

جبر و معادله

۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

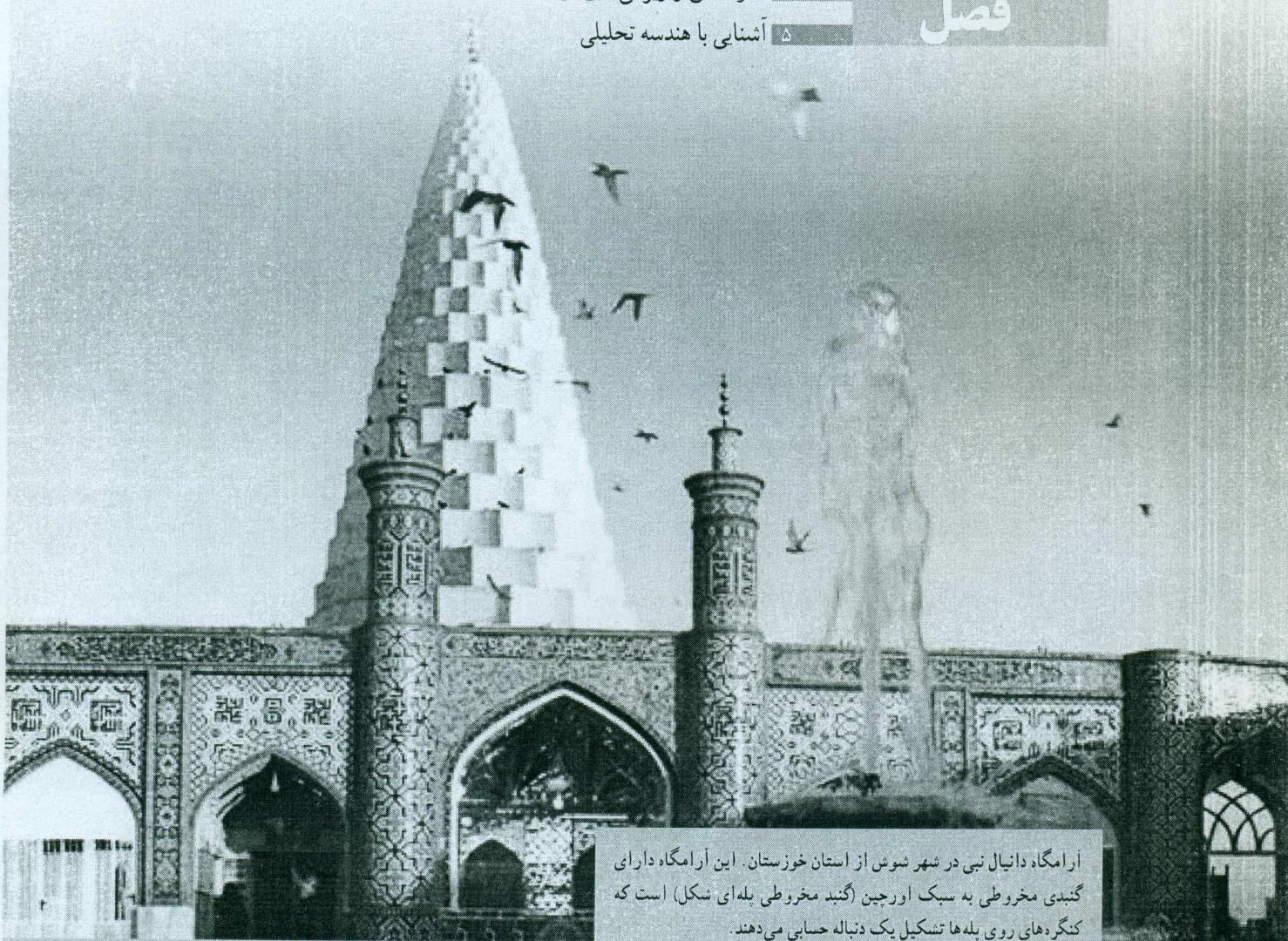
۲ معادلات درجه دوم

۳ معادلات گویا و گنگ

۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۵ آشنایی با هندسه تحلیلی

۱
فصل



آرامگاه دانیال نبی در شهر شوش از استان خوزستان. این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورجین (گنبد مخروطی پله‌ای شکل) است که کنگره‌های روی پله‌ها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

درس

در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید و می‌دانید که مجموعه اعداد طبیعی $1, 2, 3, \dots$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت یک می‌باشد. چگونگی به دست آوردن مجموع اعداد طبیعی 1 تا n می‌تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبه مجموع جملات هر دنباله حسابی برسیم.

فعالیت

تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه‌رو آرایش شده‌اند. تعداد این دگمه‌ها چقدر است؟

۱ یکی از راه‌ها، شمارش تعداد دگمه‌ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین، است.

در این شکل تعداد ردیف‌ها ۱۰ و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف ۱۰ است. پس تعداد کل دگمه‌ها برابر ۱۰۰ است و چون تعداد دگمه‌های آبی و قرمز برابر است پس:

$$\text{تعداد کل دگمه‌ها} = \frac{100}{2} = 50 = 55$$

۳ برای محاسبه مجموع اعداد طبیعی 1 تا n مراحل زیر را انجام داده‌ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ تا}}$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ابتدا اعداد طبیعی 1 تا n را نوشته و ترتیب صعودی سپس n تا 1 را زیر مجموع 1 تا n قرار می‌دهیم طوری که مجموع هر دو عدد زیر هم $n+1$ می‌شود و چون کل اعداد n تا هستند حال ما n تا $n+1$ داریم پس $2S = n(n+1)$ می‌شود



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل اول: جبر و معادله ۳

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

❖ مثال: روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

❖ حل: نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با:

$$19+18+17+\dots+2+1 = \frac{19}{2}(1+19) = 190$$

❖ تذکر: این مسئله را با استفاده از ترکیبیات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دوروش را با هم مقایسه کنید.

