

**ماتریس:** هر نمایش جدولی از اعداد، متغیرها و عبارتهای ریاضی ماتریس نام دارد. حاصلضرب سطر در ستون هر ماتریس مرتبه‌ی آن است. هر عضو در ماتریس یک درایه است که با شماره‌ی سطر و ستون آن مشخص می‌شود.

مثال ۱: در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  جمع درایه‌های واقع بر قطر اصلی چقدر است؟

نکته ۱: برای درایه‌های ماتریس ممکن است بتوانیم جمله‌ی عمومی (ضابطه) بنویسیم مثلاً ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  را می‌توان به صورت  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  نمایش داد که در آن  $a_{ij} = 1$  است.

مثال ۲: درایه‌های ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  که در آن  $a_{ij} = i^2 - 2j$  را مشخص کنید.

مثال ۳: در ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  با درایه‌های  $a_{ij} = 2i - j$  حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی را بدست آورید.

نکته ۲: ضرب عدد در ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k[a_{ij}]_{m \times n} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

یعنی برای ضرب عدد در ماتریس باید عدد مورد نظر در تمام درایه‌های ماتریس ضرب شود.

نکته ۳: جمع و تفریق ماتریس‌های هم مرتبه به این صورت است که تک تک درایه‌های متناظر با هم جمع شده یا تفریق می‌شوند.

$$[a_{ij}]_{m \times n} \pm [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m \times n}$$

مثال ۴: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = [b_{ij} = j - i]_{2 \times 2}$  درایه‌های ماتریس  $2A - B$  را بدست آورید.

**ضرب ماتریس‌ها:** اگر  $A_{m \times n}$  و  $B_{n \times p}$  دو ماتریس باشند آنگاه  $A \times B$  ماتریسی با  $m$  سطر و  $p$  ستون است به طوری که برای درایه‌ی سطر  $i$  و ستون  $j$  از ماتریس  $A \times B$  باید سطر  $i$  از ماتریس  $A$  در ستون  $j$  از ماتریس  $B$  ضرب شود پس.

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p} \quad , \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times b_{kj}$$

مثال ۵: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  ماتریس  $A \times B$  را مشخص کنید.

مثال ۶: اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  ماتریس‌های  $A \times B$  و  $B \times A$  را بدست آورید.

نکته ۴: ضرب ماتریسی خاصیت جابجایی ندارد.

نکته ۵: ویژگی‌های ضرب ماتریسی:

$$۱) k(A \times B) = (kA) \times B = A \times (kB)$$

$$۲) A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$$

$$(B \pm C) \times A = B \times A \pm C \times A$$

$$۳) A \times B = o$$

$$۴) A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$$

$$۵) A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

$$۶) A^n = A \times A \times A \dots \times A$$

$$۷) A^n \times A^m = A^{n+m}$$

۸) ماتریس خود توان: اگر  $A^n = A$  ماتریس را خودتوان می‌نامیم.

۹) ماتریس پوچ توان: اگر  $A^n = o$  ماتریس را پوچ توان می‌نامیم.

نکته ۶: برای محاسبه‌ی توانهای یک ماتریس قاعده‌ی مشخصی وجود ندارد و باید با حدس و استقرا آنرا بدست آورد.

مثال ۷: ماتریس‌های زیر را به توانهای خواسته شده برسانید.

الف  $A^{۱۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}^{۱۲}$

ب  $B^{۴۷} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}^{۴۷}$

ج  $C^{۹۴} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{۹۴}$

د  $D^{۱۰۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}^{۱۰۱}$

هـ  $E^{۵۷} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{۵۷}$

و  $F^{۹۹۹} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}^{۹۹۹}$

ز  $G^{۶۶} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{۶۶}$

ح  $H^{۹۹} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}^{۹۹}$

تست ۸: اگر  $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$  در ماتریس  $A^{۱۰۱} - A^{۱۰۰}$  جمع درایه‌ها چقدر است؟

۲ (۴)

۲۱۰۰ (۳)

۲۱۰۱ - ۲ (۲)

صفر (۱)

تست ۹: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  جمع درایه‌های ماتریس  $A^{14}$  چقدر است؟

- (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) صفر

تست ۱۰: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  در ماتریس  $A^{11}$  جمع درایه‌ها چقدر است؟

- (۱) صفر (۲)  $2^{11} - 2$  (۳)  $2^{10} \cdot 2$  (۴) ۲

تست ۱۱: اگر  $A^5 + A = \bar{0}$  ماتریس  $A^{200}$  با کدام گزینه برابر است؟

- (۱)  $A$  (۲)  $A^2$  (۳)  $-A^3$  (۴)  $-A^4$

تست ۱۲: اگر  $AB + BA = 0$  کدام گزینه درست است؟

$$A^2 B^3 = -B^3 A^2 \quad (۲) \quad A^2 B^5 = B^5 A^2 \quad (۱)$$

$$A^2 B^4 = -B^4 A^2 \quad (۴) \quad A^2 B = -BA^2 \quad (۳)$$

### ماتریس‌های خاص:

(۱) ماتریس صفر: تمام درایه‌های آن صفر است بنابراین

الف.  $A \times \bar{0} = \bar{0}$  ,  $\bar{0} \times A = \bar{0}$

ب.  $A + \bar{0} = A$  ,  $A - \bar{0} = A$

ج.  $(\bar{0})^n = \bar{0}$

(۲) ماتریس واحد (همانی): ماتریس مربعی که درایه‌های قطر اصلی آن یک و بقیه‌ی درایه‌ها صفرند.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الف. ماتریس واحد عضو خنثی در ضرب ماتریس است.

$$A \times I = A \quad , \quad I \times A = A \quad , \quad I^n = I$$

ب. عبارتهای شامل ماتریس واحد اتحادپذیرند

$$(A+I)^2 = A^2 + 2A + I \quad , \quad (A-I)(A+I) = A^2 - I$$

مثال ۱۳: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  حاصل  $(A-I)^2$  و  $(A+I)^2$  و  $(A^2 - I)^2$  را بدست آورید.

مثال ۱۴: اگر  $A^2 - A + I = \bar{O}$  حاصل  $A^5$  را بر حسب  $A$  ،  $I$  بدست آورید.

