعب است؟(سراسری ۸۷)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۲۸)دو بردار با تصاویر $a(1,2,-1)$, $b(2,4,m)$ مفروض اند. به ازای کدام مقادیر m اندازه بردار $(a+b).(a\times b)$ برابر صفر است؟(۸۸)

۱) فقط $m=-2$ ۲) فقط $m=\pm 2$ ۳) هیچ مقدار m ۴) هر عدد حقیقی m

۲۹) دو بردار a و b با تصویر های $(2,0,-1), (1,\alpha+1,2\alpha)$ مفروضند به ازای کدام مقدار α بردار های $a+b$, $a-b$ عمود بر هم ا ند.(۸۹)

۱) ۰/۴ و ۱- ۲) ۰/۶ و ۱- ۳) ۰/۴ و ۱ ۴) ۰/۶ و ۱

۳۰- مساحت مثلث $\mathbf{ABC}$ با سه راس $A(1,-2,3)$, $B(2,0,1)$ $C(-3,2,1)$ کدام است؟(۸۹)

۱) $\sqrt{35}$ ۲) $\sqrt{42}$ ۳) $\sqrt{54}$ ۴) $\sqrt{65}$

۳۱-اگر $\mathbf{a, b, c}$ سه بردار غیر صفر باشند خلاصه شده $(2a-b).((b+c)\times(c-a))$ کدام است؟(۹۰)

۱) $a.(b\times c)$ ۲) $2a.(b\times c)$ ۳) $3a.(b\times c)$ ۴) صفر

۳۲- دو بردار $b=-7i+4j+k$, $a=3i-6j+3k$ نسبت به بردار $\mathbf{c}$ قرینه اند اگر زاویه بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ در بازه $(\frac{\pi}{2},\pi)$ باشد آنگاه بردار جهت $\mathbf{c}$ کدام است؟(۹۰)

۱) $\frac{1}{3}(-2i+2j+k)$ ۲) $\frac{1}{3}(-2i-j+2k)$ ۳) $\frac{1}{3}(2i-2j+k)$ ۴) $\frac{1}{3}(2i+j-2k)$

خلاصه مطالبی که در این فصل باید یاد بگیرید

۱- نوشتن معادله خط با داشتن دو نقطه

۲- نوشتن معادله خط با داشتن یک نقطه و بردار ی موازی خط

۳- داشتن یک نقطه و زاویه آن خط با محور ها

۴- دو خط عمود بر هم

۵- دو خط موازی هم

۶- تقاطع دو خط

۷- وضعیت دو خط نسبت به هم در فضا

۸- فاصله نقطه تا خط

۹- معادله صفحه با داشتن یک نقطه و یک خط عمود بر آن

۱۰-معادله صفحه با داشتن سه نقطه از آن

۱۱-خط و صفحه عمود بر هم

۱۲- خط و صفحه موازی

۱۳-وضعیت خط وصفحه نسبت به هم

۱۴-محل تلاقی خط وصفحه

۱۵-وضعیت دو صفحه نسبت به هم

۱۶-فصل مشترک دو صفحه

۱۷- زاویه بین دو صفحه

۱۸-زاویه بین خط وصفحه

۱۹-فاصله نقطه تا صفحه

۲۰-فاصله دو صفحه موازی

۲۱- نوشتن معادله صفحه شامل دو خط متقاطع یا دو خط موازی

۲۲-نوشتن معادله خطی که از یک نقطه بگذرد وبر صفحه ای عمود باشد

۲۳- نوشتن معادله خطی که از یک نقطه بگذرد وبر محورهای خاص عمود باشد

۲۴- تصویر نقطه بر خط و صفحه

۲۵- قرینه نقطه نسبت به صفحه

۲۶- قرینه صفحه نسبت به صفحه خاص

۲۷- معادله عمود مشترک دو خط متنافر

۲۸-طول عمود مشترک دو خط متنافر

۲۹- فصل مشترک یک صفحه با صفحه خاص

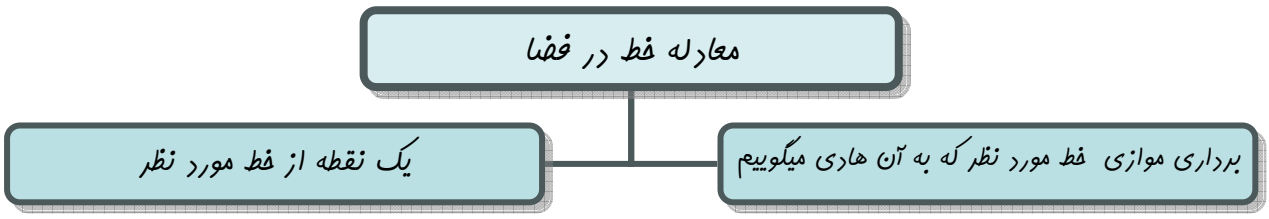
۳۰- شرط اینکه سه نقطه روی یک خط باشند

۳۱- شرط موازی بودن خط وصفحه

۳۲- قرینه خط نسبت به صفحه

۳۳-معادله صفحه ای که شامل یک خط باشد و موازی صفحه دیگر .....

معادله خط : برای نوشتن معادله یک خط در فضا به دو پارامتر نیاز داریم:



اگر $(x_\circ , y_\circ , z_\circ)$ یک نقطه دلخواه از خط باشد و بردار (a , b , c) یک بردار موازی با خط باشدمعادله کلی خط به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = x_\circ + at \\ y = y_\circ + bt \\ z = z_\circ + ct \end{cases} \qquad t \in R$$

به این نوع معادله ((معادله پارامتری خط)) میگوییم.

اگر a , b , c مخالف صفر باشند می توانیم معادله خط را به شکل $\frac{x-x_\circ}{a} = \frac{y-y_\circ}{b} = \frac{z-z_\circ}{c}$ بنویسیم که به این نوع معادله ((متقارن)) میگوییم.

تمرین : معادله متقارن و پارامتری خطی را بنویسید که از نقطه $(۴-,۲,۱)$ بگذرد وبا بردار $u(۳,۴,۷)$ موازی باشد

تمرین : معادله متقارن و پارامتری خطی را بنویسید که از دو نقطه $B(-۲ , ۳ , ۹)$, $A(۱ , ۲ , -۳)$ بگذرد.

اگر $a = \circ$ باشد معادله ی متقارن خط به شکل $\frac{y-y_\circ}{b} = \frac{z-z_\circ}{c}$ در می آید.(برای **b**و **c** نیز مشابه همین میشود) $\begin{cases} x = x_\circ \\ \frac{y-y_\circ}{b} = \frac{z-z_\circ}{c} \end{cases}$

اگر $a = \circ$, $b = \circ$ معادله خط به شکل $\begin{cases} x = x_\circ \\ y = y_\circ \end{cases}$ می باشد . که به صورت $\begin{cases} x = x_\circ \\ y = y_\circ \\ z = t \end{cases} \quad t \in R$ نیز قابل نمایش است.

برای حالتهای دیگر نیز مشابه همین عمل میکنیم.

تمرین : معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $B(۱ , ۳ , -۳)$, $A(۱ , ۲ , -۳)$ بگذرد.

تمرین : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(۲,-۳,۴)$ به موازات بردار $\vec{l} = \frac{۱}{۲}\vec{i} - \frac{۱}{۳}\vec{j}$ رسم شود.

نکته : صورت معادله خط در فضا منحصر بفرد نیست. (مثلا در معادله بالا اگر معادله را با **A** بنویسیم یا با **B**، صورت معادله فرق میکند در حالیکه هر دو یک خط را نشان میدهند.)

مساله : کسینوسهای هادی خط **D** به معادله $\frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{\sqrt{۳}} = \frac{z+۱}{۳}$ را بدست آورید.

مساله : کسینوسهای هادی خط **D** به معادله $\frac{x-۱}{\sqrt{۳}} = y = \frac{z}{۲\sqrt{۳}}$ کدام است .(سراسری ریاضی ۶۳)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۴}, \frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}, \frac{۱}{۴}, \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

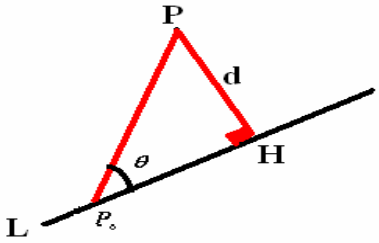
مساله : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(۳, ۲, -۱)$ گذشته و خط **L** به معادله $\frac{x-۱}{۱} = \frac{y}{۳} = z$ را به ارتفاع ۲ قطع کند.

مساله : معادله خط **D** که از نقطه $A(۱,۲,۳)$ میگذرد و با محور **ox** و **oy** به ترتیب زوایای ۶۰و ۴۵ میسازد. را بیابید.(مساله چند جواب دارد.)

مساله : خط $D : \frac{x}{۲} = y = \frac{۱+z}{-۱}$ مفروض است. بر روی **D** نقاطی را بیابید که از مبدا مختصات به فاصله ۳ باشد.

فاصله نقطه از خط :

فاصله نقطه $\mathbf{P}$ تا خط $\mathbf{L}$ برابر است با : $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{PP_\circ}\right|}{\left|\overrightarrow{L}\right|}$ که در آن $\mathbf{L}$ بردار هادی خط و $P_\circ$ یک نقطه دلخواه روی خط می باشد.



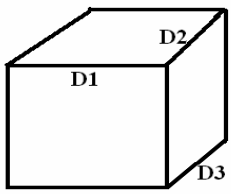
$$d = \left|\overrightarrow{PP_\circ}\right| \times \sin\theta = \left|\overrightarrow{PP_\circ}\right| \times \sin\theta \times \frac{\left|\overrightarrow{L}\right|}{\left|\overrightarrow{L}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{PP_\circ}\right|}{\left|\overrightarrow{L}\right|}$$

تمرین : فاصله نقطه $A = (۱ , ۱ , ۵)$ را از خط $\begin{cases} x = t + ۱ \\ y = -t + ۳ \\ z = ۲t \end{cases}$ بدست آورید.

مساله : فاصله نقطه $Q(۰ , ۱ , ۲)$ از خط $\Delta : x = y = z$ کدام است؟(سراسری ۷۷)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

وضعیت نسبی دو خط در فضا



۱) متقاطعند $(D_۱ , D_۲)$ ۲) موازیند $(D_۲ , D_۳)$ ۳) متنافرند $(D_۱ , D_۳)$

شرط **موازی بودن** دو خط D , D' با بردارهای نرمال $l(a,b,c) , l'(a',b',c')$ اینستکه:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

شرط **عمود بودن** دو خط D , D' با بردارهای نرمال $l(a,b,c) , l'(a',b',c')$ اینستکه:

$$a\,a' + b\,b' + c\,c' = ۰$$

نکته: *اگر بخواهیم بررسی کنیم دو خط متقاطعند یا متنافرند. یکی از خطوط را پارامتری کرده و در معادله خط دوم جایگزین میکنیم . و مقدار t را بدست می آوریم اگر یک مقدار برای t بدست آمد دو خط متقا طعند ولی اگر دو مقدار متفاوت بدست آمد دو خط متنافرند. در مسائل بعد طریقه بدست آوردن نقطه تقاطع را یاد میگیرید*

تمرین : دو خط $\begin{cases} D: \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{۳} = \frac{z+۱}{۱} \\ D': \frac{x-۱}{۲} = y = z-۲ \end{cases}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

تمرین : دو خط $\begin{cases} \frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z}{۵} \\ \frac{x}{۴} = \frac{y}{۶} = \frac{z}{۱۰} \end{cases}$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

تمرین: مجموع طول و عرض و ارتفاع نقطه بر خورد دو خط به معادله $D: \frac{x}{۲} = \frac{y-۱}{۳} = z$, $D': \frac{۱-x}{۳} = \frac{-y}{۲} = z+۲$ کدام است ؟ (سراسری ۷۱)

۱) ۴- ۲) ۵- ۳) ۴ ۴) ۵

تمرین: اگر دو خط $L': mx+۱ = ۲y+۱ = ۴z+۱$, $L: ۲x+۱ = my+۲ = z+۲$ بر هم عمود باشند .**m**چقدر است؟

۱) ۴- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۴

زاویه بین دو خط: همان زاویه بین دو نرمال خط می باشد.

تمرین : زاویه حاده بین دو خط $D' = \begin{cases} ۲x-y = ۳ \\ x+z = ۱ \end{cases}$, $D: \frac{۲x-۱}{۳} = y+۱ = z-۱$ را بیابید.

مساله: اگر دو خط $D: x = y - ۱ = \frac{z}{۲}$, $D' : \frac{x-۳}{a} = y = z$ متقاطع باشند $\mathbf{a}$ کدام است؟(آزاد۷۷)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) ۱-

مساله: دو خط $d : \frac{x-۲}{۲} = y - ۱ = \frac{z-۳}{۳}$, $d' : \begin{cases} x = ۲t + ۴ \\ y = t + ۳ \\ z = ۳t + ۶ \end{cases}$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟(آزاد ۷۶)

۱)عمودند ۲) موازیند ۳) منطبقند ۴) متنافرند

مساله : دو خط به معادلات $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۴}{-۳} = -z$, $(t\ ,\ t+۲\ ,\ -۲t-۱)$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟(سراسری ۸۲)

۱) عمودند ۲) موازیند ۳) منطبقند ۴) متنافرند

مساله : اگر دو خط $\frac{x-\beta}{۲} = y - \alpha = z$, $x - \alpha = \frac{y-\beta}{۲} = z$ در نقطه $(۱,۱,k)$ متقاطع باشند. $۲\alpha - \beta$ کدام است؟(۶۸)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) ۱

مساله : دو خط $D' : x = y + ۱ = z - ۱$, $D : \frac{x}{۲} = y = \frac{z}{۳}$ در نقطه $A(a,b,c)$ متقاطعند. $a+b+c$ را بدست آورید.

مساله : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(1,1,0)$ گذشته وبر خط **D** به معادلات $D: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ عمود بوده وبا محور های **ox** و**oy** زوایای مساوی باشد.

مساله : خط $D: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{4}$ و نقطه $A(1,0,2)$ مفروضند بر خط **D** نقطه **H** را چنان بیابید.که **AH** بر**D** عمود باشد و معادله خط **AH** را بنویسید . *(در حقیقت تصویر نقطه **A** بر خط را بدست می آوریم)*

مساله * : معادله دو خط متنافر $D: x = y+1 = z-2$, $D': \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+1$ داده شده است. معادله خط Δ را چنان بنویسید که D , D' را قطع کند. وبا خط $D'': x+2 = \frac{y-1}{2} = z$ موازی باشد.

مساله*: معادله خطی را بنویسید که از $A(1,-1,1)$ گذشته و بر خط $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+1$: **L** عمود بوده وخط D' به معادله $x = -y = \frac{z+2}{2}$ را قطع نماید.

چند مساله حالت خاص:

۱) معادله خط عمود بر دو محور **oy** و **oz** کدام است؟(سراسری۷۲)

۱) $x+y=b\ ,\ z=a$ ۲) $y=z\ ,\ x=0$ ۳) $y=b\ ,\ z=c$ ۴) $y+z=b\ ,x=a$

حل) خطی که بر دو محور **oy** و **oz** عمود باشد موازی محور **ox** است یعنی موازی بردار $(1,0,0)$ می باشد. پس معادله به شکل:

$\frac{x-a}{1} = \frac{y-b}{0} = \frac{z-c}{0}$ است یعنی $t \in R$ $\begin{cases} x=t \\ y=b \\ z=c \end{cases}$ یا همان گزینه (۳).

۲) اگر فاصله $A(۱,۲,۳)$ از خط $(x=a\ ,\ y=۶)$ برابر ۵ باشد . $\mathbf{a}$ کدام است؟(آزاد۸۲)

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴)صفر

حل) ابتدا یک نقطه دلخواه از خط انتخاب میکنیم $P_{\circ}=(a,۶,۱)$ وبردار $\overrightarrow{AP_{\circ}}$ را تشکیل می دهیم : $\overrightarrow{AP_{\circ}}=(a-۱,۴,-۲)$ و ضرب خارجی دو بردار $\overrightarrow{AP_{\circ}}\times\overrightarrow{N}$ راتشکیل می دهیم: $\overrightarrow{AP_{\circ}}\times\overrightarrow{N}=(۴\ ,۱-a\ ,\circ)$ وداریم: $\begin{cases}\overrightarrow{AP_{\circ}}(a-۱\ ,۴\ ,-۲)\\ \overrightarrow{N}\ (\circ\ ,\circ\ ,۱)\end{cases}\rightarrow$

$$d=۵=\frac{\left|\overrightarrow{AP_{\circ}}\times\overrightarrow{N}\right|}{\left|\overrightarrow{N}\right|}=\frac{\left|(۴\ ,۱-a\ ,\circ)\right|}{\left|(\circ,\circ,۱)\right|}\Rightarrow ۵=\sqrt{۱۶+(۱-a)^{۲}}\Rightarrow a=-۲\quad\vee\quad a=۴$$

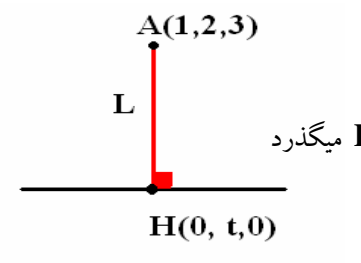
۳)معادله خط گذرنده از نقطه $A(\circ,۱,۲)$ و عمود بر خط $x+۱=y-۱=z$ کدام است.(سراسری ۷۲)

۱) $y=۱\ ,\ z-x=۲$ ۲) $y=۱,\ x+z=۲$

۳) $x=\circ\ ,\ z-y=۱$ ۴) $x=\circ\ ,\ y+z=۳$

حل: نقطه دلخواه از خط به صورت پارامتری به صورت $H\ (t-۱\ ,t+۱\ ,t)$ می باشد وبردار $\overrightarrow{AH}\ (t-۱-\circ\ ,t+۱-۱\ ,t-۲)$ باید بر نرمال خط عمود باشد . $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{N}\Rightarrow(t-۱)(۱)+(t)(۱)+(t-۲)(۱)=\circ\Rightarrow ۳t-۳=\circ\Rightarrow t=۱$ پس با توجه به پیدا شدن $\mathbf{t}$ مختصات $\mathbf{H}$ نیز پیدا می شود . $H(\circ\ ,۲\ ,۱)$.

حال معادله خطی که از دو نقطه $\mathbf{A}$ و $\mathbf{H}$ میگذرد را بنویسید.....



مساله : معادله خطی که از نقطه $A(۱\ ,۲,۳)$ گذشته وبر محور $\mathbf{y}$ عمود است را بنویسید

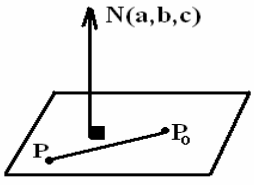
حل) چون $\mathbf{AH}$ بر محور $\mathbf{y}$ ها عمود است.$\mathbf{t}$ پیدا میشود. و معادله خطی که از دونقطه $\mathbf{A}$و $\mathbf{H}$ میگذرد را مینویسیم. پس $\begin{cases}\dfrac{x-۱}{-۱}=\dfrac{z-۳}{-۳}\\ y=۲\end{cases}$

<<<صفحه>>>

هر صفحه با دو عامل مشخص می شود: ۱- یک نقطه از صفحه $P_{\circ}=(x_{\circ},y_{\circ},z_{\circ})$

۲- یک بردار عمود بر صفحه $\overrightarrow{N}=(a,b,c)$ که به آن نرمال صفحه میگوییم.

می دا نیم که اگر برداری بر صفحه ای عمود باشد بر هربردار یا خط داخل صفحه عمود است .پس بردار $\overrightarrow{N}$ بر بردار $\overrightarrow{PP_{\circ}}$ عمود است که در آن $\mathbf{P}$ یک نقطه دلخواه از صفحه است. $\overrightarrow{N}\perp\overrightarrow{PP_{\circ}}\Rightarrow a(x-x_{\circ})+b(y-y_{\circ})+c(z-z_{\circ})=\circ$ که همین معادله صفحه مورد نظر است.