فناونت

خواندنی

در ریاضیات آنچه مهم است فکر کردن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. ریاضیات راهی برای اندیشیدن و روشی برای استدلال و درست فکر کردن است. استدلال وسیله‌ای است که به کمک آن می‌توان از روی اطلاعاتی که داریم حقایق را کشف کنیم. البته ریاضیات به تجربه و مشاهده نیز مربوط می‌شود، ولی قسمت اعظم آن همان اندیشیدن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. زمانی که گاوس ریاضیدان آلمانی ده ساله بود، روزی معلم از دانش‌آموزان کلاس خواست مدام و کاغذ بردارند و حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورند. چند دقیقه نگذشته بود که معلم، گاوس را دید که به کار دیگری مشغول است. از او پرسید: چرا مسئله را حل نمی‌کنی؟ او جواب داد: حل شد! معلم با تعجب گفت: این غیر ممکن است. ولی گاوس گفت: خیلی هم آسان بود. سپس گفت: اول چنین نوشتیم:

$$1+2+3+\dots+98+99+100$$

و بعد چنین:

$$100+99+98+\dots+3+2+1$$

و جفت جفت از اول تا آخر جمع کردم:

$$101+101+101+\dots+101+101+101$$

بدین ترتیب ۱۰۰ تا عدد ۱۰۱ به دست آوردم که حاصل ضرب آنها ۱۰۱۰۰ می‌شود و چون دو بار مجموع ۱ تا صد را حساب کردم عدد ۱۰۱۰۰ را بر دو تقسیم کردم و ۵۰۵۰ به دست آمد. بنابراین حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰۵۰ می‌شود.

دنباله حسابی زیر را، که در آن جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-2)d, a+(n-1)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+(n-2)d) + (a+(n-1)d)$$

❖ حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $2S_n$ را به دست آورید. نتیجه خواهید گرفت:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\begin{aligned} S &= a + (a+d) + \dots + a + (n-1)d \\ S &= a + (n-1)d + a + (n-2)d + \dots + a \\ \hline 2S &= (2a + (n-1)d) + (2a + (n-1)d) + \dots + (2a + (n-1)d) \\ 2S &= n[2a + (n-1)d] \end{aligned}$$

❖ مثال: مجموع صد جمله اول دنباله حسابی ۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ... را به دست آورید.

❖ حل: جمله اول ۳، تعداد جمله‌ها ۱۰۰ و قدرنسبت جملات ۴ است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌توان نوشت:

$$S_{100} = \frac{100}{2}[(2 \times 3) + (99 \times 4)] = 50 \times 402 = 20100$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

کاردکلاس

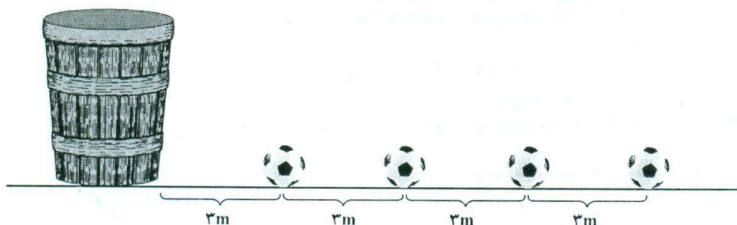
۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_n و a_1 به ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

۲ مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + \underbrace{a + (n-1)d}_{a_n}] = \frac{n}{2}[a + a_n]$$

$12, 14, 16, \dots, 94$
 a a_n $n = \frac{94-12}{4} = 22$ $S_n = \frac{22 \times [12+94]}{2} = 1188$

مثال: در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سید نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سید شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سید حمل کند و به سید بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سید بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سید انداخته است؟



حل: دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سید باید مسافت $3+3=6$ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می‌دهد. اگر تعداد توپ‌های انداخته شده در سید باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \Rightarrow n = 17$$

مجموع جملات دنباله هندسی

فعالیت

۱ قدر نسبت و مجموع n جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید. ($a \neq 0$)

a, a, a, \dots, a $q=1$ $S_n = na$

۲ دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید. ($q \neq 1$)

a, aq, aq^2, \dots

الف) جمله n ام دنباله چیست؟ $a_n = aq^{n-1}$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل اول: جبر و معادله ۵

(ب) فرض می‌کنیم مجموع n جمله اولیه دنباله هندسی S_n باشد:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

طرفین رابطه را در q ضرب می‌کنیم:

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

اگر $S_n - S_n q$ را تشکیل دهیم، پس از ساده‌سازی، نتیجه می‌گیریم:

$$S_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$$

کارد کلاس

خواندنی



در سده‌های چهارم و پنجم هجری، بسیاری از ریاضی‌دانان ایرانی، به بررسی دنباله‌های ریاضی پرداخته‌اند. از جمله «ابوریحان بیرونی» در کتاب خود «انوار الباقیه عن القرون الخالیه» مسئله معروف صفحه شطرنج را که در واقع یک دنباله هندسی

است که جمله اول آن واحد و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد، حل کرده است. او با استدلال دقیق، مجموع جمله‌های این دنباله را عدد 18446744073709551615 به دست آورده است. دربارهٔ صفحه شطرنج، داستانی وجود دارد؛ وقتی مخترع شطرنج، بازی خود را به شاه عرضه کرد، شاه از او خواست پاداشی بخواهد. دانشمند پاسخ داد: برای خانه اول شطرنج، یک دانه گندم به من بدهید و برای خانه دوم دو دانه گندم و برای خانه سوم چهار دانه گندم و همین‌طور برای هر خانه دو برابر خانهٔ پیش از آن گندم بدهید تا به خانه شصت و چهارم برسد. شاه با ساده‌لوحی فرمان داد یک کیسه گندم به این مرد بدهید. ولی او نپذیرفت و تقاضا کرد پس از محاسبهٔ دقیق، گندم را به او بدهند. قبول کردند و پس از محاسبه، عددی را که در بالا آوردیم پیدا کردند. سپس معلوم شد که اگر در تمام سطح کره زمین (یعنی هر جا که خشکی باشد) گندم بکارند این مقدار گندم به دست نمی‌آید! ابوریحان بیرونی با استدلال ریاضی به این نتیجه رسید که مقدار گندم‌ها برابر $2^{64} - 1$ دانه است. او برای محسوس کردن این عدد می‌گوید: در سطح کره زمین 2305 کوه را در نظر می‌گیریم، اگر از هر کوه 10000 رود خارج شود در طول هر رودخانه 1000 قطار قاطر حرکت کنند. و هر قطار شامل 1000 قاطر باشند و همراه هر قاطر 8 کیسه گندم فرار داده باشیم که در هر کیسه 10000 دانه گندم باشد، باز هم عدد همهٔ این گندم‌ها از تعداد گندم‌های صفحه شطرنج کوچک‌تر خواهد بود.

