جزوه آموزشی

حسابان

یازدهم ریاضی

پاییز ۹۶

فصل اول :جبر و معادله

درس اول : مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی

درس دوم : معادلات درجه دوم

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

درس پنجم : آشنایی با هندسه تحلیلی

درس اول : مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی

مجموع جملات دنباله حسابی :

یه روز معلمی از بچه های کلاسش می خواد که اعداد ۱ تا ۱۰۰ رو جمع بزنن و پس از چند دقیقه دانش آموزی به نام گاوس (که بعد ها ریاضی دان بزرگی شد) این کارو انجام داد که باعث حیرت معلم شد . روش دانش آموزو ببینید :

$$\begin{array}{ccccccc} ۱ & + & ۲ & + & .... & + & ۱۰۰ \\ ۱۰۰ & + & ۹۹ & + & .... & + & ۱ \\ \hline \end{array}$$

$$۱۰۱+۱۰۱+....+۱۰۱=۱۰۰\times۱۰۱ \quad \Rightarrow \quad ۱+۲+....+۱۰۰=\frac{۱۰۰\times۱۰۱}{۲}$$

پس در حالت کلی میشه گفت :

$$۱+۲+۳+....+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

تمرین : با روش گاوس فرمولی برای بدست آوردن مجموع جملات دنباله هندسی به جمله اول a و قدر نسبت d پیدا کنید .

اینم کمک من به شما :

$$S_n=a \quad + \quad a+d \quad + \quad a+۲d \quad + \quad .... \quad + \quad a+(n-۱)d$$

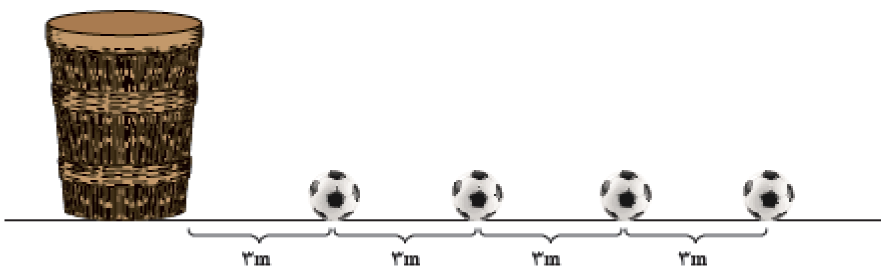
حالا با توجه به فرمول جمله آخر دنباله ، فرمولی که بدست آوردید رو بر حسب جمله آخر دنباله بنویسید .

تمرین : مجموع ۱۰۰ جمله اول دنباله ...و ۱۵ و ۱۱ و ۷ و ۳ را بدست آورید .

تمرین : مجموع همه عدد های طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را حساب کنید .

تمرین : مجموع همه عدد های دو رقمی که در تقسیم بر ۳ باقی مانده ۲ دارند را بیابید .

تمرین : در یک مسابقه به صورت شکل زیر باید شرکت کننده در مدت زمان مشخص به طور مکرر از کنار سبد حرکت کرده و توپ اول را برداشته و بازگردد و درون سبد بیاندازد. اگر شخصی در پایان ۱۵۲۸ متر را طی کرده باشد . چند توپ را داخل سبد انداخته است ؟



نکته : هرگاه مجموع $n-۱$ جمله اول را از مجموع n جمله اول کم کنیم جمله n ام باقی می ماند : $S_n - S_{n-۱} = a_n$

در ضمن مجموع یک جمله اول در واقع همان جمله اول است : $S_۱ = a$

تمرین : در یک دنباله حسابی $S_n = ۵n^۲ - ۴n$ است . قدر نسبت دنباله و جمله دهم را مشخص کنید .

مجموع جملات دنباله هندسی :

یه روز مخترع شطرنج این بازی رو به شاه نشون میده و شاه که از این بازی خوشش اومده بود بهش میگه هر چی بخواد می تونه به عنوان جایزه درخواست کنه و اون شخص می خواد که برای خونه اول شطرنج بهش یه دونه گندم و برای خونه دوم ۲ تا و برای خونه سوم ۴ تا و به همین ترتیب برای هر خونه بعدی هم دو برابر خونه قبلی بهش دونه گندم بده . شاه با ساده لوحی دستور میده بهش یه گونی گندم بدن ولی اون قبول نمیکنه و مقدار دقیق اون گندم ها رو میخواد و بعد از محاسبات ریاضیدانان اون زمون مشخص میشه در کل دنیا این مقدار دونه گندم پیدا نمیشه .

حتماً متوجه شدید که داستان قبل در مورد مجموع جملات دنباله هندسی هستش ، حالا بیایید یه فرمول برای بدست آوردن مجموع جملات دنباله هندسی بدست بیاریم تا بتونیم مساله رو حل کنیم :

اگر مجموع جملات رو به صورت زیر بنویسیم :

$$S_n = a + aq + aq^۲ + ... + aq^{n-۱}$$

و راهنماییتون کنم که یبار کل این عبارت رو در q ضرب کنید به نظرتون برای ادامه چه کاری میشه کرد تا به عبارت ساده تری برسیم !؟

تمرین : مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر چقدر است ؟

$$\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۳},۱,....$$

تمرین : اگر یک لایه محافظتی خاص بتواند نصف اشعه خطرناک رادیو اکتیو را جذب کند . حداقل چند لایه نیاز است تا لااقل ۹۷ درصد از شدت اشعه را کاهش دهد ؟

کمک من : $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+...+\frac{۱}{۲^n}\geq\frac{۹۷}{۱۰۰}$

تمرین : در دنباله ای هندسی $S_n=۲^{n+۲}-۴$ است . قدر نسبت دنباله را بیابید .

تمرین : حاصل عبارت $A=(۱+x+x^۲+...+x^۶)(۱-x+x^۲-...+x^۶)$ به ازای $x=\sqrt{۲}$ چقدر است ؟

تمرین : تمرینات صفحه ۶ کتاب را حل کنید .

درس دوم : معادلات درجه دوم

روابط بین ضرایب و ریشه های معادله درجه دوم :

سال قبل دیدیم که فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ جواب های زیر رو به ما داد :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

حالا با جمع و ضرب و تفریق کردن این جواب ها رابطه ای بین ریشه های معادله درجه دوم و ضرایب معادله پیدا کنید :

حالا فرض کنید جواب های یه معادله درجه دوم رو داریم و میخوایم خود معادله رو بنویسیم به نظرتون چیکار باید کرد ؟ کمک من به شما اینه که بگم یه معادله درجه دوم رو در حالت کلی درنظر بگیرید و کلشو بر a تقسیم کنید حالا به نظرتون ضرایب آشنا نیستن ؟

تمرین : اگر α,β ریشه های معادله $x^2-2x-4=0$ باشد مقدار $\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\alpha+1}$ را بیابید .

تمرین : در معادله $x^2-6x+3=0$ مقدار $x_1^2+x_2^2$ را بدست آورید . (توجه : $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$)

تمرین : اگر x_1,x_2 ریشه های معادله $x^2-4\sqrt{2}x-17=0$ باشند ، مقدار $|x_2-x_1|$ را بیابید .

تمرین : در معادله $x^2-(m+1)x-8=0$ رابطه $x_1=x_2^2$ بین ریشه ها برقرار است . مقدار m را بیابید .

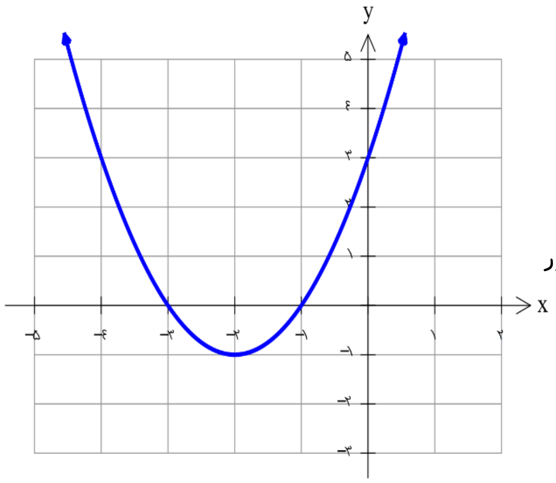
تمرین : در معادله $2x^2-mx+m-1=0$ یکی از جواب ها عکس و قرینه و جواب دیگر است . مقدار m را بیابید .

تمرین : معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $3-2\sqrt{5}$ و $3+2\sqrt{5}$ باشد .

تمرین : معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن نصف ریشه های معادله $x^2-3x-5=0$ باشد .

تمرین : محیط و مساحت مستطیلی به ترتیب ۳۸ و ۸۴ است . طول و عرض آن را بیابید .

صفر های تابع :



نمودار تابع $f(x)=x^۲+۴x+۳$ در شکل روبرو رسم شده است .

الف) معادله $f(x)=۰$ را حل کنید .

ب)چه رابطه ای بین ریشه های معادله قبل و محل تلاقی تابع با محور طول ها وجود دارد ؟

برای هر تابع f جواب های معادله $f(x)=۰$ رو در صورت وجود ، صفر های تابع f می گن و از نظر هندسی محل برخورد نمودار تابع با محور x ها ست .

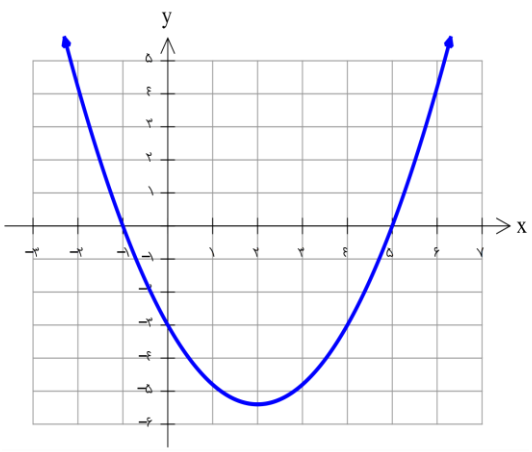
نکته : اگر $x=a$ یکی از صفر های تابع f باشه حتما تابع f عاملی به صورت $(x-a)$ داره . در نتیجه برای یه سهمی اگر x',x'' صفر های تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشن ، میشه تابع رو به صورت زیر نوشت :

$$f(x)=a(x-x')(x-x'')$$

اثبات :

$$\begin{aligned} f(x)=ax^۲+bx+c &= a(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) \\ &= a(x^۲-Sx+P) \\ &= a(x^۲-(x'+x'')x+x'x'') \\ &= a(x-x')(x-x'') \end{aligned}$$

تمرین : اگر نمودار سهمی f به صورت زیر باشد . ضابطه سهمی را بنویسید .



تمرین : $x=1$ یکی از صفر های تابع $f(x)=x^3-kx^2-x+2$ است . k و صفر های دیگر تابع را بیابید .

راهنمایی : تابع دارای عامل $(x-1)$ است و با تقسیم می توان عوامل دیگر را یافت .

تمرین : تمام صفر های تابع $f(x)=(2^x-1)^2-4(2^x-1)+3$ را بیابید .

تمرین : تمام صفر های تابع $f(x)=x^4-10x^2+16$ را بیابید .

تمرین : بدون حل معادله و فقط به کمک S,P,Δ تعداد و علامت صفر های توابع زیر را مشخص کنید .

$y=x^2+x+1$

$y=2x^2-x-6$

$y=x^2-7x+12$

تمرین : به ازای چه مقادیری از m معادله $x^{2}+(m-4)x+2m+4=0$ دو ریشه مثبت دارد ؟

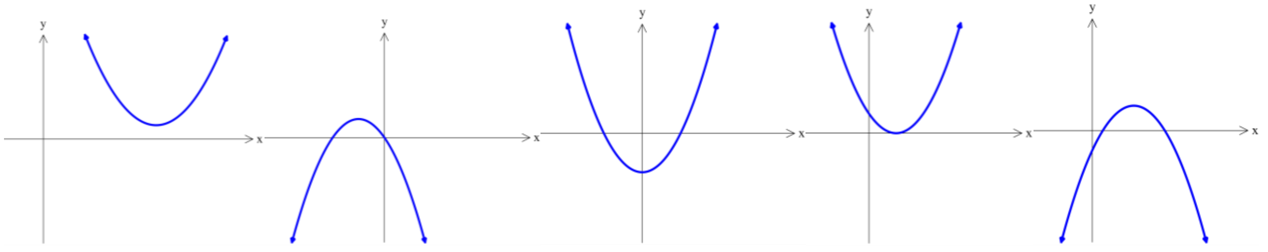
تشخیص علامت ضرایب ضابطه سهمی از روی نمودار آن :

سال قبل فهمیدیم که تو سهمی $f(x)=ax^{2}+bx+c$ علامت a بستگی به جهت بازوهای سهمی داره یعنی اگر بازو ها به سمت بالا باشن a مثبته و اگر به سمت پایین باشن a منفیه .

و از اونجایی که $f(0)=c$ هستش پس در واقع c محل برخورد تابع با محور عرض ها هستش پس می تونیم با نگاه کردن به محل بخورد تابع با محور عرض ها ، علامت c رو تشخیص بدیم .

ولی برای تشخیص علامت b میخوام که شما پیشنهاد خودتون رو بدید راهنمایی من به شما استفاده از طول راس سهمی هستش !!!

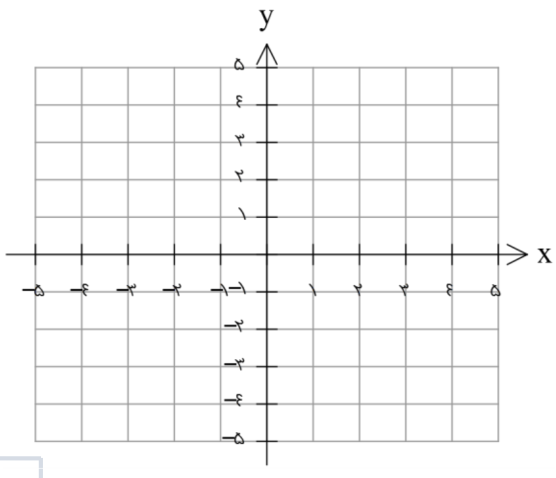
تمرین : نمودار های زیر مربوط به تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c$ هستند ، علامت ضرایب a,b,c را مشخص کنید .



روش هندسی حل معادلات :

الف) معادله $(x-1)^{2}=\frac{1}{2}x+1$ رو تو چرک نویس حل کنید .

ب) توابع $f(x)=(x^{2}-1)^{2}$ و $g(x)=\frac{1}{2}x+1$ رو رسم کنید .

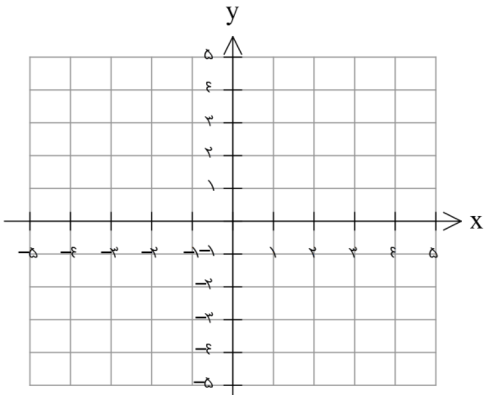


ج) جواب های معادله قسمت الف و طول محل برخورد نمودار های قسمت ب با هم چه ارتباطی دارن ؟

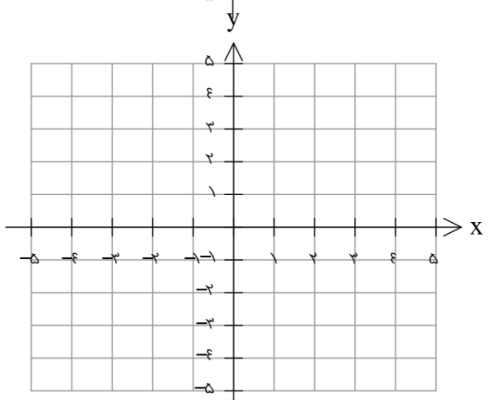
نتیجه :

تمرین : تعداد و مقدار ریشه های معادله های زیر را به روش هندسی بدست آورید .

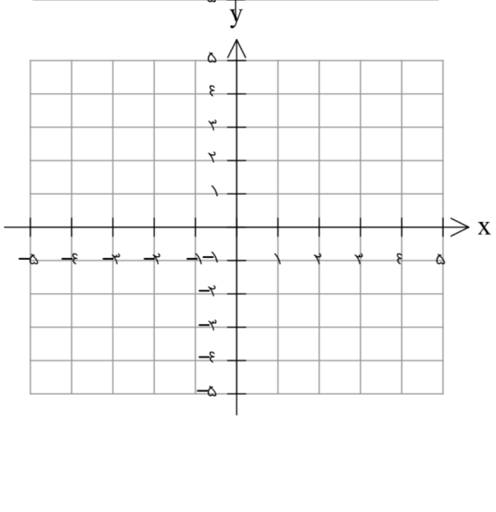
الف) $|x-1| = x^{2} - 2x + 1$



ب) $(x-2)^{2} + 1 = -2x + 5$



ج) $-|x+1| + 1 = \frac{1}{3}x$



تمرین : تمرین های صفحه ۱۵ و ۱۶ را حل کنید .

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

معادلات شامل عبارت های گویا :

در بعضی از معادله ها عبارت های کسری بوجود میاد که صورت و مخرج چند جمله ای هستند . به این نوع معادله ها معادله های گویا می گن . به مساله زیر دقت کنید :

مساله : در یک مغازه ماهی های تزیینی ، برای نگه داری ماهی های آب شود محلول آب نمک ۵ درصد نیاز است ولی کارگر مبتدی مغازه ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب ۳ درصد درست کرده است . اگر در مغازه به اندازه کافی نمک وجود داشته باشد چقدر نمک لازم است تا محلول ۵درصد شود ؟

بیایید با کمک هم حلش کنیم :

گام اول : وزن نمک و وزن محلول فعلی چقدره ؟

گام دوم : اگر ما x گرم نمک دیگه بهش اضافه کنیم وزن نمک و وزن محلول هر کدوم چقدر میشه ؟

گام سوم : اینکه میگیم محلول ۷ درصد یعنی نسبت چی به چی باید ۰/۰۷ بشه ؟ حدستون رو بنویسید .

گام چهارم : حالا آیا میشه گفت اینی که بدست اومده معادله گویاست ؟ پیشنهاد من برای حلش اینه که یجوری مخرج ها رو از بین ببریم ، روش شما برای از بین بردن مخرج ها چیه ؟ خوب حلش کنید .

تمرین : مساله قبل رو با فرض اینکه تو مغازه هیچ نمک دیگه ای موجود نباشه و کارگر مغازه مجبور بشه کمی از آب محلول رو تبخیر کنه حلش کنید . یعنی در واقع وزن آبی که باید تبخیر بشه رو بدست بیارین .

نکته : در حل معادلات گویا جوابهایی که مخرج را صفر کنند مورد قبول نخواهند بود .

تمرین : معادلات زیر را حل کنید .

الف) $\frac{4x-4}{x^2-4}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x+2}$

ب) $3=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$

ج) $\frac{24}{10-x}=1+\frac{24}{10+x}$

تمرین : به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{a}{a-x}$ دارای جواب $x=2$ است .

تمرین: دو کارگر کاری را ۱۸ روزه انجام می دهند ، اگر هر کدام به تنهایی کار کنند ، کارگر اول این کار را ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم تمام می کند . هر کدام به تنهایی در چند روز این کار را تمام می کنند ؟

تمرین: یک محلول آب نمک با غلظت ۸۰ داریم و به آن ۵ لیتر محلول آب نمک ۲۰ درصد اضافه می کنیم . اگر محلول بدست آمده دارای غلظ ۵۰ درصد باشد ، حجم محلول اولیه چند لیتر بوده است ؟

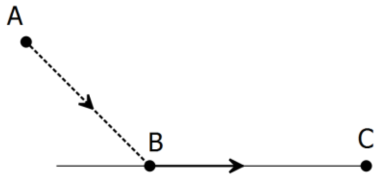
تمرین: قطاری یک مسیر ۶۰ کیلومتری را طی می کند ولی در راه برگشت از سرعت خود ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته و به همین دلیل نیم ساعت دیر تر می رسد . زمان رفت این قطار چقدر بوده است ؟

تمرین : « مصریان باستان معتقد بودند مستطیلی که نسبت طول به عرض آن برابر با نسبت مجموع این دو به طول است زیباترین مستطیل خواهد بود ($\frac{L}{W}=\frac{L+W}{L}$) و این نسبت را در ریاضیات نسبت طلایی می نامند .این نسبت در بیشتر اندامهای بدن و شبکیه چشم انسان رعایت شده است و از این نسبت برای ساخت بناهای تاریخی بسیاری استفاده شده است . اگر بخواهیم زمینی با محیط ۱۴۴ متر و نسبت طلایی بسازیم طول و عرض آن چقدر باید باشد ؟

معادلات شامل عبارت های گنگ :

در بعضی از معادله ها عبارت های رادیکالی بوجود میاد که به این نوع معادله ها معادله های گنگ می گن . به مساله زیر دقت کنید :

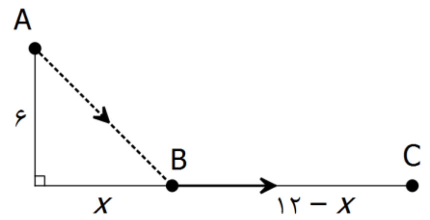
مساله : معمولاً مرغای دریایی برای شکار ماهی قستی از مسیر خودشونو تو هوا و قسمتیشو هم رو سطح آب طی می کنن تا کمترین انرژی ممکنو مصرف کنن !!! حالا یه مرغ دریای رو تصور کن که مثل شکل پایین میخواد اول تو نقطه B خودشو به سطح آب برسونه بعدش رو سطح آب تا محل شکار یعنی نقطه C حرکت کنه .