تست ۱۵: اگر  $A^2 = 2A + 3I$  حاصل  $A^5$  کدام است؟

$$53A + 48I \quad (2)$$

$$32A + 243I \quad (1)$$

$$37A + 119I \quad (4)$$

$$61A + 60I \quad (3)$$

(۳) ماتریس قطری: تمام درایه‌های غیرقطر اصلی در آن صفرند.

$$A = \begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & \cdot \\ \cdot & b^n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & \cdot & \cdot \\ \cdot & b^n & \cdot \\ \cdot & \cdot & c^n \end{bmatrix}$$

(۴) ماتریس بالا مثلثی - پایین مثلثی:

$$A = \begin{bmatrix} a & \cdot \\ x & b \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & x & y \\ \cdot & b & z \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ x & b & \cdot \\ y & z & c \end{bmatrix}$$

تست ۱۶: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  درایه‌ی سطر سوم و ستون اول در ماتریس  $A^{1f}$  کدام است؟

۲<sup>۹۴</sup> (۴)

۱۸۸ (۳)

۹۴ (۲)

۲<sup>۹۳</sup> - ۲ (۱)

**ترانهادی ماتریس:** اگر  $A$  یک ماتریس باشد  $A^T$  ماتریسی است که در آن جای سطر و ستون ماتریس  $A$  عوض شده است.

$$A = \begin{bmatrix} a & m & n \\ x & b & p \\ y & z & c \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & x & y \\ m & b & z \\ n & p & c \end{bmatrix}$$

**ویژگی‌های ترانهادی ماتریس:**

۱)  $(A^t)^t = A$

۲)  $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

۳)  $k(A^t) = (kA)^t$

۴)  $(AB)^t = B^t A^t$

تست ۱۷: اگر  $A, B$  دو ماتریس بالا مثلثی باشند کدام ماتریس بالا مثلثی نیست؟

$A^T + B^T$  (۴)

$(A+B)^2$  (۳)

$A^2 B^2$  (۲)

$2A - 3B$  (۱)

تست ۱۸: اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس قطری باشند کدام رابطه درست نیست؟

$$(1) \quad A^2 B^2 = B^2 A^2 \quad (2) \quad (AB)^2 = A^2 B^2 \quad (3) \quad AB^2 = A^2 B \quad (4) \quad (AB)^t = AB$$

تست ۱۹: ترانهاده‌ی عبارت ماتریسی  $M = AA^T - BB^T$  کدام است؟

$$(1) \quad (A^T)^2 - (B^T)^2 \quad (2) \quad A^T A - B^T B \quad (3) \quad M \quad (4) \quad -M$$

تست ۲۰: ترانهاده‌ی عبارت ماتریسی  $M = AB^T - BA^T$  کدام است؟

$$(1) \quad AB - A^T B^T \quad (2) \quad A^T B - B^T A \quad (3) \quad M \quad (4) \quad -M$$

**ماتریس متقارن:** اگر  $A = A^T$  ماتریس  $A$  متقارن است. پس ماتریس متقارن مربعی است و درایه‌های آن نسبت به قطر اصلی تقارن دارند.

$$A = \begin{bmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{bmatrix}$$

**نکته:** (۱) تمام ماتریس‌های به صورت  $A + A^T$  و  $AA^T$  و  $A^T A$  و  $AB^T + BA^T$  متقارن هستند.

(۲) اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های متقارن باشند  $A \pm B$  و  $kA$  و  $mA \pm nB$  و  $A^n$  متقارن هستند ولی  $AB$  را نمی‌دانیم.

تست ۲۱: کدام ماتریس متقارن نیست؟

$$(1) \quad ABA^T + A^T B^T A \quad (2) \quad AA^T - B^T B$$

$$(3) \quad ABA^T + AB^T A^T \quad (4) \quad AA^T A + A^T AA^T$$

**ماتریس پاد متقارن:** اگر  $A^T = -A$  ماتریس  $A$  پاد متقارن است. پس ماتریس پاد متقارن مربعی است، قطر اصلی آن همگی صفرند و بقیه‌ی درایه‌ها نسبت به قطر اصلی قرینه‌ی جبری است.

$$A = \begin{bmatrix} \circ & x & y \\ -x & \circ & -z \\ -y & z & \circ \end{bmatrix}$$

**نکته (۱)** ماتریس‌های  $A - A^T$  و  $AB^T - BA^T$  و  $ABA^T - AB^T A^T$  همواره پاد متقارن هستند.

(۲) اگر  $A$  و  $B$  پاد متقارن باشند ماتریس‌های  $kA$  و  $mA \pm nB$  و  $A^{2n+1}$  پاد متقارن هستند، ماتریس  $A^{2n}$  متقارن است و  $AB$  را نمی‌دانیم.

تست ۲۲: اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های مربعی باشند کدام ماتریس پاد متقارن است؟

$$AA^T - BB^T \quad (۲) \qquad AB - A^T B^T \quad (۱)$$

$$AB - B^T A^T \quad (۴) \qquad A^T B - AB^T \quad (۳)$$

**نکته:** هر ماتریس مربعی را می‌توان به صورت مجموع ماتریس‌های متقارن و پاد متقارن نوشت.

$$M = \frac{M + M^T}{۲} + \frac{M - M^T}{۲}$$

مثال ۲۳: ماتریس  $M = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۳ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$  را به صورت مجموع ماتریس‌های متقارن و پاد متقارن بنویسید.

تست ۲۴: اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های پاد متقارن باشند و  $A^2 + B = \begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$  آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس  $B^2$  چقدر است؟

-۴ (۴)

۱۲ (۳)

صفر (۲)

-۸ (۱)



## ماتریس‌ها و تبدیل‌ها:

هر ضابطه به صورت  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$  را می‌توان به صورت ضرب ماتریس‌ها نوشت.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مثال ۱: ماتریس متناظر با هر یک از تبدیل‌های زیر را بنویسید:

(۲) بازتاب نسبت به خط  $y=x$

(۱) تقارن نسبت به مبدا

(۴) دوران با زاویه  $\theta$

(۳) بازتاب نسبت به محور  $y$ ها

(۵) تجانس با نسبت  $k$

**نکته:** (۱) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس تبدیل باشند  $B \times A$  ماتریس ترکیب این دو تبدیل است.

(۲) اگر  $R_{\theta}$  و  $R_{\theta'}$  دو ماتریس دوران باشند داریم.

$$R_{\theta} \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$$

$$R_{\theta}^n = R_{n\theta}$$

مثال ۲۵: اگر  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  ماتریس  $A^{94}$  را بدست آورید.

مثال ۲۶: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  ماتریس  $A^{-1}$  را بدست آورید.

مثال ۲۷: ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  دایره به معادله  $x^2 + y^2 = 1$  را به چه شکلی تبدیل می کند؟

مثال ۲۸: اگر  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  مختصات راس های یک مربع باشد تبدیل یافته ی ای مربع را تحت ماتریس  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  رسم کنید و ویژگی های شکل حاصل را بررسی کنید.