مجموع 10 جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots \quad S_{10} = \frac{1}{8} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{10129755}{10}$$

مثال: برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیواکتیو به لایه‌های محافظی وجود دارد که شدت تابش پرتوها پس از عبور از هریک از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک دست کم تا 97% درصد کاهش یابد؟

حل: اولین لایه، شدت تابش را نصف می‌کند. دومین لایه باز این تابش را نصف می‌کند $(\frac{1}{4})$ و... بدین ترتیب دنباله‌ای از اعداد به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

این یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است. حال می‌خواهیم بدانیم چند جمله از این دنباله باید جمع شود تا حاصل حداقل 97% درصد شود.

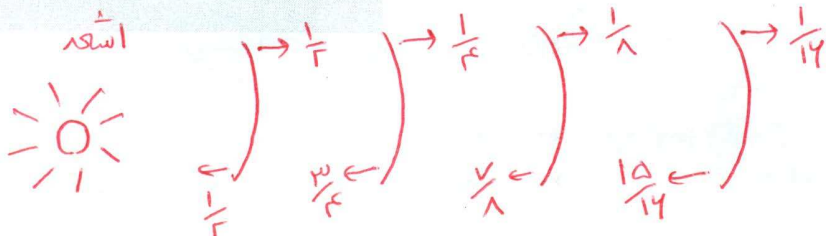
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \approx 33.3$$

با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر، و اینکه $2^6 = 64$ در می‌یابیم که حداقل مقدار n برای برقراری نامساوی فوق برابر با 6 خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل شش تا باشد.

روش تصویری



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

$$\frac{1(1-2^{45})}{1-2} = 2^{45} - 1 = 18\ 44\ 47\ 44\ 0\ 73\ 70\ 9\ 51\ 41\ 5$$

کاردر کلاس

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

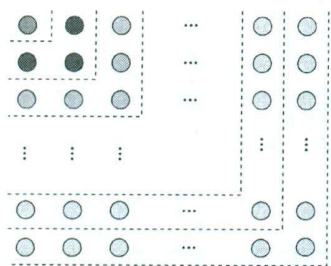
الف) این جایزه چند گرم می شود؟
 ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد.

چون ۱۰۰۰ میلیارد تن برابر است با ۱۰^{۱۸} گرم

$$\alpha=1 \quad q=2 \quad n=45 \quad S_n = a \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) \rightarrow 1 \left(\frac{1-2^{45}}{1-2} \right) = S_{45}$$

$$S_{45} = 2^{45} - 1 > 2^{43} = (2^7)^6 > 100^6 = 10^{18}$$

تمرین



۱ در دنباله حسابی ... ۵, ۸, ۱۱, ... حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟
 $a=5 \quad S_n > 493 \quad \frac{n}{2} [10 + 3(n-1)] > 493 \quad 3n^2 + 7n - 986 > 0$
 $d=3 \quad \Delta = 1181 \rightarrow n_1 = -\frac{7+1181}{6} \rightarrow n > 17 \rightarrow n=18$
 $\rightarrow n_2 = -\frac{7-1181}{6} = 196 \rightarrow$ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

۲ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می شود؟ *صغری بید*

۴ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره های زوج ۱۵۰ می باشد.

جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید. *صغری بید*

۵ جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟ *صغری بید*

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ *صغری بید*

۷ برای عدد حقیقی $a (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

۱- این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. (ترجمه میزان الحکمة، ص ۷۷)

معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است ($a \neq 0$) که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطه $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ به دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این معادلات و دیگر نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

کاردرکلاس

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$a = 3 \quad b = -5 \quad c = 2 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 3 \times 2 = 1$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 1}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۱ معادله $3x^2 - 5x - 2 = 0$ را حل کنید.

۲ اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

$$x = -1 \rightarrow 4 - m(-1) - 7 = 0 \quad m - 3 = 0 \quad m = 3$$

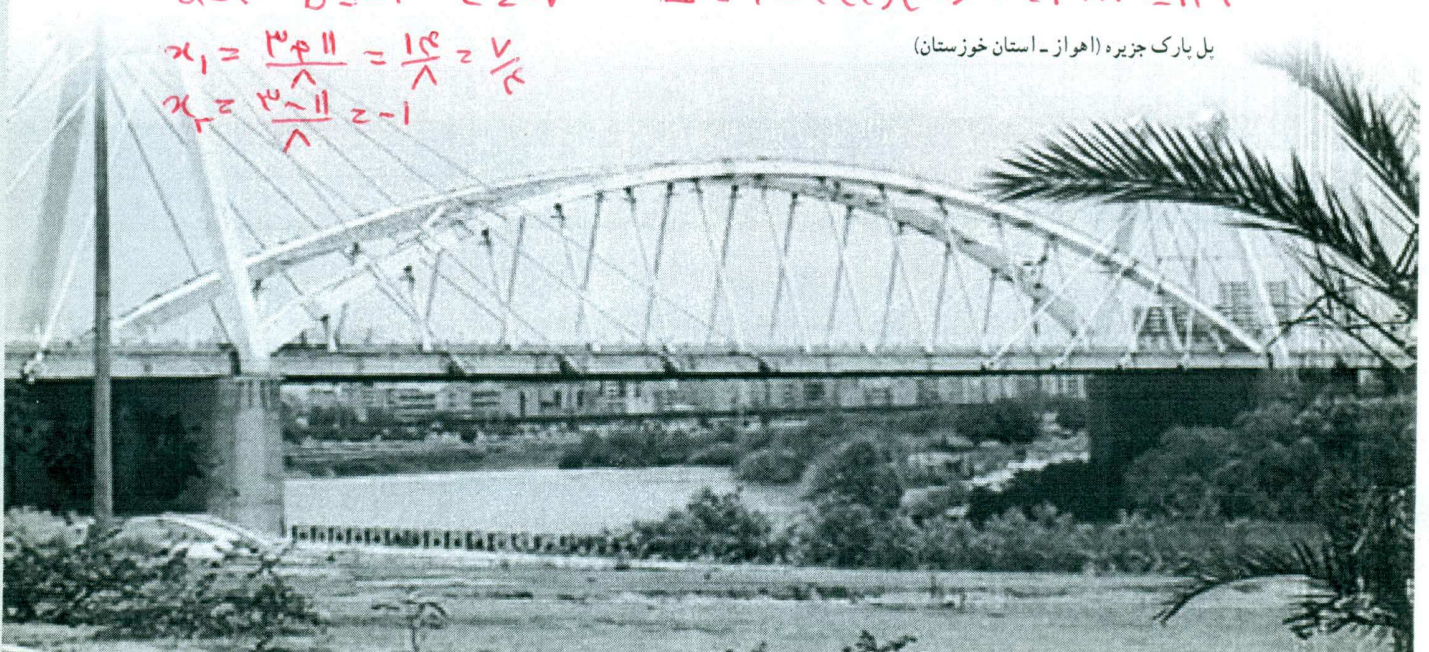
$$4x^2 - 3x - 7 = 0$$

$$a = 4 \quad b = -3 \quad c = -7 \quad \Delta = 9 - 4(4)(-7) = 9 + 112 = 121$$

$$x_1 = \frac{3 + 11}{8} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

$$x_2 = \frac{3 - 11}{8} = -1$$

بل بارک جزیره (اهواز - استان خوزستان)