تمرین : معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه $A(۲,۵,۶)$ بگذرد و بردار نرمال آن $\overrightarrow{N}\ (۲,۱,-۳)$ باشد.

مساله :معادله صفحه ای که از نقاط $A(1,0,-1)$, $B(0,2,1)$, $C(-1,2,3)$ میگذرد چیست؟

مساله : معادله صفحه ای را بنویسید که از نقطه $A(2,1,3)$ میگذرد و بر خط $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ عمود باشد؟

مساله: معادله صفحه ای را بنویسید که شامل دو خط $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{4}=z$, $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ باشد.

مساله : صفحه عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه $A(1,2,0)$, $B(5,-2,6)$ محور x ها را باکدام طول قطع میکند؟

۱) ۲/۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷/۵

وضعیت نسبی خط وصفحه در فضا:

خط وصفحه در فضا یا موازیند یا متقاطعند یا خط در صفحه قرار دارد.

اگر $\vec{L}$ بردار هادی خط و $\vec{N}$ بردار هادی صفحه باشد:

اگر $\vec{L}.\vec{N}\neq 0$ آنگاه خط L و صفحه P متقاطعند در اینصورت $L\cap P=\{A\}$. برای محاسبه A محل تقاطع خط L با صفحه P کافیست معادله ی پارامتری خط را در معادله صفحه قرار دهیم.

اگر $\vec{L}.\vec{N}=0$ و یک نقطه از خط L دز صفحه P باشددر اینصورت: $L\subset P$

و اگر $\vec{L}.\vec{N}=0$ و یک نقطه دلخواه L در صفحه P صدق نکند آنگاه خط L با صفحه P موازی است. یعنی : $L\cap P=\phi$

تمرین : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}=y+1=z-1\\ 2x+y-z=0\end{cases}$$

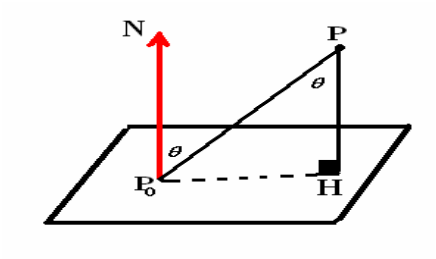
تمرین : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x+1=y-1=z+2 \\ 2x+3y-5z=1 \end{cases}$$

تمرین : دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{6} \\ x+y+\frac{1}{3}z=0 \end{cases}$$

فاصله نقطه P تا صفحه :



$$\cos\theta=\frac{PH}{PP_0}\Rightarrow PH=\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\times\cos\theta$$

$$PH=\frac{\left|\overrightarrow{PP_0}\right|\times\left|\overrightarrow{N}\right|\times\cos\theta}{\left|\overrightarrow{N}\right|}=\frac{\overrightarrow{N}.\overrightarrow{PP_0}}{\left|\overrightarrow{N}\right|}$$

در این رابطه P_0 یک نقطه دلخواه از صفحه است.(می توانید بگویید چگونه نقطه P_0 را انتخاب میکنید؟)

تمرین : فاصله نقطه $A(2,3,-1)$ را از صفحه $2x+y-3z=0$ را بدست آورید.

نتیجه ای از فرمول بالا: اگر نقطه $P(x_0,y_0,z_0)$ و معادله صفحه به شکل $ax+by+cz+d=0$ باشد.فاصله نقطه از صفحه با استفاده از فرمول مقابل هم محاسبه می شود.

$$PH=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

با استفاده از فرمول بالا مساله قبل را حل کنید؟

زاویه بین دو صفحه : زاویه بین دو صفحه همان زاویه بین نرمالهای دو صفحه می باشد.که با استفاده از فرمول $\cos\alpha = \frac{N.N'}{|N||N'|}$ بدست می آید.

تمرین : زاویه بین دو صفحه $x+y=۱\ ,\ y+z=۱$ کدام است؟

۱) ۹۰ ۲) ۶۰ ۳) ۴۵ ۴) ۳۰

تمرین : زاویه بین دو صفحه $۶x+۶y-۳z+۵=۰\ ,\ x-۲y+۲z-۴=۰$ را بیابید؟

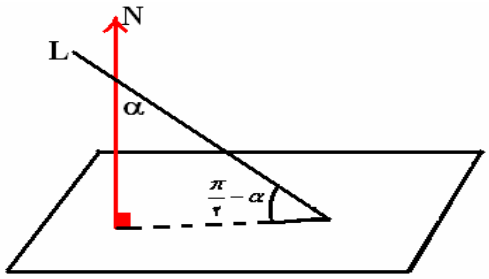
حل: $\cos\alpha = \frac{(۱\times۶)+(-۲\times۶)+(۲\times-۳)}{\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲+۲^۲}\times\sqrt{۶^۲+۶^۲+(-۳)^۲}} = \frac{-۱۲}{۳\times۹} = \frac{-۴}{۹} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{-۴}{۹}$

α بدست آمده منفرجه است ولی منظور از زاویه بین دو صفحه زاویه حاده است.پس زاویه بین دو صفحه برابر است با:

$$\text{زاویه بین دوصفحه} = \pi - arc\cos\frac{-۴}{۹}$$

زاویه بین خط وصفحه : ابتدا زاویه بین دو نرمال را می یابیم و سپس زاویه بین خط وصفحه از رابطه $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ بدست می آید

تمرین : زاویه بین خط $D : \frac{x-۱}{۱} = \frac{y}{۲} = z+۱$ و صفحه ی $P : ۲x-y+z=۲$ را بیابید.



مساله: m را چنان بیابید تا زاویه بین خط $L : \frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۲}{-۱} = z$ و صفحه ی $P : mx+y+z+۴=۰$ برابر ۴۵ گردد.

مساله : به ازای چه مقدار λ زاویه بین خط $\Delta = \begin{cases} x-۲z=۱ \\ y+z=-۲ \end{cases}$ و صفحه به معادله $\eta : \lambda x+y+z=۵$ برابر ۳۰ است.

فصل مشترک دو صفحه :

فصل مشترک دو صفحه $\begin{cases} P: ax+by+cz=d \\ P': a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$

الف) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ در اینصورت دو صفحه موازیند.

ب) اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ دو صفحه بر هم منطبقند.

پ) اگر تناسب فوق برقرار نباشد در اینصورت فصل مشترک دو صفحه خطی مانند $\mathbf{D}$ است که نرمالش در راستای $N\times N'$ است.

تمرین : دو صفحه مقابل نسبت به هم چه وضعی دارند $\begin{cases} ۲x-y+۳z=۱ \\ ۴x-۲y+۶z=۵ \end{cases}$

تمرین : دو صفحه مقابل نسبت به هم چه وضعی دارند $\begin{cases} ۲x+۳y-z=۱ \\ x+y+۲z=۰ \end{cases}$

تمرین : جواب دستگاههای زیر را بدست آورید.

$\begin{cases} ۲x+۳y-z=۰ \\ x+y+۲z=۰ \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} ۲x+۳y+۵z=۰ \\ ۴x+۶y+۱۰z=۰ \end{cases}$

عمود مشترک دو خط متنافر ، خطی است که بر هر دو خط متنافر عمود است. این خط منحصر بفرد است.

چگونگی محاسبه طول عمود مشترک دو خط :

اگر N, N' نرمال های دو خط باشند آنگاه $N\times N'$ را تشکیل می دهیم. نقطه $\mathbf{P}$ از یک خط و نقطه ی P' از خط دیگر راانتخاب می کنیم.وبردار $\overrightarrow{PP'}$ را تشکیل می دهیم . فاصله این عمود مشترک برابر است با : $h=\frac{\left|(N\times N').\overrightarrow{PP'}\right|}{\left|N\times N'\right|}$

مساله : طول عمود مشترک دو خط $\begin{cases} D: \frac{x}{۲}=y-۱=z+۱ \\ D': x-۱=\frac{y+۱}{۲}=z \end{cases}$ چیست ؟

خط وصفحه در فضا

۱- نقاط $C(۲,۰,-۱)$, $B=(۲,۱,۰)$, $A(۱,۲,۱)$ راس های یک مثلث اند، اندازه ارتفاع نظیر ضلع $\mathbf{BC}$ را بدست آورید.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- وضع نسبی دو خط $\Delta': \frac{x+۱}{۲}=y-۱=z+۵$, $\Delta: x=y=z$ کدام است؟

۱) متقاطع ۲) متوازی ۳) متنافر ۴) منطبق

۳-طول عمود مشترک دو خط متنافر $\Delta': \begin{cases} y+z=۳ \\ ۲x+y-z=۴ \end{cases}$, $\Delta: \begin{cases} ۲x+y-z=۱ \\ x-۲y=۲ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۴- طول عمود مشترک دو خط متنافر $\Delta': \begin{cases} x-z=۴ \\ y+z=۵ \end{cases}$, $\Delta: \begin{cases} x+۲y=۲ \\ -۲y-z=۳ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

۵- طول عمود مشترک خط $\Delta: \frac{x-۱}{۶}=\frac{y}{۲}=\frac{z+۲}{۳}$ ومحور zها کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۶}}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۸}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$

۶- طول عمود مشترک دو خط متنافر $\Delta': \begin{cases} y=c \\ z=d \end{cases}$, $\Delta: \begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ کدام است؟

۱) $|d-a|$ ۲) $|b-c|$ ۳) $|b+c|$ ۴) $|d-c|$

۷- معادله خطی که از نقطه ای به طول ۲ واقع بر محور $\mathbf{x}$ها میگذرد وبا دو صفحه $۲x+y-۳z=۱$ و $x-۲y+z=۱$ موازی است کدام است؟

۱) $x+۲=y=z$ ۲) $x-۲=y=z$

۳) $\frac{x-۲}{۲}=y=\frac{z}{۲}$ ۴) $\frac{x+۲}{۲}=y=\frac{z}{۲}$

۸- بردار قائم صفحه ای که شامل محور $\mathbf{x}$ها و موازی با خط $\begin{cases} x+۲y+z=۲ \\ ۲x-y-z=۳ \end{cases}$ است کدام است؟

۱) $(۰,۲,۳)$ ۲) $(۰,-۱,۱)$ ۳) $(۰,۴,۵)$ ۴) $(۰,۵,۳)$

۹- بردار خطی که با صفحه $۲x-y=۵$ موازی وبر خط $۳x=۲y-۱=z$ عمود است کدام است؟

۱) $(۴,-۶,۳)$ ۲) $(۵,-۴,-۲)$ ۳) $(-۲,۲,۳)$ ۴) $(۶,۵,۴)$

۱۰- نقطه $A=(۲,۳,-۱)$ و صفحه $P: x-۲y+z-۴=۰$ مفروضند خطی وجود دارد که از $\mathbf{A}$ میگذرد وبا صفحه $\mathbf{P}$ موازی است ومحور $\mathbf{z}$ها را در نقطه ای به ارتفاع $\mathbf{a}$ قطع میکند.$\mathbf{a}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) -۵

۱۱- معادله خطی که از نقطه(۲ و ۰ و۳)=$\mathbf{A}$ میگذرد وبا محور $\mathbf{x}$ها و$\mathbf{y}$ها زاویه ای ۶۰ درجه وبا محور $\mathbf{z}$ها زاویه حاده میسازد کدام است؟

۱) $x-۳=y=\frac{z-۲}{\sqrt{۲}}$ ۲) $x-۳=y=\frac{z-۲}{۲}$

۳) $x-۲=y=z-۳$ ۴) هیچکدام

۱۲- معادله $|x-۱| = y+۱ = z$ معادله.....

۱) دو خط است ۲) دو نیم خط است ۳) دو پاره خط است ۴) یک خط است

۱۳- معادله $\sqrt{y-z} + (x+y+z)^۲ = ۰$ معادله .....

۱) یک خط است ۲) یک صفحه است ۳) دو خط است ۴) دو صفحه است

۱۴- معادله $x^۲ - (y+z)^۲ = ۰$ معادله .....

۱) یک خط است ۲) دو خط است ۳) دو صفحه است ۴) یک صفحه است

۱۵- وضع نسبی دو خط $\Delta : x = y = z$, $\Delta' : x+۱ = \frac{y-۱}{۳} = z-۲$ چگونه است؟

۱) موازیند ۲) متقاطعند ۳) متنافرند ۴) متنافر و عمود بر هم اند

۱۶- خطی که از نقطه های $B = (-۱, ۰, ۱)$, $A = (۲, ۳, ۴)$ میگذرد صفحه **xy** را در کدام نقطه قطع میکند؟

۱) (۰ و ۲ و۱) ۲) (۰ و ۲- و۱-) ۳) (۰ و ۱ و۲) ۴) (۰ و ۱- و ۲-)

۱۷-صفحه گذرنده از خط $\Delta : x+۱ = ۲y-۱ = z+۱$ و نقطه $A = (-۱, ۱, ۱)$ از کدام نقطه دیگر میگذرد؟

۱) (۲- و ۰ و ۰) ۲) (۱- و ۰ و۱-) ۳) (۳ و۱ و۲) ۴) (۳- و۱و ۳)

۱۸- معادله صفحه ای که از نقطه (۱ و۱و۱)=**A** گذشته وبر نیمساز ناحیه اول در صفحه **xoy** عمود است.کدام است؟

۱) $x - y = ۰$ ۲) $x + y = ۲$ ۳) $x + y + z = ۳$ ۴) $x + y - z = ۱$

۱۹- تصویر نقطه $A = (۰, ۱, -۱)$ بر صفحه $P : \; x + ۲y + ۳z = ۲۷$ کدام است ؟

۱) $(۲,۵,۵)$ ۲) $(۳,۶,۴)$ ۳) $(۱,۴,۶)$ ۴) $(۵,۲,۳)$

۲۰- مجموع مختصات نقطه ای از خط $x-۲ = y-۳ = z+۱$ که از مبدا مختصات به فاصله ۳ است، کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۲-

۲۱- طول تصویر بردار $\overrightarrow{a} = (۷, -۵, ۳)$ بر خط $\Delta : ۲x-۱ = ۲-۳y = z+۱$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۲- معادله مکان هندسی نقاطی که از دو صفحه $P' = y+z-۲ = ۰$, $P : x+y-۱ = ۰$ به یک فاصله اند کدام است ؟

۱) $x-z+۱ = ۰ \;\vee\; x+۲y+z-۳ = ۰$ ۲) $x-y-۱ = ۰ \;\vee\; y-z+۲ = ۰$

۳) $۲x-y-۳ = ۰ \vee x+y+z = ۰$ ۴) $y-z+۲ = ۰ \vee x-y+۱ = ۰$

۲۳- معادله صفحه شامل دو خط $\frac{x}{۳} = \frac{y-۱}{۲} = \frac{z-۱}{۴}$, $\frac{x-۴}{۲} = \frac{y-۷}{۳} = z-۳$ کدام است؟

۱) $۲x+y+z-۲ = ۰$ ۲) $-۲x+y+z-۴ = ۰$

۳) $-۲x-y+z+۴ = ۰$ ۴) $۲x-y-z+۲ = ۰$

۲۴- معادلات خطی که از نقطه $(-۱,۲,۱)$ گذشته وبر محور **y** ها عمود متقاطع باشد کدام است؟

۱) $x = z \;,\; y = ۲$ ۲) $x = -z \;,\; y = ۲$

۳) $x = -۱ \;,\; y = ۳z-۱$ ۴) $z = ۱ \;,\; x = -y+۱$

۲۵- مختصات تصویر نقطه $(۰,۲,۱)$ بر خط $\frac{x}{۲} = y-۳ = \frac{z+۱}{-۱}$ کدام است؟

۱) $(-۱, \frac{۵}{۲}, \frac{-۱}{۲})$ ۲) $(-۶, ۰, ۴)$ ۳) $(-۳, \frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲})$ ۴) $(۲,۴,۰)$

۲۶- مختصات قرینه نقطه ی $(-۱,۰,۱)$نسبت به صفحه $x+۲y-۲z+۶ = ۰$ کدام است؟

۱) $(۱,۴,۳)$ ۲) $(-۱, ۰, ۳)$ ۳) $(-۱, -۴, ۳)$ ۴) $(۳,۴,-۵)$

۲۷- معادله عمود مشترک دو خط متنافر $\frac{x+۱}{۳}=\frac{y+۳}{۵}=\frac{z}{۲}$, $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۲}{۲}=z-۱$ کدام است؟

۱) $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z+۳}{۴}$

۲) $x=y+۳=\frac{z+۱۱}{-۴}$

۳) $\frac{x-۱}{-۱}=\frac{y-۴}{۲}=z-۱$

۴) $x-۱=\frac{y-۲}{-۱}=\frac{z+۷}{۴}$

۲۸- فصل مشترک صفحه $۲x+y-۳z=۲$ با صفحه xoy کدام است؟

۱) $x=\frac{۲+۳z}{۲}\ ,\ y=۰$

۲) $y=۳z+۲\ ,x=۰$

۳) $x=\frac{۲-y}{۲}\ ,\ z=۰$

۴) $y=۰\ ,\ x=۰$

۲۹- معادله صفحه ای که شامل خط $\frac{x+۱}{۲}=\frac{y-۱}{۳}=\frac{z+۲}{۳}$ بوده و با خط $\frac{x-۳}{۲}=\frac{y+۲}{۳}=\frac{z-۴}{۵}$ موازی است کدام است؟

۱) $۳x-۲y-۱=۰$

۲) $۲x-۳y+۶z+۱=۰$

۳) $۳x-۲y+۵=۰$

۴) $۲x-۳y+۶z-۵=۰$

۳۰- معادله خطی که از نقطه ی $A(-۱,۲,۱)$ به موازات نیمساز زاویه xoy رسم شود کدام است؟

۱) $x-۱=y+۲\ ,z=۱$

۲) $x=y-۳\ ,\ z=۱$

۳) $x=-۱\ ,\ y=z+۱$

۴) $x=z+۲\ ,\ y=۲$

۳۱- معادله صفحه شامل خط $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y+۱}{۳}=z$ و عمود بر صفحه $۲x-y+۳z=۲=۰$ کدام است؟

۱) $۵x-۲y-۴z=۷$

۲) $۵x-۲y-۴z=-۷$

۳) $۵x-۲y+۴z=۷$

۴) $۵x+۲y-۴z=-۷$

۳۲- معادله مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو صفحه $۲x+۲z+۳=۰$, $x+y+۲=۰$ به یک فاصله هستند کدام است؟

۱) $۲y-۲z+۱=۰$

۲) $x-۳y+۲=۰$

۳) $۴x+۲y+۲z+۷=۰$

۴) گزینه های ۱و ۳ صحیح اند

۳۳- اگر خط $\frac{mx+۲}{۳}=\frac{y+۲}{n}=\frac{z+۴}{۲}$ بر صفحه $۳x-y+۳z+۵=۰$ عمود باشد آنگاه $m+n$ برابر است با:

۱) $\frac{-۶}{۵}$

۲) $\frac{۵}{۶}$

۳) $\frac{۶}{۵}$

۴) $\frac{-۵}{۶}$

۳۴- خط $\Delta: x+۱=\frac{y-۲}{۲}=z-۲$ و صفحه $P: -x+۲y-۲z+۴=۰$ مفروضند کدام نقطه از خط Δ فاصله اش از صفحه ی P برابر ۱ است؟

۱) $(-۱\ ,\ ۲\ ,\ ۲)$

۲) $(-۳\ ,\ -۲\ ,۰)$

۳) $(۰\ ,\ ۴\ ,\ ۳)$

۴) $(۱,۶,۴)$

۳۵- معادله خط موازی با صفحات $x-z=۳$ و $۲x-۳y+۴z-۵=۰$ که از نقطه ی $(۰,۱,۲)$ میگذرد کدام است؟