اگر انرژی لازم برای هر متر پرواز در هوا براشون ۱۴ کیلو کالری و انرژی لازم برای پرواز به موازات سطح آب ۱۰ کیلو کالری باشه و فاصله مرغ دریایی از سطح آب ۶ متر و فاصله افقی از محل شکار ۱۲ متر باشه طبق محاسبه زیست شناسان این پرنده با مصرف ۱۸۰ کیلو کالری به محل شکار میرسه چون این عدد بهینه ترین مقدار مصرف انرژی هستش !!! هدف ما اینه که محاسبه کنیم ببینیم نقطه فرود یعنی B تو چه فاصله ای از نقطه شکار یعنی C قرار میگیره ؟؟؟

حالا بیایید با هم مساله رو حل کنیم :

در این مساله اعداد مربوط به فاصله ها ۶ و ۱۲ متره که می تونه تو شکل برای مشخص کردن مجهولات مورد استفاده قرار بگیره .



حالا شما میتونید فاصله AB رو حساب کنید و یه تساوی بنویسید که مجموع انرژی مصرف شده در کل مسیر ۱۸۰ بشه .
سوال اصلی من از شما اینه : روش پیشنهادیتون برای حل معادله چیه ؟

نکته : در حل معادلات گنگ جواب ها حتماً باید در معادله صدق کنن در غیر این صورت پذیرفته نیستن چون عمل توان رسانی میتونه جواب های اضافی وارد معادله کنه.

مثلاً : در حل معادله $\sqrt{x+۲}=x-۴$ پس از توان رسانی و حل دو جواب ۲ و ۷ بدست می آید که فقط یکی از آنها درست است و آن هم عدد ۷ است زیرا $\sqrt{۲+۲}\neq ۲-۴$ ولی $\sqrt{۷+۲}=۷-۴$

تمرین : مختصات نقاطی روی محور x را بیابید که فاصله آنها از نقطه $(۲,۳)$ برابر ۵ باشد .

تمرین : معادلات زیر را حل کنید .

الف) $\sqrt{۲x+۳}+x=۶$

ب) $\frac{۳}{\sqrt{x}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{x}-۱}=۲$

ج) $\sqrt{۲x+۱}-\sqrt{x}=۱$

د) $\sqrt{x^{۲}-۴}+۲\sqrt{x}=۰$ (آیا می توان بدون حل به نتیجه رسید ؟!!!)

تمرین : بدون حل معادله بگویید چرا معادله $\sqrt{x+۱}+\sqrt{۲x-۴}+۲=۰$ ریشه حقیقی ندارد .

تمرین : تمرین های صفحه ۳۲ حل شود .

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

تعریف قدر مطلق :

سال قبل با قدر مطلق آشنا شدیم و دیدیم که قدر مطلق یک عدد حقیقی به صورت زیر تعریف می شه :

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

تمرین : حاصل عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید .

$|۱-۲(۲-۳)| =$ $\qquad$ $|\sqrt{۵}-\sqrt{۳}| =$ $\qquad$ $|\sqrt{۲}-۲| =$

ویژگی های قدر مطلق :

الف) $|x| \geq ۰$

تمرین : معادله $|x+۱|+\sqrt{x^{۲}-۱}=۰$ چند جواب دارد ؟

ب) $\sqrt{x^{۲}} = |x|$

تمرین : عبارت های زیر را تا حد ممکن ساده کنید .

$\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} =$ $\qquad$ $\sqrt{۴a^{۴}+۴a^{۲}+۱} =$

تمرین : ثابت کنید $|ab| = |a||b|$ و $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

ج) $|x|=a \xleftrightarrow{a\geq 0} x=a$ یا $x=-a$

تمرین : معادلات زیر را حل کنید .

$|x+9|=2x+3$

$||x|-1|=2$

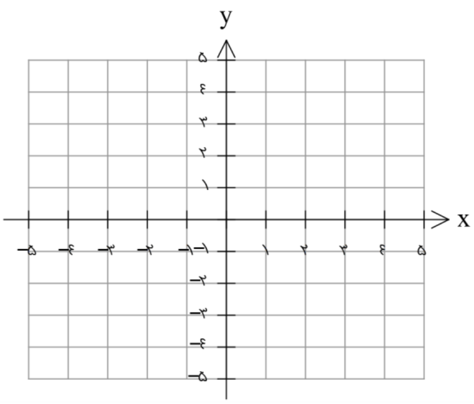
د) $|x|=|a| \longleftrightarrow x=a$ یا $x=-a$

تمرین : معادلات زیر را حل کنید .

$|x+9|=|2x+3|$

ه) $|-x|=|x|$

تمرین : تابع $y=|1-x|$ را رسم کنید .



و) $|x|^2=x^2$ (با این نکته می شه معادله های قسمت ج و د رو هم حل کرد)

تمرین : معادله $x^{۲}-۴|x|+۳=۰$ چند جواب دارد ؟ جواب ها را مشخص کنید .

ز) $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$

تمرین : نامعادله $|۲x-۱|<۳$ را حل کنید .

تمرین : ثابت کنید $|a+b|\le |a|+|b|$ (نا مساوی مثلثی)

راهنمایی : از آنجایی که $|a|\le|a|$ پس می توان نوشت $-|a|\le a\le|a|$ و همین طور $-|b|\le b\le|b|$.

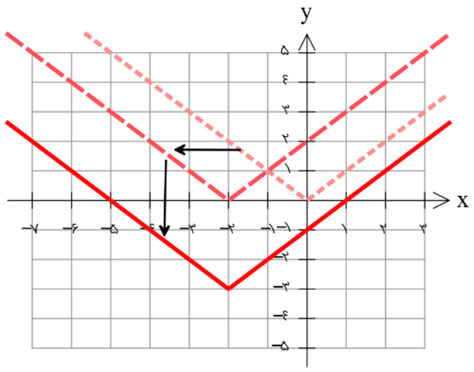
ح) $|x|>a \Leftrightarrow x>a$ یا $x<-a$

تمرین : جواب نا معادله $|۱-۲x|>۳$ را بیابید .

رسم توابع قدر مطلقی :

الف) رسم تابع با یک قدر مطلق بدون ضریب و توان : به کمک انتقال رسم کنید راحت تره .

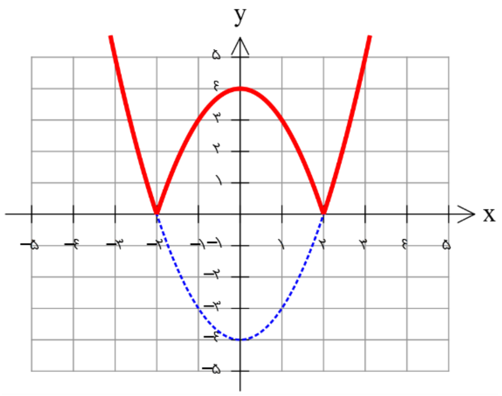
مثال : تابع $y=|x+۲|-۳$ رو با استفاده از تابع $y=|x|$ و یک واحد حرکت به راست و یک واحد به پایین رسم می کنیم .



ب) رسم تابع شامل یک قدر مطلق با ضریب یا توان : در این صورت راحت تره که اول تابع داخل قدر مطلق رسم و بعدش قسمت زیر محور x رو پاک کرده و قرینه اونو بالای محور رسم کنیم چون :

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & f(x)\geq ۰ \quad \text{بالای محور خود تابع} \\ -f(x) & f(x)<۰ \quad \text{پایین محور قرینه تابع} \end{cases}$$

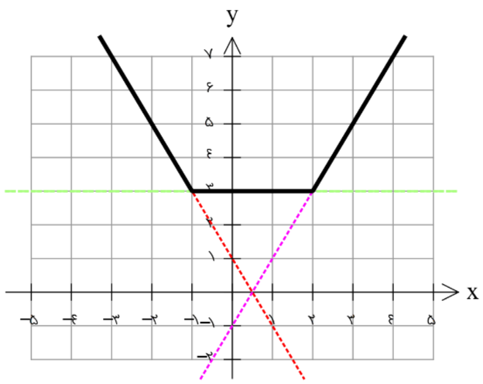
مثال : برای رسم تابع $y=|x^۲-۴|$ اول $f(x)=x^۲-۴$ رو رسم می کنیم بعدش قسمت پایینو پاک کرده و قرینشو بالا می کشیم .



ج) رسم تابع قدر مطلقی پیچیده (چند قدر مطلق یا ترکیب عبارت قدر مطلقی و غیر قدر مطلقی) :

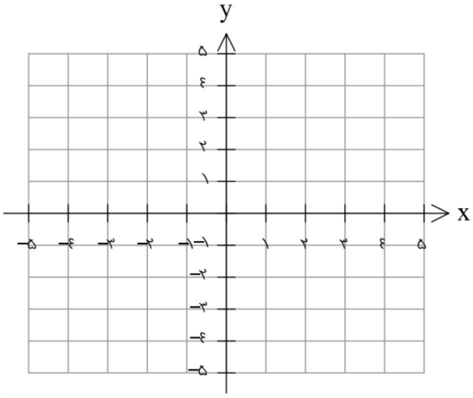
مثال : برای رسم تابع $y=|x+۱|+|x-۲|$ اول ریشه های هر قدر مطلقو مشخص می کنیم که ۲ و ۱- هستند. بعدش هر قدر مطلقو تعیین علامت می کنیم .

$$y=\begin{cases} -(x+۱)-(x-۲) & x<-۱ \\ (x+۱)-(x-۲) & -۱\leq x\leq ۲ \\ (x+۱)+(x-۲) & x>۲ \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} -۲x+۱ & x<-۱ \\ ۳ & -۱\leq x\leq ۲ \\ ۲x-۱ & x>۲ \end{cases}$$

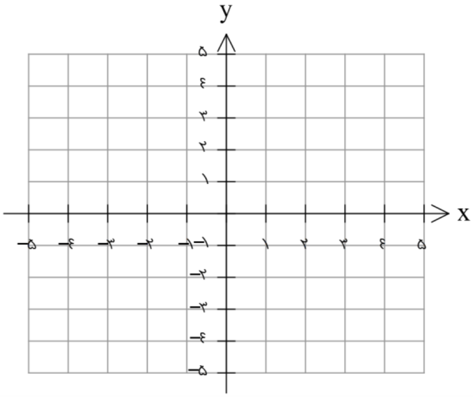


تمرین : نمودار توابع زیر را رسم کنید .

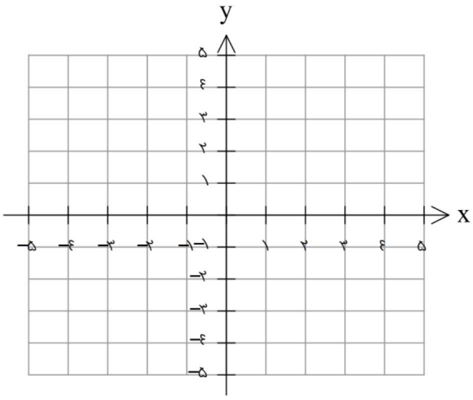
الف) $y = 3|x^2 - 2x| + 1$ (ضریب میتونه برگرده توی قدر مطلق)



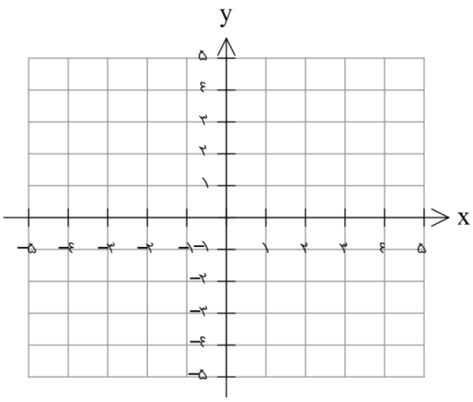
ب) $y = |x - 1| - |x + 3|$



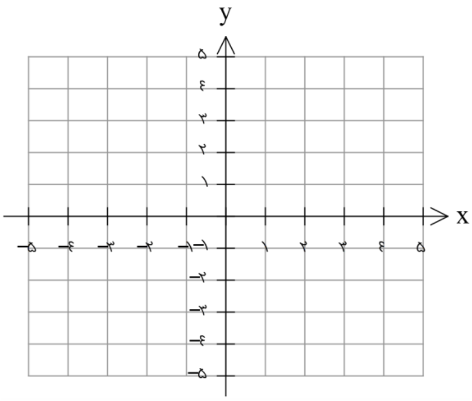
ج) $y = ||x + 1| - 1|$



د) $y = |2x + 1| + |3x - 2|$

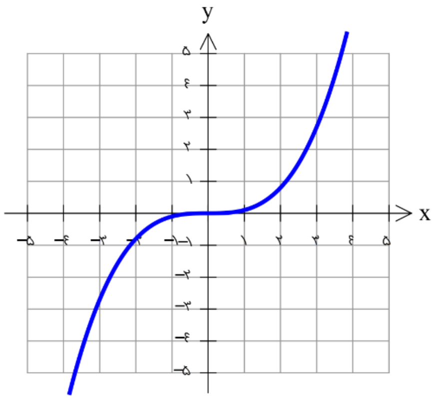


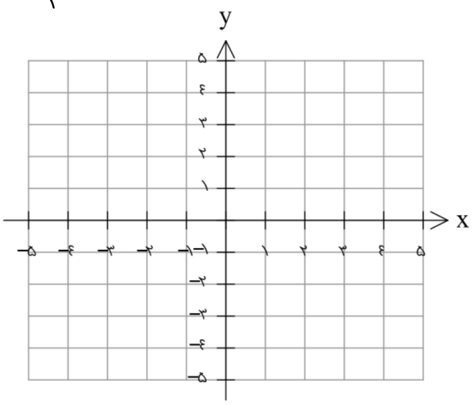
۵) $y = x - 3|x - 1| + 2$



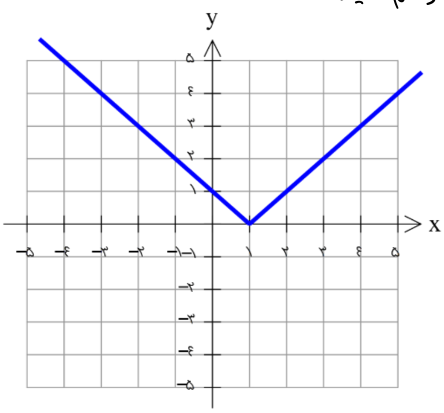
تمرین : معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ را به روش هندسی حل کنید .

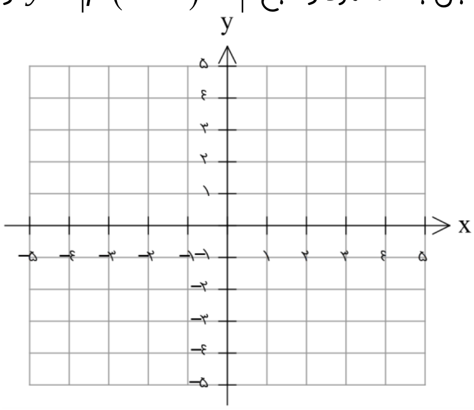
تمرین : اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد نمودار تابع $y = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ را رسم کنید .





تمرین : اگر نمودار f به صورت مقابل باشد نمودار تابع $y = |f(x+1) - 1|$ را رسم کنید .





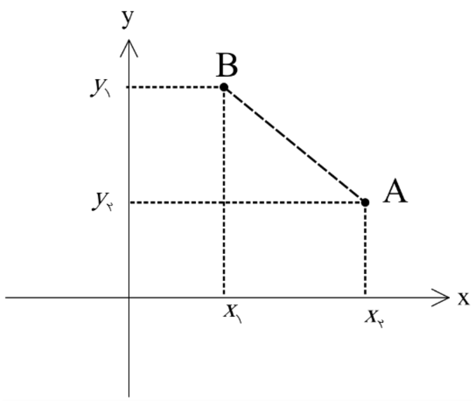
تمرین : تمرینات صفحه ۲۸ را حل کنید .

درس پنجم : آشنایی با هندسه تحلیلی

هندسه تحلیلی در واقع ترکیب هندسه و جبر مقدماتیه . در واقع تو هندسه تحلیلی به هر نقطه تو صفحه یه آدرس داده میشه که بهش مختصات می گن و با همین آدرس ها معادلات جبری شکل ها نوشته میشن . بنیانگذاران هندسه تحلیلی دکارت و فِرما تو قرن ۱۷ ام بودن .

فاصله بین دو نقطه :

اگر $A(x_۲,y_۲)$ و $B(x_۱,y_۱)$ دو نقطه مثل شکل تو صفحه مختصات باشن به کمک قضیه فیثاغورس یه فرمول برای بدست آوردن فاصله دو نقطه بدست بیارین .



تمرین : اگر $A(۱,۳),B(-۱,۲),C(۵,-۵)$ سه راس یک مثلث باشند .

الف) طول اضلاع را بیابید .

ب) نشان دهید این مثلث قائم الزاویه است .

ج) شیب پاره خط AB,AC نسبت به هم چگونه اند ؟ کدام دو ضلع مثلث هستند ؟

حدس شما در مورد شیب و عمود بودن :

تمرین : معادله عمود منصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(1,2), B(-1,3)$ را به هم وصل می کند .

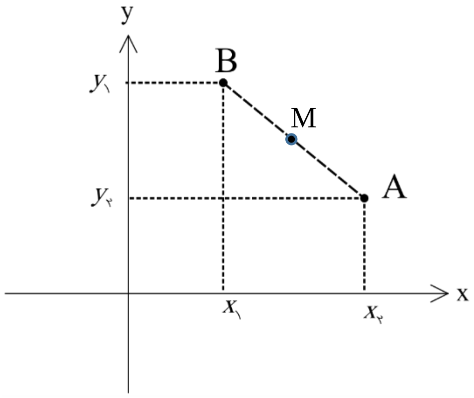
راهنمایی : هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است بنابر این اگر $P(x,y)$ نقطه ای باشد که $PA = PB$ آنگاه این نقطه روی عمود منصف پاره خط است :

تمرین : در سوال قبل شیب خط بدست آمده چه رابطه ای با شیب پاره خط دارد ؟ آیا حدس قبل درست بوده ؟

نتیجه :

تمرین : آیا نقطه $(4,1)$ روی عمود منصف پاره خط واصل بین $A(1,1), B(2,-2)$ قرار دارد ؟

مختصات نقطه وسط یک پاره خط :



اگر $A(x_2,y_2)$ و $B(x_1,y_1)$ دو نقطه مثل شکل تو صفحه مختصات باشن و M مختصات وسط پاره خط باشه تصویر این نقاط رو روی محور های مختصات تصور کن و فرمولی برای بدست آوردن مختصات M بنویس :

تمرین : معادله عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه $A(1,2), B(-1,3)$ را به کمک نقطه تقاطع و شیب پاره خط بنویسید .

تمرین : نقاط $A(1,4), B(-3,1), C(0,-1)$ رئوس مثلث هستند.طول میانه وارد بر ضلع BC را بیابید .

تمرین : قرینه نقطه $A(1,-2)$ را نسبت به نقطه $M(-1,3)$ بدست آورید .

تمرین : قرینه نقطه $A(3,-4)$ را نسبت به مبدا مختصات بدست آورید .

فاصله یک نقطه از یک خط :

اگر $A(x_0,y_0)$ یک نقطه و $ax+by+c=0$ معادله یک خط باشه ، فاصله نقطه و خط از این فرمول بدست میاد :

$$|AH| = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

تمرین : فاصله نقطه $A(-۲,۴)$ از خط $y=\frac{۴}{۳}x+۴$ را بدست آورید .

تمرین : فاصله نقطه $A(۱,۲)$ از خط $۳x+۴y=k$ برابر ۲ است . k را بیابید .

تمرین : اگر نقطه $A(۲,۳)$ راس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $۳x-۴y=۹$ باشد ، مساحت مربع چقدر است ؟

تمرین : دو خط $۲x-۳y=۲$, $۳x+۲y=۱$ معادله های دو ضلع یک مستطیل هستند و نقطه $A(۲,۵)$ یک راس مستطیل است . مساحت مستطیل چقدر است ؟

تمرین : مساحت مستطیلی که اضلاع آن روی دو خط $۴x+۲y+۶=۰$, $۲x+y=۲$ قرار دارد چقدر است ؟

(راهنمایی : فاصله دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر است با : $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$)

تمرین : تمرین های صفحه ۳۵ و ۳۶ را حل کنید .