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

فعالیت

۱ جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$ax^2 + bx + c = 0$	مقدار هر ریشه x_1 و x_2	جمع ریشه‌ها (S)	ضرب ریشه‌ها (P)	a	b	c	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$3x^2 - 5x + 2 = 0$	۱ $\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	۳	-۵	۲	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
$4x^2 - 3x - 7 = 0$	-۱ $\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$	۴	-۳	-۷	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$
$x^2 - 2x + 1 = 0$	۱ ۱	۲	۱	۱	-۲	۱	۲	۱
$5x^2 + 6x - 8 = 0$	-۲ $\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	۵	۶	-۸	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$

الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب هر معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

ب) در جدول بالا بین حاصل ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟

۲ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، نشان دهید:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$b^2 - \Delta = b^2 - (b^2 - 4ac) = 4ac \quad \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد این روابط برقرار است.

$$S = \frac{-b}{a}, P = \frac{c}{a}$$

❖ مثال: اگر $x = -1$ یک ریشه معادله $4x^2 - mx - 7 = 0$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها

به‌دست آورید.

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (-1)x_2 = \frac{-7}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{4}$$

❖ حل: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow -1 + \frac{7}{4} = \frac{m}{4} \Rightarrow m = 3$$

از طرفی با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم:

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل اول: جبر و معادله ۹

فعالیت

۱ برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۲ و -۳ باشند راه حل زیر ارائه شده است. مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Rightarrow (x-2)(x+3)=0 \Rightarrow x^2+x-6=0$$

۲ اگر $x_1 = \alpha$ و $x_2 = \beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - \alpha) = 0 \\ (x - \beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

کاردرکلاس

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشند.

$$S = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$P = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad x^2 - 4x + 1 = 0$$

❖ مثال: محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌متر مربع است. ابعاد مستطیل را به دست آورید.

❖ حل: فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب x_1 و x_2 باشند، داریم:

$$x_1 + x_2 = \frac{33}{2}, \quad x_1 x_2 = 65$$

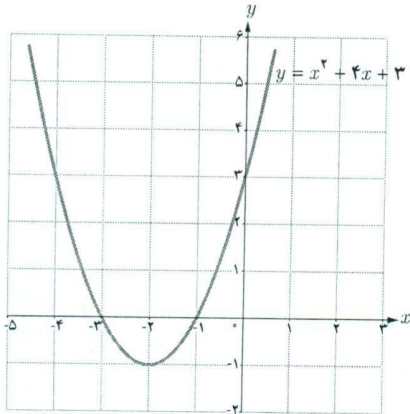
معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S = \frac{33}{2}$ و $P = 65$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{33}{2}x + 65 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 33x + 130 = 0$$

از حل معادله اخیر $x_1 = 10$ یا $x_2 = \frac{13}{2}$ به دست می‌آید؛ در نتیجه، طول و عرض مستطیل به ترتیب 10 و $\frac{13}{2}$ خواهد بود.

صفرهای تابع

فعالیت



نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 + 4x + 3$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.

۱ معادله $f(x) = 0$ را حل کنید و جواب‌های آن را به دست آورید.

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (x+1)(x+3) = 0$$

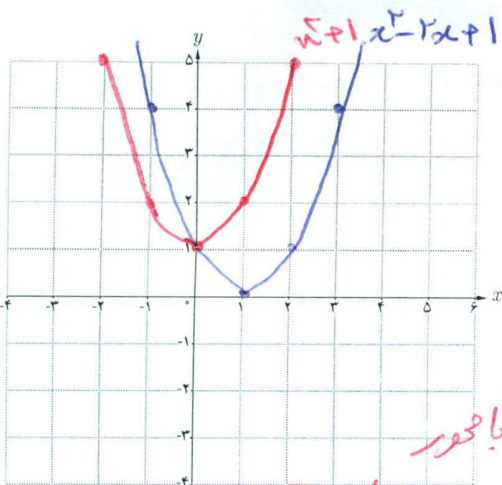
$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

۲ محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادله $f(x) = 0$ دارد؟ محل تلاقی نمودار با محور x ها دقیقاً جواب‌های معادله $f(x) = 0$ هستند

صفرهای تابع

برای هر تابع f جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقداری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور x هاست.

کاردر کلاس



۱ نمودار سهمی‌های $f(x) = x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = x^2 + 1$ را رسم کنید.

۲ با توجه به نمودارهایی که رسم کردید در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ چه می‌توان گفت؟

معادله $g(x) = 0$ جواب ندارد چون محل برخوردی با محور x ها ندارد و معادله $f(x) = 0$ چون معادله $(x-1)^2 = 0$ است یک جواب دارد

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل اول: جبر و معادله ۱۱

❖ مثال: اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند نشان دهید

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

❖ حل: از آنجا که x' و x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند پس جوابهای معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و

داریم:

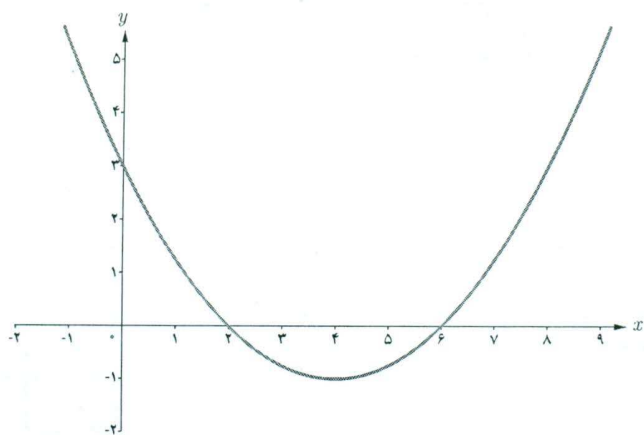
$$a(x - x')(x - x'') = a(x^2 - (x' + x'')x + x'x'')$$

$$= a(x^2 - Sx + p)$$

$$= a\left[x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= ax^2 + bx + c$$

❖ مثال: اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد ضابطه سهمی را مشخص کنید.