۱) $\frac{x-۱}{۲}=\frac{z-۲}{۲}$

۲) $x=\frac{y-۱}{۲}=z-۲$

۳) $\frac{x}{۲}=y-۱=z-۲$

۴) $\frac{x}{۲}=y-۱=\frac{z-۲}{-۲}$

۳۶- خط $x-۱=\frac{y-۱}{۴}=\frac{z-۳}{۳}$ نسبت به صفحه $x+۲y-۳z+۶=۰$ چه وضعیتی دارد؟

۱) موازی است ۲) متقاطع است ۳) خط داخل صفحه است ۴) خط بر صفحه عمود است

۳۷- صفحه $P: ۳x+۴y+۳=۰$ و نقطه ی $B(-۱,۰,۲)$ روی صفحه ونقطه ی $A(۰,-۷,۱)$ خارج صفحه مفروضند اگر A' تصویر نقطه ی A روی صفحه P باشد طول پاره خط $A'B$ برابر است با:

۱) ۵

۲) $\sqrt{۲۶}$

۳) $\sqrt{۳۰}$

۴) ۶

۳۸- فاصله مبدا مختصات از خطی که از نقطه ی $A(۳,۲,۱)$ گذشته و موازی محور x است چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۵}$

۳) $\sqrt{۶}$

۴) $\sqrt{۷}$

۳۹- فاصله نقطه ی $A(۱,۲,۳)$ از صفحه ی شامل نقطه ی $B(۲,-۳,۴)$ که عمود بر محور z است چقدر است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۴۰- اگر صفحه ی $۶x+۴y+۳z-۱۲=۰$ محور های مختصات را به ترتیب در نقاط Aو B و C قطع کند حجم هرم $OABC$ برابر است با:

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

پرسش های امتحانات ورودی دانشگاهها

۱) فاصله نقطه $(۰,۱,۲)$ از خط به معادله $x = y = z$ کدام است.(۷۷)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۲) صفحه ی عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه $(۰ , ۲ , ۱)$, $(۶ , -۲ , ۵)$ محور x ها را با کدام طول قطع میکند.(۷۷)

۱) ۲/۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷/۵

۳- اگر $V_۱ = ۲i - j + ۳k$, $V_۲ = -i + ۲k$ اندازه جبری تصویر بردار $V_۱ \times V_۲$ روی محور oy کدام است.(۷۸)

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) -۵ ۴) -۷

۴- صفحه عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه $(۱,۰,۱)$, $(-۱ ,۲,۱)$ موازی کدام است؟(۷۸)

۱) محور oy ۲) محور oz ۳) صفحه xoy ۴) صفحه xoz

۵- از نقطه $A(۲ , -۱ , ۱)$ صفحه ای بر خط D به معادله $x = ۱ , y + z = ۲$ عمود شده است مختصات پای قائم کدام است؟(۷۹)

۱) $(۰,۱,۱)$ ۲) $(۱,۱,۱)$ ۳) $(۱,۰,۲)$ ۴) $(۱,۲,۰)$

۶- کوتاه ترین فاصله بین دو خط به معادلات $D' : (z = ۰ , \frac{x}{۳} = \frac{y}{۴})$ $D : (x = ۰ , y = ۵)$ کدام است؟(۷۹)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷- فاصله ی نقطه به مختصات $(۱,۱,۲)$ از فصل مشترک دو صفحه به معادلات $x + ۲y = ۰$, $۲x - y = ۰$ کدام است؟(۸۰)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۸- صفحه ی گذرنده از نقطه $(۱ , -۱ , ۱)$ و عمود بر خط به معادلات $(x = t + ۱ , y = ۲t , z = t - ۱)$ از کدام نقطه زیر میگذرد؟(۸۰)

۱) $(۰ , ۰ , ۰)$ ۲) $(۰ , ۰ , ۱)$ ۳) $(۰ , ۱ , ۰)$ ۴) $(۱ , ۰ , ۰)$

۹- حجم محدود به صفحه به معادله ی $x + y + ۲z = ۱$ و صفحات مختصات کدام است؟(۸۱)

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۰- دو خط به معادلات $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۴}{۳} = \frac{z}{-۱}$, $(x = t , y = t + ۲ , z = -۲t - ۱)$ نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟(۸۲)

۱) متنافر ۲) متقاطع ۳) موازی ۴) عمود

۱۱- صفحه شامل دو خط موازی $(x = ۲t + ۱ , y = t - ۱ , z = t)$, $\frac{x}{۲} = y = \frac{z-۲}{۱}$ محور x ها را با کدام طول قطع میکند.؟(۸۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۲- معادله صفحه گذرنده بر دو نقطه $(-۱ , ۳ , ۲)$, $(۰ , ۱ , ۱)$ وموازی x کدام است؟(۸۳)

۱) $x + z = ۱$ ۲) $y + z = ۲$ ۳) $-x + y = ۱$ ۴) $۲x - y + z = ۰$

۱۳-نقطه $A(a , b , ۴)$ بر روی خط گذرنده بر دو نقطه $(۰ , -۱ , ۱)$, $(۲ , ۱ , ۰)$ واقع است دو تایی مرتب (a , b) کدام است؟(۸۳)

۱) $(-۱ , ۳)$ ۲) $(-۱ , ۲)$ ۳) $(۱ , ۲)$ ۴) $(۱ , ۳)$

۱۴- فاصله مبدا مختصات از صفحه عمود منصف پاره خط واصل بین دو نقطه ی $(-۱ , ۲ , ۱)$, $(۱ , ۲ , ۳)$ کدام است؟ (۸۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۵- نقطه M واقع بر خط به معادله $y = ۰$, $x = ۲z + ۳$ است، اگر فاصله M از صفحه ای به معادله $۲x + ۲y - z = ۰$ برابر ۵ باشد، ارتفاع مثبت نقطه M کدام است؟ (۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶- به ازای کدام مقدار a دو خط به معادلات $x - ۳ = \frac{y + a}{۲} = -z$, $\frac{x+۱}{۲} = \frac{y-۲}{-۱} = \frac{z}{۲}$ متقاطع اند؟(۸۵)

۱) -۵ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) ۵

۱۷- خط گذرنده از دو نقطه ی $A(-۱,۲,۱)$, $B(۲,۱,-۱)$ از کدام نقطه به مختصات زیر میگذرند؟(۸۶)

۱) $(۵,۰,-۳)$ ۲) $(۵,۰,-۲)$ ۳) $(۴,۰,-۳)$ ۴) $(۴,۰,-۲)$

۱۸- معادله صفحه ی گذرا از نقطه ی $(۱,-۱,۲)$ و عمود بر خط به معادلات $x=y=z-۱$ از کدام نقطه به مختصات زیر میگذرد؟(۸۶)

۱) $(۱,۴,-۳)$ ۲) $(۱,۴,-۲)$ ۳) $(۱,۴,۲)$ ۴) $(۱,۴,۳)$

۱۹- اگر خط به معادله $\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-b}{a}=z$ بر صفحه ای به معادله $۲x+y-۳z=۴$ واقع شود دو تایی مرتب $(a\ ,\ b)$ کدام است؟(۸۷)

۱) $(۱\ ,\ ۲)$ ۲) $(-۱\ ,\ ۲)$ ۳) $(۱\ ,-۲)$ ۴) $(-۱\ ,-۲)$

۲۰- طول عمود مشترک دو خط به معادلات $(x=۲\ ,\ z=۰)$, $(x=۰\ ,\ y-z=۰)$ کدام است؟(۸۸)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۱) صفحه گذرا از نقطه $A(۱,۲,-۲)$ و فصل مشترک دو صفحه به معادلات $۲x-y+z=۴$, $x+۲z=۰$. با محور **x**ها ، کدام وضع را دارد؟(۸۸)

۱) موازی ۲) منطبق ۳) عمود ۴) متقاطع

۲۲-فاصله دو خط به معادلات $D:\frac{x-۱}{۱}=\frac{y+۱}{-۱}=\frac{z}{۲}$, $D':\frac{x}{۲}=\frac{y}{-۲}=\frac{z-۱}{۴}$ کدام است ؟(۸۹)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۳- صفحه گذرا بر محور **y** ها و نقطه $(۲,۳,-۱)$ با کدام بردار موازی است؟ (۹۰)

۱) $i-۲j+k$ ۲) $i-۲j+۲k$ ۳) $۲i+j+k$ ۴) $-۲i+j+k$

۲۴- قرینه نقطه $A(۱,۲,۳)$ نسبت به صفحه $۲x+z=۰$ با کدام مختصات است؟(۹۰)

۱) $(-۳,۲,۱)$ ۲) $(-۱,۲,-۳)$ ۳) $(۳,۱,-۱)$ ۴) $(-۵,۲,۳)$

مقاطع مخروطی

خلاصه مطالب مقاطع مخروطی

۱-معادله دایره با داشتن مرکز و شعاع

۲- مرکز و شعاع دایره

۳- مماس بر دایره و قائم بر دایره

۴- معادله دایره با داشتن مرکز و خط مماس بر آن

۵-معادله دایره ای که از سه نقطه متمایز بگذرد

۶- وضعیت دو دایره نسبت به هم

۷- طول وتر مشترک دو دایره

۸- طول پاره خط مماس بر دایره

۹- معادله بیضی در حالات مختلف

۱۰- خروج از مرکز بیضی

۱۱-پیدا کردن راس های کانونی و غیر کانونی بیضی

۱۲- مماس بر بیضی

۱۳- معادله بیضی با استفاده از مکان هندسی

۱۴-سهمی

۱۵-پیدا کردن راس و کانون و خط هادی سهمی

۱۶-هذلولی و انواع معادله هذلولی

۱۷- خروج ازمرکز هذلولی

۱۸- کانونها و راسها ومرکز هذلولی و رابطه بین آنها

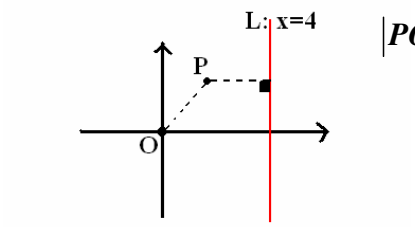
۱۹- مجانب های هذلولی

۲۰-زاویه بین مجانبها

۲۱- دوران مقاطع مخروطی

معادلات حاصل از فرمول فاصله:

مثال : برای مجموعه نقاطی چون $P(x,y)$ که فاصله آنها از مبدا مختصات و خط $L: x=4$ برابر باشد . معادله ای بنویسید.



$$|PO| = |PR| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-y)^2}$$

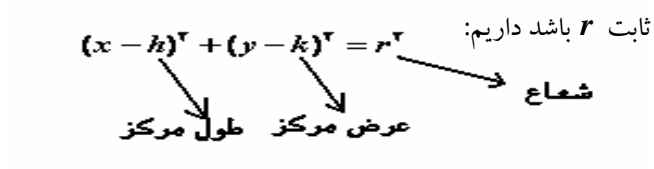
$$\Rightarrow \quad x^2+y^2 = x^2-8x+16+0$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = -8x+16$$

مثال : برای مجموعه نقاطی چون $P(x,y)$ که فاصله P تا خط $x=-2$ دو برابر فاصله اش تا نقطه $(2,0)$ باشد معادله ای بنویسید.

تعریف دایره : مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها از یک نقطه ثابت و مفروض در صفحه مقداری ثابت باشد.

اگر نقطه مفروض (h,k) باشد و فاصله ثابت r باشد داریم:



اگر پرانتز ها را بتوان برسانیم و ساده کنیم معادله دایره به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در می آید که به آن ***معادله گسترده*** دایره میگوییم.

حالت کلی معادله گسترده دایره : در حالت کلی معادله دایره به شکل $Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0$ که $A\neq 0$ میباشدکه مرکز آن و شعاع آن از رابطه زیر بدست می آید:

$$\text{شعاع دایره}=\sqrt{\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}} \qquad \text{مرکز دایره}=\left(\frac{-D}{2A},\frac{-E}{2A}\right)$$

مساله : معادله دایره ای رابنویسید که از مبدا میگذرد و مرکزش $C(2,-2)$ است.

مساله : مرکز و شعاع دایره زیر را بیابید $x^2+y^2+4x-6y=12$

مساله : برای دایره ای که از سه نقطه $C(0,0)$, $B(0,6)$, $A(8,0)$ می گذرد معادله ای بنویسید.

مساله : برای دایره گذرنده بر نقاط $(0,0)$, $(6,0)$ و مماس بر خط $y=-1$ معادله ای بنویسید.

مساله : برای دایره ای به مرکز $(-1,1)$ که بر خط $x+2y=4$ مماس باشد معادله ای بنویسید

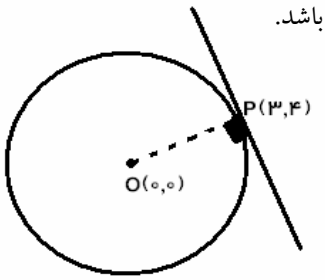
مساله : برای دایره گذرنده از نقاط $(۰,۰)$, $(۱۷,۷)$ که مرکزش بر خط $۱۲x-۵y=۰$ قرار داشته باشد معادله ای بنویسید.

مساله : به ازا ی چه مقدار m معادله $x^۲+y^۲-۲x+m=۰$ معادله یک دایره است.

۱) $m>۱$ ۲) $m>۰$ ۳) $m=۰$ ۴) $m>۲$

مماس بر دایره : (۱- از نقطه ای روی دایره ۲- از نقطه ای خارج دایره)

مثال: معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(۳,۴)$ روی دایره بر دایره $x^۲+y^۲=۲۵$ مماس باشد.

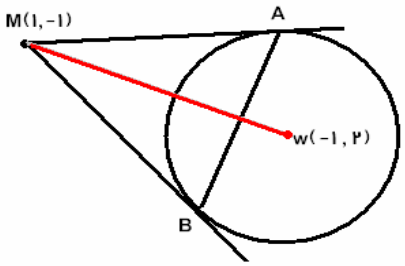


$$\text{شیب op}=\frac{۴-۰}{۳-۰}=\frac{۴}{۳}$$

$$\text{شیب خط مماس بر op}=\frac{-۳}{۴}$$

پس معادله خط مماس به صورت زیر است: $y-۴=\frac{-۳}{۴}(x-۳)$

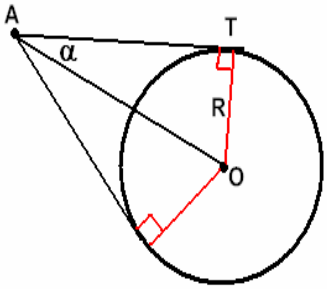
مساله : از نقطه $M(۱,-۱)$ دو مماس بر دایره $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۲$ رسم میکنیم شیب خط واصل بین نقاط تماس کدام است؟



$$m_{MW}=\frac{۲-(-۱)}{-۱-۱}=\frac{۳}{-۲} \quad \Rightarrow \quad m_{AB}=\frac{-۱}{m_{MW}}=\frac{۲}{۳}$$

مساله: معادله مماس بر دایره $(x-۲)^۲+y^۲=۴$ را از نقطه $A(۶,۰)$ خارج دایره بنویسید.

مساله : از نقطه $A(۶,-۸)$ دو مماس بر دایره $x^۲+y^۲=۱۶$ رسم کرده ایم طول مماس ها رابیابید.



$$AO=\sqrt{(۶-۰)^۲+(-۸-۰)^۲}=۱۰$$

$$TO=R=۴$$

$$AT^۲=AO^۲-OT^۲=۱۰^۲-۴^۲=۸۴$$

$$\Rightarrow AT=\sqrt{۸۴}$$

راه دوم : طول مماس بر دایره از نقطه ای خارج دایره را ((***قوت نقطه نسبت به دایره***)) مینامند.

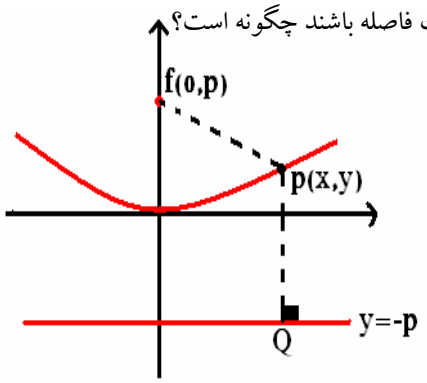
$$\text{طول مماس} = \sqrt{x_\circ^{\,2} + y_\circ^{\,2} + ax_\circ + by_\circ + c}$$

$$\text{طول مماس} = \sqrt{6^2 + (-8)^2 - 16} = \sqrt{84}$$

مساله : در مساله قبل زاویه بین دو مماس را بیابید.

سهمی: مجموعه نقاطی در صفحه است که از یک نقطه و یک خط ثابت مفروض در صفحه به یک فاصله است. ((نقطه ثابت را کـــانون و خط ثابت را هـــادی می نامند))

مثال: مکان هندسی نقاطی در صفحه که از نقطه $F(\circ\ ,\ p)$ و خط $y=-p$ به یک فاصله باشند چگونه است؟



$$FP = PQ$$

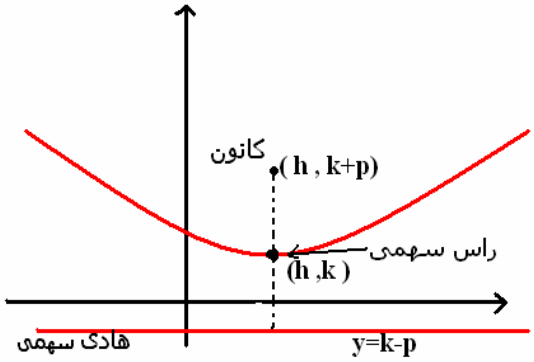
$$\sqrt{(x-\circ)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 4py$$

به طور کلی سهمی ها به ٤ دسته تقسیم میشوند.

الف) سهمی هایی که به سمت **بالا** باز میشوند



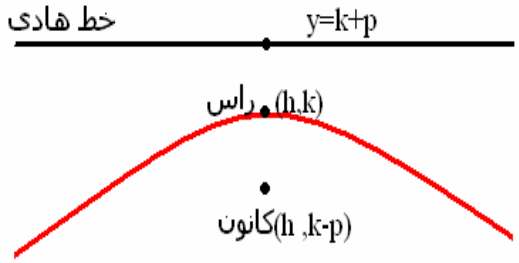
$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$$

راس سهمی : (h,k)

هادی سهمی : $y = k - p$

کانون سهمی : $(h\ ,k+p)$

ب) سهمی هایی که به سمت **پایین** باز میشوند



$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

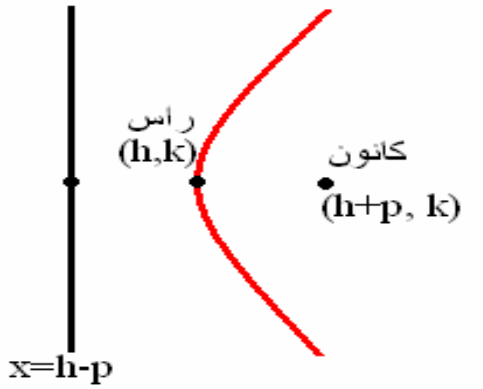
راس سهمی : (h,k)

هادی سهمی : $y = k + p$

کانون سهمی : $(h\ ,k-p)$

ج) سهمی هایی که به سمت **راست** باز میشوند.

$$(y-k)^{۲}=۴p(x-h)$$



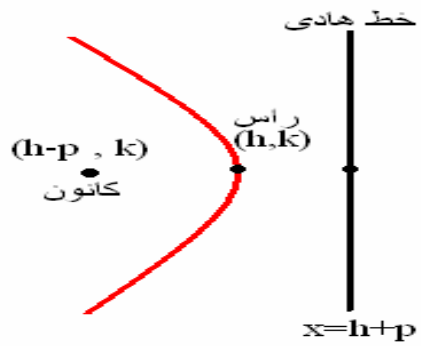
راس سهمی : (h,k)

هادی سهمی : $x=h-p$

کانون سهمی : $(h+p\ ,k)$

د) سهمی هایی که به سمت **چپ** باز میشوند

$$(y-k)^{۲}=-۴p(x-h)$$



راس سهمی : (h,k)

هادی سهمی : $x=h+p$

کانون سهمی : $(h-p\ ,k)$

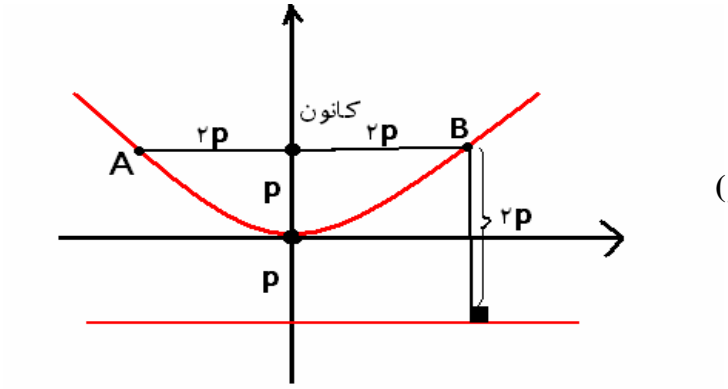
مساله: معادله سهمی رابنویسید که راس آن $V(-۱,۲)$ و کانون آن $F(۳,۲)$ باشد.