فصل دوم :تابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

درس دوم : انواع تابع

درس سوم : وارون تابع

درس چهارم : اعمال بین توابع

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

تابع : یک تابع از مجموعه A به مجموعه B یک رابطه بین دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقا یک عضو از B نسبت داده می شود . A را دامنه و B را هم دامنه تابع می گویند . (هم دامنه در واقع هر مجموعه دلخواه شامل برد را می گویند)

تمرین : تمام توابع از مجموعه $A=\{1,2\}$ به $B=\{a,b\}$ را بنویسید . (از نمودار پیکانی استفاده کنید)

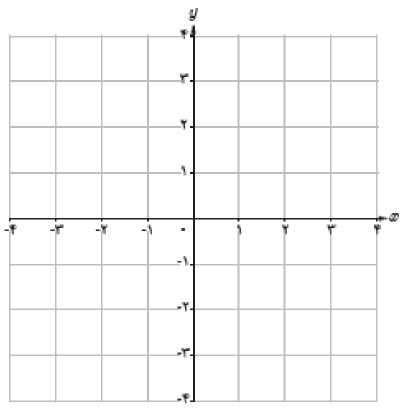
تمرین : از یک مجموعه n عضوی به مجموعه m عضوی ، چند تابع می توان نوشت ؟ چرا ؟

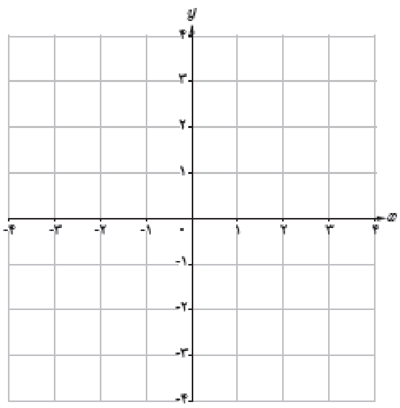
نکته : برای مشخص بودن یک تابع باید حتما دامنه ، هم دامنه و ضابطه تابع مشخص باشد . اگر برای تابعی دامنه و هم دامنه بیان نشده باشد دامنه آن بزرگ ترین دامنه ممکن خواهد بود و هم دامنه نیز هر مجموعه ای شامل برد .

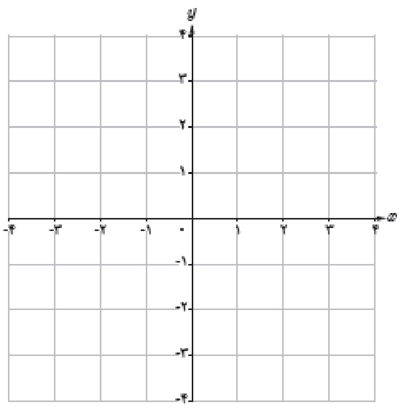
مثال : تابع با ضابطه با دامنه $(-1,2]$ و برد $[2,8)$ را می توان به صورت های زیر نمایش داد .

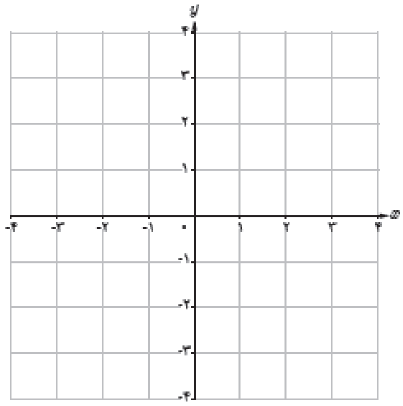
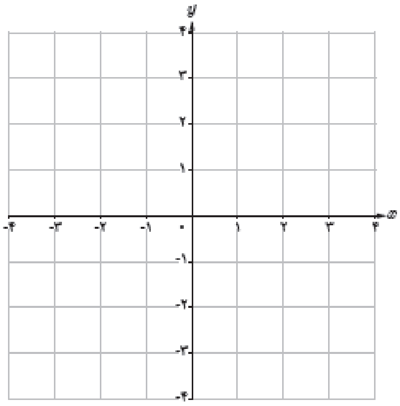
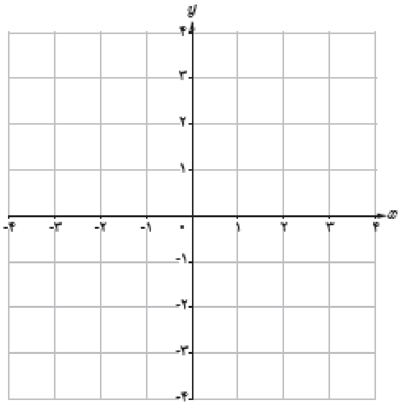
$$\begin{cases} f:(-1,2]\to[2,8) \\ f(x)=2x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} f:(-1,2]\to R \\ f(x)=2x^2 \end{cases}$$

تمرین : تابع $y=x^2 , y=3x$ را با دامنه های $\{-1,0,1,2\},[-1,2),R$ رسم کنید . برد هر کدام را نیز بیابید .







تساوی دو تابع :

دو تابع f و g با هم مساوی هستند هرگاه   الف) دامنه هر دو برابر باشد   ب) به ازای هر x از دامنه $f(x)=g(x)$

تمرین : کدامیک از زوج توابع زیر با هم برابرند و کدام یک نیستند . چرا ؟

الف) $f(x)=\frac{x}{x}$ و $g(x)=1$

ب) $f(x)=\frac{2x^2+2}{x^2+1}$ و $g(x)=2$

ج) $f(x)=\sqrt{4x^2}$ و $g(x)=2x$

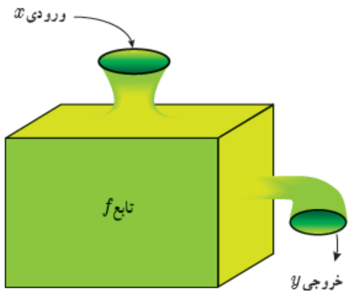
د) $f(x)=x^2$ و $g(x)=x|x|$

ه) $f(x)=|x(x-1)|$ و $g(x)=|x^2-x|$

و) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}$ و $g(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-1}$

مقدار تابع (تابع به عنوان ماشین) :

یک تابع مانند ماشینی عمل می کند که مقداری را به عنوان ورودی دریافت کرده و بعد از انجام چند عملیات روی آن ، مقداری را به عنوان خروجی به ما می دهد .



تمرین : اگر $f(x)=x^2+2x+1$ حاصل $f\left(\sqrt{2}-1\right)$ چقدر است ؟

تمرین : اگر $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{x+1}{x-2}$ حاصل $f(2)$ را بیابید .

تمرین : تمرین های صفحه ۴۲ و ۴۳ را حل کنید .

درس دوم : انواع تابع

توابع گویا :

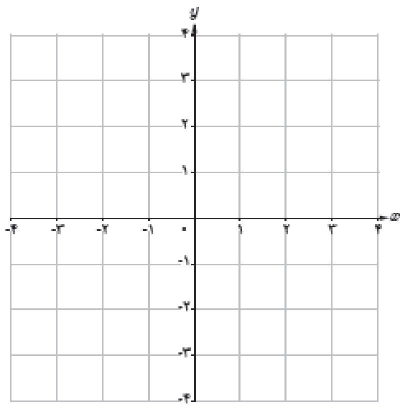
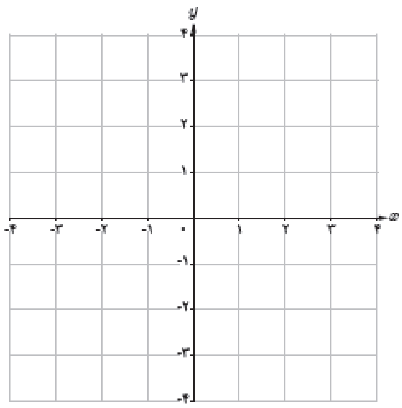
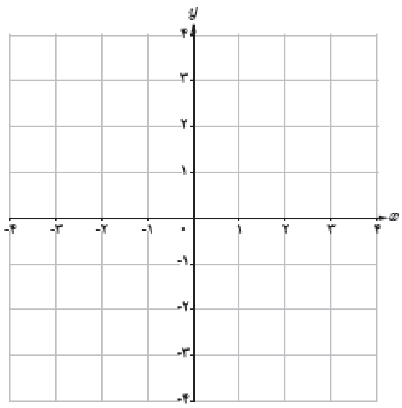
توابعی به صورت $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ که صورت و مخرج چند جمله ای و مخرج مخالف صفر است . مانند :

$$f(x)=\frac{۵}{x+۲} \qquad g(x)=\frac{\frac{۱}{۳}x-۴}{x^{۲}-۷x+۱} \qquad h(x)=\frac{\sqrt{۵}x+۲}{x^{۳}+۱}$$

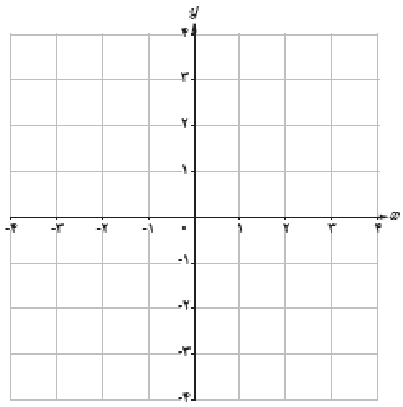
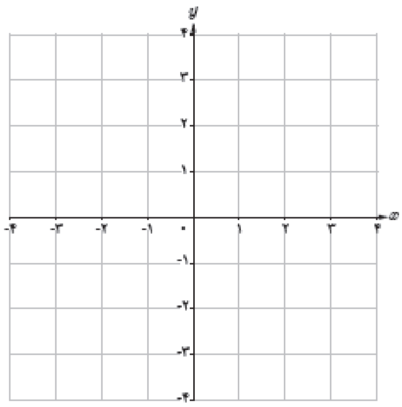
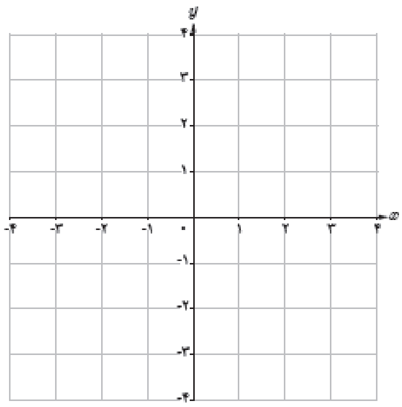
دامنه توابع گویا تمام اعداد حقیقی به جز مقادیری است که مخرج را صفر کنند : $D=R-\{x \mid g(x)=۰\}$

اما ممکن است دامنه تابع را محدود کنیم .

تمرین : تابع $y=\frac{۱}{x}$ را در دامنه های $R-\{۰\},R^{+},\{۱,۲,۳\}$ رسم کنیم .

تمرین : نمودار توابع $y=\frac{۱-x}{x},y=\frac{-۱}{x},y=\frac{۱}{x+۱}$ را رسم کنید . و برد آنها را بنویسید.

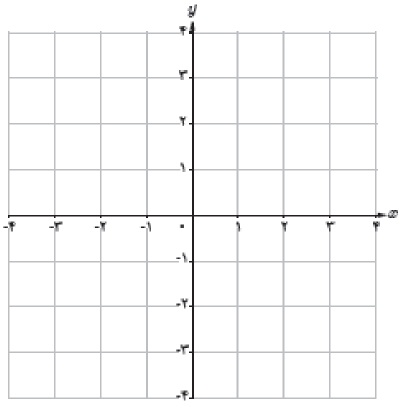
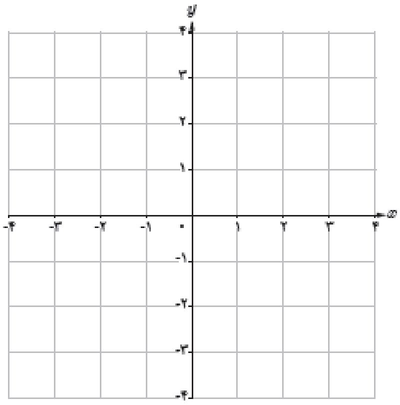
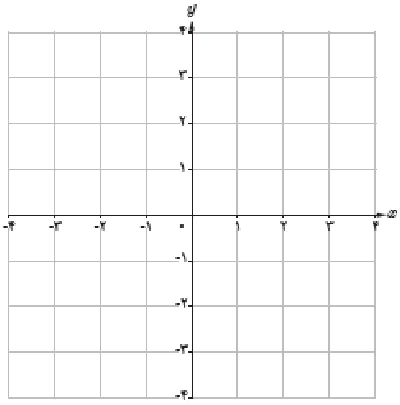
توابع رادیکالی :

توابعی شامل عبارت رادیکالی را توابع گنگ یا رادیکالی می گویند .

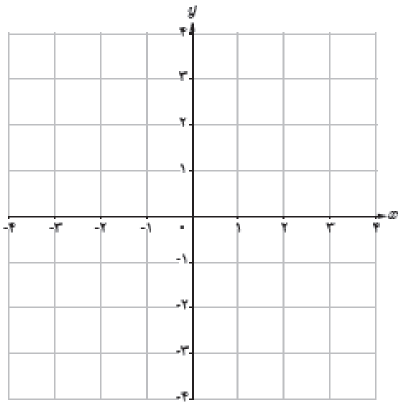
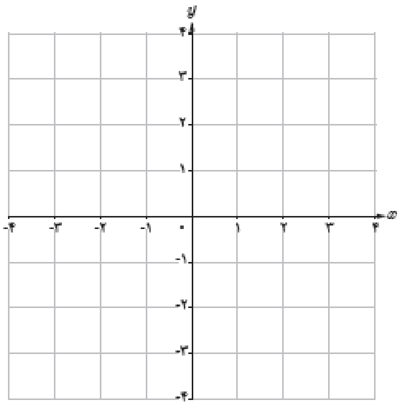
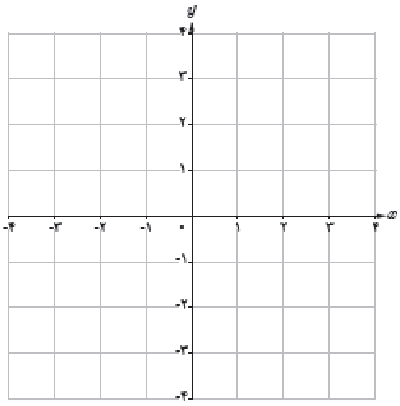
دامنه توابع $y=\sqrt{f(x)}$ اعدادی است که زیر رادیکال را مثبت کند : $D=\{x \mid f(x)\geq ۰\}$

اما ممکن است دامنه تابع را محدود کنیم .

تمرین : تابع $y=\sqrt{x}$ را در دامنه های $\{۱,۲,۳\}, R^+, [۱,۴)$ رسم کنیم .

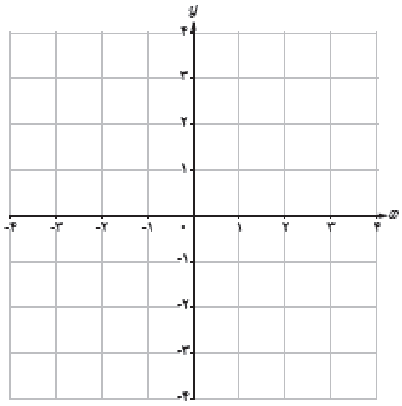




تمرین : نمودار توابع $y=\sqrt{x+۱}-۱ , y=۱-\sqrt{x} , y=\sqrt{x-۲}$ را رسم کنید .و برد آنها را بنویسید.

تمرین : نمودار تابع زیر را رسم کنید .

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{۱}{x} & x<۰ \\ -\sqrt{x+۱} & x\geq ۰ \end{cases}$$



تمرین : دامنه توابع زیر را بیابید .

الف) $f(x)=\frac{x+۲}{۲-x}$

ب) $f(x)=\frac{-۲x+۱}{x^{۲}+۲}$

ج) $f(x)=\frac{۲x+۱}{x^{۲}+۵x+۶}$

د) $f(x)=\sqrt{۳x-۲}$

ه) $f(x)=۳\sqrt{x}-۲$

و) $f(x)=\sqrt{۸-۲x}$

ز) $f(x)=\frac{\sqrt{۹-x^{۲}}}{x-۲}$

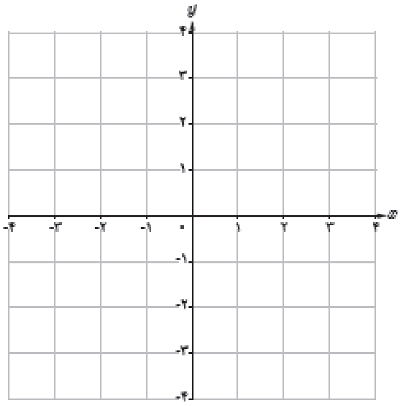
توابع پله ای :

توابعی که از چند تابع ثابت تشکیل شده است را تابع پله ای می نامند.

مثال : هزینه پست برای ارسال بسته های مختلف با توجه به وزن آنها به صورت زیر است .

x (وزن بسته) کیلوگرم	$۰ < x \leq ۲$	$۲ < x \leq ۵$	$۵ < x \leq ۱۰$	$۱۰ < x \leq ۱۲$
$f(x)$ (هزینه ارسال) برحسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

تابع مربوطه را نوشته و نمودار آن را رسم کنید .



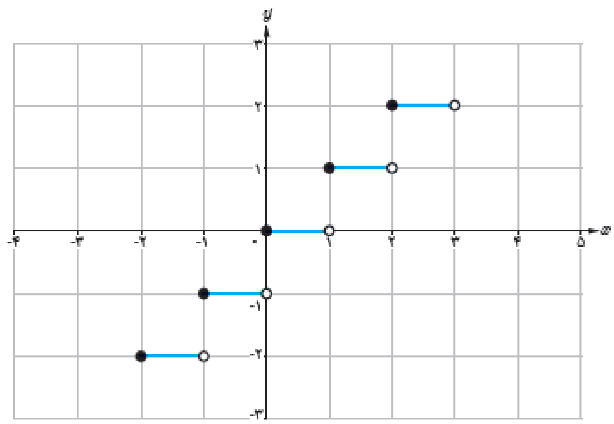
توابع جزء صحیح :

گونه خاصی از تابع پله ای است که کاربرد فراوانی دارد . و به صورت $y=[f(x)]$ تعریف می شود .

جزء صحیح عدد حقیقی x در واقع بزرگ ترین عدد صحیح نا بزرگ تر از x است .

مثال : $\left[\frac{-۱}{۳}\right]=-۱$ ، $\left[\frac{۱}{۳}\right]=۰$ ، $[\sqrt{۳}]=۱$ ، $[-۲/۱]=-۳$ ، $[۲/۹۹]=۲$ ، $[۲]=۲$

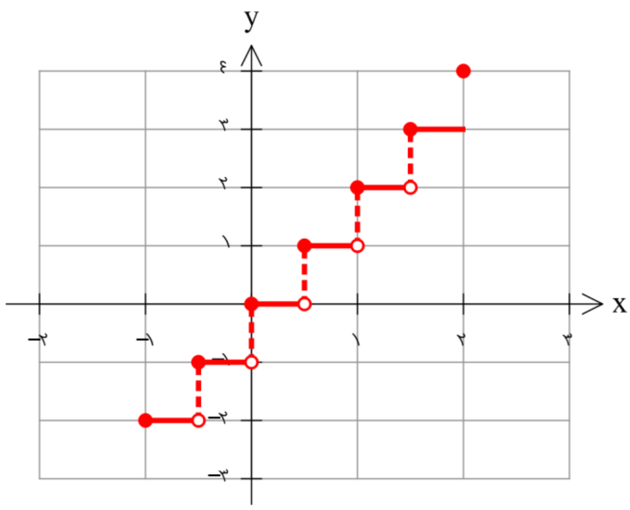
مثال : تابع $y=[x]$ در بازه $[-۲,۳)$ رسم شده است جدول را کامل کنید . (این تابع دارای دامنه R و برد Z است)



x	$y=[x]$
$-۲ \leq x < -۱$	$y=-۲$
$-۱ \leq x < ۰$	
$۰ \leq x < ۱$	
$۱ \leq x < ۲$	
$۲ \leq x < ۳$	

تمرین : نمودار تابع $y=[2x]$ را در بازه $[-1,2]$ رسم کنید .

$-1\le x\le 2 \Rightarrow -2\le 2x\le 4$



$-2\le 2x<-1 \to [2x]=-2 \quad , \quad -1\le x<-\frac{1}{2}$

$-1\le 2x<0 \to [2x]=-1 \quad , \quad -\frac{1}{2}\le x<0$

$0\le 2x<1 \to [2x]=0 \quad , \quad 0\le x<\frac{1}{2}$

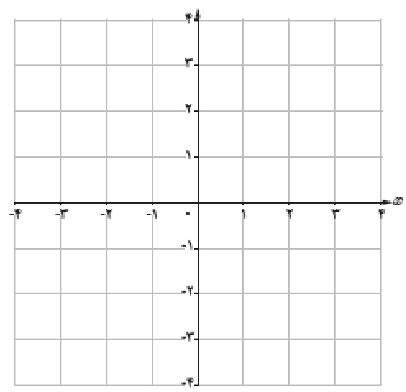
$1\le 2x<2 \to [2x]=1 \quad , \quad \frac{1}{2}\le x<1$

$2\le 2x<3 \to [2x]=2 \quad , \quad 1\le x<\frac{3}{2}$

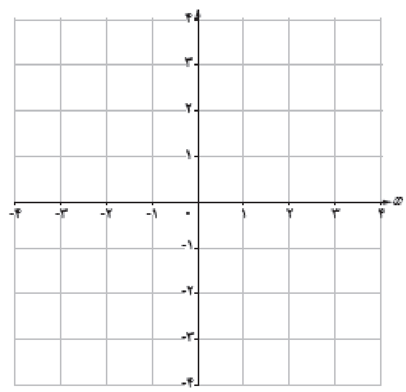
$3\le 2x<4 \to [2x]=3 \quad , \quad \frac{3}{2}\le x<2$

$2x=4 \to [2x]=4 \quad , \quad x=2$

تمرین : نمودار تابع $y=\left[\frac{x}{3}\right]$ را در بازه $[-6,6)$ رسم کنید .



تمرین : نمودار تابع $y=x+2[x]$ را در بازه $[-1,2)$ رسم کنید برد این تابع در دامنه R چیست ؟



معادله تابع :

معادلات شامل دو متغیر x و y یک رابطه را نمایش می دهند مثلا $x+y=1$ مجموعه زوج مرتب هایی است که مجموع مولفه های آن ۱ است . نمودار این معادله یک خط است که معمولا به صورت $y=-x+1$ نمایش می دهند . اما همه معادلات با دو متغیر x و y تابع نیستند و فقط آنهایی تابع خواهند بود که به ازای هر x تنها یک y به ما بدهند .