روش اول: از آنجا که $x' = 2$ و $x'' = 6$ صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند با استفاده از رابطه‌ای که در مثال قبل آمده است می‌توان نوشت:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 6)$$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(0, 3)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند و داریم:

$$3 = a(0 - 2)(0 - 6) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

معادله سهمی به صورت $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به صورت $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ نوشته می‌شود.

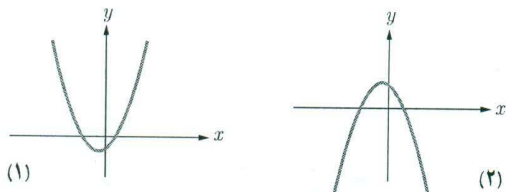
روش دوم: از آنجا که $f(0) = 3$ می‌توان نوشت $f(x) = ax^2 + bx + 3$ ؛ حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

$$\frac{c}{a} = 12 \Rightarrow \frac{3}{a} = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

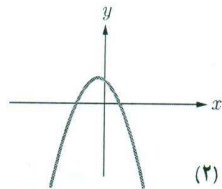
از طرفی از آنجا که $\frac{-b}{a} = 8$ و $a = \frac{1}{4}$ پس $b = -2$ و در نتیجه $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادله کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

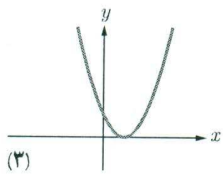
با توجه به معادله $f(x) = 0$ نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.



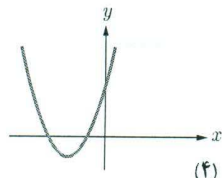
(۱)



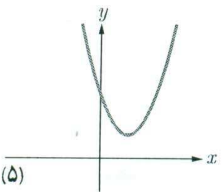
(۲)



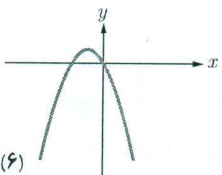
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

الف) دو ریشه مثبت دارد. (شکل‌های ۸ و ۹)

ب) دو ریشه منفی دارد. (۴)

پ) یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد. (۱ و ۲)

ت) ریشه ندارد. (۵ و ۷)

ث) ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است. (۷)

ج) یک ریشه دارد. (۳)

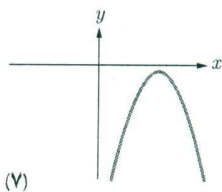
چ) حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است. (۳، ۸، ۹)

ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است. (۱، ۲، ۵، ۶)

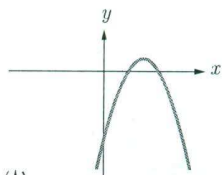
با توجه به نمودارهای داده شده مقابل، جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

شماره شکل	ویژگی
۹	تعداد صفر f
۸	علامت a
۷	علامت b
۶	علامت c
۵	
۴	
۳	
۲	
۱	

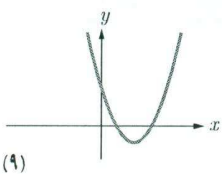
$-\frac{b}{2a} > 0$ $-bx > 0$ $bx > 0$



(۷)



(۸)



(۹)

تذکر: ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور x ها را قطع نکرده است پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود؛ و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور y ها را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c > 0$ و طول نقطه مینیمم تابع، مقداری مثبت است. پس $-\frac{b}{2a} > 0$ و از مثبت بودن a و رابطه اخیر نتیجه می‌شود $b < 0$.

$$(n-1)^2 = \frac{1}{4}n + 1$$

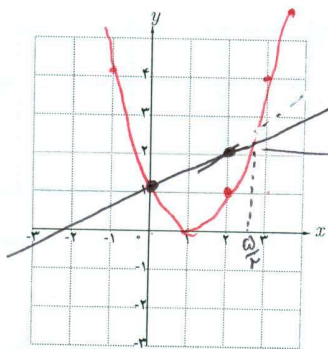
$$x^2 - 2n + 1 = \frac{1}{4}n + 1$$

$$x^2 - \frac{9}{4}n = 0$$

$$n(n - \frac{9}{4}) = 0 \rightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=\frac{9}{4} \end{cases}$$

روش هندسی حل معادلات

فعالیت



۱ معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{4}x + 1$ را حل کنید. *جواب را به طرز ارائه شده*

۲ نمودار دو تابع $y = \frac{1}{4}x + 1$ و $y = (x-1)^2$ را رسم کنید. *نقطه برخورد*
 و هر دو ضلع دارای $n = \frac{9}{4}$ برابر می شود

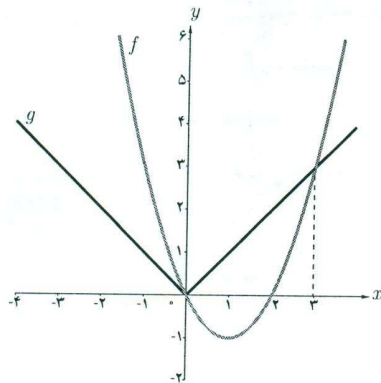
۳ چه ارتباطی بین ریشه های معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{4}x + 1$ و

طول های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟ ریشه های معادله دقیقاً همان طول های نقاط تلاقی نمودارها هستند

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب های معادله $f(x) = g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است. این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می نامیم.

❖ مثال: به روش هندسی معادله $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

❖ حل: با فرض $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 - 2x$ نمودار این دو تابع را رسم می کنیم:



$x=3$, $x=0$

با توجه به نمودارهای دو تابع طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارت اند از: *که جواب های معادله $|x| = x^2 - 2x$ می باشند.*

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل اول: جبر و معادله ۱۳

$$\begin{array}{r}
 x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad | \quad x - 2 \\
 \underline{- - + 4} \\
 x^3 - 2x^2 \\
 \underline{- + 4x} \\
 x^2 - 2x \\
 \underline{- + 4} \\
 -2x + 4 \\
 \underline{- + 4} \\
 0
 \end{array}$$

مثال: اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

حل: از آنجا که $x=2$ یک صفر تابع $p(x)$ است می توان نشان داد که $p(x)$ عاملی به صورت $x-2$ دارد، پس با تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ عامل دیگر $p(x)$ را می یابیم. می توان نوشت $p(x) = (x-2)(x^2+x-2)$. آنگاه از حل معادله $p(x) = 0$

$$\begin{cases}
 x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\
 x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}
 \end{cases}$$

داریم:

صفرهای تابع p برابر $-2, 2, 1$ می باشند.