مساله: برای سهمی با راس $V(۱,۲)$ و هادی $y=۳$ معادله ای بیابید و مختصات کانون را بدست آورید.

مساله : راس ، کانون و محور سهمی زیر را بیابید. $y^{۲}-۲y-۱۲x-۲۳=۰$

مساله : در سهمی به معادله $3y^2 - 6x - 4y = 0$ خط گذرنده از کانون و موازی هادی، سهمی را در نقاط A, B قطع میکند اندازه وتر AB کدام است؟ ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

حل : اگر خطی موازی هادی روی کانون رسم شود اندازه آن $4p$ میشود.(طبق شکل)



معادله را استاندارد میکنیم:

$$(y-\frac{2}{3})^2 = 2(x+\frac{2}{9}) \Rightarrow 4p = 2$$

$$\Rightarrow AB = 2$$

مساله : اگر نقطه $F(1,2)$ کانون و $\Delta: 2x - y + 10 = 0$ خط هادی یک سهمی باشد راس آن کدام است؟

۱) $(1,1)$ ۲) $(-3,0)$ ۳) $(-1,3)$ ۴) $(2,1)$

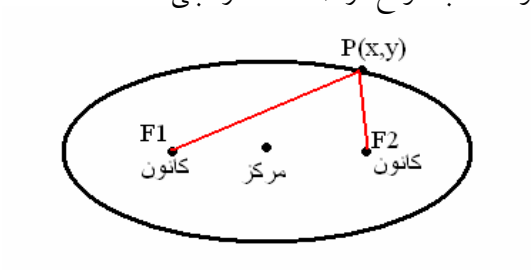
مساله: اگر نقطه $S(1,2)$ راس سهمی به معادله ی $x^2 + mx + n + 2y = 0$ باشد.زوج مرتب (m,n) کدام است؟

۱) $(-3,-2)$ ۲) $(3,2)$ ۳) $(-2,3)$ ۴) $(-2,-3)$

مساله: خط $x = 2$، خط هادی و $y = 2$ محور تقارن یک سهمی باشد. اگر سهمی از نقطه $M(4,4)$ بگذرد.فاصله کانون تا راس سهمی چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

بیضی: مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل هر یک از آنها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه مقدار ثابتی است.



این مقدار ثابت برابر $2a$ می باشد : $|PF_1| + |PF_2| = 2a$

مشخصات بیضی :

۱) دارای دو کانون است که نسبت به مرکز بیضی قرینه اند

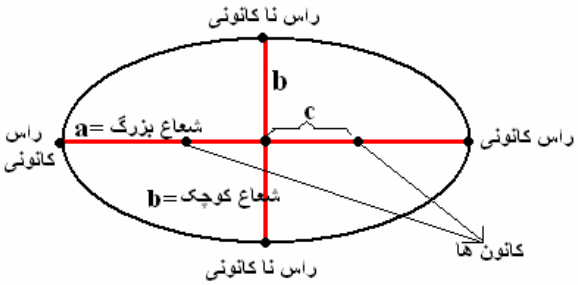
۲) دارای دو شعاع است . شعاع کوچک که با **b** و شعاع بزرگ که با **a** نمایش می دهیم.

۳) در همه بیضی ها فاصله مرکز تا کانون را با **c** نمایش می دهیم.

۴) بین شعاع بزرگ و کوچک و **c** رابطه $c^2 = a^2 - b^2$ بر قرار است.

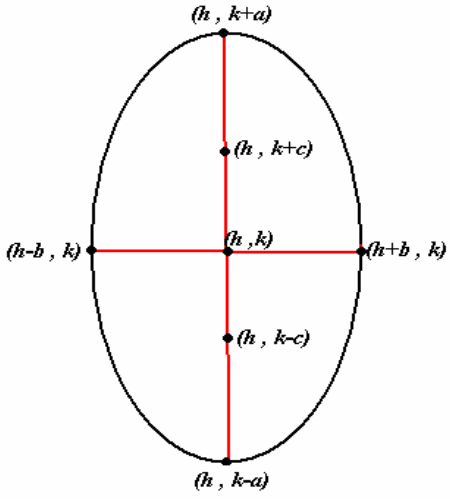
۵) طبق ۴ می توان گفت که فاصله کانون تا((راس نا کانونی)) برابر **a** است.

۶) مساحت بیضی برابر است با : $S = \pi ab$

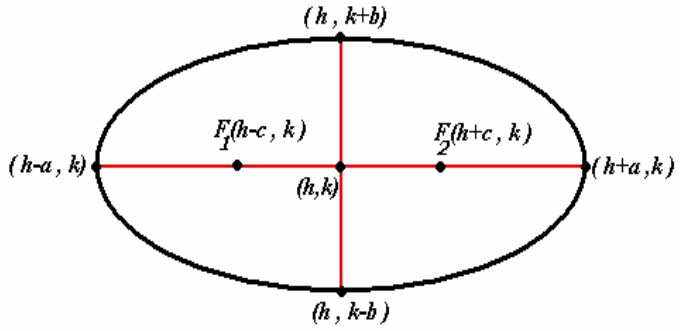


معادلات کلی بیضی قائم و افقی:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



مساله : معادله بیضی $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ را رسم کنید. کانون ها را بیابید مرکز و راس های کانونی و ناکانونی را بیا بید.

مساله : مر کز ، راس ها و کانون های بیضی مقابل را بیابید و آن را رسم کنید. $۹x^۲ + ۴y^۲ + ۳۶x - ۸y + ۴ = ۰$

مساله: معادله یک بیضی که کانون های آن $F(۱,۳)$, $F'(۱,-۱)$ و نقطه ی $M(۴,۳)$ یک نقطه از آن باشد. کدام است؟

۱) $\frac{(x-۱)^۲}{۱۲} + \frac{(y-۱)^۲}{۱۶} = ۱$

۲) $\frac{(x-۱)^۲}{۹} + \frac{(y-۱)^۲}{۴} = ۱$

۳) $\frac{(x-۱)^۲}{۱۶} + \frac{(y-۱)^۲}{۱۲} = ۱$

۴) هیچکدام

مساله: معادله یک بیضی که محور های آن $x = ۲$, $y = -۳$ بوده و بر محور های مختصات مماس باشد کدام است؟

۱) $\frac{(x-۲)^۲}{۴} + \frac{(y+۳)^۲}{۹} = ۱$

۲) $\frac{(x-۳)^۲}{۹} + \frac{(y-۲)^۲}{۴} = ۱$

۳) $\frac{(x-۲)^۲}{۹} + \frac{(y-۳)^۲}{۴} = ۱$

۴) هیچکدام

مساله : حدود m برای اینکه معادله ی $x^۲ + ۲y^۲ - ۲x + ۴y + m = ۰$ یک بیضی باشد کدام است؟

۱) $m > ۰$ ۲) $m < ۰$ ۳) $m < ۳$ ۴) $m > ۳$

خروج از مرکز بیضی : دربیضی نسبت $\frac{c}{a}$ را((خروج از مرکز بیضی)) می نامند و با e نمایش می دهند. می دانیم که $c = \sqrt{a^۲ - b^۲}$ پس همواره داریم : $۰ \le e \le ۱$.

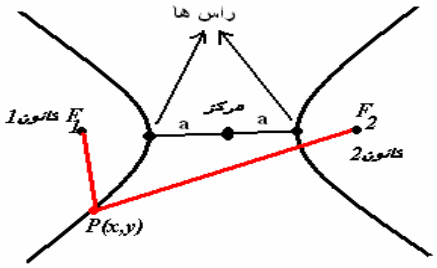
اگر e به صفر نزدیک شود بیضی به دایره شبیه تر می شود. و اگر e به یک نزدیک شود بیضی کشیده تر میشود تا به یک خط راست شبیه تر شود.

مساله: نقطه ی $A(۳,۲)$ راس کانونی و نقطه ی $B(-۴,-۳)$ راس قطر کوچک و نقطه ی $F(۰,۲)$ کانون یک بیضی می باشد خروج ازمرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

هذلولی: مجموعه نقاطی از صفحه است که تفاضل فواصل هر یک از آنها از دو نقطه ثابت در صفحه مقداری ثابت است.

این مقدار ثابت درست مثل بیضی $2a$ است.



$PF_1-PF_2=2a$

نقاط ثابت کانون ها هستند.

فاصله مرکز تا راس ها همیشه با **a** نمایش می دهیم

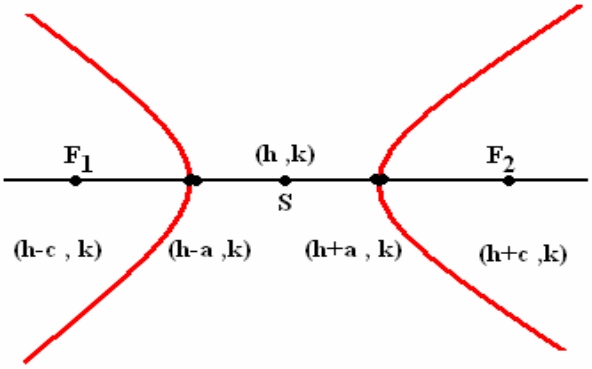
فاصله مرکز تا کانون ها همیشه **c** است.

مرکز درست وسط دو کانون و وسط دو راس است.

هر هذلولی دو مجانب دارد که از مرکز هذلولی میگذرند

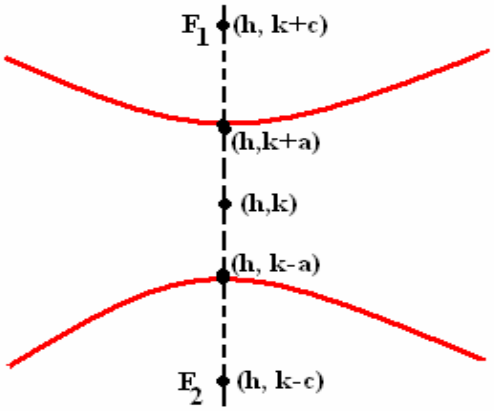
بین **a,b,c** رابطه ی $c^۲=a^۲+b^۲$ بر قرار است

هذلولی افقی



$$\frac{(x-h)^۲}{a^۲}-\frac{(y-k)^۲}{b^۲}=۱$$

هذلولی عمودی



$$\frac{(y-k)^۲}{a^۲}-\frac{(x-h)^۲}{b^۲}=۱$$

تفاوت این دو معادله در منفی بودن متغیر **x** یا **y** می باشد. بر خلاف معادله بیضی که بزرگتر بودن عدد زیر متغیر های **x**و **y** نوع بیضی را مشخص میکند.

اینجا بزرگ یا کوچک بودن عدد زیر متغیر ها مهم نیست.

هذلولی دو مجانب دارد که به سادگی فرمول آنها مشخص می شود:

مجانب های هذلولی افقی: $\frac{(x-h)}{a}\pm\frac{(y-k)}{b}=۰ \Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

مجانب های هذلولی عمودی: $\frac{(y-k)}{a}\pm\frac{(x-h)}{b}=۰ \Rightarrow y=\pm\frac{a}{b}(x-h)+k$

مساله : نوع هذلولی ، مرکز، کانون ها و مجانب های هذلولی زیر را مشخص کنید.

$$۴x^۲-y^۲+۸x+۲y-۱=۰$$

*حل:*ابتدا معادله گسترده بالا را استاندارد میکنیم:

$$(۴x^۲ + ۸x) - (y^۲ - ۲y + ۱) = ۰$$

$$۴(x^۲ + ۲x + ۱) - (y^۲ - ۲y + ۱) = ۰ + ۴$$

$$۴(x+۱)^۲ - (y-۱)^۲ = ۴ \rightarrow \frac{(x+۱)^۲}{۱} - \frac{(y-۱)^۲}{۴} = ۱$$

$$a = ۱ \ , \ b = ۲ \ , \ c = \sqrt{a^۲ + b^۲} = \sqrt{۱^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۵}$$

$$(h,k) = (-۱ \ , ۱)$$

شما ! راس ها و کانون ها و مجانب ها را بدست آورید.و آن را رسم کنید.

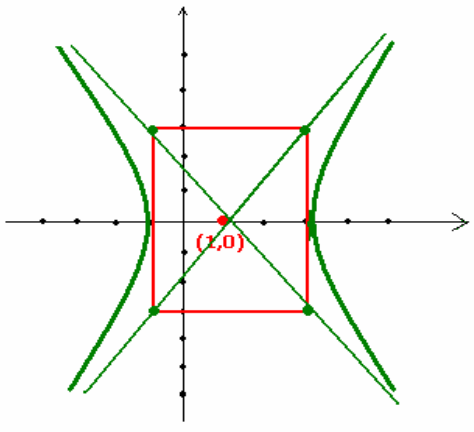
مساله) معادله یک هذلولی را بنویسید که خطوط $۳x+۲y+۱=۰$, $۳x-۲y-۷=۰$ مجانب های آن باشدو از نقطه $M(۱+۲\sqrt{۳}, ۴)$ بگذرد

سوال: جایگاه **b** در رسم هذلولی کجاست؟برای رسم دقیق تر و ساده تر هذلولی دانستن جایگاه **b** بسیار مهم است.

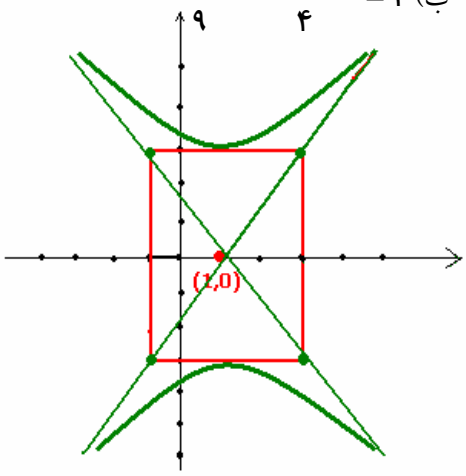
برای رسم هذلولی ابتدامرکز را پیدا می کنیم بعد مربعی با اضلاع **a ,b** می سازیم که مرکز مربع ، مرکز هذلولی باشد. قطر ها ی مربع مجانب های هذلولی می باشند....

مثال: به رسم هذلولی های زیر دقت کنید.

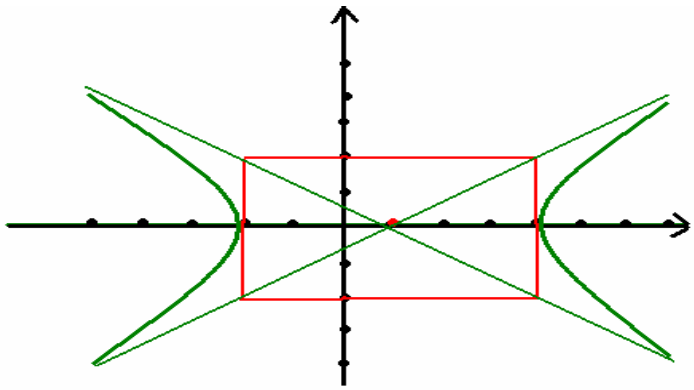
الف) $\frac{(x-۱)^۲}{۴} - \frac{y^۲}{۹} = ۱$



ب) $\frac{y^۲}{۹} - \frac{(x-۱)^۲}{۴} = ۱$



ج) $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$



مساله : معادله یک هذلولی که کانون های ان $F'(1,7)$, $F(1,-1)$ و نقطه $M(0,0)$ یک نقطه از آن است.کدام است؟

۱) $(y-3)^2-4(x-1)^2=32$ ۲) $(x-1)^2-(y-3)^2=-8$

۳) $(y-1)^2-(x-3)^2=16$ ۴) $(x-3)^2-(y-1)^2=16$

مساله: مساحت مستطیلی که قطر ها ی آن مجانب هذلولی به معادله $y^2-4x^2=8x$ می باشد چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۲

مساله : اگر قطر های مستطیل هذلولی بر هم عمود باشند. خروج از مرکز هذلولی کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

مساله : اگر خط $y=3x-2$ مجانب یک هذلولی افقی باشد خروج از مرکز آن کدام است؟

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

مساله : خط $y = 2x + 5$ مجانب و نقطه $(4,3)$ کانون یک هذلولی افقی می باشدمختصات مر کز تقارن این هذلولی کدام است.

۱) $(-1,3)$ ۲) $(4,13)$ ۳) $(1,7)$ ۴) $(6,7)$

مساله : خروج از مرکز هذلولی $x^2 - 4y^2 - 2x + 5 = 0$ کدام است

۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{3}$

مساله: در هذلولی به معادله $x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0$ فاصله کانون ها از خط مجانب چقدر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{2}$

مساله : در هذلولی به معادله ی $9(x-2)^2 - 4(y+3)^2 = 36$ خطی رادر یک راس مماس بر هذلولی رسم می کنیم تا مجانب های هذلولی را در دو نقطه M و N قطع کند طول پاره خط MN چقدر است

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

مساله : نقطه $(4,1)$, $(-2,1)$ رئوس و نقطه ی $(6,1)$ یکی از کانون های یک هذلولی می باشند خروج از مرکز این هذلولی کدام است.

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

خروج از مرکزهذلولی : مثل بیضی قابل تعریف است. که همان نسبت $e=\frac{c}{a}$ می باشد. که قابل تغییر به صورت زیر است

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}{a}=\sqrt{۱+(\frac{b}{a})^{۲}}$$

مثال و نکته : خروج از مرکز بیضی $۳x^{۲}+۴y^{۲}-۱۱x+۷۵y-۱=۰$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل : در معادلات گسترده $((ax^{۲}+cy^{۲}+dx+ey+f=۰\ ,\ a>۰, c>۰))$ می توان بدون استاندارد کردن ، با استفاده از فرمول زیر خروج از مرکز را محاسبه کرد:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{۱-\frac{Min(a,c)}{Max(a,c)}}=\sqrt{۱-\frac{۳}{۴`}}=\frac{۱}{۲}$$

مساله: نوع مقاطع مخروطی زیر را تعیین کنید.

الف) $x^{۲}+۴y^{۲}+۲x-۸y+۵=۰$ ب) $x^{۲}-۲y^{۲}+\sqrt{۲}y-x=۰$ ج) $x^{۲}-۲y+۴x-۱=۰$

معادله گسترده همه مقاطع مخروطی به صورت $Ax^{۲}+Cy^{۲}+Dx+Ey+F=۰$ می باشد.که پس از استاندارد کردن ومربع سازی کامل نوع آن مشخص می شود. ولی با توجه به علامت $\mathbf{A}$ و$\mathbf{C}$می توان حدس هایی زد.

اگر $\mathbf{A=C}$ آنگاه معادله می تواند ، دایره ، نقطه یا تهی باشد.

اگر $A\neq C$ و $\mathbf{A}$ و$\mathbf{C}$ هم علامت باشند. آنگاه معادله می تواند، بیضی ، نقطه یا تهی باشد.