مثال : $y=|x|+1$ تابع است ولی $x=|y|+1$ تابع نیست زیرا مثلاض به ازای $x=2$ مقدار $y=\pm1$ می هد.

مثال : $y=1$ تابع است زیرا برای هر x یک مقدار y (مقدار ۱) را به ما می دهد ولی $x=1$ تابع نیست زیرا به ازای هر x هر مقداری برای y می دهد . (می توانید در نمودار آنها این مطلب را به وضوح ببینید)

تمرین : کدام یک از روابط زیر تابع و کدام یک تابع نیست ؟ چرا؟

الف) $x^2+y^2=1$

ب) $|x+y|=1$

ج) $\sqrt{x}+y=1$

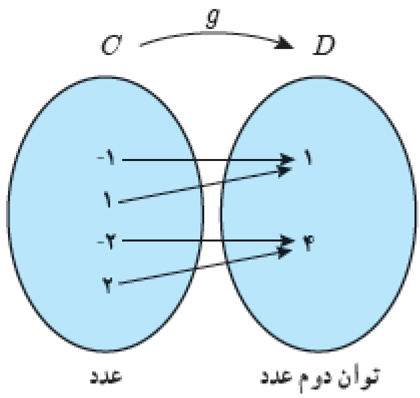
د) $x+\sqrt{y}=1$

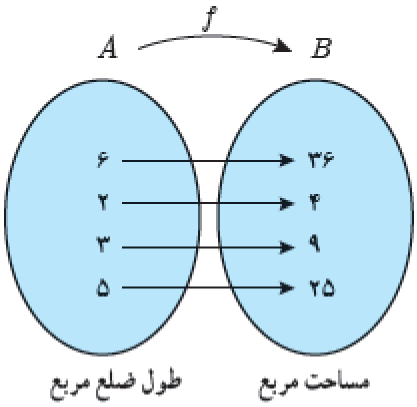
ه) $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\geq 2 \\ x+1 & x\leq 2 \end{cases}$

و) $f(x)=\begin{cases} 1-x & x\geq 0 \\ x+1 & x\leq 0 \end{cases}$

درس سوم : وارون تابع

دو تابع f و g را در نظر بگیرید .





هر دو تابع را به صورت زوج مرتب نوشته سپس جای مولفه ها را عوض کنید .

کدام یک از روابط جدید بدست آمده تابع هستند ؟

تابع وارون :

اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می دهند و به صورت $f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$ تعریف می کنند . اگر f^{-1} تابع باشد آنگاه f را وارون پذیر و f^{-1} را وارون تابع f می نامند .

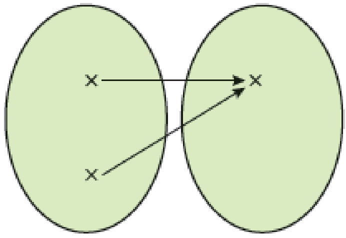
توجه : عدد منفی یک در بالای f صرفا یک علامت است و به توان منفی نیست پس f^{-1} را با $\frac{1}{f}$ اشتباه نگیریم .

سوال : با توجه به دو تابع ذکر شده در اول درس فکر می کنید یک تابع برای آن که وارون پذیر باشد چه شرایطی باید داشته باشد ؟

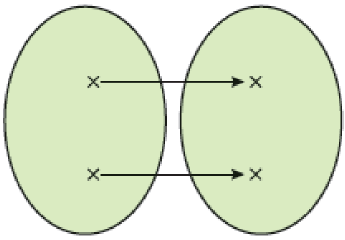
تابع یک به یک :

توابعی وارون پذیر هستند که به هر عضو از برد دقیقاً یک عضو از دامنه نظیر شود . در این صورت تابع را یک به یک می گویند . پس شرط وارون پذیری تابع آن است که تابع یک به یک باشد .

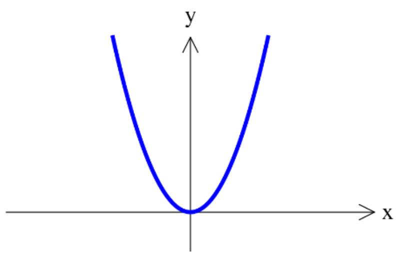
پس از نظر نموداری تابعی یکی به یک است که هر خط افقی آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند. چرا ؟؟؟



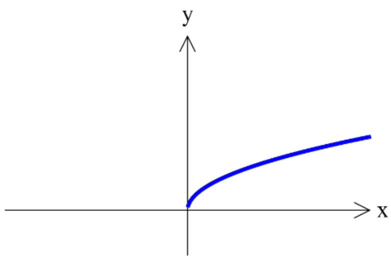
تابع یک به یک نیست.



تابع یک به یک است.



تابع یک به یک نیست.



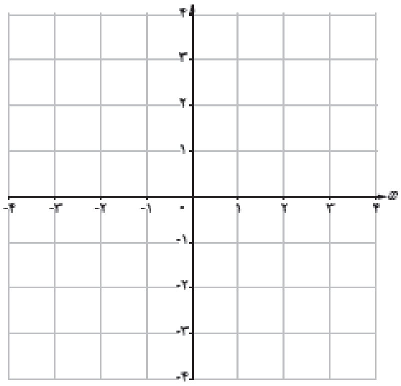
تابع یک به یک است.

تمرین : تابع $f=\{(a+b,۱),(۲,۳),(۴,۱),(a-b,۳),(۵,۶)\}$ یک به یک است . مقدار a و b را بیابید .

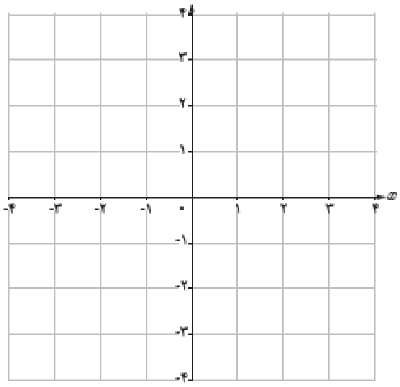
تمرین : اگر $f(x)=x^{۳}+۲x-۶$ باشد مقدار $f^{-۱}(-۶)$ را بیابید .

تمرین : دامنه وارون تابع $y=\sqrt{x}-۱$ را بیابید . (توجه : برد تابع f دامنه تابع $f^{-۱}$ است)

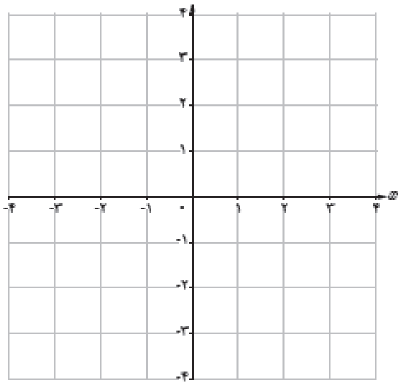
تمرین : با رسم توابع زیر مشخص کنید کدام یک وارون پذیرند . آنهایی که یک به یک نیستند را با محدود کردن دامنه یک به یک کنید .



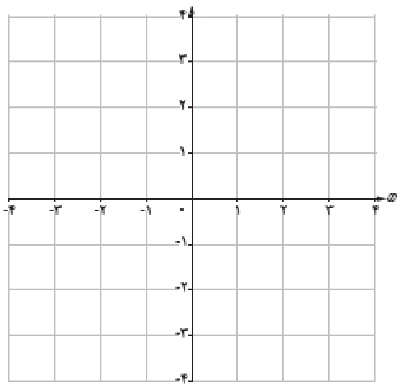
الف) $y=(x+۱)^{۲}$



ب) $y=|۲-x|$



ج) $y=-\sqrt{x}+۱$



د) $y=\begin{cases} x & x<۰ \\ x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \end{cases}$

محاسبه وارون یک تابع :

برای نوشتن معادله تابع وارون کافیست در خود تابع x را به صورت تابعی از y بنویسیم و در نهایت می توانیم به جای x علامت $f^{-1}(y)$ را قرار دهیم (همان طور که به جای y علامت $f(x)$ قرار می دهیم) در این صورت y ها همان اعضای دامنه تابع جدید هستند پس می توان برای پرهیز از اشتباهات سهوی ، جای x و y را عوض کنیم .

توجه کنیم که دامنه تابع وارون همان برد تابع اصلی و برد تابع وارون همان دامنه تابع اصلی است .

مثال : وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-1}+2$ را بدست آورید .

$$y=\sqrt{x-1}+2$$
$$y-2=\sqrt{x-1}\xrightarrow{y-2\geq 0}(y-2)^2=x-1$$
$$x=(y-2)^2+1\longrightarrow f^{-1}(y)=(y-2)^2+1 \quad ;y\geq 2$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-2)^2+1 \quad ;x\geq 2$$

توجه : می توانستیم برد تابع را از روی نمودار آن بدست بیاوریم و به عنوان دامنه تابع وارون بنویسیم .در ضمن اگر دامنه تابع وارون بدست آمده از ضابطه خود آن مشخص بود نیازی به نوشتن دامنه در کنار آن نبود .

تمرین : وارون توابع زیر را بیابید .

الف) $y=-3x+2$

ب) $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ (برد این تابع $R-\{2\}$ است)

ج) $y=x^2-4x \quad ; \quad x<2$

د) $y=\begin{cases} ۳x+۴ & x\le ۱ \\ ۲x+۵ & x>۱ \end{cases}$

ه) $y=۲-\sqrt{x-۱}$

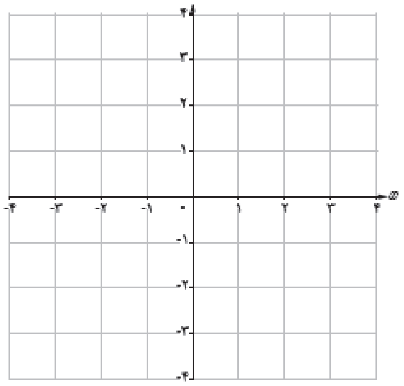
تمرین : شرط آنکه تابع $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ خود وارون باشد (یعنی وارونش با خودش برابر باشد) چیست ؟

رسم نمودار وارون تابع :

تابع $y=\sqrt{x-۱}$ را در نظر بگیرید .

الف) ضابطه وارون آن را بنویسید .

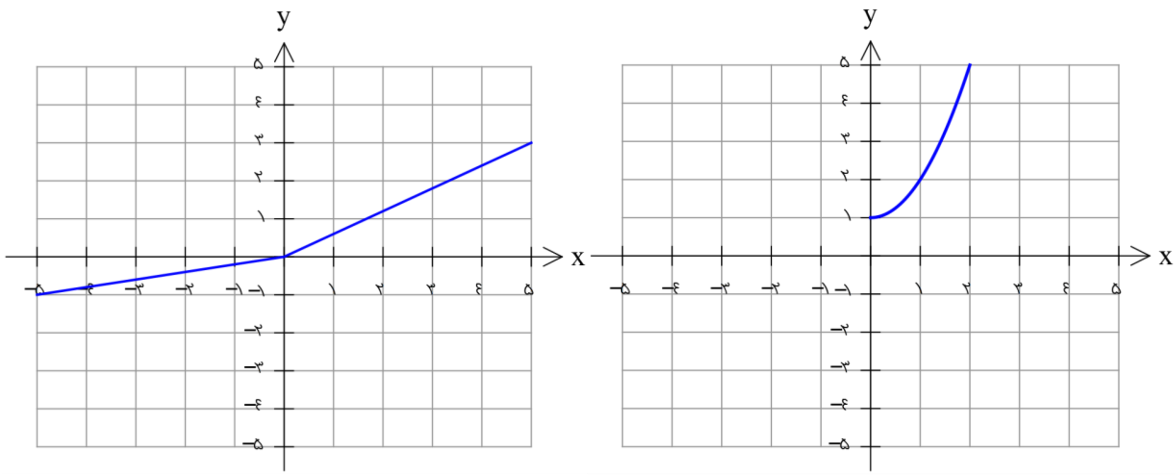
ب) تابع و وارونش را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



ج) حدستان را در مورد ارتباط بین نمودار تابع f و $f^{-۱}$ در قالب نتیجه زیر بنویسید ؟

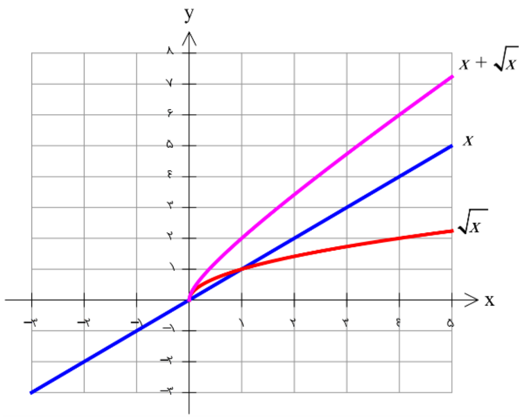
نتیجه : تابع f و f^{-1} نسبت به خط .... ، .... هستند بنابراین برای رسم نمودار f^{-1} کافیست قرینه نمودار f را نسبت به خط .... رسم کنیم .

تمرین : وارون توابع زیر را در همان دستگاه رسم کنید.



تمرین : تمرین های صفحه ۶۲ را حل کنید .

درس چهارم : اعمال روی توابع



همان گونه که اعمال جمع و ضرب در مورد اعداد و چند جمله ای ها انجام می شود در مورد توابع نیز می تواند استفاده شود با این تفاوت که توابع فقط در دامنه های مشترک (دامنه ای که هر دو تابع در آن حظور داشته باشند) می توانند با هم جمع یا ضرب شوند .

اعمال روی توابع :

الف) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ $\qquad D_{f+g}=D_f \cap D_g$

ب) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ $\qquad D_{f-g}=D_f \cap D_g$

ج) $(f.g)(x)=f(x)g(x)$ $\qquad D_{f.g}=D_f \cap D_g$

د) $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ $\qquad D_{f/g}=D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}$

تمرین : اگر $f=\{(۱,۲),(-۱,۳),(۲,۴),(۰,۲)\}$ و $g=\{(-۱,۴),(۰,۰),(۲,۸),(۴,۳)\}$ و $h=\{(۱,۲),(۳,۷),(-۱,-۱)\}$ حاصل موارد خواسته شده را بیابید .

الف) حاصل $(f+g)(-۱)-(f.h)(۱)$ را بیابید .

ب) توابع $f-h, g.h, f/g$ را با اعضایشان مشخص کنید .

تمرین : اگر $f(x)=\sqrt{۴x-x^{۲}}$ و $g=\{(-۱,۲),(۰,۱),(۲,۰),(۱,۱)\}$ ، برد تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید .

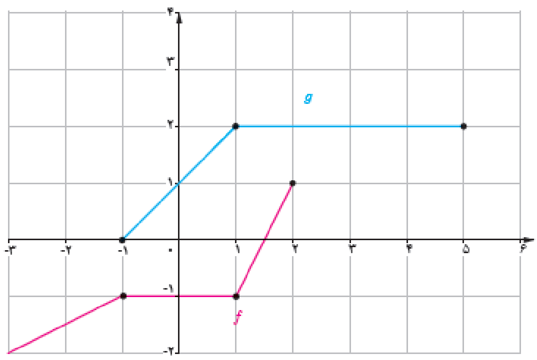
تمرین : اگر $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=\frac{x-۱}{۲x-۴}$ و $h(x)=\sqrt{۳x+۴}$ دامنه توابع $(f+g)(x)$ و $(f.h)(x)$ و $(h/g)(x)$ را بدست آورید .

تمرین : اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x & x\leq ۱ \\ x+۲ & x>۱ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} x-۲ & x<۲ \\ -x & x\geq ۲ \end{cases}$ ، ضابطه تابع $f+g$ کدام است ؟

(راهنمایی : هر دو تابع را با زیر بازه های $x\leq ۱ , ۱<x<۲ , x\geq ۲$ باز نویسی کنید)

تمرین : نمودار دو تابع f وg رسم شده است. نمودار توابع

$f+g , f-g$ را در همین دستگاه مختصات رسم کنید .



ترکیب توابع :

به طریق دیگری به جز اعمال روی توابع نیز می توان توابع جدید ایجاد کرد. به مثال زیر توجه کنید :

رابطه $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به سانتی گراد تبدیل می کند .

رابطه $g(x)=x+۲۷۳$ درجه سانتی گراد را به درجه کلوین تبدیل می کند.

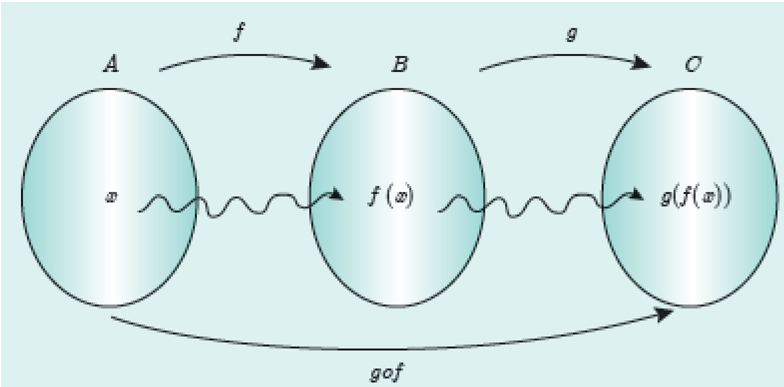
الف) ۱۴ درجه فارنهایت را به کلوین تبدیل کنید .

ب) اگر x را یک عدد دلخواه به فارنهایت در نظر بگیریم با همان روند قبلی تابعی بنویسید که مستقیم آن را کلوین تبدیل کند .

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم :

به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g باشد داریم : $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$ $\qquad (gof)(x)=g(f(x))$

و به طور مشابه می توان fog را تعریف کرد : $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ $\qquad (fog)(x)=f(g(x))$



تمرین : اگر $f=\{(۱,۲),(۲,-۱),(-۱,۱),(۰,۲)\}$ و $g=\{(۱,۱),(۲,۰),(۳,-۱)\}$ باشد . تابع های fog, gof را بنویسید .

تمرین : اگر $f=\{(۲,۱),(۳,۵),(۷,۲),(۵,۹),(۴,۳)\}$ برد تابع fof را بنویسید .

تمرین : اگر $f=\{(-۲,۱),(-۱,۰),(۰,۲),(-۳,۳),(۱,۴)\}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ ، تابع gof را مشخص کنید .

(به عنوان تمرین بیشتر تابع fog را نیز مشخص کنید . راهنمایی : تابع g را با دامنه f برابر قرار دهید و .....)

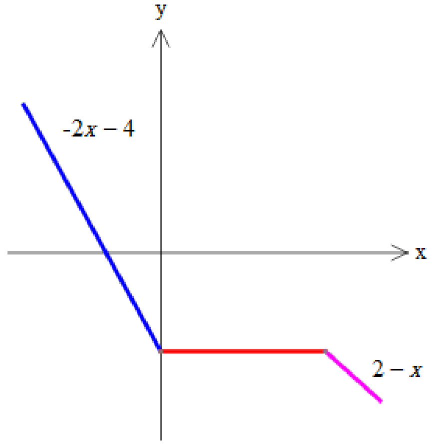
تمرین : اگر $f(x)=\sqrt{x-۹}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x-۴}$ باشد . دامنه و ضابطه توابع $fog\,,gof$ را مشخص کنید .

تمرین : اگر $f(x)=\dfrac{x}{۱-x}$ و $g(x)=\dfrac{۱}{x-۲}$ باشد . دامنه و ضابطه توابع $fog\,,gof$ را مشخص کنید .

تمرین : اگر $(fog)(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ و $f(x)=\frac{x}{x+۱}$ ، ضابطه تابع g را بیابید.

تمرین : اگر $(fog)(x)=۲x+۳$ و $g(x)=۳x-۱$ ، تابع $f(x)$ را مشخص کنید .

تمرین : نمودار تابع f به صورت زیر است . مقدار $(fofof)(۷)$ را بیابید .



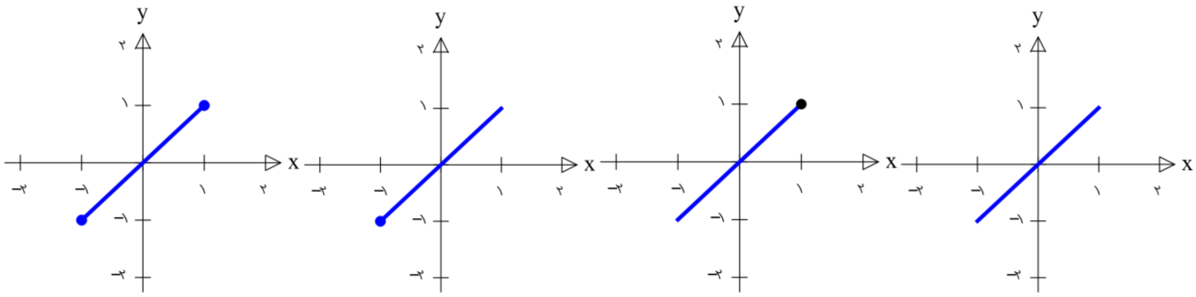
تمرین : اگر $f\ (x)=x^{2}+2x+2$ و $g(x)=\frac{x}{3}$ باشد حاصل $(gof\ )(\sqrt{2}-1)$ را بیابید .