کارد کلاس

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^2 + kx^2 - x - 2$ برابر (-2) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست

آوردید.

$$\begin{aligned}
 x &= -2 \\
 0 &= -1 + 4x + 2 - x^2 \\
 k &= +2
 \end{aligned}$$

مثال: صفرهای تابع f با ضابطه $f(x) = (x^2-1)^2 + (x^2-1) - 2$ را به دست آورید.

حل: هر چند معادله $f(x) = 0$ از درجه چهار است اما می توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $t = x^2 - 1$ ، معادله به صورت $t^2 + t - 2 = 0$ در می آید. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $x^2 - 1 = t$ مقادیر x را می یابیم.

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = -2$$

$$\begin{cases}
 t = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\
 t = -2 \Rightarrow x^2 - 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -1 \text{ غیر قابل قبول}
 \end{cases}$$

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f ، $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ می باشد.

برخی از معادلات را می توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییر متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.

کارد کلاس

$$x^4 - 10x^2 + 14 = 0 \quad u^2 = t$$

$$t^2 - 10t + 14 = 0$$

$$(t-8)(t-2) = 0$$

$$t=8 \quad u^2=8 \quad u=\pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$t=2 \quad u^2=2 \quad u=\pm\sqrt{2}$$

همه صفرهای تابع $f(x) = x^4 - 10x^2 + 14$ را به دست آورید.

1- الف) $S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$ $P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
 $x^2 - Sx + P = 0$ $x^2 - 1x + \frac{2}{9} = 0$

ب) $\alpha, 2\alpha$ $S = 3\alpha$ $P = 2\alpha^2$
 $x^2 - Sx + P = 0$ $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = 0$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

تمرین

۱ معادله درجه دومی بنویسید که:

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند. **بالای صند**

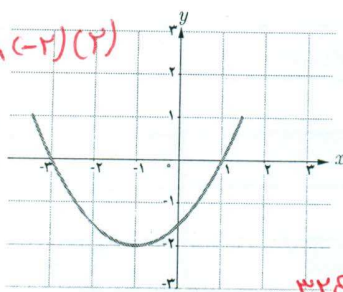
ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و

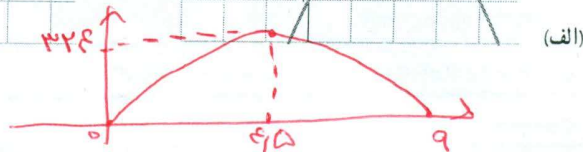
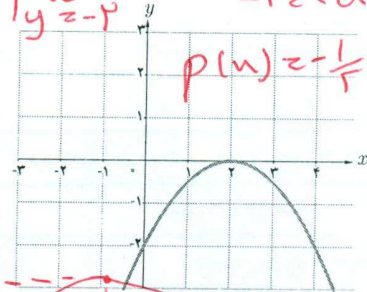
$y = a(x-1)(x+3)$

ضابطه آن را مشخص کنید. $y = a(x-2)^2$

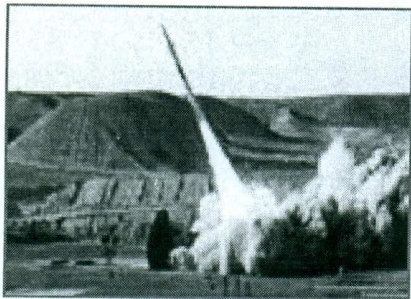
$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$ $-2 = a(-1)(2)$
 $a = \frac{1}{2}$
 $P(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+3)$
 $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ (ب)



$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ $-2 = 4a$ $a = -\frac{1}{2}$
 $P(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$



نمودار تمرین ۴ ←



۳ یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود.

ارتفاع این موشک (h) در زمان t ، از رابطه $h(t) = -16t^2 + 144t$ به دست می‌آید.

ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به دست آورید.

$t_{max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{144}{-32} = 4.5$ $h_{max} = -16(4.5)^2 + 144(4.5) = 324$
 $t(-14t + 144) = 0 \rightarrow t = 0, t = 9$

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = x^2 - 4x$ $x(x^2 - 4) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \rightarrow x = \pm 2$

ب) $g(x) = 2x^2 + x + 3$ $x(2x^2 + x + 3) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + x + 3 = 0 \end{cases}$ $\Delta < 0$ ریشه حقیقی ندارد

ب) $h(x) = x^2 + 2x^2 + 5 \rightarrow t^2 + 3t + 5$
 $\Delta = 9 - 4(1)(5) = -11$ ریشه حقیقی ندارد

۵ معادلات زیر را حل کنید.

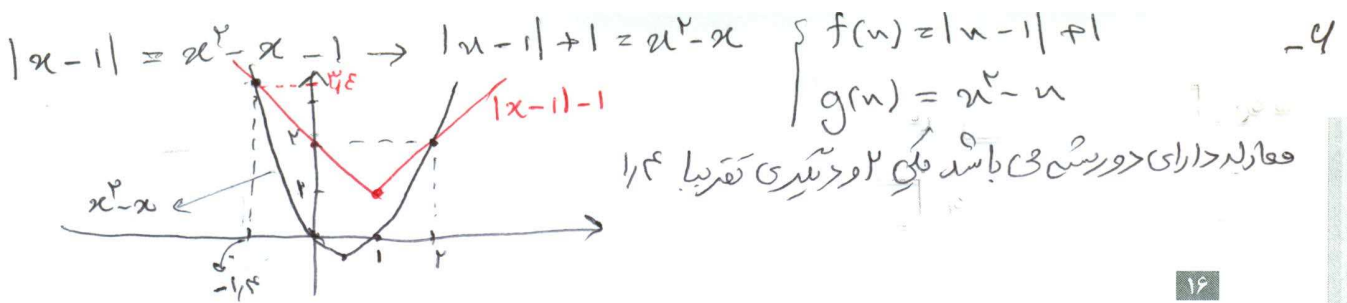
الف) $x^2 - 3x^2 - 4 = 0$ $x^2 = t$ $t^2 - 3t - 4 = 0$ $(t-4)(t+1) = 0$ $(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$ $x = \pm 2$

ب) $(\frac{x^2}{3} - 2)^2 - 7(\frac{x^2}{3} - 2) + 6 = 0$ $\frac{x^2}{3} - 2 = t$