۱- جواب‌های معادله ماتریس  $10 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix}$  کدام است؟

- (۱)  $(-2, -3)$  (۲)  $(2, 3)$  (۳)  $(2, -3)$  (۴)  $(3, 2)$

۲- اگر  $A - A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ a & b \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه دو تایی  $(a, b)$  کدام است؟

- (۱)  $(0, -3)$  (۲)  $(-3, 0)$  (۳)  $(3, 0)$  (۴)  $(0, 3)$

۳- حاصل  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^8$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -16 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$

۴- حاصلضرب ترا نهاده ماتریس  $A$  در ماتریس همانی برابر ماتریس  $A$  است، الزاماً ماتریس  $A$  کدام نوع است؟

- (۱) متقارن (۲) بالا مثلثی (۳) مربع (۴) قطری

۵- خروج از مرکز تبدیل یافته‌ی دایره‌ی  $x^2 + y^2 + 2x = 4$  تحت ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$  (۲)  $\sqrt{\frac{5}{3}}$  (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{5}$  (۴)  $\sqrt{\frac{3}{5}}$

۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، حاصل  $A^2 - 4A$  کدام است؟

- (۱)  $-4I$  (۲)  $3I$  (۳)  $4I$  (۴)  $5I$

۷- اگر  $A$  ماتریس متقارن و  $B$  پادمتقارن باشد، کدام ماتریس زیر پادمتقارن است؟

- (۱)  $AB + BA$  (۲)  $AB - BA$  (۳)  $A + B$  (۴)  $A - B$

۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، حاصل جمع درایه‌های کدام ماتریس زیر برابر ۶۴ می‌شود؟

- (۱)  $A^4$  (۲)  $A^5$  (۳)  $A^6$  (۴)  $A^7$

۹- اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس پادمتقارن و  $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$  باشد، ماتریس  $AB$  چگونه است؟

(۱) متقارن (۲) پادمتقارن (۳) هم متقارن هم پادمتقارن (۴) نه متقارن نه پادمتقارن

۱۰- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 9 & 6 & 10 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ،  $C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$  و تعریف کنیم  $D = ABC$  آن‌گاه

درایه‌ی مربوط به سطر دوم و ستون اول ماتریس  $D$  کدام است؟

- (۱) ۱۷ (۲) -۱۴ (۳) ۲۲ (۴) -۴

۱۱- اگر  $F$  نقاط دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 1$  باشد، ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  در اثر روی  $F$ ، آن را به چه شکل هندسی تبدیل می‌کند؟

- (۱) دایره (۲) نقطه (۳) بیضی افقی (۴) بیضی قائم

۱۲- اگر ماتریس  $\begin{bmatrix} m^2 - 4 & 5 - m & 3 - m \\ m - 5 & 0 & -3 \\ 2m - 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$  پادمتقارن باشد، مجموع درایه‌های سطر اول کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۳- اگر ماتریس  $A^2$  که در آن  $A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  است را به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن بنویسیم آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس متقارن کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱۹ (۳)  $\frac{19}{2}$  (۴) ۳۸

۱۴- ماتریس‌های  $A_{m \times n}$  و  $B_{p \times q}$  مفروض‌اند. اگر ضرب  $(AB^t)$  قابل تعریف باشد، مقدار  $m + n$  کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۷

۱۵- اگر  $A = [a_{ij}]_{p \times p}$  با تعریف  $a_{ij} = i - j$  و  $B = [b_{ij}]_{p \times p}$  با تعریف  $b_{ij} = \begin{cases} j - i & ; i < j \\ i + j & ; i \geq j \end{cases}$  دو ماتریس باشند، مجموع درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس  $A + B$  چه قدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۴ (۳) -۴ (۴) ۱

۱۶- اگر ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $AB$  متقارن باشند،  $AB^t$  برابر کدام است؟

- (۱)  $AB$  (۲)  $A^t B$  (۳)  $BA^t$  (۴)  $B^t A$

۱۷-  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه هستند و  $2A - B = I$  و  $A^2 = A$ ، ماتریس  $B^2$  همواره برابر کدام است؟ ( $I$  ماتریس همانی است.)

- (۱)  $B$  (۲)  $I$  (۳)  $-I$  (۴)  $O$

۱۸-  $A$  یک ماتریس مربع است. چه تعداد از ماتریس‌های زیر متقارن هستند؟

- (الف)  $A^3 + (A^t)^3$  (ب)  $(A - A^t)^2$  (ج)  $5A + 5A^t + 2AA^t$   
(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹- اگر  $A^2 = A$  باشد، حاصل  $(A - I)^5$  کدام است؟

- (۱)  $I - A$  (۲)  $I + A$  (۳)  $2A - I$  (۴)  $A - I$

۲۰- اگر  $A$ ،  $B$  دو ماتریس پادمتقارن باشند و  $AB$  ماتریسی متقارن باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ ( $A$ ،  $B$  قطری هستند.)

- (۱)  $A$ ،  $B$  مثلثی هستند. (۲)  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$  (۳)  $A$ ،  $B$  ماتریس‌های صفر هستند.

۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۳	۴	۴	۲	۴	۱	۱	۲	۲	۴	۴	۱	۲	۱	۴	۱	۱	۳	۲	۴

**دترمینان:** مقداری عددی است که به ماتریس‌های مربعی نسبت داده می‌شود.

اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  دترمینان این ماتریس عددی است که به صورت زیر بدست می‌آید:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال (۱) اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ثابت کنید:  $A^2 = (a+d)A - |A|I$

تست (۲) اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$  و  $A^2 = 3A - 4I$  حاصل  $a+b$  کدام است؟

- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) صفر  
(۴) -۳

تست (۳) اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  حاصل  $|AB|$  کدام است؟

- (۱) ۶  
(۲) ۵  
(۳) صفر  
(۴) -۶

**نکته:** اگر شکل  $F$  با ماتریس  $A$  به شکل  $F'$  تبدیل شود آنگاه

$$S_{F'} = |A|S_F$$

تست (۴) مساحت چندضلعی حاصل از اثر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  روی مربعی به ضلع واحد چقدر است؟

- (۱) ۶  
(۲) ۵  
(۳) صفر  
(۴) -۶

**کهاد:** اگر  $A$  ماتریس مربعی باشد کهاد نظیر سطر  $i$  و ستون  $j$  ماتریسی است که از حذف سطر  $i$  و ستون  $j$  بدست می‌آید. کهاد را با  $M_{ij}$  نمایش می‌دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{bmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \quad M_{22} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \quad M_{33} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

مثال ۵: در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  حاصل  $M_{11} + M_{12} + M_{13}$  را بدست آورید.

مثال ۶: اگر  $A = [i^2 + j]_{3 \times 3}$  حاصل  $|M_{21} + M_{12}|$  را بدست آورید.

**همسازه:** اگر  $A$  ماتریس مربعی باشد همسازه‌ی متناظر با سطر  $i$  و ستون  $j$  از این ماتریس عددی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{bmatrix} \Rightarrow A_{11} = (-1) \begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{vmatrix} \quad A_{22} = (-1) \begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{vmatrix} \quad A_{33} = (-1) \begin{vmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{vmatrix}$$

مثال ۷: اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  مجموع همسازه‌های نظیر درایه‌های قطر اصلی را بدست آورید.

مثال ۸: اگر  $A = [ij]_{3 \times 3}$  حاصل  $A_{11} + A_{21} + A_{31}$  را بدست آورید.

مثال ۹: اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$  حاصل  $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$  را بدست آورید.

### دترمینان ماتریس $3 \times 3$ و $4 \times 4$ و ...

$$\begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix} = a \times A_{11} + x \times A_{12} + m \times A_{13}$$

ابتدا یک سطر یا ستون دلخواه از ماتریس را انتخاب می‌کنیم و برای هر درایه، همسازهی نظیرش را بدست می‌آوریم. مقدار هر درایه را در همسازهاش ضرب می‌کنیم، مجموع مقادیر بدست آمده با دترمینان برابر است.