نکته : اگر f تابعی وارون پذیر باشد ، ترکیب آن با وارون خودش تابع ثابت است البته با دامنه خاص :

الف) به ازای هر x از دامنه f داریم : $(f^{-1}of\ )(x)=x$

الف) به ازای هر x از دامنه f^{-1} داریم : $(fof^{-1})(x)=x$

تمرین : اگر $f\ (x)=1-\sqrt{x+1}$ ، نمودار تابع $y=(fof^{-1})(x)$ کدام است ؟



نکته : اگر تابع f و g وارون پذیر باشند ، آنگاه : $(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$

تمرین : اگر $f\ (x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=2x^{2}+3\ ;x>0$ ضابطه تابع $(f^{-1}og^{-1})(x)$ را مشخص کنید .

تمرین : تمرین های صفحه ۶۹ و ۷۰ را حل کنید .

فصل سوم :تابع نمایی و لگاریتمی

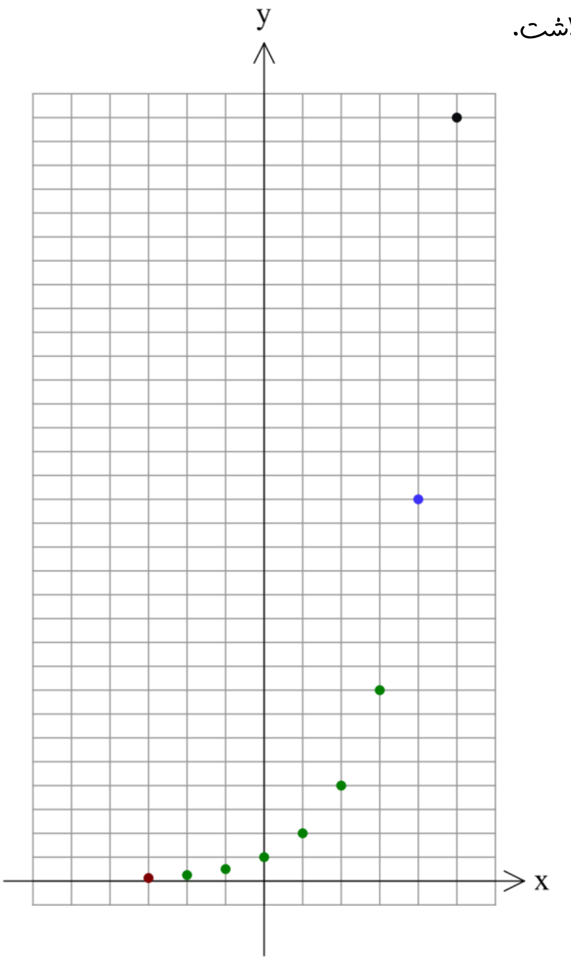
درس اول : تابع نمایی

درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم

درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

درس اول : تابع نمایی

اگر توان های صحیح عدد ۲ را در نظر بگیریم نمودار زیر را خواهیم داشت.

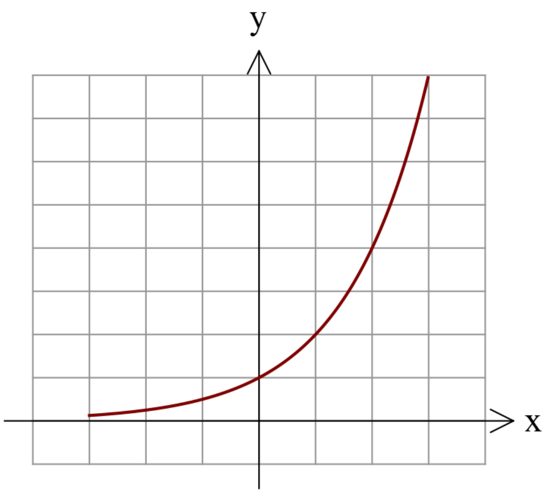


حال فرض کنید بخواهیم دامنه را به اعداد حقیقی تعمیم دهیم :

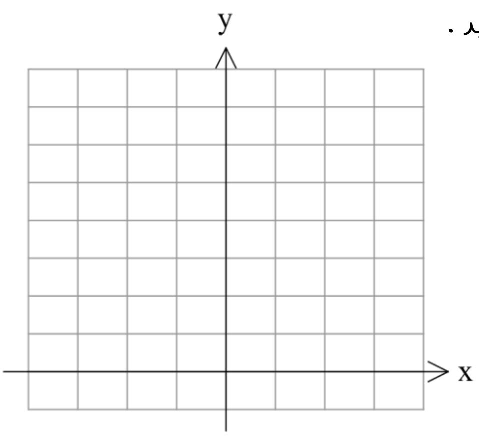
به عنوان مثال :

$۲^{\sqrt{۲}} \simeq ۲/۶۶ \qquad ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲} \simeq ۱/۴ \qquad ۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲} \simeq ۱/۲۶$

پس نمودار به صورت زیر در می آید :



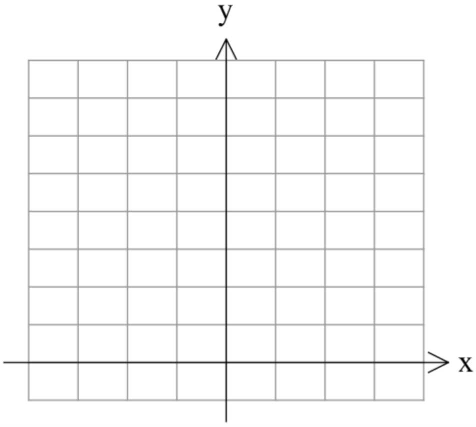
حالا به کمک ماشین حساب و نقطه یابی نمودار تابع $y = (\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید .

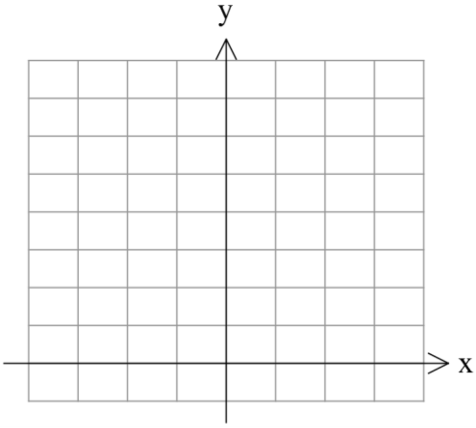


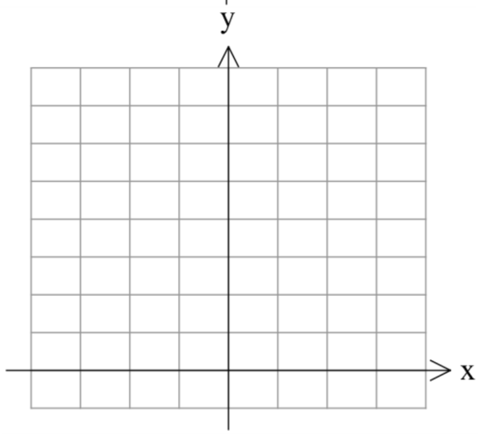
تابع نمایی : هر تابع به صورت $y = a^x$ $(a > ۰, a \neq ۱)$ را تابع نمایی می گویند .

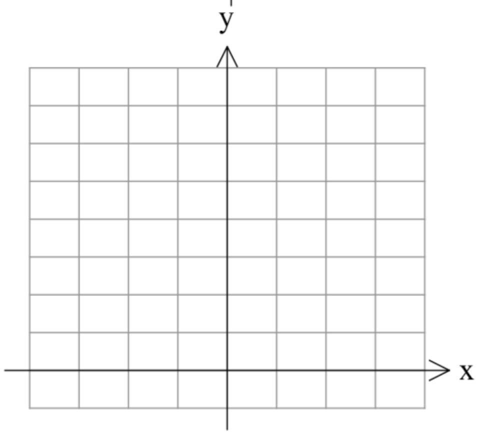
توجه : هر تابع به صورت $y = ka^x$ $(a > ۰, a \neq ۱, k \neq ۰)$ *رفتار نمایی* دارد .

تمرین : نمودار توابع $y=-(\frac{1}{2})^{x+2}, y=(\frac{1}{2})^{x}+2, y=2^{x-1}, y=-2^{x}-1$ را به کمک انتقال رسم کنید .

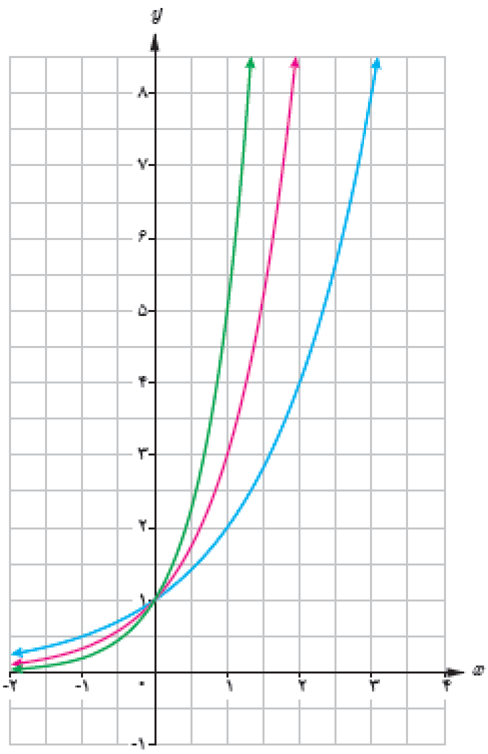


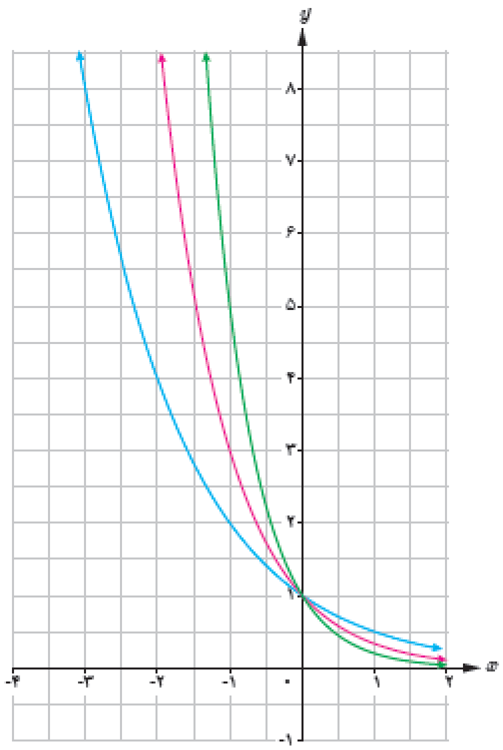






تمرین : نمودار توابع $2^{x}, 3^{x}, 5^{x}$ و همچنین توابع $(\frac{1}{2})^{x}, (\frac{1}{3})^{x}, (\frac{1}{5})^{x}$ رسم شده است . ضابطه هر نمودار را در کنار آن بنویسید .





تمرین : مقدار نوعی باکتری خاص در هر ساعت ۴ برابر می شود اگر مقدار اولیه آن ۲۰ میلی گرم بوده باشد ، جرم توده بعد از t ساعت را به صورت نمایی نوشته و مقدار آن را بعد از یک شبانه روز تخمین بزنید .

تمرین : اگر a,b,c دنباله حسابی باشند . کدام مورد درست است ؟ (راهنمایی : در دنباله حسابی $۲b=a+c$)

الف) $۳^a,۳^b,۳^c$ دنباله حسابی است .

ب) $۳^a,۳^b,۳^c$ دنباله هندسی است .

ج) $۳^a,۳^{b+۱},۳^c$ دنباله حسابی است .

د) $۳^a,۳^{۲b},۳^c$ دنباله هندسی است .

معادله و نامعادله نمایی :

الف) اگر $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$

ب) اگر $a>۱$ در این صورت اگر $a^x>a^y$ آنگاه $x>y$.

ج) اگر $۰<a<۱$ در این صورت اگر $a^x>a^y$ آنگاه $x<y$.

تمرین : معادله و نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $(\frac{۲}{۳})^{x+۲}=(\frac{۸۱}{۱۶})^{x-۱}$

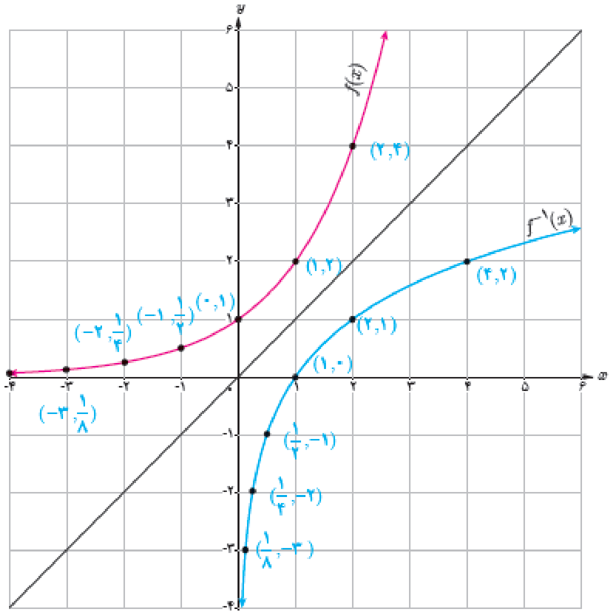
ب) $(\frac{۱}{۳})^{x+۴}>(\frac{۱}{۲۷})^{x}$

ج) $۹^{۲x-۲}>\frac{۱}{۲۴۳}$

درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم

فرض کنید تابع رشد یک نوع باکتری به صورت $f(t)=۲^t$ است . ور به راحتی می توان گفت در زمان $t=۲/۵$ مقدار این باکتری حدود $f(۲/۵)=۲^{۲/۵}\simeq ۵/۶۶$ است . حال سوال اینجاست که اگر بخواهیم مثلاً بدانیم در چه زمانی مقدار این باکتری تقریبا ۶۰ می شود ، چه باید کرد ؟

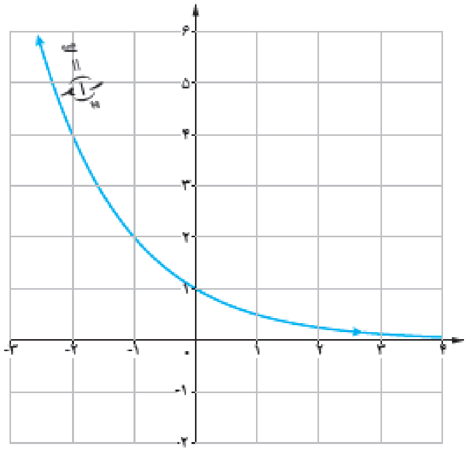
همان طور که از نمودار تابع نمایی معلوم است ، تابع نمایی یک تابع یکی به یک است پس وارون پذیر است و می توان وارون آن را با قرینه کردن نمودار نسبت به خط $y=x$ رسم کرد پس :



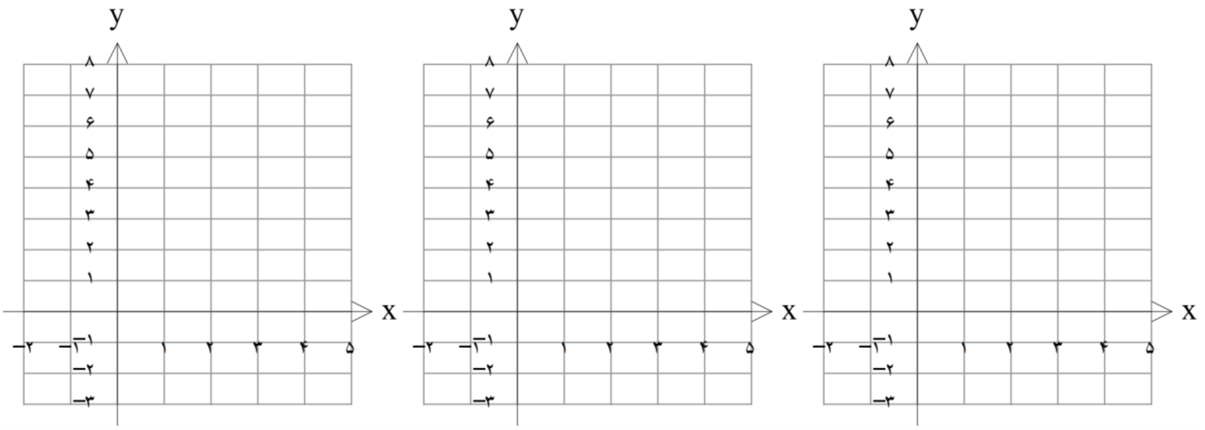
تابع لگاریتم : وارون تابع نمایی $y=a^x$ را تابع لگاریتم بر مبنای a می نامند و با نماد $y=\log_a^x$ نمایش می دهند. که در آن $a>۰,a\neq ۱,x>۰$ است .

تمرین : دامنه تابع $y=\log_x^{۴-x^۲}$ را مشخص کنید .

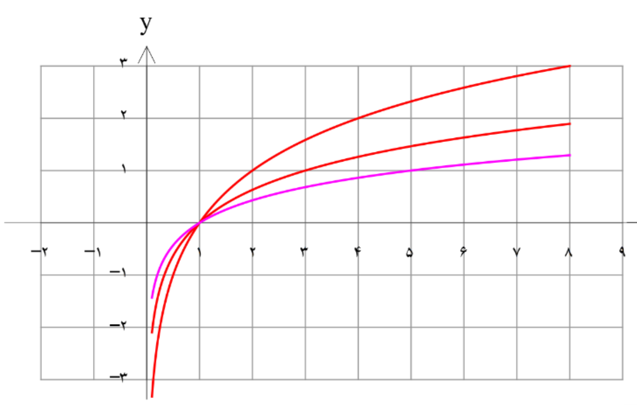
تمرین : به کمک نمودار تابع $y=(\frac{1}{2})^{x}$ نمودار تابع $y=\log_{\frac{1}{2}}^{x}$ را رسم کنید .

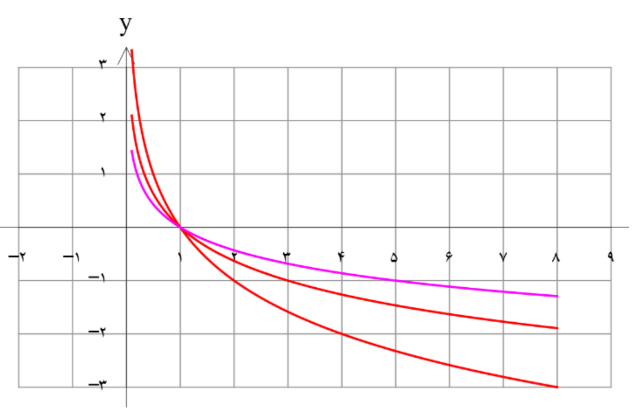


تمرین : نمودار توابع $y=\log_{2}^{x+1}-1 , y=1-\log_{\frac{1}{2}}^{x} , y=1+\log_{2}^{x}$ را به کمک انتقال رسم کنید .



تمرین : نمودار توابع $y=\log_{2}^{x} , y=\log_{3}^{x} , y=\log_{5}^{x}$ وهمچنین توابع $y=\log_{\frac{1}{2}}^{x} , y=\log_{\frac{1}{3}}^{x} , y=\log_{\frac{1}{5}}^{x}$ رسم شده است . ضابطه هر کدام را در کنار نمودار مربوطه بنویسید .





تمرین : با توجه به نمودار لگاریتم در ابتدای این درس ، توان های صحیح عدد ۲ را بدست آورید :

$\log_{۲}^{۲^{-۳}} =$ $\quad \log_{۲}^{۲^{-۲}} =$ $\quad \log_{۲}^{۲^{-۱}} =$ $\quad \log_{۲}^{۲^{۰}} =$ $\quad \log_{۲}^{۲} =$ $\quad \log_{۲}^{۲^{۲}} =$ $\quad \log_{۲}^{۲^{۳}} =$

تعریف لگاریتم : به طور کلی تعریف لگاریتم به صورت زیر است :

$$\boxed{x = a^{y} \Leftrightarrow \log_{a}^{x} = y}$$

تمرین : مقادیر زیر را حساب کنید .

$\log_{۲}^{۸} =$ $\quad \log_{۳}^{\frac{۱}{۲۷}} =$ $\quad \log_{۱۰}^{۰/۰۰۱} =$

$\log_{۵}^{\sqrt{۱۲۵}} =$ $\quad \log_{\frac{۱}{۵}}^{۲۵} =$ $\quad \log_{\frac{۱}{۲}}^{۱۶} =$

تمرین : تساوی توانی را به صورت لگاریتمی و تساوی لگاریتمی را به صورت توانی بنویسید .

$\log_{۵}^{\frac{۱}{۶۲۵}} = -۴ \Rightarrow$ $\qquad \log_{۳}^{۱} = ۰ \Rightarrow$

$۳^{۴} = ۲۴۳ \Rightarrow$ $\qquad ۲^{-۱۰} = \frac{۱}{۱۰۲۴} \Rightarrow$

تمرین : اگر $f(x) = \log_{۳}^{(۴x-۱)}$ مقدار $f^{-۱}(۳)$ چقدر است ؟ (راهنمایی : در واقع مقدار y داده شده و x را می خواهد)

تمرین : اگر $f(x) = ۳^{۵x-۱}$ ، ضابطه $f^{-۱}(x)$ را بیابید .

درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

ویژگی های لگاریتم :

۱) $\log_a^1 = 0$

اثبات : چون همواره $a^0 = 1$

۲) $\log_a^a = 1$

اثبات : چون همواره $a^1 = a$

۳) $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$

اثبات : فرض کنید $\log_a^x = p$ و $\log_a^y = q$ در این صورت $y = a^q , x = a^p$. پس داریم $xy = a^{p+q}$ و طبق تعریف لگاریتم $\log_a^{xy} = p + q$ در نتیجه $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$

مثال : اگر $\log_2^3 = 1/58$ و $\log_2^5 = 2/32$ باشد . مقدار $\log_2^{15}$ را بیابید .