ب) $(4-x^2)^2 - (4-x^2) = 12$ $4 - x^2 = t$ $t^2 - 7t + 4 = 0$ $(t-1)(t-4) = 0$

$t^2 - 7t + 4 = 0$ $\Delta = 41$ $t = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$
 $4 - x^2 = \frac{7 + \sqrt{41}}{2}$ $x^2 = 4 - \frac{7 + \sqrt{41}}{2} = \frac{1 - \sqrt{41}}{2}$
 $4 - x^2 = \frac{7 - \sqrt{41}}{2}$ $x^2 = 4 - \frac{7 - \sqrt{41}}{2} = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$
 $x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{41}}{2}}$

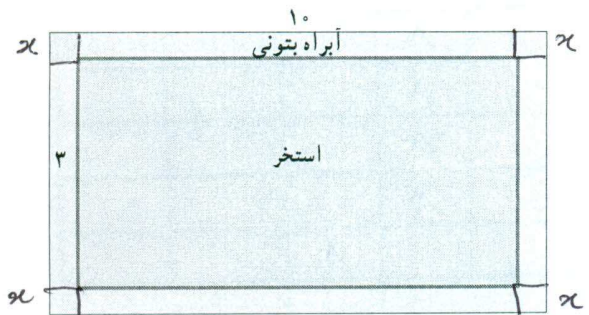
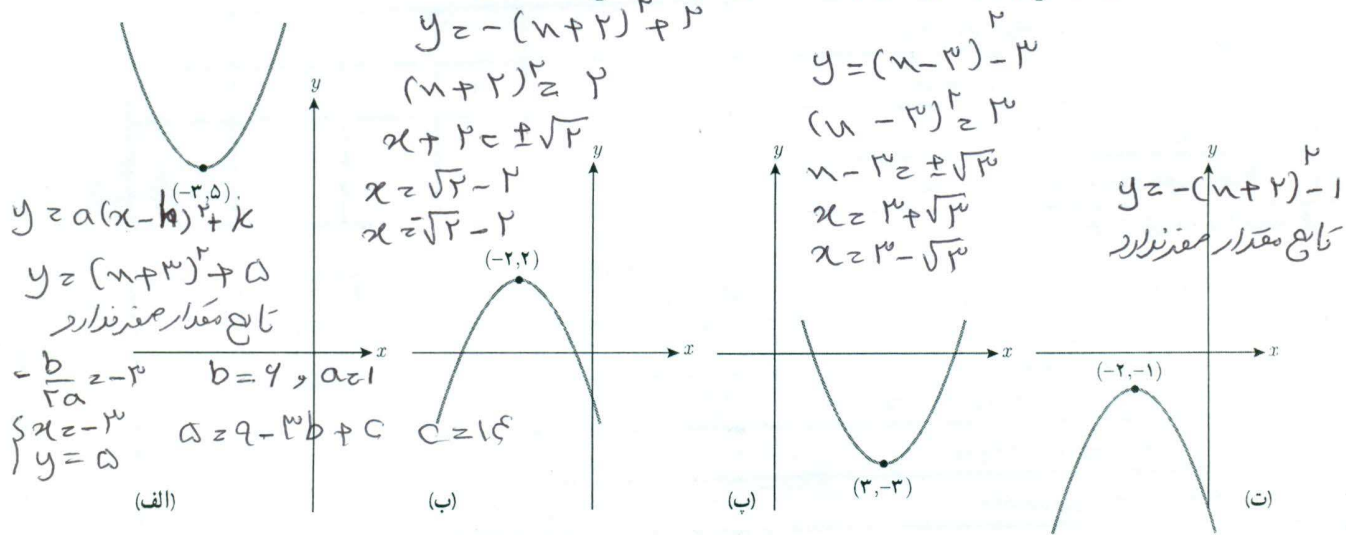
$t = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 3$ $x^2 = 9$ $x = \pm 3$
 $t = 4 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 4 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 6$ $x^2 = 18$ $x = \pm \sqrt{18}$



۱۶

تعداد و مقدار تقریبی ریشه های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

هر یک از سهمی های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a|=1$ است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفحهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.



یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

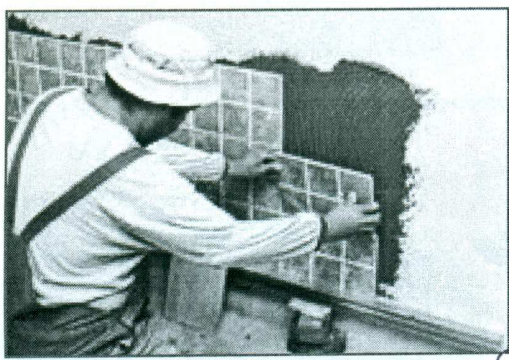
$$4x^2 + 20x + 4x = 14$$

$$4x^2 + 24x - 14 = 0$$

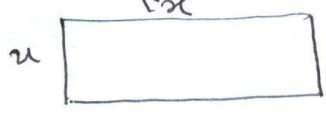
$$2x^2 + 12x - 7 = 0$$

$$\Delta = 144 + 56 = 200$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{200}}{4} = \frac{-12 \pm 10\sqrt{2}}{4}$$



طول یک نوع کاشی یک سانتی متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی



چند سانتی متر است؟

$$21m^2 = 210000 cm^2$$

در کف دیوار

$$S = n(n+1)$$

$$S = n^2 + n$$

$$2000S = 2000(n^2 + n)$$

$$10000x^2 + 20000x = 210000$$

$$\Delta = 1 + 14(105) = 1481$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1481}}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1481}}{2} = -\frac{21}{5}$$



معادلات گویا و کنگ

معادلات شامل عبارات گویا

حل یک مسئله



در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟
برای حل این مسئله سه حالت مختلف فرض می‌کنیم. ممکن است نمک به اندازه کافی وجود داشته باشد و یا نمک در مغازه موجود نباشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.

حالت اول: فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ کیلوگرم}$$

ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول ۴ درصدی چند کیلوگرم نمک وجود دارد:

حالا اگر بخواهیم برای رساندن این محلول به محلول ۷ درصدی x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم، وزن نمک $x+8$ و وزن کل محلول $200+x$ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{x+8}{200+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید ۷ درصد باشد تناسب زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{x+8}{200+x} = \frac{7}{100}$$

برای حل این معادله که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $100(200+x)$ ضرب می‌کنیم.

$$100(x+8) = 7(200+x)$$

$$x = \frac{600}{93} \text{ و در نتیجه } 93x = 600$$

بنابراین تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۱ گرم نمک باید به محلول اضافه شود تا محلول ۷ درصد نمک به دست آید.