مثال ۱۰: برای ماتریس‌های زیر مقدار دترمینان را بدست آورید.

$$1) A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$3) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

تست ۱۱: اگر  $k + 4a = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \\ a & 1 & -4 \end{vmatrix}$  مقدار  $k$  کدام است؟

$$75(1) \quad 45(2)$$

$$25(3) \quad 15(4)$$

تست ۱۲: حاصل  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  کدام است؟

(۱) ۲۰ (۲) صفر

(۳) -۴۰ (۴) ۶۰

نکته (۱) اگر تمام درایه‌ها در یک سطر یا ستون دترمینان همگی صفر باشند حاصل دترمینان صفر است.

تست ۱۳: اگر  $A = [ij]_{3 \times 3}$  حاصل  $|A|$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۳۰

(۳) ۷۲ (۴) ۴۸

تست ۱۴: حاصل  $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ x & b & 0 \\ y & z & c \end{vmatrix}$  کدام است؟

(۱)  $a+b+c$  (۲)  $abc$  (۳)  $-abc$  (۴) صفر

نکته (۲) حاصل دترمینان ماتریس‌های مثلثی و قطری، با ضرب درایه‌های قطر اصلی برابر است.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

$$\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd$$

نکته (۳) ترانزاده در محاسبه‌ی دترمینان بی تأثیر است، یعنی  $|A| = |A^T|$

تست ۱۵: اگر  $k = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & b & c \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$  کدام است؟

(۱)  $k+1$  (۲)  $k+a$

(۳)  $k+3$  (۴)  $k-1$



نکته ۴) اگر یکی از درایه‌های دترمینان تغییر کند مقدار دترمینان به اندازه‌ای حاصلضرب تغییرات درایه در همسازهی نظیر آن درایه تغییر می‌کند.

$$\begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z \pm d & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix} \pm d \times A_{pp}$$

تست ۱۶: اگر با تغییر درایه‌ی سطر دوم و ستون سوم در دترمینان  $\begin{vmatrix} 3 & 6 & x \\ b & 0 & a \\ z & 4 & y \end{vmatrix}$  مقدار دترمینان تغییر نکند  $z$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر

(۳) ۲ (۴) قابل محاسبه نیست

نکته ۵) اگر دو دترمینان فقط در یک سطر یا ستون با هم اختلاف داشته باشند می‌توانیم برای محاسبه‌ی مجموع یا تفاضل آنها، درایه‌های نظیر در دو سطر متفاوت را با هم جمع کنیم.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \pm a' & b \pm b' & c \pm c' \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

تست ۱۷: حاصل  $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) -۵

(۳) -۱۲ (۴) ۲۸

تست ۱۸: اگر  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & c \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & b+2 & c-1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $a+b+3=0$  (۲)  $b-a=3$

(۳)  $a+b=3$  (۴)  $a-b=3$

نکته ۶) اگر جای دو سطر یا ستون دترمینان را با هم عوض کنیم حاصل دترمینان قرینه می‌شود.

$$\begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} m & x & a \\ n & y & b \\ p & z & c \end{vmatrix}$$

تست ۱۹) حاصل  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$  کدام است؟

- ۱) صفر (۲)  $ab$  (۲)  $3ab$  (۲)  $-ab$  (۴)

تست ۲۰) حاصل  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  کدام است؟

- ۱) ۱ (۲)  $2$  (۲)  $-2$  (۳)  $4$  (صفر)

نکته ۷) اگر از یک سطر یا ستون دترمینان عددی فاکتور بگیریم در حاصل دترمینان ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ cx & dx \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & x & mk \\ b & y & nk \\ c & z & pk \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix}$$

تست ۲۱) اگر  $k = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$  حاصل  $\begin{vmatrix} 6a & 0 & 3 \\ 24 & 2 & 12 \\ 18 & 2 & 3 \end{vmatrix}$  کدام است؟

- ۱)  $6k$  (۲)  $12k$  (۳)  $36k$  (۴)  $48k$

مثال ۲۲: ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} bc & ab & ac \\ ab & ac & bc \\ ac & bc & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ac & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

مثال ۲۳: ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & yz \\ 1 & y & 2xz \\ 1 & z & 2xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

نکته ۸: اگر از تمام درایه‌های ماتریس عددی فاکتور بگیریم مقدار آن عدد در محاسبه‌ی دترمینان باید به توان مرتبه‌ی ماتریس برسد یعنی

$$|kA| = k^n |A|$$

تست ۲۴: اگر  $2A = \begin{bmatrix} |A| & -2 \\ 2 & |A| \end{bmatrix}$  حاصل  $|A|$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $-\frac{1}{2}$

تست ۲۵: اگر  $|A_{3 \times 3}| = 3$  حاصل  $|(2A^2)^T|$  کدام است؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۵۴ (۳) ۳۶ (۴) ۷۲

تست ۲۶: فرض کنید  $A$  ماتریسی از مرتبه‌ی ۳ باشد و  $|2A|A^3 = 128I$  حاصل  $|A|$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{2}$  (۲)  $2\sqrt{2}$  (۳) ۴ (۴) ۲

**نکته ۹** اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی باشند آنگاه

$$|AB| = |A||B|, \quad |A^n| = |A|^n$$

تست ۲۷: اگر  $A$  ماتریس پاد متقارن از مرتبه‌ی ۳ باشد و  $|A+I| = 4$  حاصل  $|A-I|$  چقدر است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) -۶ (۴) صفر

مثال ۲۸: اگر  $A$  ماتریس پاد متقارن مرتبه‌ی ۳ باشد ثابت کنید  $|A| = 0$

تست ۲۹: دترمینان ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $c^2$

(۳)  $a^2 + b^2 + c^2$  (۴)  $2abc$

تست ۳۰: حاصل  $\begin{bmatrix} 1 & a+1 & b+1 \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{bmatrix}$  کدام است؟

(۱)  $c(-a+b+c)$  (۲) صفر (۳)  $a+b+c+1$  (۴)  $a^2 + b^2 + c^2$

**نکته ۱۰** اگر ضربی از یک سطر یا ستون دترمینان به سطر یا ستون دیگر اضافه شود یا از آن کم شود حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} a & x & m+ka \\ b & y & n+kb \\ c & z & p+kc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x & ka \\ b & y & kb \\ c & z & kc \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b-ka \\ c & d-kc \end{vmatrix} =$$

نکته (۱۱) اگر یک سطر دترمینان ضربی از سطر دیگر باشد حاصل دترمینان صفر است. همچنین برای ستون‌ها نیز برقرار است.

$$\begin{vmatrix} a & x & ka \\ b & y & kb \\ c & z & kc \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & z \\ ac & cx & ac \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 2 & 2x & y & 2z \\ 3 & 3x & y & z^2 \\ 4 & 4x & y & z^2 \end{vmatrix} = 0$$