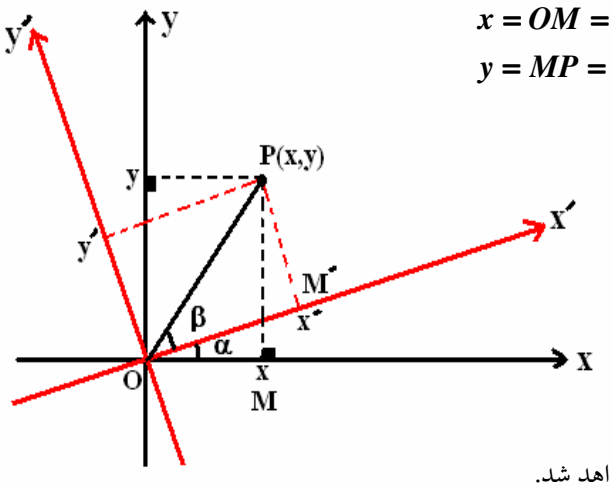
اگر $A\neq C$ و$\mathbf{A}$و $\mathbf{C}$ مختلف العلامه باشند.آنگاه معادله می نواند هذلولی یا دو خط راست باشد.

اگر یکی از دو متغیر $\mathbf{A}$ یا $\mathbf{C}$ صفر باشد .معادله سهمی است.

اگر محور های مختصات را حول مبدا دوران دهیم. معادله کلی مقطع مخروطی به شکل :

$$Ax^{۲}+Bxy+Cy^{۲}+Dx+Ey+F=۰$$

در می آید.برای شناخت نوع مقطع مخروطی باید سعی کنیم متغیر $\mathbf{xy}$ را حذف کنیم. وسپس معادله را استاندارد کنیم. از روابط زیر استفاده می کنیم.



$$x=OM=OP\cos(\alpha+\beta)=OP\cos\alpha\cos\beta-OP\sin\alpha\sin\beta$$
$$y=MP=OP\sin(\alpha+\beta)=OP\sin\alpha\cos\beta+OP\cos\alpha\sin\beta$$

$$\begin{cases}\sin\beta=\frac{M'P}{OP}\ \Rightarrow\ M'P=OP\sin\beta=y'\\ \cos\beta=\frac{OM'}{OP}\Rightarrow OM'=OP\cos\beta=x'\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{cases}$$

با جانشانی این دو رابطه در معادله فوق جمله ی شامل $\mathbf{xy}$ حذف خواهد شد.

مثال: نقطه $M(-۲,۴)$ در دستگاه xoy مفروض است.اگر محور های مختصات را ۶۰ درجه دوران دهیم مختصات M در دستگاه جدید چیست؟

$$\begin{cases} x = x'\cos ۶۰ - y'\sin ۶۰ \\ y = x'\sin ۶۰ + y'\cos ۶۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲ = \frac{۱}{۲}x' - \frac{\sqrt{۳}}{۲}y' \\ ۴ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x' + \frac{۱}{۲}y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = ۲\sqrt{۳} - ۱ \\ y' = \sqrt{۳} + ۲ \end{cases}$$

مساله : محور های مختصات را به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ دوران می دهیم.معادله هذلولی $۲xy = ۹$ در دستگاه جدید چیست؟

در برخی مسائل زاویه دوران را باید از روی مساله پیدا کنیم و سپس جمله شامل xy را حذف کنیم.

اگر صورت کلی معادله به شکل $Ax^۲ + Bxy + Cy^۲ + Dx + Ey + F = ۰$ باشدزاویه دوران برابر است با:

$$\cot ۲\alpha = \frac{A-C}{B} \qquad \vee \qquad \tan ۲\alpha = \frac{B}{A-C}$$

مساله: زاویه دوران مقطع مخروطی $x^۲ + xy + y^۲ - ۶ = ۰$ را پیدا کنید و جمله شامل xy را حذف کنید و نوع مقطع را تعیین کنید.

مساله : محور های مختصات را حول مبدا چقدر دوران دهیم تا معادله $x^۲ + xy - y^۲ + \sqrt{۲}x - y = ۷$ استاندارد شود؟

۱) ۶۰ ۲) $\arctan\sqrt{۲}$ ۳) $\arctan(\sqrt{۵} - ۲)$ ۴) $\arctan(\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲})$

مساله : نمودار معادله ی $x^۲ + ۴xy - ۲y^۲ - ۲x - ۲y - ۱ = ۰$ کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) سهمی ۴) هذلولی

حل) برای تشخیص می توان از روابط زیر استفاده کرد

اگر $B^۲ - ۴AC > ۰$ باشد شکل می تواند دو خط متقاطع یا هذلولی باشد

اگر $B^۲ - ۴AC < ۰$ باشد شکل می تواند: تهی ، نقطه ،دایره ، یا بیضی باشد

اگر $B^۲ - ۴AC = ۰$ باشد شکل می تواند تهی ، یک خط ، دو خط موازی ، کل صفحه ، یا سهمی باشد.

پس برای حل مساله بالا داریم : $۴^۲ - ۴\times۱\times-۲ = ۲۴ > ۰$ و هذلولی صحیح است.

مساله : برای استاندارد کردن معادله ی $8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$ باید محور های مختصات را به زاویه θ دوران دهیم. $\cos\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ۳) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

حل:

$$\tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{-4}{8-5} = \frac{-4}{3}$$

$$\cos^2 2\theta = \frac{1}{1+\tan^2 2\theta} = \frac{1}{1+\frac{16}{9}} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos 2\theta = \pm\frac{3}{5}$$

چون مقدار $\tan 2\theta$ منفی است پس انتهای زاویه در ناحیه دوم است و مقدار مثبت بدست آمده در بالا قابل قبول نیست.

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{-3}{5} \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2\theta = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

که مقدار مثبت قابل قبول است زیرا انتهای زاویه θ در ناحیه اول قرار خواهد گرفت.

نکته(وتر کانونی): وتری است که از کانون بیضی یا هذلولی می گذرد و بر محور کانونی عمود است

((طول این وتر برابر $\frac{2b^2}{a}$ می باشد.))

مثال) طول وتر کانونی هذلولی به معادله $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$ را بیابید.

۱) کدامیک از معادلات زیر نشان دهنده یک دایره است؟

۱) $(x-۲)^۲-(y+۳)=۱$ ۲) $۲x^۲+۲y^۲-۴x-۶y+۱۳=۰$

۳) $x^۲+y^۲+۴x+۵y-۶=۰$ ۴) $x^۲+۲y^۲-۳x+۵=۰$

۲) به ازای کدام مقدار m معادله $x^۲+y^۲-۲x+(m-۱)y+m=۰$ نشان دهنده یک دایره است ؟

۱) $۱<m<۵$ ۲) $m>۵$ یا $m<۱$

۳) $-۵<m<-۱$ ۴) $m>-۱$ یا $m<-۵$

۳) از نقطه $A(۱,۳)$ چند مماس می توان بر دایره $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۲=۰$ رسم کرد ؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی شمار

۴) معادله دایره ای که مرکز آن نقطه $O(۱,۱)$ و بر خط $D: ۳x+۴y+۳=۰$ مماس است؟

۱) $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۲=۰$ ۲) $x^۲+y^۲+۲x+۲y+۲=۰$

۳) $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۲=۰$ ۴) $x^۲+y^۲-۲x-۲y+۲=۰$

۵) معادله دایره ای که از سه نقطه $A(۰,-۱)$ و $B(۰,۲)$ و $C(-۴,۲)$ می گذرد کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲+۲x-y-۲=۰$ ۲) $x^۲+y^۲+۴x-y-۲=۰$

۳) $x^۲+y^۲+۴x-۲y-۲=۰$ ۴) $x^۲+y^۲+۲x-۲y-۲=۰$

۶) دو دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۴=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۴=۰$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۱) متقاطع ۲) مماس داخل ۳) مماس خارج ۴) متخارج

۷) طول و تر مشترک دو دایره $x^۲+y^۲+۴x-۴y+۴=۰$ و $x^۲+y^۲-۲x+۲y-۸=۰$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

۸) مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از نقطه $A(۱,۲)$، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر فاصله آنها از نقطه $B(۰,-۱)$ باشد، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲-۵x+۸y+۱۰=۰$ ۲) $x^۲+y^۲-۸x-۲۲y+۱۷=۰$

۳) $x^۲+۲y^۲-۶x+۵y+۲=۰$ ۴) $x^۲-y^۲+۳x-۴y+۳=۰$

۹) طول پاره خط مماس بر دایره $x^۲+y^۲-۲x-۴y+۱=۰$ از نقطه $A(۴,۳)$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\sqrt{۷}$ ۴) $\sqrt{۸}$

۱۰) طول کوتاه ترین و تری از دایره $x^۲+y^۲-۲x+۴y-۴=۰$ که از نقطه $A(۲,۰)$ می گذرد ، چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{۱۹}$ ۴) $\sqrt{۲۲}$

۱۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت F و F' در آن صفحه برابر ۲ باشد کدام است؟

۱) یک بیضی است ۲) یک پاره خط است

۳) هیچ شکل حقیقی نیست ۴) بسته به طول FF' هریک از گزینه های ۱و۲و۳ صحیح است

۱۲) معادله بیضی که نقاط $F'(-۳,۰)$ و $F(۳,۰)$ دو کانون آن و نسبت دو قطر آن $\frac{۵}{۴}$ باشد کدام است؟

۱) $\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{y^۲}{۲۵}=۱$ ۲) $\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۱۶}=۱$ ۳) $\frac{x^۲}{۲۵}+\frac{y^۲}{۹}=۱$ ۴) $\frac{x^۲}{۱۶}+\frac{y^۲}{۹}=۱$

۱۳) کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟

۱) هر چه خروج از مرکز بیضی به یک نزدیکتر شود ، بیضی به دایره شبیه تر می شود .

۲) هر چه خروج از مرکز بیضی به بی نها یت نزدیکتر شود ،بیضی به دایره شبیه تر می شود .

۳)خروج از مرکز بیضی همواره بین صفر و یک است.

۴) خروج از مرکز بیضی هر عدد حقیقی مثبتی می تواند باشد .

۱۴) کدامیک از نقاط زیر یک کانون بیضی $16x^2+9y^2+64x+54y+1=0$ است؟

۱) $\left(-2+\sqrt{5},-3\right)$ ۲) $\left(-2+\sqrt{7},-3\right)$ ۳) $\left(-2,-3+\sqrt{7}\right)$ ۴) $\left(-2,-3+\sqrt{5}\right)$

۱۵) در بیضی $4x^2+3y^2-9=0$ اگر M نقطه ای روی بیضی باشد ، حاصل $MF+MF'$ چقدر است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

۱۶) در بیضی به معادله $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$ ، در یکی از کانون ها خطی را عمود بر قطر بزرگ بیضی رسم می کنیم و آن را امتداد می دهیم تا بیضی را در نقاط M و N قطع کند . طول پاره خط MN (طول وتر کانونی) چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷) مکان هندسی تمام نقاط صفحه که فاصله آن ها از نقطه $F(0,3)$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ فاصله آن ها از خط $y=2$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{x^2}{2}-(y-4)^2=1$ ۲) $x^2+\frac{(y-4)^2}{2}=1$ ۳) $\frac{x^2}{2}+(y-4)^2=1$ ۴) $x^2+(y-4)^2=1$

۱۸) نقطه $M(2+5\cos\theta\ ,\ 2+4\sin\theta)$ مفروض است . مکان هندسی نقطه M با تغییر θ چه شکلی می شود ؟

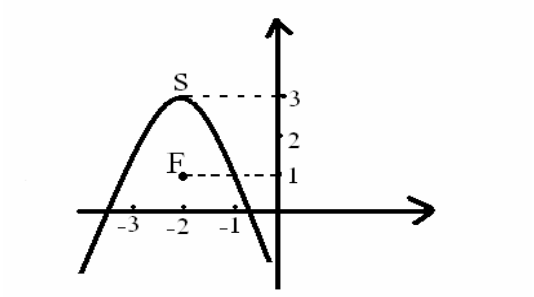
۱) دایر ای به شعاع ۴ ۲) دایره ای به شعاع ۵

۳) بیضی با خروج از مرکز $\frac{4}{5}$ ۴) بیضی با خروج ۲از مرکز $\frac{3}{5}$

۱۹) مختصات راس و کانون سهمی $x^2-4x+4y-8=0$ به ترتیب از چپ به راست کدامند ؟

۱) $(2,4)$ و $(2,3)$ ۲) $(2,2)$ و $(2,3)$ ۳) $(3,2)$ و $(3,4)$ ۴) $(3,4)$ و $(3,3)$

۲۰) معادله سهمی رو برو کدام است؟



۱) $x^2+4x-8y+28=0$

۲) $x^2+4x+8y-20=0$

۳) $x^2+4x+8y+16=0$

۴) $x^2+4x-8y-24=0$

۲۱) خطی را در نقطه کانون سهمی $4x^2-2x+3y-5=0$ بر محور آن عمود می کنیم تا سهمی را در نقاط M و N قطع کند ، طول پاره خط MN (وتر کانونی) چقدر است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{16}$ ۴) $\frac{16}{3}$

۲۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که دو مماس عمود بر هم بر سهمی $y=x^2$ می توان رسم کرد کدام است؟

۱) $x=-\frac{1}{4}$ ۲) $y=-\frac{1}{4}$ ۳) $y=-1$ ۴) $x+y=-1$

۲۳) معادله هذلولی که $F(۶,-۱)$ و $F'(-۲,-۱)$ کانون های آن و $A(۵,-۱)$ یکی از رئوس آن باشد کدام است؟

۱) $\frac{(x-۲)^۲}{۷}-\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$ ۲) $\frac{(x-۲)^۲}{۹}-\frac{(y+۱)^۲}{۷}=۱$

۳) $\frac{(y+۱)^۲}{۹}-\frac{(x-۲)^۲}{۷}=۱$ ۴) $\frac{(y+۱)^۲}{۷}-\frac{(x-۲)^۲}{۹}=۱$

۲۴) منحنی نمایش معادله $۳x^۲-۲y^۲-۱۲x+۴y+۱۰=۰$ کدام است؟

۱) هذلولی ۲) دو خط متقاطع ۳)دو خط موازی ۴) یک نقطه

۲۵) زاویه بین دو خط مجانب هذلولی $\frac{(x-۱)^۲}{۳}-\frac{(y+۱)^۲}{۹}=۱$ چقدر است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۲۶)در هذلولی $۲x^۲-۲y^۲+۴x-۸y+۱۶=۰$ زاویه بین مجانب ها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۲۷) اگر خروج از مرکز یک هذلولی $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ باشد، زاویه بین مجانب ها کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۲۸) در هذلولی $\frac{(x-۲)^۲}{۱۶}-\frac{(y+۳)^۲}{۹}=۱$ فاصله کانون تا خط مجانب چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۹) مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از نقطه $F(۴,۰)$، دو برابر فاصله آنها از خط $x=۲$ باشد کدام است؟

۱) $۳x^۲-y^۲-۸x=۰$ ۲) $۳x^۲+۲y=۶$ ۳) $x^۲+y^۲-۲x=۲۴$ ۴) $۳y^۲-x^۲-۶x=۰$

۳۰)اگر معادله $(\alpha^۲+۲\alpha)x^۲+(\alpha^۲-۴)y^۲+۳x-۴y=\alpha+۱$ نشان دهند ه یک سهمی باشد، آنگاه α کدام است؟

۱) ۰ یا ۲ ۲) ۰ یا ۲- ۳) ۲- یا ۲ ۴) ۲- یا ۰ یا ۲

۳۱) $(k+۱)x^۲+(k-۲)y^۲=۲k-۱$ نشان دهنده یک هذلولی افقی باشد ، آنگاه حدود k کدام است؟

۱) $-۱<k<\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}<k<۲$ ۳) $k>۱$ یا $k<\frac{۱}{۲}$ ۴) $k>۱$ یا $k<۰$

۳۲) اگر محور های مختصات را به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ در جهت مثلثاتی دوران می دهیم ، مختصات نقطه $M\begin{pmatrix}۱\\۱\end{pmatrix}$ چه می شود؟

۱) $\begin{pmatrix}۰\\۱\end{pmatrix}$ ۲) $\begin{pmatrix}۱\\۰\end{pmatrix}$ ۳) $\begin{pmatrix}\sqrt{۲}\\۰\end{pmatrix}$ ۴) $\begin{pmatrix}۰\\\sqrt{۲}\end{pmatrix}$

۳۳) اگر محور های مختصات به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ در جهت مثلثاتی دوران کنند، معادله $x^۲+۸xy+y^۲-۷۵=۰$ به چه معادله ای تبدیل می شود؟

۱) $\frac{x'^۲}{۱۵}-\frac{y'^۲}{۲۵}=۱$ ۲) $\frac{x'^۲}{۱۵}+\frac{y'^۲}{۲۵}=۱$ ۳) $\frac{x'^۲}{۲۵}-\frac{y'^۲}{۱۵}=۱$ ۴) $\frac{x'^۲}{۲۵}+\frac{y'^۲}{۱۵}=۱$

۳۴) محور های مختصات را باید با چه زاویه ای دوران دهیم تا مقطع مخروطی $۴x^۲ + ۲\sqrt{۳}xy + ۲y^۲ + ۳x - ۲y - ۲ = ۰$ به فرم استاندارد تبدیل شود؟

۱) $\frac{\pi}{۸}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

۳۵) معادله $x^۲ + ۲\sqrt{۳}xy + ۳y^۲ - ۴ = ۰$ نشان دهنده چه شکلی است؟

۱) سهمی ۲) هذلولی ۳) دو خط موازی ۴) یک خط

۳۶) فاصله یک کانون بیضی $\frac{(x-۲)^۲}{۷} + \frac{(y+۳)^۲}{۱۶} = ۱$ از راس مجاور آن برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۷

۳۷) اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ باشد ، نسبت قطر بزرگتر به قطر کوچک بیضی چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۲

۳۸) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن ها بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره $(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲$ رسم کرد ، کدام است؟

۱) $(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۸$ ۲) $(x-۱)^۲(y+۱)^۲ = ۴$

۳) $\frac{(x-۱)^۲}{۲} + (y+۱)^۲ = ۱$ ۴) $(x-۱)^۲ + \frac{(y+۱)^۲}{۲} = ۱$

۳۹) معادله یکی از مجانب های هذلولی که رئوس آن $(۲ , -۲)$ و $(۲ , ۲)$ باشند و از نقطه $M(۳ , ۲\sqrt{۲})$ می گذرد کدامست؟

۱) $y + ۲x - ۴ = ۰$ ۲) $y + ۲x + ۴ = ۰$ ۳) $y + ۴x - ۸ = ۰$ ۴) $y - ۴x + ۸ = ۰$

۴۰) هر دو کانون هذلولی به معادله $ax^۲ + ۴x + y^۲ - ۲y = ۰$ بر روی خطی موازی محور x ها است. مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟

۱) $-۸ < a < -۴$ ۲) $-۴ < a < ۰$ ۳) $-۲ < a < ۰$ ۴) $۰ < a < ۸$

۴۱)کانون های بیضی به معادله $۲x^۲ + ۷y^۲ - ۴x = ۱۲$ دو سر قطری از دایره اند . این دایره نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع می کند؟

۱) ۲ ۲) $۱ + \sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

۴۲)طول قطعه مماسی که از نقطه $A(۴ , ۱)$ بر دایره ای به معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۳ = ۰$ رسم شود برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۴۳) معادله یک بیضی پس از دوران محور های آن حول مبداء به اندازه ۴۵° در جهت مثلثاتی به صورت $x'^۲ + ۴y'^۲ = ۴$ است. معادله این بیضی قبل از دوران کدام است؟