حل : $\log_2^{15} = \log_2^3 + \log_2^5 = 1/58 + 2/32 = 3/9$

۴) $\log_a^{x/y} = \log_a^x - \log_a^y$

اثبات :

مثال : اگر $\log_{10}^2 = a$ مقدار $\log_{10}^5$ را بیابید . (وقتی مبنای لگاریتم ۱۰ باشد معمولا آن را نمی نویسند)

حل : $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$

۵) $\log_a^{x^n} = n\log_a^x$

اثبات :

مثال : مقدار عبارت $\frac{۱}{۲}\log ۱۶ + ۲\log ۵$ را بیابید .

حل : $\frac{۱}{۲}\log ۴^۲ + \log ۵^۲ = ۲\times\frac{۱}{۲}\log ۴ + \log ۲۵ = \log ۴ + \log ۲۵ = \log ۱۰۰ = \log ۱۰^۲ = ۲\log ۱۰ = ۲$

۶) $\log_{a^n}^x = \frac{۱}{n}\log_a^x$

اثبات :

مثال : مقدار عبارت $\log_{\sqrt{۲}}^{۱۲۸}$ چقدر است ؟

حل : $\log_{۲^{\frac{۱}{۲}}}^{۱۲۸} = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\log_۲^{۱۲۸} = ۲\log_۲^{۱۲۸} = ۲\log_۲^{۲^۷} = ۷\times۲\log_۲^۲ = ۱۴$

۷) $\log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$ (قاعده تغییر مبنا)

اثبات : اگر $\log_b^x = p, \log_b^a = q$ آنگاه $x = b^p, a = b^q$ و می توان نوشت :

$$x = b^p = (b^q)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \Rightarrow x = a^{\frac{p}{q}} \Rightarrow \log_a^x = \frac{p}{q} \Rightarrow \log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$$

نتیجه ۱ : $\log_a^x = \frac{۱}{\log_x^a}$

نتیجه ۲ : $\log_b^a \times \log_c^b = \log_c^a$ (می توان به تعداد بیشتر نیز تعمیم داد)

مثال : اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$ مقدار $\log_{۶}^{۱۵}$ را بیابید .

حل :
$$\log_{۶}^{۱۵} = \frac{\log ۱۵}{\log ۶} = \frac{\log ۳ \times ۵}{\log ۲ \times ۳} = \frac{\log ۳ + \log ۵}{\log ۲ + \log ۳} = \frac{b + (۱ - a)}{a + b} = \frac{b - a + ۱}{b + a}$$

۸) $b^{\log_a^x} = x^{\log_a^b}$

اثبات :

مثال : حاصل $۲^{(۱+۲\log_{۲}^{۵})}$ چقدر است ؟

حل :
$$۲^{(۱+۲\log_{۲}^{۵})} = ۲^{۱} \times ۲^{۲\log_{۲}^{۵}} = ۲ \times ۲^{\log_{۲}^{۲۵}} = ۲ \times ۲۵^{\log_{۲}^{۲}} = ۲ \times ۲۵ = ۵۰$$

....

تمرین : مقدار $\log_{\sqrt{۳}}^{۹\sqrt[۴]{۳}}$ را بیابید .

تمرین : مقدار $\frac{۱}{\log_{۹}^{۶}} + \frac{۱}{\log_{۴}^{۶}}$ را حساب کنید .

تمرین : مقدار $۳^{\log_{۹}^{۶}}$ را بدست آورید .

تمرین : حاصل عبارت $\log \frac{۹۹}{۱۰۰} + \ldots + \log \frac{۳}{۴} + \log \frac{۲}{۳} + \log \frac{۱}{۲}$ چیست ؟

تمرین : اگر $\log 2 = a$ باشد حاصل $\log 1/25$ چقدر است ؟

تمرین : مقدار عبارت $\log_{\sqrt{10}}^{5} + 2\log_{1000}^{8}$ را بیابید .

تمرین : حاصل عبارت $\log_{3}^{2} \times \log_{4}^{3} \times \log_{5}^{4} \times .... \times \log_{64}^{63}$ را بیابید .

معادله و نامعادله لگاریتمی :

الف) اگر $\log_a^x = \log_a^y$ آنگاه $x = y$.

ب) اگر $\log_a^x = b$ می توان از تعریف لگاریتم برای حل معادله بهره برد .

ج) اگر $a > 1$ در این صورت اگر $\log_a^x > \log_a^y$ آنگاه $x > y$.

د) اگر $0 < a < 1$ در این صورت اگر $\log_a^x > \log_a^y$ آنگاه $x < y$.

توجه توجه !!! : در حل معادلات و نامعادلات لگاریتمی باید به دامنه تابع لگاریتمی نیز توجه داشت و جواب هایی قابل قبول خواهند بود که در دامنه لگاریتم باشند .

تمرین : معادله $x^2 - x^{\log_x^4} = 0$ را حل کنید .

تمرین : معادله $\log_x^{x-2}+\log_x^{2x-3}=2$ را حل کنید .

تمرین : معادله $\log(x-10)+2\log x=1+\log(x+1)$ را حل کنید .

تمرین : معادله $\log_x^{(x^2-2x)}=2$ چند جواب دارد ؟

تمرین : معادله $\log_3^{(x-1)}+\log_3^{(\frac{x}{2}+1)}=2$ را حل کنید .

تمرین : مجموعه جواب نامعادله $\log_2^{(3x-1)}<1+\log_2^{x}$ را بیابید . (به دامنه دو لگاریتم نیز دقت کنید)

کاربرد های لگاریتم :

۱) رشد یا کاهش درصدی : مسائلی هستند که در آن مقدار یک چیز در هر دوره به اندازه درصد خاصی افزایش یا کاهش می یابند ازتابع نمایی $f(t)=a(1+r)^t$ تبعیت می کنند که در آن a مقدار اولیه آن چیز و r درصد افزایش یا کاهش (در صورت کاهش r عدد منفی می شود) در هر دوره است .

مثال : اگر جمعیت کشوری ۳۰ میلیون و نرخ رشد سالانه جمعیت آن کشور ۲ درصد باشد .

الف) بعد از ۳۵ سال جمعیت کشور چقدر است ؟

حل : حدود ۶۰ میلیون نفر خواهند شد $f(35)=30(1/02)^{35}\simeq 30\times 2=60$

ب) بعد از چند سال جمعیت به ۱۰۰ میلیون نفر می رسد ؟

حل : حدود ۶۰/۸ سال طول خواهد کشید $100=30(1/02)^t \Rightarrow \frac{10}{3}=(1/02)^t \Rightarrow t=\log_{1/02}^{\frac{10}{3}}\simeq 60/8$

تمرین : فرض کنید قیمت یک نوع خودرو خاص سالانه ۳۰درصد افت قیمت دارد و قیمت فعلی آن ۸۰ میلیون تومان است . بعد از چند سال قیمت آن حدود ۶۵ میلیون تومان خواهد بود ؟

تمرین : با نرخ سود ۱۶ درصد سالانه یک بانک ، اگر ۱۰ میلیون تومان پول در این بانک قرار دهیم .

الف) بعد از ۵ سال پول شما چقدر شده است ؟

ب) بعد از چند سال پول شما حدود ۴۴ میلیون تومان خواهد شد ؟

توجه : در بانک ها برای دقت بیشتر از نرخ رشد روزشمار استفاده می شود که فرمول آن $f(t)=a(1+\frac{r}{365})^{365t}$

۲) شدت زلزله : اگر انرژی آزاد شده از زلزله بر حسب ارگ (Erg) را E و شدت زلزله بر حسب ریشتر را M در نظر بگیریم داریم : (ارگ برابر $۱۰^{-۷}$ ژول است) $\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M$

تمرین : انرژی آزاد شده از زلزله ای ۶ ریشتری چقدر است ؟

۳) قدمت و نیمه عمر : اگر یک ماده در مدت ثابتی نصف شود آن دوره را نیمه عمر آن ماده می گویند اگر نیمه عمر را با a نمایش دهیم ، در این صورت در مدت زمان t به تعداد $\frac{t}{a}$ بار جرم ماده نصف شده است و کسر باقی مانده از ماده را می توان از رابطه زیر بدست آورد : $(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{a}} = b$ (کسر باقی مانده در واقع نسبت مقدار ثانویه به مقدار اولیه است)

توجه : نوعی ایزوتوپ کربن به نام کربن ۱۴ در موجودات وجود دارد که پس از مرگشان شروع به از بین رفتن می کند و نیمه عمر آن حدود ۵۷۳۰ سال است که از آن برای تخمین قدمت یک فسیل استفاده می شود .

تمرین : فسیلی یافت شده که مقدار کربن ۱۴ باقی مانده از آن فقط ۲۰ درصد مقدار اولیه است . قدمت این فسیل را تخمین بزنید .

تمرین : نیمه عمر نوعی ماده هسته ای ۱۵ سال است . اگر جرم اولیه این ماده ۱۵۰ گرم بوده باشد . پس از ۷۰ سال جرم باقی مانده آن چقدر است ؟

تمرین : تمرین های صفحه ۹۰ را حل کنید .

فصل چهارم :مثلثات

درس اول : رادیان

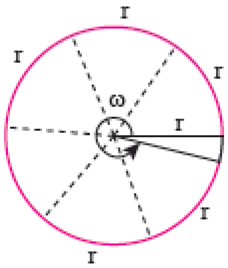
درس دوم : نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

درس سوم : توابع مثلثاتی

درس چهارم : روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

درس اول : رادیان

رادیان : اگر محیط یک دایره را به کمان هایی به اندازه شعاع قسمت کنیم ، زاویه مرکزی مقابل به این کمان ها برابر با یک رادیان خواهد بود . یک دایره کامل $۲\pi \simeq ۶/۲۸ rad$ است .

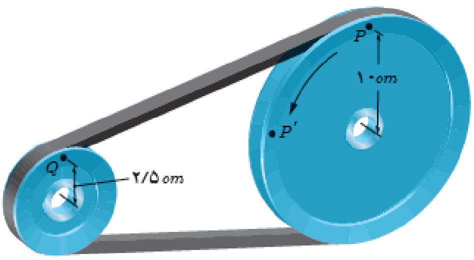


نتیجه : اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان l در دایره ای به شعاع r برابر است با : $\theta = \frac{l}{r} \quad rad$

نتیجه : برای تبدیل درجه به رادیان و برعکس می توان از نسبت $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}$ استفاده کرد .

تمرین : شعاع یک زمین دو ۵۰۰ متر است ، اگر دونده ای زاویه مرکزی ۷۰ درجه را بدود چند متر را طی خواهد کرد ؟

تمرین : در شکل زیر اگر قرقره بزرگ ۵۰ درجه بپرخد قرقره کوچک چند رادیان می چرخد ؟



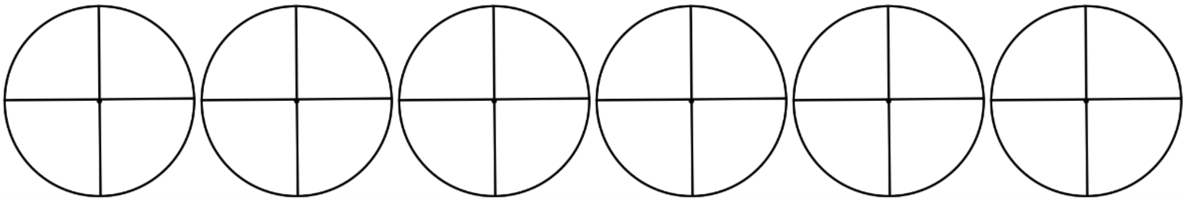
تمرین : اندازه زاویه های $۰°, ۳۰°, ۴۵°, ۶۰°, ۹۰°, ۱۸۰°, ۲۷۰°, ۳۶۰°$ را بر حسب رادیان بنویسید .

نسبت های مثلثاتی زاویه های اصلی :

θ(رادیان) / نسبت	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinθ	0				1		
cosθ			$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
tanθ		$\frac{\sqrt{3}}{3}$					
cotθ	تعریف نشده				0		

تمرین : زاویه های زیر را در دایره های مثلثاتی داده شده به طور تقریبی نشان دهید .

5π $\quad$ $\frac{7\pi}{4}$ $\quad$ $\frac{3\pi}{4}$ $\quad$ $\frac{5\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{4\pi}{3}$ $\quad$ $\frac{2\pi}{3}$



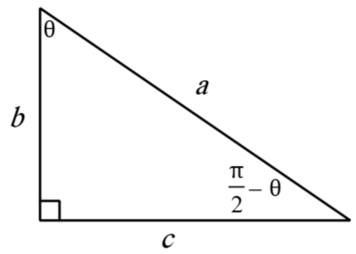
تمرین : تمرین های صفحه ۹۶ را حل کنید .

درس دوم : نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم :

هرگاه مجموع دو زاویه ۹۰ باشد سینوس یکی برابر با کسینوس دیگری و تانژانت یکی برابر با کتانژانت دیگری است .

$$\left.\begin{aligned}\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)&=\frac{b}{a}\\ \cos\theta&=\frac{b}{a}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$$



به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \quad , \quad \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \quad , \quad \tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta \quad , \quad \cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta$$

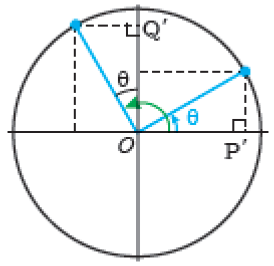
تمرین : نسبت های مثلثاتی زاویه $(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ را به کمک دایره مثلثاتی بدست آورید .

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha)=$$



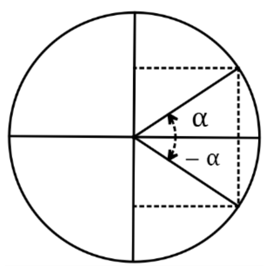
نسبت های مثلثاتی زاویه های قرینه :

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

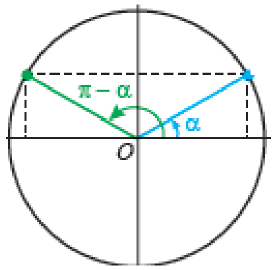
$$\tan(-\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha)=\cot\alpha$$



نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل :

هرگاه مجموع دو زاویه ۱۸۰ باشد سینوس یکی برابر با سینوس دیگری و نسبت های دیگر یکی برابر با قرینه همان نسبت زاویه دیگری است .



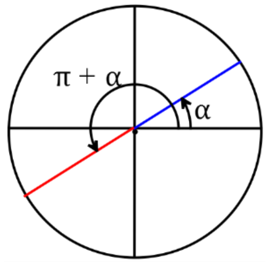
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

تمرین : مانند بالا نسبت های مثلثاتی زاویه $(\pi+\alpha)$ را بدست آورید .



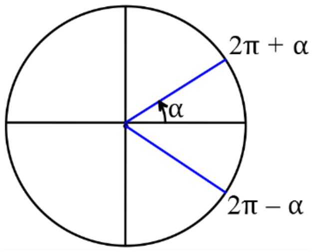
$\sin(\pi+\alpha)=$

$\cos(\pi+\alpha)=$

$\tan(\pi+\alpha)=$

$\cot(\pi+\alpha)=$

نسبت های مثلثاتی زاویه های با مجموع یا تفاضل ۲π رادیان :



اگر ۲π که یک دور کامل است به زاویه بیافزاییم مکان زاویه تغییر نمی کند پس :

نسبت های مثلثاتی زاویه $(۲\pi+\theta)$ با نسبت های مثلثاتی متناظر θ برابر است .

نسبت های مثلثاتی زاویه $(۲\pi-\theta)$ با نسبت های مثلثاتی متناظر $-\theta$ برابر است .

نتیجه کلی : محاسبه نسبت های مثلثاتی کمان های $(k\pi\pm\alpha)$ و $\left(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha\right)$:

– ابتدا علامت نسبت مثلثاتی را در ربعی که کمان در آن قرار دارد را می نویسیم سپس :

– اگر کمان شامل ضرایب $\frac{\pi}{۲}$ بود آن را حذف و نسبت را تغییر می دهیم ($\sin\longleftrightarrow\cos$, $\tan\longleftrightarrow\cot$)

– اگر کمان شامل ضرایب π بود آن را حذف کرده و نسبت را تغییر نمی دهیم .

تمرین : مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را بیابید .

$\sin-\frac{۵\pi}{۴}=$ $\cos\frac{۲\pi}{۳}=$

$\tan\frac{۷\pi}{۳}=$ $\cot-\frac{۷\pi}{۴}=$

$\sin ۴۰۵^\circ=$ $\cos-۳۳۰^\circ=$

$\tan-۱۵۰^\circ=$ $\cot ۲۴۰^\circ=$

تمرین : ساده ترین صورت عبارت $A=\frac{۲\sin(\pi+\alpha)-۴\sin(\pi-\alpha)}{۳\cos(\pi+\alpha)-\cos(\pi-\alpha)}$ را بنویسید .

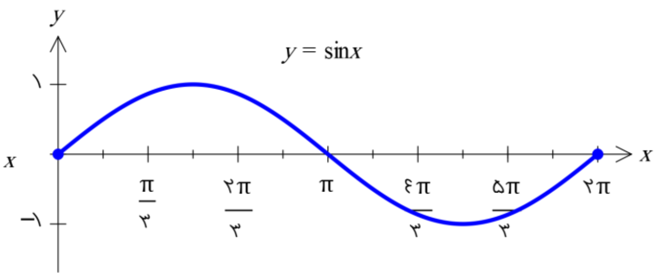
تمرین : ساده ترین صورت عبارت $A=۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)+۳\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+۴\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)+۵\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)$ را بنویسید .

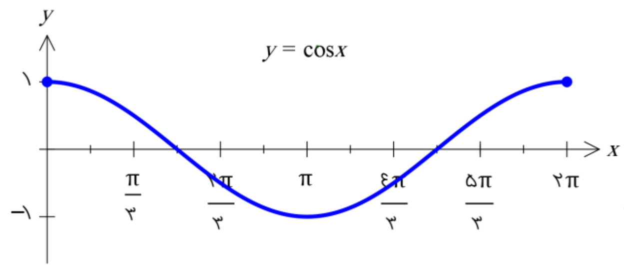
تمرین : حاصل عبارت $A=\frac{\sin ۱۵+\cos ۷۵+۱}{۶\cos ۷۹۵+۳}$ را بیابید .

تمرین : تمرین های صفحه ۱۰۶ را حل کنید .

درس دوم : توابع مثلثاتی

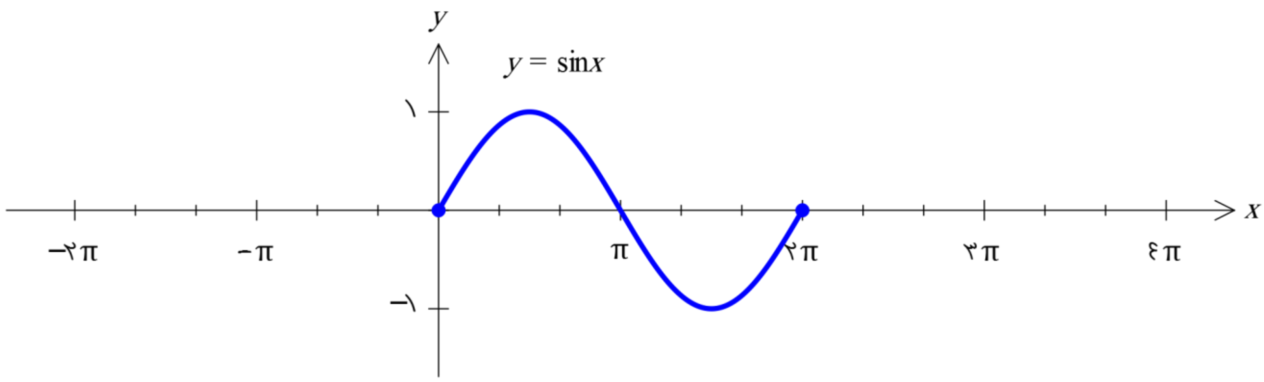
اگر x را مقادیر مختلف بر حسب رادیان در بازه $[0,2\pi]$ در نظر بگیریم ، به کمک نقطه یابی نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ به صورت زیر بدست می آیند . (توجه : در توابع مثلثاتی کمان برحسب رادیان است مگر اینکه به وضوح اعلام شده باشد بر حسب درجه یا نوشته شود x°)

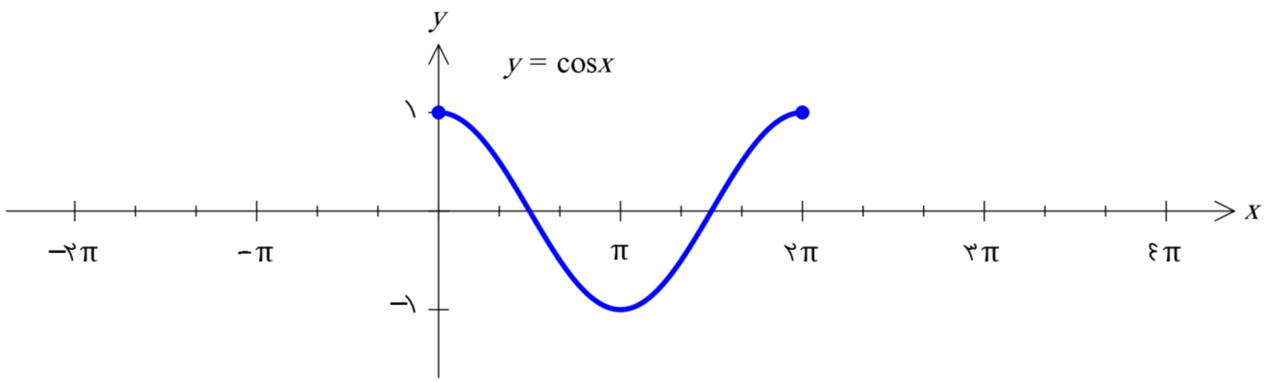




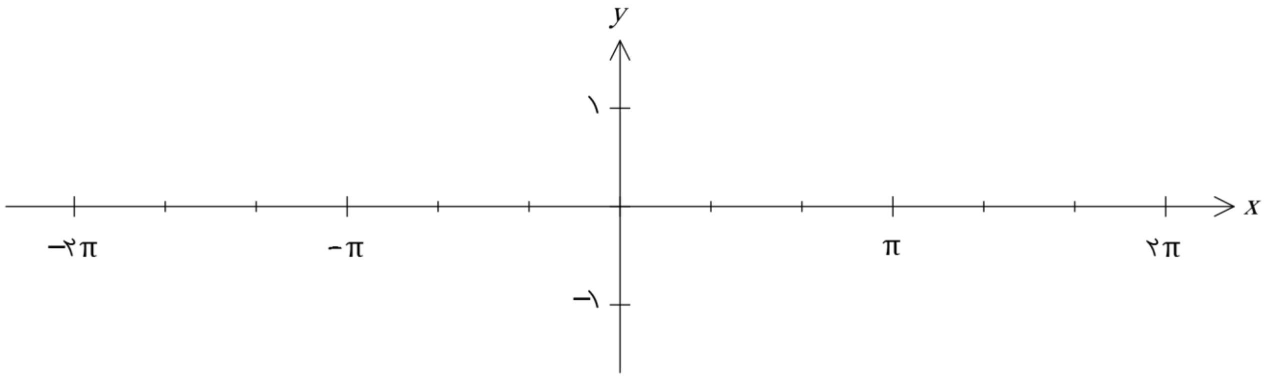
برد هر دو تابع $[-1,1]$ است و به ازای هر زاویه ای مقدار این توابع نمی تواند از این محدوده تجاوز کند .