**مثال ۳۱:** حاصل دترمینان های زیر را بدست آورید.

$$۱ \begin{vmatrix} ۱۳۹۵ & ۱۳۹۴ & ۱۳۹۳ \\ ۲۰۱۷ & ۲۰۱۶ & ۲۰۱۵ \\ ۱۴۳۷ & ۱۴۳۶ & ۱۴۳۵ \end{vmatrix}$$

$$۲ \begin{vmatrix} a & a+b & ۲a+۳b \\ a & a+۲b & ۲a+۶b \\ a & a+۳b & ۲a+۹b \end{vmatrix}$$

$$۳ \quad |A| = |a_i = b_j|_{r \times r}$$

$$۴ \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & ۱ & a \\ a & a & ۱ \end{vmatrix}$$

$$۵ \begin{vmatrix} a & ۲a & ۳a \\ b & c & ۳b \\ c & c & c \end{vmatrix}$$

$$۶ \begin{vmatrix} a+۱ & b+۱ & c+۱ \\ a & b+۱ & c+۱ \\ a & b & c+۱ \end{vmatrix}$$

$$۷ \begin{vmatrix} a+x & b & c \\ a & b+x & c \\ a & b & c+x \end{vmatrix}$$

$$۸ \begin{vmatrix} a & b+c & ۱ \\ b & a+c & ۲ \\ c & a+b & ۳ \end{vmatrix}$$

$$۹ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ x & y & z \\ x^۲ & y^۲ & z^۲ \end{vmatrix}$$

$$۱۰ \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & a \\ -a & -a & a \end{vmatrix}$$

$$۱۱ \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$۱۲ \begin{vmatrix} a & b & \cdot & \cdot \\ c & d & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a & b \\ \cdot & \cdot & c & d \end{vmatrix}$$

$$۱۳ \begin{vmatrix} \cdot & a & b & \cdot \\ a & \cdot & \cdot & b \\ b & \cdot & \cdot & a \\ \cdot & b & a & \cdot \end{vmatrix}$$

$$۱۴ \begin{vmatrix} x+y+۲z & x & y \\ z & ۲x+y+z & y \\ z & x & x+۲y+z \end{vmatrix}$$

نکته (۱۲) اگر  $A_{m \times n}$  یک ماتریس با فرض  $m > n$  باشد آنگاه  $|AA^T| = 0$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n & p \\ g & h & i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & x & \cdot \\ b & y & \cdot \\ c & z & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n & p \\ g & h & i \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n & p \\ g & h & i \end{bmatrix} \right| &= \left| \begin{bmatrix} a & x & \cdot \\ b & y & \cdot \\ c & z & \cdot \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m & n & p \\ g & h & i \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \right| = 0 \end{aligned}$$

نکته (۱۳) اگر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  سه بردار در فضا باشند آنگاه

$$1 \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

$$2 \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$$3 \quad \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{معادله خطی که از A و B می‌گذرد}$$

مثال ۳۲: مساحت مثلثی با سه رأس (۲- و ۱) A و (۴ و -۳) B و (۰ و ۲) C را بدست آورید.

روش ساروس در محاسبه دترمینان:

$$\begin{vmatrix} a & x & m & a & x \\ b & y & n & b & y \\ c & z & p & c & z \end{vmatrix} = (ayp + xnc + mbz) - (myc + anz + xbp)$$

۱- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$  به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشته شده است،

دترمینان ماتریس متقارن کدام است؟

- (۱)  $-30$  (۲)  $-20$  (۳)  $20$  (۴)  $30$

۲- مساحت مثلثی که سه رأس آن نقاط  $A(1,4)$ ,  $B(1,-1)$ ,  $C(2,2)$  باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $5$  (۳)  $10$  (۴)  $\frac{5}{4}$

۳- حاصل  $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$  کدام است؟

- (۱)  $a$  (۲)  $4a$  (۳) صفر (۴)  $1$

۴- اگر  $\begin{vmatrix} 5 & 7 & -3 \\ 2 & -4 & x \\ -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = A - x \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$  مقدار عدد  $A$  کدام است؟

- (۱)  $-126$  (۲)  $-116$  (۳)  $-94$  (۴)  $-84$

۵- معادله‌ی دترمینانی  $\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & x^2 & x^2 \\ 1 & x^3 & x \end{vmatrix} = 0$  چند ریشه دارد؟

- (۱)  $3$  (۲) صفر (۳)  $1$  (۴) بی‌شمار

۶- اگر  $A = [i^2 - j]_{2 \times 3}$ ، آنگاه دترمینان ماتریس  $AA^t$  کدام است؟

- (۱)  $45$  (۲) صفر (۳)  $54$  (۴)  $-45$

۷- در ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$  یک کهاد متقارن و  $N$  یک کهاد پادمتقارن است. حاصل  $M+N$  برابر است با:

- (۱)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

۸- همسازه سطر دوم و ستون سوم ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  کدام است؟

- (۱)  $-3$  (۲)  $-2$  (۳)  $2$  (۴)  $3$



۹- مجموع  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ a & b-1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \\ 2a & -1 & c \end{vmatrix}$  کدام است؟

(۱)  $6a + 4b$  (۲)  $-6a - 4b$  (۳)  $6a - 4b$  (۴)  $4a - 6b$

۱۰- اگر به هر درایه در سطر دوم دترمینان  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$  یک واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان ۶ واحد اضافه می شود. a کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱- اگر حاصل دترمینان ماتریس  $\begin{bmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & 2x+y+z & y \\ z & x & x+2y+z \end{bmatrix}$  برابر ۱۶ باشد، مجموع اعضای درون ماتریس چیست؟

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۱۲- حاصل  $\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_5 \end{vmatrix}$  کدام است؟

(۱) صفر (۲)  $2a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$  (۳)  $-2a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$  (۴)  $-a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$

۱۳- اگر تمام درایه های ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  را با عدد K جمع کنیم دترمینان A چه تغییری می کند؟

(۱) تغییر نمی کند (۲) K برابر می شود (۳) به اندازه K کم می شود (۴) به اندازه K زیاد می شود

۱۴- حاصل  $\begin{vmatrix} a & \cdot & a \\ \cdot & a & \cdot \\ a & \cdot & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & b & \cdot \\ b & \cdot & b \\ \cdot & b & \cdot \end{vmatrix}$  کدام است؟

(۱) ab (۲) a + b (۳) a - b (۴) صفر

۱۵- اگر  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix} = A + x \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$  مقدار A کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۱	۴	۴	۲	۳	۳	۲	۴	۳	۳	۱	۱	۳	۱	۱

## وارون ماتریس:

اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد و  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$  آنگاه  $A^{-1}$  وارون ماتریس  $A$  است.

مثال ۱: اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  و  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -3 & b \end{bmatrix}$  مقادیر  $a$  و  $b$  را بدست آورید.