۱) $۳x^۲ + ۳y^۲ + ۶xy = ۴$ ۲) $۳x^۲ + ۳y^۲ - ۶xy = ۸$

۳) $۵x^۲ + ۵y^۲ - ۴xy = ۴$ ۴) $۵x^۲ - ۵y^۲ - ۶xy = ۸$

۴۴) دسته خطوط به معادلات $(m+۲)y + (m+۱)x + ۱ = ۰$ قطر های یک دایره اند. اگر این دایره از نقطه $(۵ , ۲)$ بگذرد شعاع آن چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۴۵)سهمی با کانون $F(۱ , ۱)$ وخط هادی به معادله $x = ۳$ محور y ها را در دو نقطه A و B قطع می کند . فاصله AB چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۴۶) دو نقطه M و N هر کدام بر روی یکی از دو شاخه ی هذلولی به معادله ی $۴y^۲ - ۹x^۲ + ۱۸x + ۱۶ = ۰$ حرکت می کنند. کمترین فاصله MN کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) 5

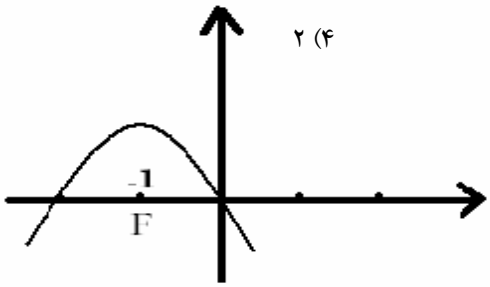
۴۷) فاصله دو کانون مقطع مخروطی به معادله $x^۲ + xy + y^۲ = ۶$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۴۸) در یک بیضی فاصله یک کانون از دورترین نقاط بیضی سه برابر فاصله همان کانون از نزدیکترین نقاط آن بیضی است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۹)معادله سهمی نمودارمقابل به صورت $x^۲ + ۲x = ay$ است. a کدام است؟



۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

سوالات کنکورسال های اخیر:

۱)خط به معادله $x=a$ بربیضی به معادله $x^۲ + ۲y^۲ - ۲x = ۳$ مماس است ، a کدام است؟(۷۷)

۱)۳- و۱- ۲) ۳- و ۱ ۳) ۳ و ۱- ۴) ۳ و ۱

۲) به ازای کدام مقدار k در هذلولی به معادله $۳x^۲ - y^۲ + ۴y + k = ۵$ فاصله یکی از کانون هااز نقطه تلاقی مجانب ها برابر ۲ است؟(۷۷)

۱) ۲- ۲)۱- ۳) ۲ ۴)۳

۳) فاصله دو کانون مقطع مخروطی به معادله $x^۲ + xy + y^۲ = ۶$ کدام است؟(۸۱)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲)۳ ۳) ۴ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۴) دو نقطه ی M و N هر کدام بر روی یکی از دو شاخه ی هذلولی به معادله $۴y^۲ - ۹x^۲ + ۱۸x + ۱۶ = ۰$ حرکت میکنند. کمترین فاصله ی MN کدام است؟(۸۲)

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۵

۵) دسته خطوط به معادلات $(m+۲)y + (m+۱)x + ۱ = ۰$ قطر های یک دایره اند اگر این دایره از نقطه $(۵,۲)$ بگذرد شعاع آن چقدر است؟(۸۳)

۱)۴ ۲)۵ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۶) سهمی با کانون $F(۱,۱)$ و خط هادی به معادله $x = ۳$ محور y ها را در دو نقطه A و B قطع میکند. فاصله AB چقدر است؟(۸۳)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲)۴ ۳)۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

۷) فاصله دو کانون مقطع مخروطی به معادله $xy+\sqrt{2}x=1$ کدام است؟(۸۳)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۴

۸)طول قطعه مماسی که از نقطه $A(4,1)$ بر دایره ای به معادله ی $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ رسم می شود برابر کدام است؟(۸۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) $2\sqrt{3}$

۹) معادله یک بیضی پس از دوران محور های آن حول مبدا به اندازه ی۴۵ درجه در جهت مثلثاتی به صورت $x'^2+4y'^2=4$ است. معادله این بیضی قبل از دوران کدام است؟(۸۴)

۱) $3x^2+3y^2+6xy=4$ ۲) $3x^2+3y^2-6xy=8$

۳) $5x^2+5y^2-6xy=8$ ۴) $5x^2+5y^2+6xy=8$

۱۰) هر دو کانون هذلولی به معادله $ax^2+4x+y^2-2y=0$ بر روی خطی موازی محور xها است. مجموعه مقادیر aبه کدام صورت است؟(۸۵)

۱) $-8<a<-4$ ۲) $-4<a<0$ ۳) $-2<a<0$ ۴) $0<a<8$

۱۱)کانون های بیضی به معادله $2x^2+7y^2-4x=12$دو سر قطری از دایره اند، این دایره نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع میکند؟(۸۵)

۱) ۲ ۲) $1+\sqrt{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) ۳

۱۲) به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2+y^2+2x-2y=0$, $x^2+y^2-4y+b=0$ مماس داخل اند؟(۸۶)

۱) ۵- ۲) ۴- ۳) ۳- ۴) ۲-

۱۳) دو دایره از نقطه $(2,1)$ گذشته و بر محور های مختصات مماس اند. شعاع این دایره ها کدام است؟(۸۷)

۱) ۱و۴ ۲) ۱و۵ ۳) ۲و۴ ۴) ۲ و ۵

۱۴) بیش ترین مساحت از بین مثلث های که یک راس آن روی بیضی به معادله ی $4x^2+y^2-4x=3$ و دو راس دیگرآن کانون های این بیضی باشند کدام است؟(۸۷)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

۱۵)فاصله نقطه ی $M(x,y)$ از نقطه ای به طول یک واقع بر محور xها ، برابر نصف فاصله همین نقطه از خط به معادله $y=3$ است.در منحنی مکان هندسی M اندازه بزرگترین وتر کدام است؟(۸۸)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۶- معادله دایره ای که مرکز آن به طول ۱- و بر دو خط به معادلات $y=x$, $y=x+4$ مماس باشد کدام است؟(۸۹)

۱) $x^2+y^2+2x-2y=0$ ۲) $x^2+y^2+2x-2y=1$

۳) $x^2+y^2+2x+y=1$ ۴) $x^2+y^2+2x-y=2$

۱۷- محور های مختصات را به اندازه مناسب در جهت مثلثاتی دوران می دهیم تا مقطع مخروطی به معادله $5x^2-2\sqrt{3}xy+7y^2=1$ به شکل استاندارد نوشته شود. مقدار x بر حسب مختصات در دستگاه دوران یافته کدام است؟(۸۹)

۱) $x=\frac{1}{2}(x'-\sqrt{3}y')$ ۲) $x=\frac{1}{2}(x'+\sqrt{3}y')$ ۳) $x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'+y')$ ۴) $x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'-y')$

۱۸- به ازای کدام مقدار a دو دایره به معادلات $x^2+y^2-2x+8y+a=0$, $x^2+y^2+4x=0$ مماس خارج یکدیگرند؟(۹۰)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۹) مجا نب های هذلولی به معادله $\frac{۱}{۴}x^۲ - y^۲ + ax + by = ۱$ در نقطه $(۱ , -۲)$ متقاطع اند. عرض از مبدا خط مجانب آن با شیب مثبت کدام است؟ (۹۰)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳)۲ ۴)۱

ماتریس ها

خلاصه مطالبی که باید در این فصل یاد گرفت:

۱- بسط دترمینان

۲- روش ساروس

۳- ضرب ماتریسها

۴- توان های ماتریس های دودردو

۵- ترانهاده و ماتریس الحاقی

۶- رابطه بین دترمینان ماتریس و ترانهاده اش و ماتریس معکوس

۷- ماتریس متقارن و پاد متقارن

۸- دستگاه معادلات خطی، روش کرامر ، روش حذفی گاوس

۹- بحث در جواب های دستگاه ۳ معادله ۳ مجهولی

صورت کلی نمایش یک ماتریس به صورت $A = \lfloor a_{i\ j} \rfloor_{m \times n}$ می باشد.یا:

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & .... & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & .... & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & .... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس $A = \lfloor ۲i^{۲} + j \rfloor_{۲\times۲}$ را مشخص کنید.

ماتریس یکه (واحد- همانی)**:** ماتریسی مربعی است که درایه های روی قطر اصلی آن یک وبقیه درایه های آن صفر باشد.

$$I_{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad I_{۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots$$

ماتریس قطری: ماتریس مربعی که درایه های غیر قطری آن صفر باشد

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -\sqrt{۳} \end{bmatrix}$$

ماتریس های بالا مثلثی و پایین مثلثی:

اگر درایه های بالای قطر اصلی صفر باشد به آن پایین مثلثی میگویند.

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ -۱ & ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

اگر درایه های زیر قطر اصلی صفر باشدبه آن بالا مثلثی میگوییم.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۴ \\ ۰ & ۴ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

دقت کنید !(قطر اصلی میتواند صفر داشته باشد،<< حتی تمام درایه های روی قطر>> و در تعریف اشکالی وارد نمیکند)

قضیه : اگر $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$, $B=\lfloor b_{ij}\rfloor$, $C=\lfloor c_{ij}\rfloor$ سه ماتریس هم مرتبه باشندو $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ دو عدد حقیقی باشند داریم:

الف) $A+B=B+A$

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$

ج) $A+\circ=\circ+A=A$

د) $r(A+B)=rA+rB$

ه) $(r+s)\times A=rA+sB$

و) $I\times A=A\times I=A$

دقت کنید خاصیت جابجایی در مورد ضرب دو ماتریس همواره برقرار نیست. $\mathbf{A\times B\neq B\times A}$

سوال: ماتریس ها و یا حالاتی از ضرب را بیابید که خاصیت جابجایی داشته باشد.((به عنوان مثال $I\times A=A\times I$))

قضیه : اگر $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$, $B=\lfloor b_{ij}\rfloor_{n\times p}$, $C=\lfloor c_{ij}\rfloor_{p\times q}$ سه ماتریس باشند.در اینصورت: $\mathbf{A\times(B\times C)=(A\times B)\times C}$

قضیه: اگر $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$, $B=\lfloor b_{ij}\rfloor_{n\times p}$, $C=\lfloor c_{ij}\rfloor_{n\times p}$ سه ماتریس باشند. در اینصورت: $\mathbf{A(B+C)=AB+AC}$

مساله: اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۱\\ ۳ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=A^{۳}$ باشددر اینصورت $b_{۲۱}$, $b_{۱۳}$ را بیابید.

ترانهاده ماتریس: اگر جای سطر های یک ماتریس با جای ستون های آن عوض شود. ترانهاده ماتریس بوجود می آید.اگر $\mathbf{A}$ ماتریس دلخواه باشد.ترانهاده آن را با $\mathbf{A'}$ یا $\mathbf{A^t}$ نشان میدهیم.

مثال: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\\ ۷ & ۸ & ۹\end{bmatrix}\rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{t}}=\begin{bmatrix}۱ & ۴ & ۷\\ ۲ & ۵ & ۸\\ ۳ & ۶ & ۹\end{bmatrix}$

خواص ماتریس های ترا نهاده:

اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو ماتریس مربعی از مرتبه $\mathbf{n}$ باشد آنگاه:

الف) $\mathbf{(A+B)^t=A^t+B^t}$ ب) $\mathbf{(rA)^t=r\,A^t}$

ج) $\mathbf{(A^t)^t=A}$ د) $\mathbf{(A\times B)^t=B^t\times A^t}$

تعریف: اگر $\mathbf{A^t=A}$ که (($\mathbf{A}$ یک ماتریس مربعی $\mathbf{n\times n}$ است)آنگاه $\mathbf{A}$ را ***متقارن*** میگویند.

و اگر $\mathbf{A^t=-A}$ آنگاه $\mathbf{A}$ را **پاد متقارن** می نامیم.

مثال: $A=\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ ۴ & -۷\end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن است.و ماتریس $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}۰ & -۴\\ ۴ & ۰\end{bmatrix}$ پاد متقارن است.

(از $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ در موردنوع درایه های ماتریس های متقارن و پاد متقارن چه نتیجه ای می گیرید؟)

نکته: هر ماتریس مربعی را میتوان به صورت مجموع یک ماتریس متقارن با یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

$$A=\frac{۱}{۲}(A+A^t)+\frac{۱}{۲}(A-A^t)$$

ماتریس $\frac{۱}{۲}(A+A^t)$ متقارن است. و ماتریس $\frac{۱}{۲}(A-A^t)$ پاد متقارن است.زیرا:

$$\left(\frac{۱}{۲}(A+A^t)\right)^t=\frac{۱}{۲}(A^t+A^{tt})=\frac{۱}{۲}(A^t+A)$$

$$(\frac{۱}{۲}(A-A^t))^t=\frac{۱}{۲}(A^t-A^{tt})=\frac{۱}{۲}(A^t-A)=-\frac{۱}{۲}(A-A^t)$$

مساله :ماتریس $A=\begin{bmatrix}۰ & ۳ & ۳\\ -۱ & ۳ & ۰\\ -۳ & ۲ & ۲\end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن ویک ماتریس پاد متقارن بنویسید.

مساله : برای زاویه ثابت داده شده ی θ و عدد طبیعی $\mathbf{n}$ ثابت کنید: $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$

و سپس با استفاده از این مطلب حاصل $\begin{bmatrix}\sqrt{۳} & -۱\\ ۱ & \sqrt{۳}\end{bmatrix}^{۶۰۰}$ را محاسبه کنید.

تبدیلات: ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید این ماتریس می تواند هر نقطه $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ را به نقطه ای مانند $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ منتقل کندمثلا نقطه $\begin{pmatrix}۱\\ ۳\end{pmatrix}$ را به نقطه $\begin{pmatrix}۱\\ ۶\end{pmatrix}$ منتقل می کند زیرا: $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۶\end{bmatrix}$.

حال می خواهیم ببینیم که دایره $x^۲+y^۲=۱$ تحت این تبدیل چه شکلی می شود؟

$$\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=x' \\ ۲y=y'\rightarrow y=\frac{۱}{۲}y' \end{cases}$$

پس با جایگزینی این روابط در معادله دایره داریم:

$$x^۲+y^۲=۱ \;\rightarrow\; (x')^۲+(\frac{y'}{۲})^۲=۱ \;\rightarrow\; x'^۲+\frac{y'^۲}{۴}=۱$$

معادله بیضی در انتقال فوق به بیضی تبدیل میشود.

دترمینان ماتریس های ۲×۲: $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\Rightarrow \det A = ad-bc$

مثال) یک ماتریس **۲×۲** دلخواه بنویسید و دترمینان آن را محاسبه کنید

ij- امین کهاد ماتریس A **:** ماتریسی است که از حذف سطر **i**-ام و ستون **j**- ام ماتریس **A** بدست می آید. و با نماد M_{ij} نمایش می دهیم.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۵ & ۴\\ ۶ & ۳ & ۱\\ ۷ & ۸ & ۹\end{bmatrix}$ آنگاه $M_{۳۳}$, ... , $M_{۱۲}$, $M_{۱۱}$ را بدست آورید.

ij- امین همسازه: ij- امین همسازه ماتریس A را با نماد A_{ij} نمایش می دهیم یک عدد حقیقی است که به صورت زیر تعریف میشود:

$$A_{ij}=(-۱)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

مثال : در مثال قبل تمام همسازه های ماتریس **A** رابیابید.

دتر مینان ماتریس های ۳×۳:

اگر $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ماتریس دلخواه ۳×۳ باشد . دترمینان ماتریس به یکی از ۶ روش زیر قابل تعریف است:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$
$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$
$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$
$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

مساله: اگر $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۴ \\ ۶ & ۳ & ۱ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$ باشد دترمینان $\mathbf{A}$ را محاسبه کنید.

نکته: دترمینان ماتریس های قطری و بالا مثلثی و پایین مثلثی برابر است باحاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی.

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix} = adf$$

قضیه: در مورد ماتریس های $n\times n$ داریم: $\det(AB) = \det A \times \det B$

نتیجه : $|A^n| = |A|^n$ یا به بیان ساده تر : $\det(A^n) = (\det A)^n$

ویژگی های دتر مینان های ۳×۳:

۱) اگر درایه های یک سطر یا یک ستون را در عددی مانند λ ضرب کنیم. دترمینان λ برابر می شود.

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = \lambda \times \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

مثال : اگر $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = ۱۰$ باشد حاصل دترمینان $\begin{bmatrix} ۶a & ۲b & ۲c \\ ۳d & e & f \\ ۳g & h & k \end{bmatrix}$ را بیابید.

۲) اگر تمام درایه های ماتریس $\mathbf{A}$ در عدد λ ضرب شود. داریم: $\det\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \\ \lambda g & \lambda h & \lambda k \end{bmatrix} = \lambda^{۳} \times \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$

مثال: اگر $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = ۱۰$ باشد حاصل دترمینان $\begin{bmatrix} ۲a & ۲b & ۲c \\ ۲d & ۲e & ۲f \\ ۲g & ۲h & ۲k \end{bmatrix}$ را بیابید.

۳) اگر درایه های یک سطر یا یک ستون صفر باشد. دترمینان صفر خواهد شد..

$$\det\begin{bmatrix} ۵ & ۶ & ۷ \\ ۸ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} ۱ & ۵ & ۰ \\ ۲ & ٤ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = ۰$$

۴) اگر دو سطر یا دو ستون ماتریسی با هم برابر باشدآنگاه دترمینان صفر است.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{bmatrix} = ۰$$

۵)اگر یک سطر ((یا یک ستون)) مضربی از سطر((یا ستون)) دیگر باشد . دترمینان آن صفر می شود.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ٦a & ٦b & ٦c \end{bmatrix} = ۰$$

۶) اگر جای دو سطر ((دو ستون)) ماتریس با هم عوض شود. دترمینان در یک منفی ضرب می شود.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

۷) تفکیک پذیری:

$$\det\begin{bmatrix} a & b+c & d \\ e & f+g & m \\ n & p+q & r \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & b & d \\ e & f & m \\ n & p & r \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a & c & d \\ e & g & m \\ n & q & r \end{bmatrix}$$

۸) اگرمضربی از یک سطر ((ستون)) به سطر ((ستون)) دیگر اضافه شود دترمینان تغییری نمی کند.

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d+۳a & e+۳b & f+۳c \\ g & h & k \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix}$$

۹) دترمینان ترانهاده ماتریس با خود ماتریس برابر است. $\det(A) = \det(A^t)$

روش ساروس برای دترمینان ماتریس های ۳×۳:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{matrix} = (aek + bfg + cdh) - (ceg + bdk + afh)$$

مثال: دتر مینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ \\ -۲ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ به روش ساروس محاسبه کنید.