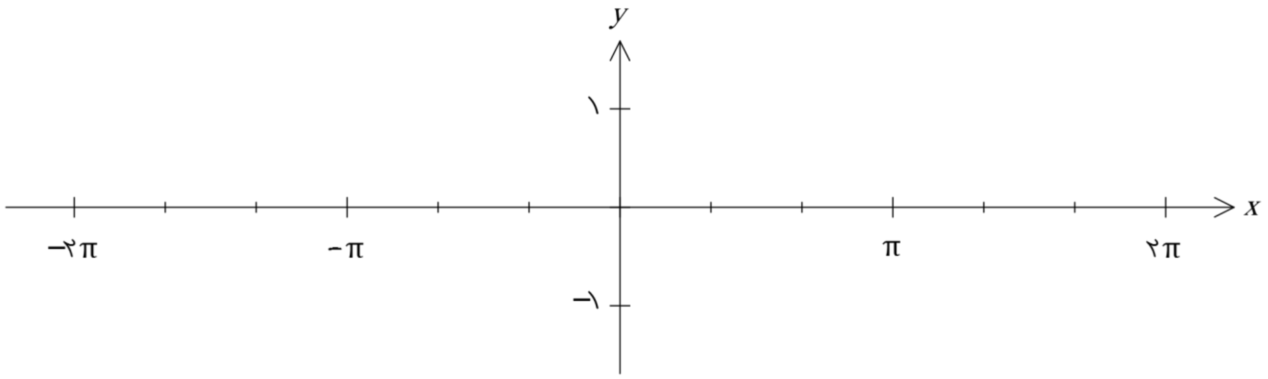
حال با توجه به مطالب درس قبل که فهمیدیم $\sin(x+2k\pi)=\sin x$ و $\sin(-x)=-\sin x$ و فهمیدیم $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ و $\cos(-x)=\cos x$ نمودار دو تابع سینوس و کسینوس را در دامنه R رسم کنید .

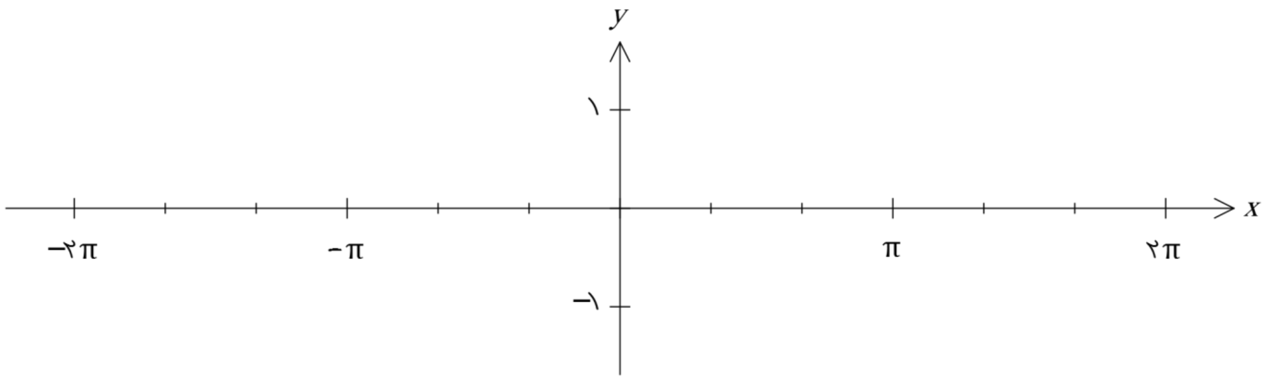


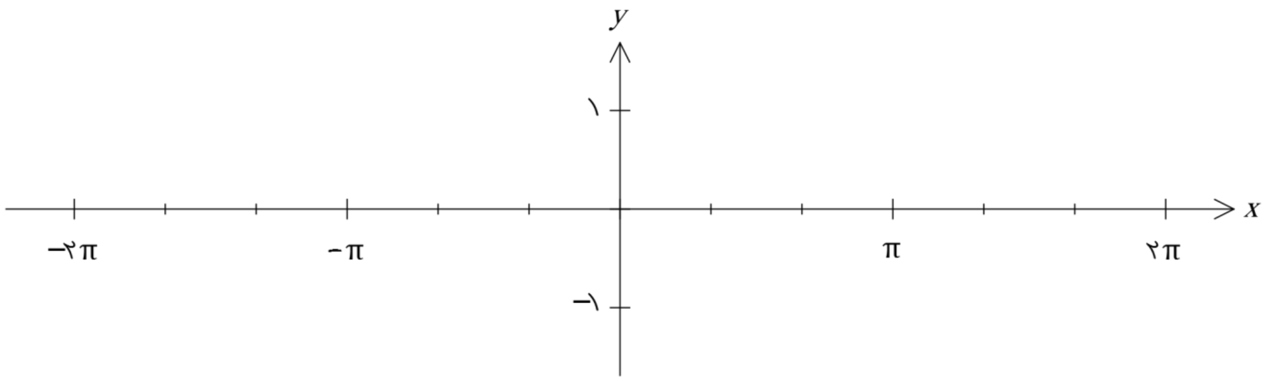


تمرین : به کمک انتقال نمودار توابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})$, $y=|\sin x|$, $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$, $y=-\cos x+1$ را رسم کنید .









تمرین : اگر $\frac{۲\pi}{۳} < x < \frac{\pi}{۶}$ باشد و $\sin x = \frac{m-۱}{۴}$ ، محدوده m را مشخص کنید .

تمرین : درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید .

الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد .

ب) $\sin\sqrt{۵}$ یک عدد حقیقی است .

ج) $\cos ۳ = \cos ۳^\circ$.

د) اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \frac{-\pi}{۲}$ آنگاه $-۱ < \cos x < ۱$.

ه) عددی می توان یافت که سینوس آن برابر ۲- باشد .

و) $x = \pi$ صفر تابع $y = \cos x$ است .

تمرین : تمرین های صفحه ۱۰۹ را حل کنید .

درس سوم : روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

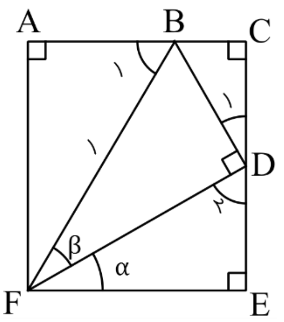
روابط مقدماتی : (یاد آوری از سال گذشته)

$$۱)\quad \sin^۲ x+\cos^۲ x=۱ \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x\\ \cos^۲ x=۱-\sin^۲ x\end{cases}$$

$$۲)\quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\quad,\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}\quad\Rightarrow\quad \tan x\cot x=۱\quad,\quad \cot x=\frac{۱}{\tan x}$$

$$۳)\quad ۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}\qquad,\qquad ۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$$

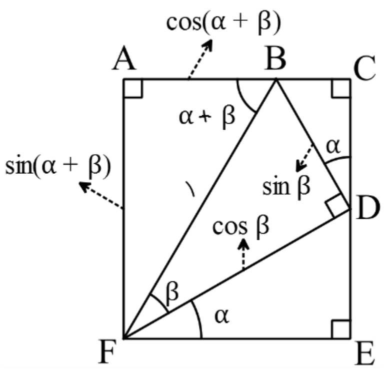
نسبت های مثلثاتی کمان های $(\alpha\pm\beta)$:(یافتن نسبت های زاویه های $۱۵°,۷۵°,۱۰۵°$)



اگر دو زاویه β,α را به صورت زیر رسم کنیم به طوری که $FB=۱$ آنگاه :

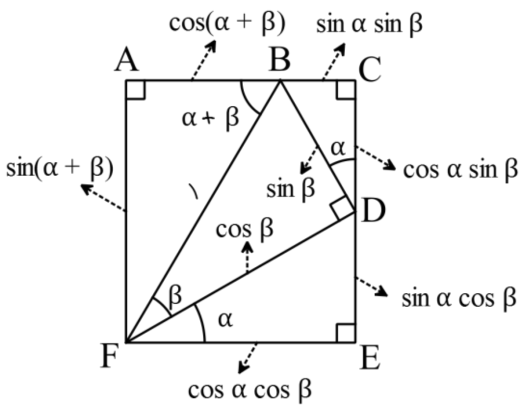
$$\left.\begin{array}{l}D_۱+D_۲=۹۰\\ \alpha+D_۲=۹۰\end{array}\right\}\Rightarrow D_۱=\alpha$$

و طبق قضیه خطوط موازی : $\quad B_۱=\alpha+\beta$



پس در مثلث های AFB و FBD که دارای وتر به طول ۱ هستند می توان طول اضلاع را به کمک مثلثات به صورت مقابل نوشت :

حال در دو مثلث BCD و FED با توجه به اندازه اضلاعی که مشخص شده است و به کمک مثلثات داریم :



حال با توجه به برابر بودن اضلاع مقابل در مستطیل داریم :

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta \Rightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

حال اگر به جای β قرار دهیم $-\beta$ خواهیم داشت :

$$\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta) \Rightarrow \boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta) \Rightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

در نهایت داریم :

۱) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

۲) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

۳) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

۴) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

بیشتر بدانیم :

۵) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$

۶) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$

تمرین : مقدار $\sin ۲\alpha, \cos ۲\alpha$ را بر حسب کمان α بنویسید . (به این روابط نصف کمان می گویند)

تمرین : مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را حساب کنید .

$\sin ۱۰۵^\circ =$

$\cos ۷۵^\circ =$

$\tan ۱۵^\circ =$

$\cot \frac{\pi}{۱۲} =$

$\sin ۲۲/۵^\circ =$

تمرین : اگر $\cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$ و $\sin\beta = \frac{۵}{۱۲}$ و α در ربع دوم و β در ربع اول باشد . مقدار $\sin(\alpha-\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ را بیابید .

تمرین : اگر α,β حاده و $\cos\alpha = \frac{۴}{۵}$ و $\cos(\alpha+\beta) = \frac{۳}{۵}$ باشد ، مقدار $\sin\beta$ چقدر است ؟

تمرین : حاصل $\dfrac{\cos ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ - \sin ۲۰^\circ \sin ۴۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ \cos ۴۰^\circ + \sin ۴۰^\circ \cos ۲۰^\circ}$ چقدر است ؟

تمرین : مقدار عددی $A = \sin ۳x \cos ۲x + \sin ۲x \cos ۳x$ به ازای $x = \dfrac{\pi}{۱۵}$ چقدر است ؟

تمرین : حاصل عبارت $A = \sin ۱۵^\circ - \sqrt{۳} \cos ۱۵^\circ$ را بیابید . (راهنمایی : از ۲ فاکتور بگیرید)

تمرین : حاصل عبارت $A = \sin x \cos^۳ x - \sin^۳ x \cos x$ را به ازای $x = \dfrac{\pi}{۲۴}$ بیابید .

تمرین : تمرین های صفحه ۱۱۲ را حل کنید .

فصل پنجم :حد و پیوستگی

درس اول : مفهوم حد و فرایند های حدی

درس دوم : حد های یک طرف (حد چپ و حد راست)

درس سوم : قضایای حد

درس چهارم : محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

درس پنجم : پیوستگی

درس اول : مفهوم حد و فرایند های حدی

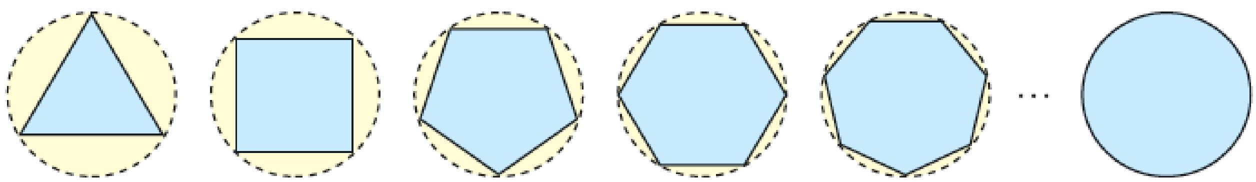
بیشتر پدیده های طبیعی پس از مدل سازی به صورت یک تابع در می آیند و گاهی لازم است رفتار این توابع را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم . مفهوم « حد » ابزار مناسبی برای این کار است .

به عنوان مثال ریاضی دانان بعد از اینکه دانستند نسبت محیط به قطر دایره عدد ثابتی است در صدد بر آمدند تا این عدد ثابت را با دقت زیاد بدست آورند . آنها با رسم چند ضلعی های منتظم محاطی (و البته محیطی) و افزایش تعداد اضلاع آن به این هدف دست یابند .

عدد π تا ۱۰ رقم اعشار در بیت زیر آمده است . آن را کشف کنید !!!

خـــــرد و دانـــــش و آگـــــاهی دانشـــــمندان ره ســـــر منـــــزل مقصـــــود بمـــــا آمـــــوزد

دایره زیر را که دارای شعاع یک است در نظر بگیرید :



اگر مساحت n ضلعی درون دایره را با A_n نمایش دهیم داریم :

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

با زیاد شدن تعداد اضلاع چند ضلعی ، مساحت آن به عدد π که مساحت دایره است ، نزدیک می شود .

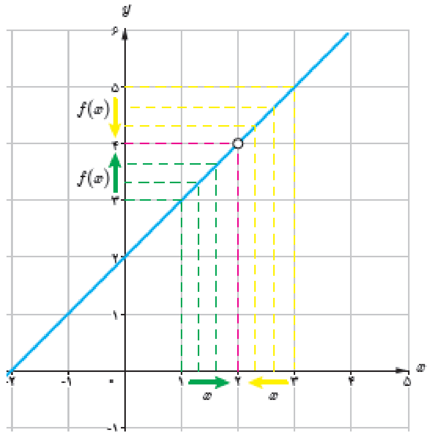
حال فرض کنید می خواهیم رفتار تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲}$ را در اطراف عدد $x=۲$ بررسی کنیم .

از آنجایی که تابع در ۲ تعریف نشده است پس در این نقطه مقدار ندارد ولی به ازای مقادیر غیر از ۲ می توان تابع را ساده کرد و $f(x)=x+۲$ را بدست آورد . حال مقادیر تابع را در اطراف ۲ بررسی می کنیم :

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود ← → x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→	?	←	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود ← → $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود



با نزدیک شدن x به ۲ از هر دو طرف ، مقدار تابع به عدد ٤ نزدیک می شود .

بیایید درستی این مطلب را از روی نمودار تابع بررسی کنیم :

در این صورت می گوییم وقتی $x \to ۲$ (x به ۲ میل می کند)

حد تابع برابر ٤ است و می نویسیم :

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = ٤$$

تمرین : تابع $f(x) = \begin{cases} x+۱ & x \neq ۲ \\ ۱ & x = ۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید .

الف) جدول زیر را کامل کنید .

x	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	$\rightarrow$	۲	$\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱
$f(x)$					$\rightarrow$		$\leftarrow$				

ب) حد تابع در ۲ چقدر است ؟

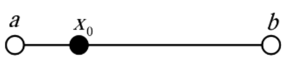
ج) مقدار تابع در ۲ چقدر است ؟

د) نمودار تابع را رسم و رابطه حدتابع با مقدار تابع در یک نقطه را بیان کنید .

همسایگی و همسایگی محذوف یک عدد :

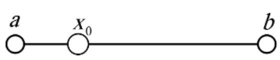
برای عدد $x_۰$ هر بازه باز شامل $x_۰$ را یک همسایگی این عدد می نامند .

یعنی اگر $x_۰ \in (a,b)$ آنگاه (a,b) یک همسایگی $x_۰$ است .



اگر خود $x_۰$ را از این بازه حذف کنیم ، مجموعه $(a,b)-\{x_۰\}$

را همسایگی محذوف عدد $x_۰$ می نامند .



همسایگی راست و چپ یک عدد :

اگر $r>0$ ، در این صورت بازه (x_0,x_0+r) را یک همسایگی راست و بازه (x_0-r,x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می نامیم .

تمرین : یک همسایگی ، یک همسایگی محذوف ، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای عدد ۲ بنویسید .

تمرین : آیا بازه $(1,2)$ یک همسایگی عدد ۱ است ؟ چرا ؟

تمرین : نشان دهید مجموعه جواب نامعادله $|x-x_0|<r$ یک همسایگی متقارن برای x_0 است .

تمرین : آیا می توانید مانند تمرین قبل یک همسایگی متقارن محذوف برای x_0 تعریف کنید .

تعریف حد یک تابع :

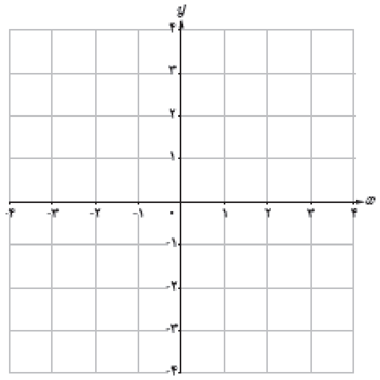
فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف عدد a تعریف شده باشد . می گوییم « حد تابع f وقتی x به a میل می کند برابر عدد حقیقی L است » ، هر گاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به L نزدیک کرد ، به شرط آنکه متغیر x از دو طرف به قدر کافی به a نزدیک شود . در این صورت می نویسیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

تمرین : آیا تابع $y=\sqrt{x-2}$ در $x=2$ حد دارد ؟ چرا ؟

تمرین : برای هر مورد زیر نمودار تابعی را رسم کنید .

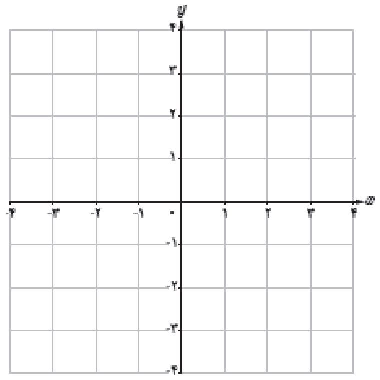
الف) در همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی

در همسایگی چپ آن خیر .



ب) در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد با مقدار تابع

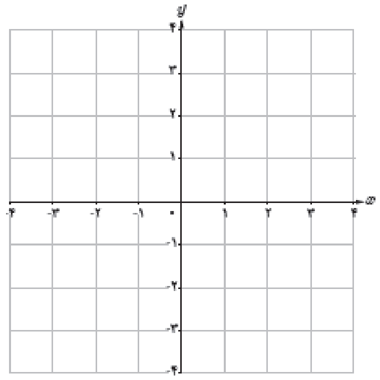
در آن نقطه برابر نباشد .



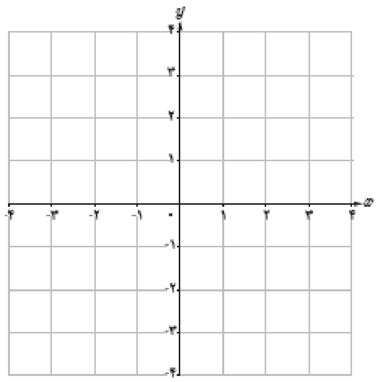
ج) دو تابع $g\,,f$ رسم کنید که یکی فقط در همسایگی

راست ۳ و دیگری فقط در همسایگی چپ ۳ تعریف شده

باشد و $f\,(3) \neq g\,(3)$.



تمرین : تابع $f\,(x) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$ را رسم کنید و مقدار $\lim\limits_{x \to -1} f\,(x), \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f\,(x)$ را در صورت وجود بیابید .



تمرین : تمرین های صفحه ۱۲۰ تا ۱۲۲ را حل کنید .