تست ۲: اگر  $A^2 - A = I$  حاصل  $A^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $-A$       (۲)  $I$       (۳)  $A+I$       (۴)  $A-I$

تست ۳: اگر  $A^2 + 2I = 0$  حاصل  $(A-I)^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{3}(A+I)$       (۲)  $\frac{1}{3}(A-I)$

(۳)  $\frac{1}{2}(A+I)$       (۴)  $I-A$

تست ۴: اگر  $A^3 + A^2 + A + I = 0$  حاصل  $A^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $-A^2$       (۲)  $A^2$

(۳)  $A+I$       (۴)  $A^2 - A - I$

تست ۵: اگر  $A = 2A^{-1}$  وارون ماتریس  $I-A$  کدام است؟

(۱)  $A+I$       (۲)  $-A-I$

(۳)  $A-I$       (۴)  $I-2A$

نکته (۱) اگر  $A^{-1}$  وارون ماتریس  $A$  باشد آنگاه  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

نکته (۲) اگر  $|A| = 0$  ماتریس  $A$  وارون پذیر نیست.



تست ۱۱: وارون ماتریس  $A = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & \cdot \\ \cos \theta & -\sin \theta & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix}$  کدام است؟

$$\begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & \cdot \\ \sin \theta & \cos \theta & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix} \quad (۲) \qquad \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & \cdot \\ \cos \theta & \sin \theta & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta & \cdot \\ \cos \theta & -\sin \theta & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix} \quad (۴) \qquad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & \cdot \\ \sin \theta & -\cos \theta & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۱ \end{bmatrix} \quad (۳)$$

**ماتریس همسازه (N):** ماتریس مربعی که تمام درایه‌های آن همسازه‌های نظیر درایه‌های ماتریس A هستند.

**ماتریس الحاقی ( $A^*$ ):** ترانهادی ماتریس همسازه است.  $A^* = N^T$

**وارون ماتریس:** اگر A ماتریس مربعی و  $A^*$  ماتریس الحاقی آن باشد داریم.

$$A^{-1} = \frac{۱}{|A|} A^*$$

ویژگی های وارون ماتریس:

۱)  $(A^{-1})^{-1} = A$

۲)  $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

۳)  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

۴)  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}(A)^{-1}$

۵)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

۶)  $A^* = |A|A^{-1}$

۷)  $|A^*| = |A|^{n-1}$

۸)  $AA^* = A^*A = |A|I$

تست ۱۲: اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$  حاصل  $AA^*$  کدام است؟

-۳I (۴)

-۲I (۳)

۳I (۲)

۲I (۱)

تست ۱۳: اگر  $AA^* = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  حاصل  $|(2A)^{-1}|$  کدام است؟

$\frac{2}{5}$  (۲)

۱۰ (۱)

$\frac{8}{5}$  (۴)

$\frac{1}{40}$  (۳)

تست ۱۴: ماتریس الحاقی متناظر با  $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$  کدام است؟

$\begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$  (۴)     
  $\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{bmatrix}$  (۳)     
  $\begin{bmatrix} yz & 0 & 0 \\ 0 & xz & 0 \\ 0 & 0 & xy \end{bmatrix}$  (۲)     
  $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$  (۱)

تست ۱۵: اگر دترمینان ماتریس A از مرتبه ۳×۳ برابر ۶ باشد حاصل  $\left| \left( \frac{A^*}{2} \right)^{-1} \right|$  کدام است؟

۳۶ (۴)

۴۸ (۳)

$\frac{2}{9}$  (۲)

$\frac{9}{8}$  (۱)

تست ۱۶: وارون  $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & a \\ \cdot & b & \cdot \\ c & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$  کدام است؟

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \frac{1}{a} \\ \cdot & \frac{1}{b} & \cdot \\ \frac{1}{c} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & (۱) & \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{b} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{c} \end{bmatrix} & (۲) & \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \frac{1}{c} \\ \cdot & \frac{1}{b} & \cdot \\ \frac{1}{a} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & (۳) & \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{b} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{a} \end{bmatrix} & (۴) \end{matrix}$$

**نکته:** اگر  $a_{ij}^{-1}$  درایه‌ی سطر  $i$  و ستون  $j$  از ماتریس  $A^{-1}$  باشد آنگاه

$$a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{|A|}$$

تست ۱۷: وارون ماتریس  $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & \cdot \\ \cdot & ۲ & \cdot \\ \cdot & \cdot & ۳ \end{bmatrix}$  کدام است؟

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} ۱ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{۲} & -۲ \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{۳} \end{bmatrix} & (۱) & \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{۲} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{۳} \end{bmatrix} & (۲) & \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{۲} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{۳} \end{bmatrix} & (۳) & \begin{bmatrix} ۱ & \frac{1}{۲} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{۲} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{۳} \end{bmatrix} & (۴) \end{matrix}$$

تست ۱۸: اگر  $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & -۴ \\ \cdot & -۴ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}$  آنگاه درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون سوم از  $A^{-1}$  کدام است؟

$$\frac{۲}{۲۳} \quad (۲) \qquad -\frac{۴}{۲۳} \quad (۱)$$

$$\frac{۴}{۲۳} \quad (۴) \qquad -\frac{۲}{۲۳} \quad (۳)$$

تست ۱۹: اگر  $A$  و  $B$  وارون پذیر باشند و  $A+B=۲AB$  حاصل  $A^{-1} + B^{-1}$  کدام است؟

$$۲A^{-1}B^{-1} \quad (۲) \qquad ۲I \quad (۱)$$

$$\frac{1}{۲}B^{-1}A^{-1} \quad (۴) \qquad \frac{1}{۲}A^{-1}B^{-1} \quad (۳)$$

۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$  باشد، مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{-1} + A$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۶ (۳) ۲۴ (۴) ۱۰

۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  درایه واقع در سطر اول و ستون دوم ماتریس  $A^{-1}$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۳- به ازای کدام مقدار  $a$  ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & a \end{bmatrix}$  معکوس پذیر نیست؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴- اگر  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  باشد و  $A^T A^* = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$ ،  $A^T A$  آن گاه  $|A^{-1}|$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲)  $\frac{1}{3}$  (۳)  $-\frac{1}{3}$  (۴) -۳

۵- اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد به طوری که  $A^T = \bar{O}$ ،  $A^T \neq \bar{O}$ ، آن گاه معکوس ماتریس  $I - A$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $A^T - A$  (۲)  $A^T + A$  (۳)  $A^T - A + I$  (۴)  $A^T + A + I$

۶- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، از رابطه  $AX = 2I$  ماتریس  $X$  کدام است؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$  (۳)  $2 \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  (۴)  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های معکوس ماتریس الحاقی آن  $((A^*)^{-1})$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) -۸ (۳) صفر (۴)  $-\frac{1}{8}$

۸- اگر  $A$  یک ماتریس مربعی و  $A^T = A$  باشد، معکوس ماتریس  $I + 3A$  کدام است؟

- (۱)  $I - \frac{1}{3}A$  (۲)  $I + \frac{3}{4}A$  (۳)  $I - \frac{3}{4}A$  (۴)  $I - \frac{3}{4}A$

۹- کدام ماتریس به ازای تمام مقادیر  $m$  وارون پذیر است؟

- (۱)  $\begin{bmatrix} 2m^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & m^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & m^4 + 1 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 2m^2 + 1 & 0 & 0 \\ -m^2 & -m^2 - 1 & 0 \\ m + 1 & m - 1 & m^4 + 1 \end{bmatrix}$   
 (۳)  $\begin{bmatrix} 2m^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & 0 & m^4 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 2m^2 - 1 & m^2 & m + 1 \\ 0 & m^2 + 1 & 2m^2 \\ 0 & 0 & m^4 + 1 \end{bmatrix}$