مساله: با استفاده از ویژگیهای دترمینان، دترمینان $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}+۳ & -۱ & ۱ \\ ۵ & \mathbf{t}-۳ & ۱ \\ ۶ & -۶ & \mathbf{t}+۴ \end{bmatrix}$ را محاسبه کنید

مساله : با استفاده از ویژگیهای دترمینان نشان دهید: $\begin{vmatrix} ۱+x & y & z \\ x & ۱+y & z \\ x & y & ۱+z \end{vmatrix} = ۱+x+y+z$

مساله: با استفاده از ویژگیهای دترمینان نشان دهید: $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \\ x^۲ & y^۲ & z^۲ \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$

مساله : با استفاده از ویژگیهای دترمینان نشان دهید: $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \\ ۲x^۲-۱ & ۲y^۲-۱ & ۲z^۲-۱ \end{vmatrix} = ۲(y-x)(z-x)(z-y)$

مساله: با استفاده از ویژگیهای دترمینان نشان دهید: $\begin{vmatrix} x+y+۲z & x & y \\ z & ۲x+y+z & y \\ z & x & x+۲y+z \end{vmatrix} = ۲(x+y+z)^۳$

مساله: با استفاده از ویژگیهای دترمینان نشان دهید: $\begin{vmatrix} x & ٤ & ۸+۳x \\ ۲y & ۷ & ۱٤+٦y \\ ۳z & ۹ & ۱۸+۹z \end{vmatrix} = ۰$

مساله : با استفاده از ویژگیهای دتر مینان نشان دهید: $\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \\ x^۳ & y^۳ & z^۳ \end{vmatrix} = (y-x)(z-y)(z-x)(z+x+y)$

مساله : با استفاده از ویژگیهای دتر مینان نشان دهید: $\begin{vmatrix} ۱ & ۱+x & x^۲(y+z) \\ ۱ & ۱+y & y^۲(x+z) \\ ۱ & ۱+z & z^۲(x+y) \end{vmatrix} = ۰$

مساله: با استفاده از ویژگیهای دتر مینان نشان دهید: $\begin{vmatrix} x & ۱ & ۱ \\ ۱ & x & ۱ \\ ۱ & ۱ & x \end{vmatrix} = (x+۲)(x-۱)^۲$

مساله : با استفاده از ویژگیهای دترمینان نشان دهید: $\begin{vmatrix} yz & x^۲ & x^۲ \\ y^۲ & xz & y^۲ \\ z^۲ & z^۲ & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$

مساله : با استفاده از ویژگیهای دتر مینان نشان دهید: $\begin{vmatrix} ۱ & ۲x & yz \\ ۱ & y & ۲xz \\ ۱ & z & ۲xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲x & ٤x^۲ \\ ۱ & y & y^۲ \\ ۱ & z & z^۲ \end{vmatrix}$

مساله : فرض کنید λ , μ دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی های دترمینان ، دترمینان ماتریس $A=[\lambda i+\mu j]_{۳\times۳}$ را محاسبه کنید.

مساله : اگر **A,B** دو ماتریس ۳×۳ باشند.و **A** متقارن باشد.ثابت کنید: $|A+B|=|A+B^T|$

مساله : اگر **A** یک ماتریس *پاد متقارن* ۳×۳باشد. ثابت کنید $|A|=۰$

مساله: اگر به درایه ی $a_{۳۳}$ ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ چهار واحد اضافه شود و دترمینان فرقی نکند.آنگاه a چقدر است.

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

مساله: اگر **A** و **B** دو ماتریس باشند.و $(A+B)(A-B)=A^۲-B^۲$. بین **A** و **B** چه رابطه ای برقرار است؟

۱) $A+B=۰$ ۲) $AB=BA$ ۳) $AB=-BA$ ۴) $A^۲=B$

مساله: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ حاصل $A^{۵۹}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۶۰ & -۵۹ \\ ۵۹ & -۵۸ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۶۰ & -۵۹ \\ ۵۹ & ۵۸ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۶۰ & ۵۹ \\ -۵۹ & ۵۸ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۶۰ & ۵۹ \\ -۵۹ & -۵۸ \end{bmatrix}$

مساله :اگر $A^{۱۰}=A$ حاصل $(BAB^{-۱})^{۲۰}$ کدام است؟

۱) $A^۲$ ۲) $B^۲$ ۳) $BA^۲$ ۴) $B^۲A$

مساله : اگر **A** یک ماتریس متقارن باشد.و $A^{-۱}=B^۲$ حاصل $((AB).(BA))^T$ کدام است؟

۱) **A** ۲) $B^۲$ ۳) صفر ۴) $A^{-۱}B$

مساله : اگر **A**ماتریس مربعی و $A^۲=۰$ باشد.حاصل $(I+A)^۴$ کدام است؟

۱) $A+۴I$ ۲) $A-۴I$ ۳) $۴A-I$ ۴) $I+۴A$

مساله : اگر $A^۲ = A$ باشد. حاصل $(A-I)^۵$ کدام است؟

۱) $I-A$ ۲) $I+A$ ۳) $۲A-I$ ۴) $A-I$

مساله: اگر $A \neq ۰$ ماتریس مربعی باشد.و $A^T = \lambda A$ باشد λ کدام است

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ± ۱

مساله : ماتریس $\mathbf{A}$ متقارن و $A^T = A^{-۱}$ حاصل $((۳A^۲)^{-۱})^T$ کدام است؟

۱) $۳I$ ۲) $\frac{I}{۳}$ ۳) A ۴) $\frac{۱}{۳}A$

فصـــل پنجـــم

حـل دستـگاه معـادلات خطـی

ماتریس وارون پذیر: اگر $\mathbf{A}$ ماتریس مربعی باشد و $\mathbf{B}$ نیز ماتریس مربعی باشد بطوریکه: $\mathbf{AB = BA = I}$. گوییم $\mathbf{A}$ وارونپـذیر اسـت و $\mathbf{B}$نیز وارون $\mathbf{A}$ است. وارون $\mathbf{A}$ را با نماد $\mathbf{A^{-۱}}$ نشان می دهیم.

قضیه : وارون ماتریس A منحصر بفرد است.

اثبات: فرض کنیم $\mathbf{A}$ دارای دو وارون $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ باشد بقسمیکه:

$$\mathbf{AB = BA = I} \quad , \quad \mathbf{AC = CA = I}$$

اکنون ثابت می کنیم $\mathbf{B=C}$:

$$\mathbf{B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C}$$

قضیه: اگر A وارون پذیر باشد. آنگاه: $\mathbf{det(A) \neq ۰}$.

اثبات: $\mathbf{A}$ وارون پذیر است پس: $\mathbf{AA^{-۱} = A^{-۱}A = I}$ در نتیجه داریم:

$$\mathbf{det(AA^{-۱}) = det(I)} \Rightarrow \mathbf{det(A) \times det(A^{-۱}) = ۱}$$
$$\Rightarrow \mathbf{det(A) \neq ۰}$$

و از اینجا میتوان نتیجه گرفت: $\left|\mathbf{A}^{-۱}\right| = \frac{۱}{|\mathbf{A}|} = |\mathbf{A}|^{-۱}$

وارون ماتریس های ۲×۲:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A^{-۱}} = \frac{۱}{\mathbf{det(A)}} \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{-b} \\ \mathbf{-c} & \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

(دقت کنید اگر دتر میان ماتریسی برابر صفر باشد. آن ماتریس وارون پذیر نیست)

مثال: وارون ماتریس $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۳ & ٤ \\ ۲ & ٦ \end{bmatrix}$ را بیابید.

ماتریس الحاقی (adjoint): اگر $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس الحاقی را با $\mathbf{A^*}$ نمایش می دهیم وبرابر است با:

$$\mathbf{adj(A)=A^*}=\begin{bmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{31}} \\ \mathbf{A_{12}} & \mathbf{A_{22}} & \mathbf{A_{32}} \\ \mathbf{A_{13}} & \mathbf{A_{23}} & \mathbf{A_{33}} \end{bmatrix}$$

در حقیقت ترانهاده ی ماتریس همسازه ها را ماتریس الحاقی میگوییم.

مثال: اگر $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ٤ \\ ۸ & ۷ & -۲ \end{bmatrix}$ آنگاه را $\mathbf{A^*}$ محاسبه کنید.

معکوس ماتریس های ۳×۳: $\mathbf{A^{-۱}}=\frac{۱}{|\mathbf{A}|}\times \mathbf{A^*}$ (برای همه ماتریس های $\mathbf{n\times n}$ این رابطه درست است)

مثال: معکوس ماتریس قبل را در صورت وجود بدست آورید.

مساله: اگر $\mathbf{A}$ یک ماتریس ۳×۳ و $|\mathbf{A}|=٦$ باشد آنگاه دترمینان $\mathbf{A^*}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳۶ ۳) ۲۱۶ ۴) $\frac{۱}{۳٦}$

مساله: اگر $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ آنگاه $\mathbf{(A^{-۱})^*}$ کدام است؟

۱) $\mathbf{۹A}$ ۲) $\frac{-۱}{۹}\mathbf{A}$ ۳) $\frac{۱}{۹}\mathbf{A}$ ۴) $\mathbf{-۹A}$

مساله : اگر $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ ۶ & ۴ & \mathbf{d} \end{bmatrix}$ و $\mathbf{A^*}=\begin{bmatrix} ۲ & \mathbf{m} & \mathbf{n} \\ ۳ & \mathbf{p} & ۵ \\ -۱ & ۰ & \mathbf{q} \end{bmatrix}$ آنگاه $|\mathbf{A}|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) ۳

مساله: اگر A و B وارون پذیر باشد ثابت کنید:

الف) AB **وارون پذیر است و** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ب) A^T **وارون پذیر است و** $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

ج) λA **وارون پذیر است و** $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

د) $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$

اثبات: الف) وارون پذیراست $\Rightarrow |AB| = |A||B| \neq 0$

$$(AB)(AB)^{-1} = I \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1} \times (AB(AB)^{-1}) = A^{-1} \times I$$
$$\Rightarrow (A^{-1}A)(B(AB)^{-1}) = A^{-1}$$
$$\Rightarrow I \times (B(AB)^{-1}) = A^{-1}$$
$$\xrightarrow{\times B^{-1}} B^{-1}(B(AB)^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$$
$$\Rightarrow (B^{-1}B)(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \Rightarrow \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ب) پس A وارون پذیر است $\longrightarrow \left|A^T\right| = |A| \neq 0$

$$(A^{-1}A) = I \Rightarrow (A^{-1}A)^T = I^T$$
$$\Rightarrow A^T(A^{-1})^T = I \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

ج) λA وارون پذیر است $\longrightarrow |\lambda A| = \lambda^n \times |A| \neq 0$

$$(\lambda A)(\lambda A)^{-1} = I \longrightarrow A(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}I$$
$$\xrightarrow{\times A^{-1}} (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1} \times I = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$$

د)

$$AA^{-1} = I \longrightarrow \left|AA^{-1}\right| = |I| = 1$$
$$\longrightarrow |A|\left|A^{-1}\right| = 1$$
$$\longrightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

مثال: اگر A ماتریس مربعی باشدکه $A^n = 0$ ثابت کنید. $(I - A)$ وارون پذیر است.وارون $I - A$ را بیابید.

حل:

$$(I^n - A^n) = (I - A)(I + A + A^2 + ... + A^{n-1})$$
$$\xrightarrow{A^n = 0} (I - 0) = (I - A)(I + A + A^2 + ... + A^{n-1})$$
$$\xrightarrow{\det} 1 = \det(I - A) \times \det(I + A + A^2 + ... + A^{n-1})$$
$$\longrightarrow \det(I - A) \neq 0$$

پس $(I - A)$ وارون پذیر است و وارون آن پرانتز دوم است.

$$(I - A)^{-1} = (I + A + A^2 + ... + A^{n-1})$$

مثال: اگر A و B ماتریس های مربعی هم مرتبه باشند.بقسمیکه $A+B=AB$ ثابت کنید با فرض وارون پذیری A ، B نیز وارون پذیر است و داریم: $A^{-1}+B^{-1}=I$

$$A+B=AB \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}A+A^{-1}B=A^{-1}AB$$
$$\longrightarrow I+A^{-1}B=B \Rightarrow I=B-A^{-1}B$$
$$\longrightarrow \det(I)=\det(B)\times\det(I-A^{-1}) \Rightarrow \det(B)\neq 0$$

پس B وارون پذیر است.

از طرفی:
$$(A+B)=AB \rightarrow A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}ABB^{-1}$$
$$\rightarrow B^{-1}+A^{-1}=I$$

مساله: اگر A و B ماتریس های مربعی هم مرتبه و وارون پذیر باشند.بقسمیکه $A+B=AB$.آنگاه دتر مینان $B^{-1}+A^{-1}$ را بیابید.

مساله: اگر A ماتریس مربعی باشدکه $A^2=A$، اگر $\lambda\neq 1$ یک عدد حقیقی باشد.ثابت کنید: $(I-\lambda A)$ وارون پذیر است و $(I-\lambda A)^{-1}=I+\frac{\lambda}{1-\lambda}A$.

مساله: اگر A ماتریس مربعی باشدکه $A^2=A$، وارون ماتریس $(I-4A)$ کدام است؟

۱) $I-\frac{2}{3}A$ ۲) $I+\frac{4}{3}A$ ۳) $I+\frac{2}{3}A$ ۴) $I-\frac{4}{3}A$

انواع دستگاه های معادلات:

۲) دستگاه معادلات غیر همگن :صورت کلی این معادلات به شکل $AX=B$ که $B\neq 0$است اگر $\det(A)$ مخالف صفر باشد. دستگاه یک جواب منحصر بفرد دارد.
و اگر $\det(A)=0$ باشد . دستگاه یا دارای بیشمار جواب است یا دارای جواب نیست.

۲) دستگاه معادلات همگن : صورت کلی این دستگاه به شکل $AX=0$ است. این دستگاه همیشه دارای یک جواب بدیهی صفر می باشد.اگر $\det(A)\neq 0$ دستگاه فقط جواب صفر دارد.
و اگر $\det(A)=0$ آنگاه دستگاه همگن بجز جواب صفر، جواب های غیر صفر هم دارد(دارای بیشمار جواب است)

مساله: دستگاه زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید

$$\begin{cases} ۲x + ۳y - ٤z = ۱ \\ -٤y + ۲z = -۲ \\ x - y + ۵z = ۵ \end{cases}$$

مساله: دستگاه همگن زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید

$$\begin{cases} ۲x + y + z = ۰ \\ -٤x - ۲y - ۲z = ۰ \\ ۳x - y + z = ۰ \end{cases}$$

حل: ماتریس ضرایب بصورت $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ -٤ & -۲ & -۲ \\ ۳ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ می باشدکه چون $\det A = ۰$ است پس روش ماتریس معکوس کارایی ندارد.

در این دستگاه معادله ۱ و۲ فقط در یک ضریب فرق دارند.یعنی در نهایت دستگاه به شکل $\begin{cases} ۲x + y + z = ۰ \\ ۳x - y + z = ۰ \end{cases}$ است. ایـن دو صـفحه از مبـدا می گذرندپس در یک خط مشترک هستند. **یعنی بی نهایت جواب دارد.**

مساله: دستگاه زیر را به روش **کرامر** حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x + ۳y - ۴z = ۱ \\ -۴y + ۲z = -۲ \\ x - y + ۵z = ۵ \end{cases}$$

مساله : پس از حل یک دستگاه سه معادله سه مجهول خطی با مجهولات x و y و z به کمک دستور کرامر مقدار x به صورت $x=\dfrac{\begin{vmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۲ & ۱ & ۱\\ ۳ & ۲ & ۳\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}۲ & ۰ & -۱\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & ۳\end{vmatrix}}$ بدست آمده است. مقدار y کدام است؟ ۱)-۲ ۲) ۱ ۳)۳ ۴)۵

روش حذفی گاوس و (گاوس- جردن):

از قاعده های زیر برای حل دستگاه استفاده می کنیم:

۱) اگر طرفین یک معادله را در یک عدد مخالف صفر ضرب کنیم. جواب تغییری نمیکند

۲) اگر جای دو معادله را عوض کنیم. جواب فرقی نمیکند

۳) اگر مضربی از یک معادله را به معادله دیگر اضافه کنیم. جواب فرقی نمی کند.

مساله: معادله زیر را به روش گاوس (و گاوس جردن)حل کنید.

$$\begin{cases}۲x+۴y+۶z=۱۸\\ ۴x+۵y+۶z=۲۴\\ ۳x+y-۲z=۴\end{cases}$$

حل: ماتریس ضرایب با یک ستون اضافه را تشکیل می دهیم(به این ماتریس ، ماتریس افزوده میگوییم)

$$\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۶ & ۱۸\\ ۴ & ۵ & ۶ & ۲۴\\ ۳ & ۱ & -۲ & ۴\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{۳}{۲}R۱+R۳]{-۲R۱+R۲}\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۶ & ۱۸\\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲\\ ۰ & -۵ & -۱۱ & -۲۳\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{-۵}{۳}R۲+R۳}\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۶ & ۱۸\\ ۰ & -۳ & -۶ & -۱۲\\ ۰ & ۰ & -۱ & -۳\end{bmatrix}$$

حال دو باره این ماتریس را به صورت معادله در می آوریم.

$$\begin{cases}-z=-۳ \longrightarrow z=۳\\ -۳y-۶z=-۱۲ \longrightarrow y=-۲\\ ۲x+۴y+۶z=۱۸ \longrightarrow x=۴\end{cases}$$

مساله: دستگاه های زیر را به روش خواسته شده حل کنید.

۱) روش گاوس $\begin{cases}۲x+y-z=۵\\ x+۲y+۳z=۲\\ x+y+۲z=۱\end{cases}$

۲) روش گاوس-جردن $\begin{cases}x+y+z=۶\\ ۲x-۳y+z=-۱\\ z+۲y-۳z=-۴\end{cases}$

۳) روش وارون ماتریس $\begin{cases}x+y=۳\\ x+y+z=۲\\ ۲y+z=۳\end{cases}$

۴) روش کرامر $\begin{cases}x+۲y-z=۴\\ ۲x-y-z=-۱\\ x+y-۲z=۱\end{cases}$

۵) روش گاوس $\begin{cases}z+y=۰\\ x+z=۲\\ x+y=۰\end{cases}$

۶) روش گاوس $\begin{cases}x+y-z=۷\\ ۴x-y+۵z=۴\\ ۶x+y+z=۱۸\end{cases}$

ماتریس و دستگاه معادلات خطی

۱) اگر A یک ماتریس مربع باشد ، کدامیک از ماتریس های زیر متقارن است؟

۱) AA^t ۲) $A-A^t$ ۳) $A+A^t$ ۴) گزینه ۱و۳

۲) اگر A و B دو ماتریس متقارن هم مرتبه باشند ، آنگاه کدامیک از ماتریس های زیر الزاما متقارن هستند؟

۱) AB ۲) $AB-BA$ ۳) $2A-3B$ ۴) هر سه

۳) اگر $A=\begin{bmatrix} m-n & m+4 \\ n+2 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس پادمتقارن باشد، آنگاه:

۱) $m=n=3$ ۲) $m=n=-3$ ۳) $m=-n=3$ ۴) $m=-n=-3$

۴) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن بنویسیم ، آنگاه مجموع درایه های روی قطر اصلی ماتریس متقارن چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۵)اگر $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ باشد آنگاه A^{1377} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

۶) اگر $\begin{vmatrix} x & 1 & y \\ y & 1 & z \\ z & 1 & x \end{vmatrix}=k$ باشد ، آنگاه $\begin{vmatrix} x-y & 1 & x \\ y-z & 1 & y \\ z-x & 1 & z \end{vmatrix}$ برابر است با:

۱) k^2 ۲) k ۳) $-k$ ۴) $2k$

۷) اگر $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 3a_2+2a_1 & 3b_2+2b_1 & 3c_2+2c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{bmatrix}$ باشد ، آنگاه $\frac{|A|}{|B|}$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۸)حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $x^2+y^2+z^2$ ۲) xyz ۳) $(y-x)(z-x)(z-y)$ ۴) صفر

۹) اگر $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{۲}}{۲} & \frac{-\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{-\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}$ باشد آنگاه $\mathbf{A}^{۱۵}$ برابر است با:

۱) $\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{۲}}{۲} & \frac{-\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{-\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{-\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}\frac{-\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲}\\ \frac{-\sqrt{۲}}{۲} & \frac{-\sqrt{۲}}{۲}\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

۱۰) اگر $\mathbf{A}^{۲}+۳\mathbf{A}=۰$ و $\mathbf{A}$ ماتریس ۳×۳ وارونپذیر باشد.حاصل $|\mathbf{A}+\mathbf{I}|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۸

۱۱) اگر $\mathbf{AB}^{\mathbf{t}}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۱ & ۵\end{bmatrix}$ و $۳\mathbf{B}^{-۱}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۵ & ۵\end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان $\mathbf{A}$ کدام است؟

۱) ±۵ ۲) ±۲ ۳) ±۳ ۴) ±۱

۱۴) اگر $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ و $\mathbf{A}^{۱۳۸۱}=\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{bmatrix}$.آنگاه حاصل $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}$ کدام است؟