درس دوم : حد های یک طرفه (حد چپ و حد راست)

قبلاً دیدیم که تابع $y=\sqrt{x-۲}$ در $x=۲$ حد ندارد (چون در همسایگی چپ ۲ تعریف نشده است) ولی می توانیم رفتار این تابع را در سمت راست ۲ بررسی کنیم . گاهی اوقات لازم است رفتار تابعی را در یک طرف مقدار مشخصی از x بررسی کنیم .

حد راست :

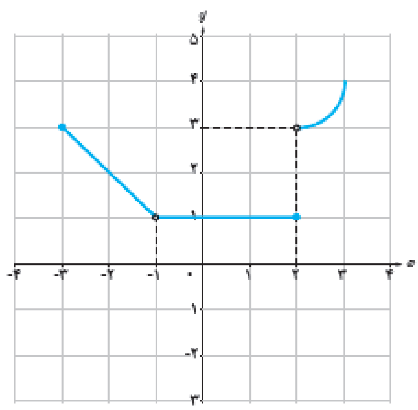
اگر تابع f در همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد $L_۱$ است ، هرگاه مقادیر تابع f به هر اندازه دلخواه بتواند به $L_۱$ نزدیک شود ، به شرط آنکه متغیر x به اندازه کافی از سمت راست به a نزدیک شود . و می نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_۱$

حد چپ :

اگر تابع f در همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد می گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد $L_۲$ است ، هرگاه مقادیر تابع f به هر اندازه دلخواه بتواند به $L_۲$ نزدیک شود ، به شرط آنکه متغیر x به اندازه کافی از سمت چپ به a نزدیک شود . و می نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_۲$

نتیجه : تابع f در نقطه a دارای حد است هرگاه حد چپ و راست موجود و با هم برابر باشند . (اگر حد چپ و راست در یک نقطه برابر نباشند تابع در آن نقطه حد ندارد)

تمرین : حدهای زیر را در صورت وجود بیابید .



$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ ... $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ ... $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ ...

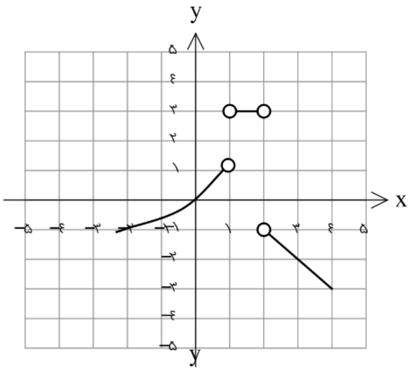
$\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ ... $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)$ ... $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$ ...

$\lim\limits_{x\to -۳} f(x)$ ... $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)$ ... $\lim\limits_{x\to -۳^+} f(x)$ ...

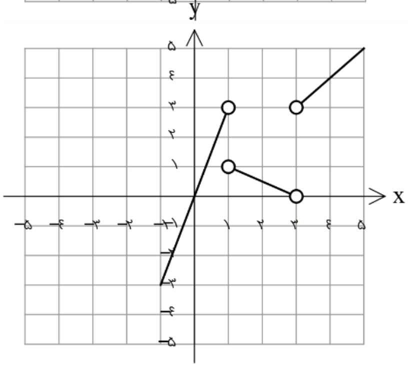
$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ ... $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ ... $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ ...

تمرین : نمودار تابع f داده شده است . مقدار $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(3-x^2\right)$ را بیابید.

(راهنمایی : با توجه به اینکه $x<1$ است محدوده $t=3-x^2$ را یافته و ...)



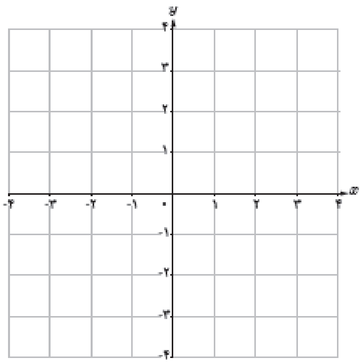
تمرین : نمودار تابع f داده شده است . مقدار $\lim\limits_{x\to 1^-} fof\,(x)$ را بیابید.



تمرین : نموداری از یک تابع رسم کنید که :

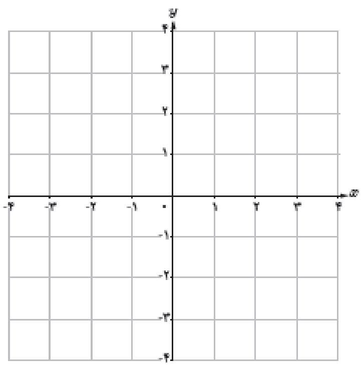
الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد

و در این نقطه حد داشته باشد .



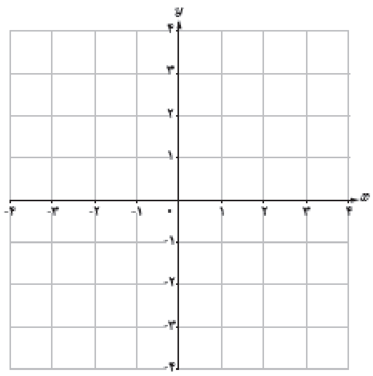
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد

ولی در این نقطه حد نداشته باشد .



ج) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد

و در این نقطه حد نداشته باشد .

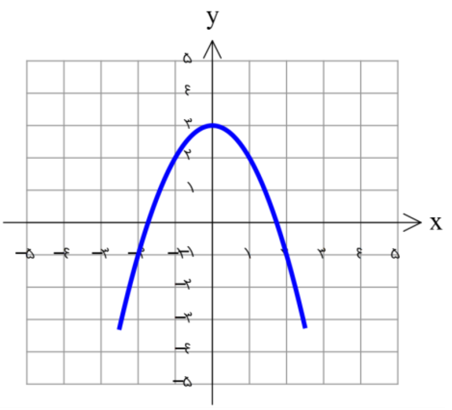


تمرین : مقدار حد راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ در $x=0$ چقدر است ؟

تمرین : با توجه به دامنه تابع $f(x)=\frac{x-1}{3-[x]}$ ، در مورد حد راست این تابع چه می توان گفت ؟

تمرین : با توجه به دامنه تابع $f(x)=\sqrt{|x|(x^2-1)}$ در چه نقطه ای نه حد راست وجود دارد نه حد چپ ؟

تمرین : با توجه به نمودار مقابل مقدار $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]-[\lim\limits_{x\to 0}f(x)]$ را بیابید .



تمرین : تمرین های صفحه ۱۲۷ تا ۱۲۹ را حل کنید .

درس سوم : قضایای حد

در بخشهای قبل به کمک جدول و نمودار حد توابع را بررسی کردیم و در این قسمت می خواهیم به کمک قضایایی که می آموزیم بدون استفاده از جدول یا نمودار به بررسی حد توابع بپردازیم .

قضیه ۱:

حد تابع ثابت $f(x)=c$ در همه نقاط دارای حد c است : $\lim\limits_{x\to a} c=c$

حد تابع همانی $f(x)=x$ در هر نقطه مانند a برابر با a است : $\lim\limits_{x\to a} x=a$

قضیه ۳: اگر دو تابع $f(x),g(x)$ دارای حد $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ باشند ، داریم :

الف) حد مجموع برابر با مجموع حد هاست : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_1+L_2$

ب) حد تفاضل برابر با تفاضل حد هاست : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_1-L_2$

ج) حد ضرب برابر با ضرب حد هاست : $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_1.L_2$

د) حد خارج قسمت برابر با خارج قسمت حد هاست : $L_2\neq 0$; $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$

نتایج قضیه ۳ : اگر تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد :

۱) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

۲) $\lim\limits_{x\to a} f^n(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$

۳) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

۴) برای هر تابع چند جمله ای $p(x)=b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1 x+b_0$ داریم : $\lim\limits_{x\to a} p(x)=p(a)$

قضیه ۴ : اگر تابع $f(x)$ در نقطه a حد داشته باشد :

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim_{x\to a}f(x)\right|$$

توجه !!! : دقت شود در مورد تابع جز صحیح همان طور که در درس قبل دیدیم لزوماً $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ با $\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]$ برابر نیست .

قضیه ۵ : برای هر عدد حقیقی a داریم :

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$$

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

تمرین : حد توابع زیر را بیابید .

۱) $\lim\limits_{x\to -1} x^3 =$

۲) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^4-3|x|+1)=$

۳) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{3x^2-2x-1}=$

۴) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{1-x}{[x]-x}=$

۵) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}}{x-3}=$

۶) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{۱ - \sin x}{\cos x} =$

۷) $\lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{\sqrt{x-۲}}{[x]+۲} =$

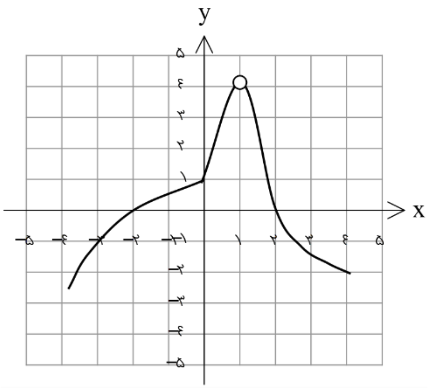
۸) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{|\sin x|}{x+\pi} =$

تمرین : اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ + ۱ & x > ۱ \\ x - ۲a & x < ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ حد داشته باشد ، مقدار a را بیابید .

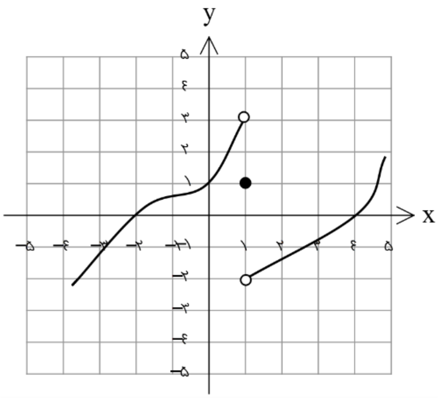
تمرین : اگر تابع f در ۱ حد داشته باشد و $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{۲f(x) - ۱}{f(x) + ۱} = ۱$ ، آنگاه مقدار $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ را بیابید .

تمرین : اگر توابع f وg در ۱ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x \to ۱}(۲f + g)(x) = ۳$ و $\lim\limits_{x \to ۱}(f - ۳g)(x) = ۵$ ، حاصل $\lim\limits_{x \to ۱}(\frac{f}{g})(x)$ را بیابید . (راهنمایی : می توانید حد تابع f و g در ۱ را $L_۱, L_۲$ نام گذاری کنید .)

تمرین : نمودار تابع f داده شده است . حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(fof)(x+1)}{xf(x)}$ را بیابید .



تمرین : نمودار تابع f داده شده است . حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)+f(\frac{1}{x})}{[f(\frac{1}{x})]}$ را بیابید .



نکته مهم : اگر تابع f در $x=a$ حد داشته باشد و تابع g در این نقطه حد نداشته باشد ، آنگاه تابع های $f\pm g$ و $\dfrac{g}{f}$ در این نقطه حد ندارند ولی توابع $f.g$ و $\dfrac{f}{g}$ ممکن است حد داشته باشند .

مثال : تابع $f(x)=[x]$ در $x=0$ حد ندارد . (تابع جز صحیح در هیچ نقطه صحیحی حد ندارد) و تابع $g(x)=x$ در $x=0$ دارای حد است و حاصل ضرب آنها نیز در این نقطه حد دارد : $\lim\limits_{x\to 0}(f.g)(x)=\lim\limits_{x\to 0}x[x]=0$

مثال : تابع $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ در $x=0$ حد ندارد . و تابع $g(x)=x$ در $x=0$ دارای حد است و تابع $\dfrac{f}{g}$ نیز در این نقطه حد دارد : $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{f}{g})(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\times\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$

نکته مهم : اگر تابع f و g در $x=a$ حد نداشته باشند ، ممکن است تابع های $f\pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ و fog ممکن است حد داشته باشند .

مثال : تابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=۱-[x]$ در $x=۰$ حد ندارد ولی : $\lim\limits_{x\to ۰}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to ۰}۱=۱$

مثال : تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ و $g(x)=\frac{x}{|x|}$ در $x=۰$ حد ندارد ولی : $\lim\limits_{x\to ۰}(f.g)(x)=\lim\limits_{x\to ۰}۱=۱$

مثال : تابع $f(x)=\begin{cases}-۲ & x>۱\\ ۲ & x<۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۱ & x>۱\\ ۱ & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد ندارد ولی : $\lim\limits_{x\to ۱}(\frac{f}{g})(x)=\lim\limits_{x\to ۱}۲=۲$

مثال : تابع $f(x)=\begin{cases}-۲ & x>۱\\ ۲ & x<۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۱ & x>۱\\ -۲ & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد ندارد ولی : $\lim\limits_{x\to ۱}(fog)(x)=\lim\limits_{x\to ۱}۲=۲$

تمرین : مقدار $\lim\limits_{x\to -۱}([x]+[-x])$ را در صورت وجود بیابید .

تمرین : مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}[\sin x]$ را بیابید .

تمرین : تمرین های صفحه ۱۳۹ و ۱۴۰ را حل کنید .

درس چهارم : محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

فرض کنید می خواهیم حد تابع $f(x)=\frac{x^{2}-1}{x-1}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنیم . طبق قضایای حد چون حد صورت و مخرج برابر صفر است نمی توان نتیجه ای گرفت به این حالت ، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ گفته می شود . بنابراین برای رفع ابهام ، به کمک اتحادهای جبری و مثلثاتی سعی می کنیم ابتدا تابع را ساده و سپس حد آن را بیابیم .

الف) توابع گویا : برای رفع ابهام در این حالت باید صورت و مخرج را تجزیه می کنیم تا عامل صفر شونده در صورت و مخرج مشخص شود ، سپس با حذف این عامل از تابع دوباره حد می گیریم .

تمرین : مقدار حد های زیر را بیابید .

۱) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^{2}-4}{x^{2}+x-2}=$

۲) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x[x]-4}{x^{2}-4}=$

۳) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3+x)(2+3x)-6}{11x}=$

۴) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^{2}-5x-2}{2x^{2}-3x-2}=$

ب) توابع گنگ : با استفاده از ساخت اتحاد مزدوج یا چاق و لاغر عبارت را گویا کرده و مانند قسمت قبل عمل می کنیم .

تمرین : مقدار حد های زیر را بیابید .

۱) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{x-1} =$

۲) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x+1}-3} =$

۳) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} =$

۴) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5-x}-1} =$

ج) توابع مثلثاتی : از حد های زیر و اتحاد های مثلثاتی بهره می بریم .

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

تمرین: مقدار حد های زیر را بیابید .

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} =$

۲) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin x} =$

۳) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x} =$

۴) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos x} =$

د) روش تغییر متغیر : گاهی اوقات با یک تغییر متغیر مناسب می توان مساله را ساده تر کرد سپس به حل آن پرداخت .

مثال : مقدار $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx}$ را بیابید . (به خاطر بسپارید)

حل : با فرض $ax = t$ داریم : $x = \dfrac{1}{a}t$, $t \to 0$ در نتیجه $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{\frac{b}{a}t} = \dfrac{a}{b} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = \dfrac{a}{b} \times 1 = \dfrac{a}{b}$

به عنوان مثال برای حل حد $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\sin 4x + \sin 2x}$ کافیست صورت و مخرج را بر x تقسیم کنیم .....

تمرین : مقدار حد های زیر را بیابید .

۱) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{x - ٤\sqrt{x} + ۳}{۱ - x^{۲}} =$

۲) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{۱ - \sqrt[۳]{x}}{۱ - \sqrt{x}} =$

۳) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi} =$

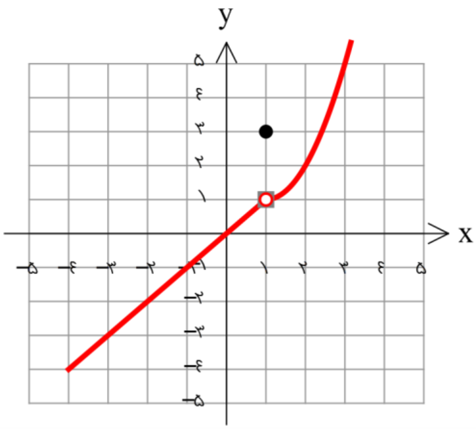
٤) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a} =$

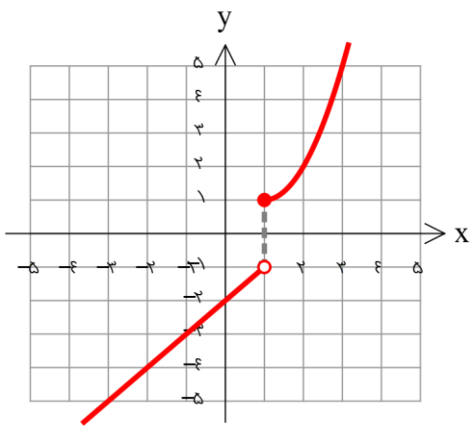
۵) $\lim\limits_{x \to ۲^{+}} \dfrac{\sqrt{٤ - \sqrt{x - ۲}} - ۲}{\sqrt{x - ۲}} =$

تمرین : تمرین های صفحه ۱٤٤ را حل کنید .

درس پنجم : پیوستگی

گاهی اوقات می بینیم که نمودار یک تابع در یک یا چند نقطه از هم گسسته شده است اگر دقت کنیم می بینیم که در این نقاط یا حد وجود ندارد و یا اگر وجود دارد مقدار تابع در آن نقطه با حد تابع متفاوت است . به نمودار های زیر توجه کنید :





در نتیجه

پیوستگی : برای آنکه تابع در یک نقطه پیوسته باشد باید در آن نقطه :

الف) مقدار داشته باشد .

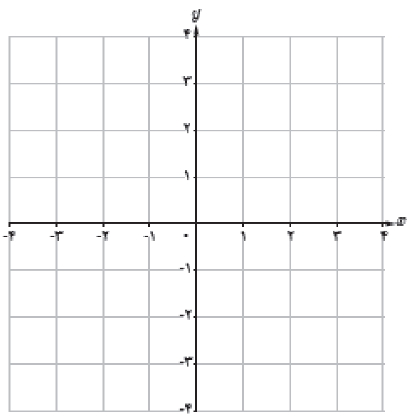
ب) حد داشته باشد .

ج) حد تابع با مقدار تابع برابر باشد . $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

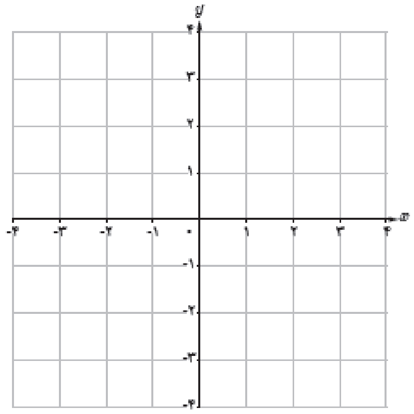
در غیر این صورت تابع را در آن نقطه ناپیوسته می گویند .

تمرین : نمودار تابعی را رسم کنید که :

الف) در ۱ حد داشته و مقدار داشته ولی پیوسته نباشد .

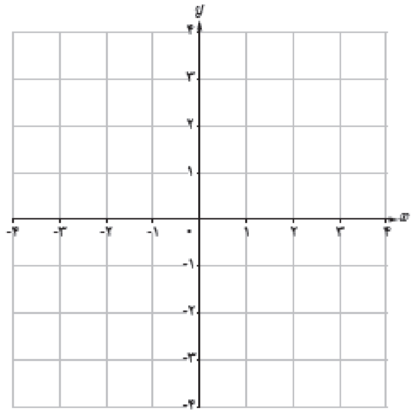


ب) در ۱ مقدار نداشته و حد داشته باشد .



ج) در دو نقطه نا پیوسته باشد که در یکی حد داشته

و در دیگری حد نداشته باشد .



تمرین : تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ از نظر پیوستگی در $x=2$ چگونه است ؟

تمرین : تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x=2$ چگونه است ؟

تمرین : پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+3 & x<0\\ 2 & x=0\\ \dfrac{x+|x|}{\sin x} & x>0\end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید .

تمرین : مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} 3x^{2}+a & x\geq -1 \\ \dfrac{|x+1|}{x+1} & x<-1 \end{cases}$ در $x=-1$ پیوسته باشد .

تمرین : مقدار a و b را طوری بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x} & x>0 \\ 2a+b & x=0 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & x<0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد .

تمرین : تابع $y=[\cos x],y=[\sin x]$ در $x=\pi$ از نظر پیوستگی چگونه هستند ؟

پیوستگی راست : تابع f در a از راست پیوسته است (پیوستگی راست دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=f(a)$

پیوستگی چپ : تابع f در a از چپ پیوسته است (پیوستگی چپ دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=f(a)$

تمرین : تابع $f(x)=x-[x]$ در نقاط صحیح چه نوع پیوستگی را دارد ؟

پیوستگی در بازه : تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته است اگر و تنها اگر در هر نقطه (a,b) پیوسته باشد و در b پیوستگی چپ و در a پیوستگی راست داشته باشد .

تمرین : تابع $y=[x]$ در بازه $[۱,۲]$ از نظر پیوستگی چگونه است ؟

تمرین : تابع $y=[x^۲]$ در بازه $(۲,k)$ پیوسته است . حداکثر مقدار k را بیابید .

تمرین : تابع $y=\left[\frac{x+۱}{۲}\right]$ در بازه $(۱,k)$ فقط یک نقطه ناپیوستگی دارد . حداکثر مقدار k چقدر است ؟

تمرین : بزرگ ترین بازه ای که تابع $y=۱-\sqrt{۲x-۳}$ در آن پیوسته است را بنویسید .

تمرین : تمرین های صفحه ۱۵۱ را حل کنید .

پایان