۱۰- اگر  $|A \cdot B| \neq 0$  باشد، کدام گزینه در مورد آن‌ها درست است؟

- (۱)  $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$  (۲)  $(AB)^t = B^t \cdot A^t$  (۳)  $(AB)^t = A^t \cdot B^t$  (۴)  $|A^{-1} B^{-1}| = |BA|$

۱۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B$  وارون‌پذیر از مرتبه‌ی ۲ باشد، حاصل  $C = (BA^{-1})^t (AB^t)^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} -13 & -8 \\ -8 & -5 \end{bmatrix}$

۱۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه ماتریس  $AA^* + A^*A$  برابر با کدام است؟

(۱) 0 (۲)  $-I$  (۳)  $I$  (۴)  $2I$

۱۳- اگر  $X$  و  $Y$  دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه و وارون‌پذیر باشند و داشته باشیم:  $X+Y = 2XY$ ، آنگاه  $X^{-1} + Y^{-1}$  کدام است؟

(۱)  $I$  (۲)  $-I$  (۳)  $2I$  (۴)  $\frac{1}{2}I$

۱۴- اگر  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، آنگاه  $A^*$  برابر کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}A^{-1}$  (۲)  $-\frac{1}{3}A$  (۳)  $2A^{-1}$  (۴)  $2A$

۱۵- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$  و  $AA^* = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه حاصل  $a + b + c$  کدام است؟ ( $A^*$ )

ترانهاده‌ی ماتریس همسازه‌های  $A$  است.

(۱)  $-8$  (۲)  $-4$  (۳)  $-6$  (۴)  $8$

۱۶- اگر  $A^3 = 2I$ ، آنگاه وارون ماتریس  $(A - I)$  کدام گزینه است؟

(۱)  $\frac{A^2 + I}{3}$  (۲)  $A^2 + A + I$  (۳)  $(A + I)^2$  (۴)  $A^2 - A + I^2$

۱۷- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ x & y & z \\ 3 & 4 & t \end{bmatrix}$  و  $A^* = \begin{bmatrix} -3 & a & b \\ 6 & c & -4 \\ -3 & -5 & d \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه  $|A^{-1}|$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{9}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $-\frac{1}{9}$

۱۸- اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس وارون‌پذیر هم‌مرتبه باشند و  $A^2 = A$  و  $B^2 = B$  و  $C = I + \lambda AB$ ، آنگاه  $C^{-1}$  کدام است؟ ( $\lambda \neq -1$ )

(۱)  $\frac{1}{\lambda - 1}I$  (۲)  $\frac{1}{\lambda + 1}I$  (۳)  $\frac{\lambda}{\lambda + 1}I$  (۴)  $\frac{\lambda}{\lambda - 1}I$

۱۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، معکوس ماتریس  $I - A$  به صورت  $\left[ \begin{array}{c|c} 1 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$  است. ماتریس  $B$  کدام است؟

(۱)  $\begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$  (۲)  $\begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$  (۳)  $\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$  (۴)  $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

۲۰- اگر  $A$  یک ماتریس پادمتقارن و ماتریس  $I - A$  وارون‌پذیر باشد آنگاه  $((I + A)^{-1})^t (I - A)$  برابر کدام است؟ ( $I$  ماتریس همانی است.)

(۱)  $A$  (۲)  $A^{-1}$  (۳)  $(I - A)^{-1}$  (۴)  $I$

۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۴	۲	۲	۴	۲	۲	۱	۳	۱	۱	۲	۲	۴	۲	۱	۴	۲	۳	۳	۴



**دستگاه معادلات خطی:**

فرض کنید دستگاهی با  $m$  معادله و  $n$  مجهول مفروض است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

در اینصورت می توانیم دستگاه را به صورت ضرب ماتریسی بنویسیم.

(۱) اگر  $m > n$  (تعداد معادله ها بیشتر از مجهول ها باشد):

(۲) اگر  $m < n$  (تعداد معادله ها کمتر از مجهول ها باشد):

**دستگاه همگن:** دستگاهی که مقادیر ثابت آن همگی صفرند، ویژگی بسیار مهم در دستگاه همگن اینست که یک جواب همواره در آن صدق می کند: جواب صفر

**دستگاه ۲ معادله ۲ مجهولی:** اگر دستگاه  $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$  را در نظر بگیریم داریم:

(۱) اگر  $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$  دستگاه یک جواب دارد.

(۲) اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  دستگاه جواب ندارد.

(۳) اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

تست ۱: به ازای کدام مقدار  $m$  دستگاه  $\begin{cases} 2mx+y=4 \\ 6x+(m+2)y=-4 \end{cases}$  جواب ندارد؟

(۱) -۱ (۲) ۳

(۳) -۳ (۴) ۱

**روش وارون ماتریس:** اگر  $AX=B$  یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهولی باشد آنگاه داریم:

$$X = A^{-1}B$$

تست ۲: در دستگاه  $\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=2 \end{cases}$  اگر وارون ماتریس ضرایب به صورت  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  باشد حاصل  $x+y$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۹

(۳) -۲ (۴) ۱

**روش کرامر:** اگر  $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$  یک دستگاه ۲ معادله ۲ مجهولی باشد هر کدام از جوابهای دستگاه را می‌توانیم به صورت زیر بدست آوریم.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

تست ۳: اگر یکی از جوابهای دستگاه ۲ معادله ۲ مجهولی از تقسیم دترمینان  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$  بر دترمینان  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$  بدست آید

مجموع جوابهای دستگاه چقدر است؟

(۱) -۵ (۲) ۳

(۳) صفر (۴) ۴

**دستگاه سه معادله سه مجهولی:** اگر دستگاه زیر را به صورت ضرب ماتریسی بنویسیم آنگاه:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

نکته: در این رابطه فرض بر اینست که ماتریس ضرایب وارون پذیر باشد یعنی  $|A| \neq 0$  پس اگر در دستگاه سه معادله سه مجهولی دترمینان ماتریس ضرایب صفر نباشد دستگاه یک جواب دارد.

مثال ۴: دستگاه زیر را به روش وارون ماتریس حل کنید.

**ماتریس افزوده:** اگر ستون مقادیر ثابت را به ماتریس ضرایب دستگاه اضافه کنیم ماتریس افزوده بدست می‌آید که ویژگی‌های زیر را دارد:

(۱) می‌توانیم جای دو سطر را با هم عوض کنیم یا یک سطر را در عددی غیر از صفر ضرب کنیم.

(۲) می‌توانیم هر مضربی از یک سطر با سطر دیگر جمع کرده یا از آن کم کنیم.

توجه: ویژگی‌های ماتریس افزوده فقط مربوط به سطرهاست و برای ستونها برقرار نیست.