۱) ۱۳۸۱ ۲) ۱۳۸۲ ۳) ۱۳۸۴ ۴) ۱۳۸۳

۱۵) اگر $|\mathbf{A}^{\mathbf{t}}-۳\mathbf{I}|=۲$ آنگاه $|۳\mathbf{I}-\mathbf{A}|$ کدام است؟($\mathbf{A}$ ماتریس ۳×۳ است)

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) ۴

۱۶) اگر $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۳ & ۵\\ -۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۵\\ ۰ & ۱ & ۶\\ ۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$ آنگاه $|\mathbf{A}^{۲}.\mathbf{B}^{۳}|$ کدام است؟

۱) -۶۴ ۲) -۷۲ ۳) ۹۶ ۴) -۵۴

۱۷) اگر $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\\ \mathbf{c} & \mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{a}\end{bmatrix}$ یک ماتریس پادمتقارن باشد. آنگاه $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۸) اگر $\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۵\end{bmatrix}$ و $\mathbf{A}^{۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ \sqrt{۲} & \sqrt{۲}\end{bmatrix}$ آنگاه $|\mathbf{B}|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

۱۹) اگر $\mathbf{A}$ یک ماتریس ۳×۳ باشد و $\mathbf{A}.\mathbf{A}^{\mathbf{t}}=\begin{bmatrix}۱ & \mathbf{x} & ۰\\ ۰ & ۹ & \mathbf{z}\\ \mathbf{y} & ۶ & ۶\end{bmatrix}$ باشد.آنگاه دترمینان $\mathbf{A}$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۲۰) مجموع دو دترمینان $\begin{vmatrix}۰ & \mathbf{x} & ۰\\ \mathbf{y} & ۰ & \mathbf{z}\\ ۰ & \mathbf{t} & ۰\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{x} & ۰ & \mathbf{x}\\ ۰ & \mathbf{y} & ۰\\ \mathbf{z} & ۰ & \mathbf{t}\end{vmatrix}$ برابر است با:

۱) $\mathbf{xy(z-t)}$ ۲) $\mathbf{xy(t-z)}$ ۳) ۰ ۴) $\mathbf{۲xyzt}$

۲۱) اگر A و B دو ماتریس و A^t ، B^t ترانهاده آنها باشد. ماتریس $AB^t + BA^t$:

۱)قطری است ۲) پادمتقارن است ۳)متقارن است ۴) بالا مثلثی است

۲۲) اگر $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2$ ، حاصل $\begin{vmatrix} a_1 & -3b_1 & c_1 \\ -2a_2 & 6b_2 & -2c_2 \\ a_3 & -3b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) -12 ۲) -6 ۳) 6 ۴) 12

۲۳)اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ دترمینال ماتریس $AA^t + A^tA$ کدام است؟

۱) ۹۰۰ ۲) ۱۶۰۰ ۳) ۲۵۰۰ ۴) ۳۶۰۰

۲۴) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & m+2 & 2 \\ 3m+2 & m^2-1 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ پادمتقارن باشد، مجموع درایه های ستون دوم چقدر است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -5

۲۵) به ازای کدام مقدار m ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 3m & 2 & -1 \end{bmatrix}$ وارون پذیر است؟

۱) $m = \pm 1$ ۲) $m = \pm 2$ ۳) $m \neq \pm 2$ ۴) $m \neq \pm 1$

۲۶) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس الحاقی A^* کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -9 & 4 & 2 \\ -6 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -9 & -6 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -9 & 4 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -9 & -6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

۲۷) اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_2 + mx_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ دارای جواب غیر صفر باشد ، آنگاه m برابر است با :

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ± 1 ۴) صفر

۲۸) دستگاه معادلات $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 3 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار m دارای جواب منحصر بفرد است؟

۱) $m \neq -1$ ۲) $m \neq 1$ ۳) $m \neq \pm 1$ ۴) $m \in \Re$

۲۹) در دستگاه mمعادله nمجهولی $AX = B$ اگر تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر باشد آنگاه :

۱) بردار $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ وجود دارد که به ازای آن دستگاه جواب ندارد

۲) بردار $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$ وجود دارد که به ازای آن دستگاه جواب ندارد

۳) به ازای هربردار $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ دستگاه دارای جواب است

۴) به ازای هر بردار $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$ دستگاه دارای جواب است

۳۰) در دستگاه m معادله n مجهولی $AX = B$ اگر تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر باشد آنگاه:

۱) دستگاه همواره بیشمار جواب دارد ۲) دستگاه همواره جواب منحصر بفرد دارد

۳) دستگاه هیچگاه جواب ندارد ۴) دستگاه هیچگاه جواب منحصربفرد ندارد

۳۱) اگر $2A^3+3A^2-A=I$ باشد آنگاه A^{-1} برابر است با:

۱) $2A^3+3A^2$ ۲) $2A^3+3A$ ۳) $2A^2+3A-I$ ۴) $2A^3+3A^2-I$

۳۲) اگر A ماتریس $n\times n$ و $A^2=A$ و $\lambda\neq 1$ باشد انگاه $(I-\lambda A)^{-1}$ کدام است؟

۱) $I+\lambda A$ ۲) $I+\frac{1-\lambda}{\lambda}A$ ۳) $I+\frac{\lambda}{1+\lambda}A$ ۴) $I+\frac{\lambda}{1-\lambda}A$

۳۳) اگر A و B دو ماتریس مربعی و A وارونپذیر باشد.حاصل $(A^{-1}BA)^2$ کدام است؟

۱) $A^2B^2A^{-2}$ ۲) $A^{-2}B^2A^2$ ۳) $A^{-1}B^2A$ ۴) AB^2A^{-1}

۳۴) اگر A یک ماتریس 3×3 و A^* ماتریس الحاقی A و $(A^*)^3=3I$ باشد.آنگاه $|A|$ کدام است؟

۱) ± 3 ۲) $\pm\sqrt{3}$ ۳) ± 9 ۴) $\pm 3\sqrt{3}$

۳۵) اگر A یک ماتریس 3×3 بطوریکه $|A|=5$ و A^* ماتریس الحاقی A باشد. آنگاه $|(A^*)^*|$ کدام است؟

۱) 5^9 ۲) 5^3 ۳) 5^{10} ۴) 5^4

۳۶) گر A و B ماتریس های وارون پذیر باشند ، کدام گزینه در مورد آنها نادرست است ؟

۱) $A^tB^t=(BA)^t$ ۲) $|A^t|^{-1}=|A^{-1}|$ ۳) $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$ ۴) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^1$

۳۷) در مورد دستگاه $\begin{cases} ax+y+bz=c \\ x+ay-z=d \end{cases}$ کدام حکم درست است؟

۱) همواره بیشمار جواب دارد ۲) همواره جواب ندارد

۳) همواره جواب منحصر بفرد دارد ۴)برای a,b,c,d مقادیری وجود داردکه دستگاه جواب ندارد

۳۸) در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by=2 \\ cx+dy=-1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات ، به صورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است. $x+y$ کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

۳۹) اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ و ترانهاده ماتریس همسازه های A را A^* به نامیم ، حاصل $|A^*|$ کدام است؟

۱) -9 ۲) -4 ۳) 4 ۴) 9

۴۰) ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ با اعمال سطری مقدماتی (روش حذفی گوس) به ماتریس $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ a & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ تبدیل شده است. a کدامست؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

۴۱) اگر A یک ماتریس مربعی متقارن 3×3 و $A^{-1}=A^t$ باشد ، مقدار $|AA^t+A^2|$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 4 ۴) 8

۴۲) اگر A یک ماتریس از مرتبه ی 3×3 و $|A^*|=81$ باشد ، مقدار $|AA^*|$ برابر کدام می تواند باشد ؟

۱) 27 ۲) 81 ۳) 243 ۴) 729

۴۳) اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد ، حاصل $|A+A^*|$ کدام است ؟

۱) 22 ۲) 121 ۳) 64 ۴) 36

۴۴) اگر ماتریس A وارون پذیر و $2A^{-1} = A$ باشد، وارون $I - A$ کدام است؟

۱) $A + I$ ۲) $A - I$ ۳) $-A - I$ ۴) $I - A$

سوالا ت آزمون های سراسری :

۱)اگر $AB = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & -۱ \\ ۱ & -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۳ \\ ۲ & -۲ & x \end{bmatrix}$ به ازای کدام مقدار x درایه واقع در محل تلاقی سطر دوم و ستون سوم ماتریس $B'.(C'.A)'$ برابر ۴ است؟(۷۷)

۱) ۱- ۲(۲ ۳(۳ ۴(۴

۲) اگر A یک ماتریس مربع مرتبه سوم و $|A| = ۱۲$ ، آنگاه دترمینان ماتریس همسازه A کدام است؟(۷۷)

۱)۲۴ ۲)۳۶ ۳)۱۴۴ ۴)۴۳۲

۳) اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ ، ماتریس X از معادله $AX = ۲A'$ کدام است؟(۷۷)

۱) $\begin{bmatrix} ۶ & ۵ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۵ \\ -۲ & ۶ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۵ & ۶ \end{bmatrix}$

۴) به ازای کدام مقدار a ، ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & a \end{bmatrix}$ معکوس پذیر نیست؟(۷۷)

۱)صفر ۲(۲ ۳(۳ ۴(۴

۵) در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & m & ۲ \\ & ۳ & ۵ \\ ۰ & & \end{bmatrix}$ به ازای کدام مقادیر m حاصل دترمینان $|A^t.A|$ برابر صفر است؟(۷۷)

۱) $\Re$ ۲) Φ ۳) $\{۱,۲\}$ ۴) $\{۲,۳\}$

۶) اگر دترمینان $D = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ a & b & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۱ \end{vmatrix}$ ، آنگاه دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۱ \\ a & b & -۱ \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟(۷۷)

۱) $-D - ۲$ ۲) $-D + ۲$ ۳) $D - ۱$ ۴) $D + ۱$

۷) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & ۴ \\ -۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ ، درایه واقع در سطر دوم و ستون اول ماتریس A^{-1} کدام است؟(۷۷)

۱) $\frac{-۱}{۴}$ ۲) $\frac{-۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸) اگر $\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} x + A = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ x & ۱ & ۲ \end{vmatrix}$ مقدار A کدام است؟(۷۸)

۱)۳ ۲)۴ ۳)۵ ۴)۶

۹) با توجه ماتریس دوران در صفحه حاصل $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}^{۴}$ کدام است؟(۷۸)

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

۱۰) ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ با اعمال سطری مقدماتی (روش حذفی گاوس) به ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۲ \\ ۰ & ۴ & \mathbf{a} \\ ۴ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ تبدیل شده است ، $\mathbf{a}$ کدام است؟(۷۸)

۱) -۳ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱) اگر ماتریس $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ آنگاه ماتریس $\mathbf{A}^{۷}$ کدام است؟(۷۹)

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۲) در دترمینان $\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & \mathbf{a} & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix}$ اگر به درایه واقع در سطر سوم و ستون سوم ۴ واحد اضافه شود و مقدار دترمینان تغییر نکند، آنگاه $\mathbf{a}$ برابر کدام است؟(۷۹)

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۳) اگر در دترمینان $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۵ & \mathbf{a} & ۲ \\ ۶ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}$ به درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم، ۲ واحد اضافه شود. به مقدار دترمینان کدام عدد افزوده میشود؟(۸۰)

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۱۴) اگر $\mathbf{A}$ ماتریس $\mathbf{m \times n}$ و مجهول $\mathbf{x}$ ، یک $\mathbf{n}$تایی مرتب و $\mathbf{b}$، به صورت ، $\mathbf{m}$ تایی مرتب باشد. در حالت $\mathbf{m > n}$، دستگاه $\mathbf{Ax = b}$ به ازای: (۸۰)

۱) برخی $\mathbf{b}$ جواب ندارد
۲) هر $\mathbf{b}$ جواب منحصر بفرد دارد
۳) هر $\mathbf{b}$ بیشمار جواب دارد
۴) هر $\mathbf{b}$ فاقد جواب است

۱۵) از تساوی $\begin{vmatrix} \mathbf{ab} & \mathbf{bc} & \mathbf{ca} \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ \mathbf{c(a+b)} & \mathbf{a(b+c)} & \mathbf{b(a+c)} \end{vmatrix} = ۰$ کدام نتیجه گیری درست است؟(۸۱)

۱) $\mathbf{abc = ۰}$ ۲) $\boldsymbol{a, b, c}$ هر عدد دلخواهند ۳) $\mathbf{a + b + c = ۰}$ ۴) $\mathbf{ab + bc + ca = ۰}$

۱۶) اگر $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و ترانهاده ماتریس همسازه های $\mathbf{A}$ را $\mathbf{A^*}$ بنامیم، حاصل $\left|\mathbf{A^*}\right|$ کدام است؟(۸۱)

۱) -۹ ۲) -۴ ۳) ۴ ۴) ۹

۱۷) اگر $a+b+c=-5$ حاصل $A=\begin{bmatrix} a & b & c+2 \\ a & b+2 & c \\ a+2 & b & c \end{bmatrix}$ کدام است؟(۸۲)

۱) ۱۲- ۲) ۴- ۳) ۴ ۴) ۱۲

۱۸)) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} -6 & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & -1 & 0 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد ، a کدام است؟(۸۲)

۱) ۱- و ۲ ۲) ۱و ۲- ۳) ۲و ۳- ۴) ۲- و ۳

۱۹) اگر A و B ماتریس های وارون پذیر باشند ، کدام گزینه در مورد آنها نادرست است ؟ (۸۲)

۱) $A^tB^t=(BA)^t$ ۲) $|A^t|^{-1}=|A^{-1}|$ ۳) $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$ ۴) $(AB)^{-1}=A^{-1}B^1$

۲۰)) سه صفحه با معادله های ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ داده شده اند. فصل مشترک های دوبه دو این سه صفحه چگونه اند (۸۲)

۱) فقط گذرا بر یک نقطه ۲) منطبق بر هم ۳) هر سه موازی هم ۴) فاقد نقطه مشترک

۲۱) اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ماتریس A^7-A^4 کدام است؟(۸۳)

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

۲۲)) اگر $abc\neq 0$ باشد ، از معادله $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}=0$ کدام نتیجه گیری صحیح است؟(۸۳)

۱) $a-b+c=0$ ۲) $a+b-c=0$ ۳) $-a+b+c=0$ ۴) $a+b+c=0$

۲۳)) اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ با دترمینان ماتریس وارون A برابر باشد ، m کدام است؟(۸۴)

۱) ۱ و ۱- ۲) ۰ و ۲ ۳) ۰ و ۲- ۴) ۲ و ۲-

۲۴) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $A^2=\alpha A+\beta I_2$ دوتایی (α,β) کدام است؟(۸۴)

۱) $(2,11)$ ۲) $(2,13)$ ۳) $(4,11)$ ۴) $(4,13)$

۲۵) در روش گاوس _ جردن ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ به صورت $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ درآمده است ، $a+b+c$ کدام است؟(۸۴)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۶) اگر A ماتریس متقارن و B ماتریس پاد متقارن باشند به طوریکه $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ آنگاه ماتریس AB چگونه است؟(۸۵)

۱) قطری ۲) بالا مثلثی ۳) متقارن ۴) پاد متقارن

۲۷) در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a+x & a & a \\ b & b+x & b \\ c & c & c+x \end{bmatrix}$ اگر مجموع تمام درایه ها برابر ۶ و مقدار $|A|=8$ باشد x کدام است(۸۵)

۱) صفر ۲) ± 1 ۳) ± 2 ۴) ± 3

۲۸) ماتریس $A=\begin{bmatrix}۰ & ۳ & ۳\\ -۱ & ۲ & ۰\\ -۳ & ۲ & ۲\end{bmatrix}$ را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشته ایم . دترمینان ماتریس متقارن کدام است؟(۸۶)

۱) -۴ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۴

۲۹- اگر A یک ماتریس پاد متقارن و ماتریس $I-A$ وارون پذیر باشد، آنگاه: $((I+A)^{-۱})^{t}(I-A)$ برابر کدام است؟(۸۶)

۱) A ۲) $A^{-۱}$ ۳) $(I-A)^{-۱}$ ۴) I

۳۰) اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۳\\ ۱ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$، درایه سطر دوم و ستون سوم ماتریس $A^{-۱}$ کدامست؟(۸۶)

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) صفر ۳) $\frac{۵}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۳۱) دترمینان ضرایب دستگاه معادله های $\begin{cases}ax+y+۲z=۱\\ x+by+۳z=۲\\ cx+۲y-z=-۱\end{cases}$ برابر ۴ است. اگر $x=\frac{۱}{۲}$ آنگاه b کدام است؟(۸۶)

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۳۲) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & a & ۰\\ -۲ & ۳ & ۱\end{bmatrix}$ ، به ازای کدام مقدار a ماتریس AA^{t} وارون پذیر است؟(۸۷)

۱) ۲ ۲) ۶- ۳) هر مقدار a ۴) هیچ مقدار a

۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -\sqrt{۳}\\ \sqrt{۳} & ۱\end{bmatrix}$ ماتریس $(\frac{۱}{۲}A)^{۳}$ کدام است؟ (۸۷)

۱) $I_۲$ ۲) $۲I_۲$ ۳) $-۲I_۲$ ۴) $-I_۲$

۳۴) در دستگاه معادلات $\begin{cases}x+ay+z=۵\\ ۲x+by+۲z=۹\\ ۳x+۳y-z=۲\end{cases}$، اگر دترمینان ضرایب برابر ۴ باشد. مقدار y کدام است؟(۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳۵) مساحت چهار ضلعی حاصل از اثر ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ روی مربع با دو راس متقابل $(۱,۱)$, $(-۱,-۱)$ کدام است؟(۸۸)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۳۶) حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}۱+x & x & y+z\\ ۱ & y & z+x\\ ۱ & z & x+y\end{vmatrix}$ با شرط $y=x+z$ کدام است؟(۸۸)

۱) $x(x+z)$ ۲) $۲x(x+z)$ ۳) $x^{۲}(x+z)$ ۴) $۲x^{۲}(x+z)$

۳۷) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -\tan x\\ \tan x & ۱\end{bmatrix}$، سطر اول ماتریس $A^{-۱}.A^{t}$ کدام است؟(۸۸)

۱) $[\sin ۲x \quad \cos ۲x]$ ۲) $[\cos ۲x \quad \sin ۲x]$ ۳) $[\sin ۲x \quad -\cos ۲x]$ ۴) $[\cos ۲x \quad -\sin ۲x]$

۳۸)سه صفحه با معادلات ماتریسی $\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\۴\\۵\end{bmatrix}$ داده شده اند ، فصل مشترک دو به دو این سه صفحه ، چگونه اند؟(۸۸)

۱) موازی هم ۲) عمود برهم ۳) منطبق بر هم ۴) متقاطع

۳۹) ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۱\\ ۵ & ۳ & -۱\\ ۴ & ۰ & ۶\end{bmatrix}$ مفروض است دترمینان ماتریس $(\frac{۱}{۲}A.A^t)$ کدام است(۸۹)

۱) ۳۲ ۲)۶۴ ۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

۴۰) اگر aو b دو عدد حقیقی و i و j شماره سطر و ستون هر درایه باشد. دتر مینان ماتریس $A=[a\,i+b\,j]_{۳\times۳}$ کدام است؟(۸۹)

۱)صفر ۲) $a+b$ ۳) $a\times b$ ۴) $ab(a+b)$

۴۱) اگر A یک ماتریس مربعی باشد به طوریکه $A^۲\neq ۰$ و $A^۳=۰$ آنگاه معکوس ماتریس $I-A$ به کدام صورت است؟(۸۹)

۱) $A^۲-A$ ۲) $A^۲+A$ ۳) $A^۲-A+I$ ۴) $A^۲+A+I$

۴۲) ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ -۲ & ۵ & ۴\\ -۳ & ۶ & -۱\end{bmatrix}$ به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشته شده است . دتر مینان ماتریس متقارن کدام است؟(۹۰)

۱) ۳۰- ۲) ۲۰- ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۴۳) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\\ ۲ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$ درایه واقع بر سطر اول و ستون دوم ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟(۹۰)

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$