تست ۹: ماتریس افزوده‌ی  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 9 \\ a & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & b & 4 \end{bmatrix}$  با اعمال سطری مقدماتی به  $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$  تبدیل شده است حاصل

$a+b$  کدام است؟

- (۱) ۲      (۲) -۱      (۳) ۵      (۴) -۳

**روش کرامر:** دستگاه سه معادله سه مجهولی را به صورت ضرب ماتریسی می‌نویسیم.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{|A_x|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

در ماتریس  $A_x$  به جای ستون ضرایب  $x$  مقادیر ثابت جایگذاری شده است.

تست ۱۰: مقدار  $x$  از دستگاه  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  چقدر است؟

- (۱) صفر      (۲) -۱

- (۳) ۲      (۴) ۱

$$\begin{bmatrix} a+1 & b & c \\ a & b+1 & c \\ a & b & c+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d+1 \\ d \\ d \end{bmatrix}$$

تست ۱۱: اگر  $a+b+c=0$  مقدار  $y$  از دستگاه زیر کدام است؟

- (۱)  $d$       (۲)  $b+d$       (۳)  $d+c$       (۴)  $d-a$

**نکته:** در دستگاه سه معادله سه مجهولی  $AX=B$  داریم:

(۱) اگر  $|A| \neq 0$  دستگاه یک جواب دارد.

(۲) اگر  $|A| = 0$  و  $|A_x| \neq 0$  دستگاه جواب ندارد.

(۳) اگر  $|A| = 0$  و  $|A_x| = 0$  دستگاه بی شمار جواب دارد.

مثال ۱۲: مقادیر  $m$  را طوری بیابید که دستگاه زیر بی شمار جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} 2x + my + z = m + 3 \\ 3x - y + mz = -3 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{تست ۱۳: در مورد سه صفحه‌ی } \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases} \text{ کدام درست است؟}$$

(۱) در یک نقطه مشترکند

(۲) در یک خط مشترکند

(۳) حداقل ۲ صفحه موازیند

(۴) فصل مشترکهای آنها سه خط موازی هستند

$$\text{تست ۱۴: سه صفحه‌ی } \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases} \text{ چند نقطه‌ی مشترک دارند؟}$$

(۱) در یک نقطه مشترکند

(۲) در یک خط مشترکند

(۳) حداقل ۲ صفحه موازیند

(۴) فصل مشترکهای آنها سه خط موازی هستند

۱- سه صفحه به معادلات ماتریسی  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  داده شده‌اند. فصل مشترک دو به دوی این سه

صفحه چگونه‌اند؟

(۱) موازی هم (۲) منطبق بر هم (۳) عمود بر هم (۴) گذرا از یک نقطه

۲- ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  را با عملیات سطری در روش حذفی گاوس- جردن به ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$  تبدیل

شده است. مقدار  $b$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{2}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۳- به ازای کدام مقدار  $k$  دستگاه  $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + kz = 0 \end{cases}$  دارای جواب غیرصفر است؟

(۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۴- به ازای کدام مقدار  $a$  دستگاه معادلات  $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ 5x - 4y + a = 0 \\ 8x + 7y = 3 \end{cases}$  جواب منحصر به فرد دارد؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

۵- دستگاه معادلات به صورت  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix}$  با کدام شرایط فاقد جواب است؟

(۱)  $b = 2, a = 1$  (۲)  $b \neq 2, a = 1$  (۳)  $b = 1, a = 2$  (۴)  $b \neq 1, a = 2$

۶- در دستگاه معادلات  $\begin{cases} ax + 2y - z = 1 \\ bx - y + z = 0 \\ cx + 3y + 2z = 7 \end{cases}$  اگر دترمینان ضرایب مجهولات برابر ۶ باشد، مقدار  $x$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{3}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{1}{2}$

۷- دستگاه معادلات به صورت  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$ ، با کدام شرایط بی‌شمار جواب دارد؟

(۱)  $b = a + 2$  (۲)  $b = a + 3$  (۳)  $b = 2a + 3$  (۴)  $b = 3a + 2$

۸- در روش حذفی گاوس ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & a \\ 0 & -3 & -3 & b \\ 0 & 0 & -3 & c \end{bmatrix}$  در آمده است،  $a + b + c$  کدام

است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۶ (۴) -۶

۹- اگر ماتریس افزوده‌ی دستگاه  $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 5y + 8z = b \\ -x + 3y + 8z = c \end{cases}$  با روش حذفی گاوس به  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 11 & 23 \end{bmatrix}$  تبدیل شود،

مقدار  $a + b + c$  کدام است؟

(۱) ۲۹ (۲) ۳۱ (۳) ۳۳ (۴) ۳۵

۱۰- در دستگاه معادلات  $\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ nx - y + z = 0 \\ kx + 3y + 2z = 7 \end{cases}$  اگر دترمینان ماتریس ضرایب مجهولات برابر ۲ باشد، آن‌گاه مقدار  $x$  برابر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۱۱- اگر در دستگاه  $\begin{cases} 2x - y - z = 3 \\ x + y + 2z = m \\ -x - y = n \end{cases}$  مقدار  $y$  برابر ۳ باشد، حاصل دترمینان  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & m & 2 \\ -1 & n & 0 \end{vmatrix}$  کدام است؟

(۱) ۱۸ (۲) ۱۵ (۳) ۲۱ (۴) -۱۵

۱۲- ماتریس افزوده‌ی دستگاه  $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ 5x + y - z = 3 \\ 2x - 2y + z = 4 \end{cases}$  پس از انجام عملیات سطری مقدماتی به صورت

است. مجموع جواب‌های دستگاه کدام است؟  $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & a & -\frac{7}{3} \\ \cdot & \cdot & b & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{10}{6}$  (۳)  $-\frac{4}{5}$  (۴)  $\frac{2}{5}$

۱۳- در یک دستگاه معادلات خطی، ماتریس افزوده به صورت  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$  است. مجموع جواب‌های دستگاه کدام است؟

(۱) -۱۴ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۲

۱۴- اگر در یک دستگاه سه معادله‌ی سه مجهول خطی مقدار  $y$  از دستور کرامر به شکل  $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}$  محاسبه شود، مقدار  $x$  کدام است؟

(۱) ۸ (۲)  $\frac{1}{8}$  (۳)  $\frac{11}{8}$  (۴)  $\frac{8}{11}$

۱۵- اگر دستگاه همگن  $Ax = 0$  و دستگاه غیرهمگن  $Ax = B$  دارای جواب مشترک  $(x_1, x_2, x_3)$  باشند، کدام گزینه درست است؟

- (۱) هر دو دستگاه دارای جواب یکتا هستند.
- (۲) هر دو دستگاه دارای بی‌شمار جواب‌اند.
- (۳) دستگاه همگن جواب منحصر به فرد و دستگاه ناهمگن بی‌شمار جواب دارد.
- (۴) دستگاه ناهمگن دارای جواب منحصر به فرد است و دستگاه همگن بی‌شمار جواب دارد.

۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۲	۲	۲	۱	۱	۱	۴	۲	۳	۳	۴	۴	۳	۱	۲