حالت دوم: اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم تا درصد نمک محلول خودبه خود به ۷ برسد. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله مورد نظر به صورت زیر خواهد بود. (چرا؟)

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

از حل این معادله خواهیم داشت $800 = 7(200-y)$ و از آنجا $y = \frac{600}{7}$ و این بدین معنی است که کارگر باید با تبخیر ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسد.

کاردرکلاس

در مسئله ماهی‌های تزئینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازه کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

$$\begin{aligned} 13 &= 8 + 5 & \text{وزن نمک} \\ 205 &= 200 + 5 & \text{وزن کل محلول} \\ \frac{13}{205-y} &= \frac{7}{100} \\ 1435 - 7y &= 1375 \\ y &= \frac{135}{7} \approx 19,29 \end{aligned}$$

برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند (چرا؟)

همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

❖ مثال: معادله $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4}$ را حل کنید.

❖ حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها برابر $x(x^2-4)$ است. (چرا؟)
با ضرب طرفین معادله در این عبارت داریم:

$$3x(x-2) + 2(x^2-4) = x(4x-4)$$

$$3x^2 - 6x + 2x^2 - 8 = 4x^2 - 4x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = -2$$

البته جواب $x = -2$ مورد قبول نیست. (چرا؟) چون مخرج کسرها صفر می‌کند

۱) ابتدا با یک ساله سازه ترکیب را بدست می آوریم. مثل محیط زمین ۲ متر باشد پس محیط را در ۱۴۰ متر می کنیم تا جوی به ساله اصلی بدست آید



$$2L + 2w = 22 \rightarrow L + w = 11 \rightarrow L = 11 - w$$

$$\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L} \rightarrow \frac{11-w}{w} = \frac{11}{11-w}$$

$$(11-w)^2 = w^2 \rightarrow w^2 - 22w + 121 = 0 \quad w_1 = \frac{22 + \sqrt{400}}{2} \quad \text{غیر قابل قبول}$$

$$w_2 = \frac{22 - \sqrt{400}}{2} = 5 \quad \text{قابل قبول}$$

فصل اول: جبر و معادله ۱۹

خواندنی

در ریاضیات هنگامی نسبت طلایی پدید می آید که نسبت بخش بزرگ تر به بخش کوچک تر برابر نسبت مجموع دو بخش به بخش بزرگ تر باشد.

تعبیر هندسی آن چنین است. طول مستطیلی به مساحت واحد که عرض آن یک واحد کمتر از طولش باشد.

مصریان سال ها قبل از میلاد از این نسبت آگاه بودند و آن را در ساخت اهرام رعایت کرده اند. بسیاری از الگوهای طبیعی در بدن انسان نیز این نسبت را دارا هستند.

روان شناسان بر این باورند که زیباترین مستطیل به چشم انسان مستطیلی است که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی باشد. دلیل این امر آن است که این نسبت در شبکه چشم انسان رعایت شده و هر مستطیلی که این نسبت را دارا باشد به چشم زیبا می آید.

در ساخت برج میدان آزادی تهران به ارتفاع ۶۲ و عرض ۴۲ متر نسبت طلایی تا حد زیادی رعایت شده است.

کتیبه بیستون از دوره هخامنشی در کرمانشاه به طول ۵ و عرض ۳ متر به عدد طلایی نزدیک است.

یکی از هنرهای معماری در تخت جمشید این است که ارتفاع سردرها به عرض آنها و همین طور نسبت ارتفاع ستون ها به فاصله بین دو ستون نسبت طلایی است.

در بل ورسک، ارگ بم، مقبره ابن سینا، میدان نقش جهان، مسجد شیخ لطف الله و خوشنویسی میرعماد حسنی از نسبت طلایی استفاده شده است. با جست و جوی اینترنتی به مطالب خواندنی در این زمینه دست می یابید.

منبع: مبانی هنرهای تجسمی، قسمت اول، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، ۱۳۸۲

$$L \geq 11 - w \geq 11 - \frac{22 - \sqrt{400}}{2} \geq 11 - \frac{12}{2} = 5$$

کارد در کلاس $140 \times \frac{22 - \sqrt{400}}{2} \geq 220 - 110\sqrt{4}$

طول $140 \times \frac{11 - 5}{2} = 140 \times 3 = 420$

معادله $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3$ را حل کنید.

ابتدا دو طرف در $(x-2)^2$ ضرب می کنیم

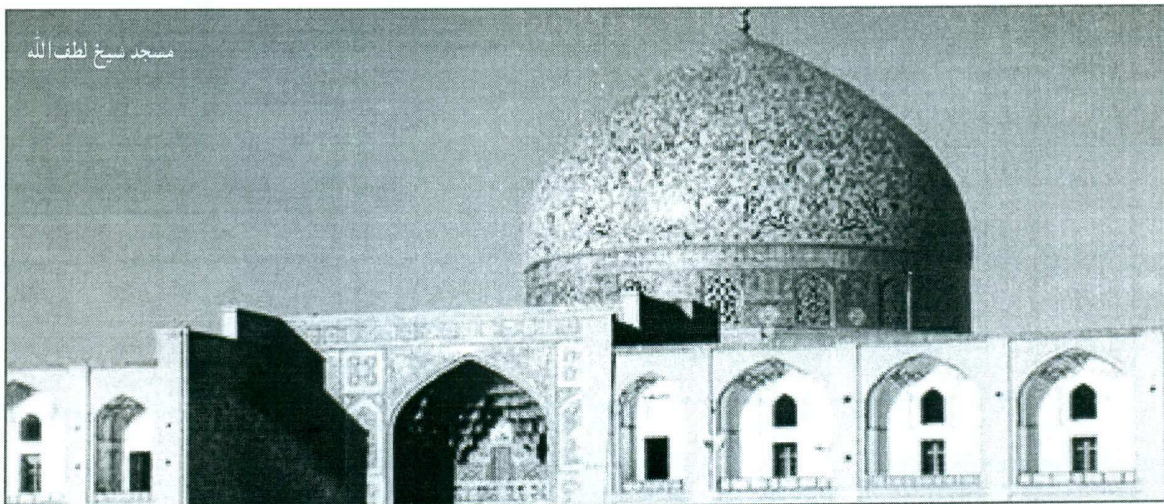
$$1 + 2(x-2) = 3(x-2)^2 \rightarrow 1 + 2x - 4 = 3x^2 - 12x + 12$$

$$3x^2 - 14x + 11 = 0 \quad \frac{1}{3}(3x-9)(3x-5) = 0$$

$$\begin{cases} 3x = 9 & x = 3 \quad \text{قابل قبول} \\ 3x = 5 & x = \frac{5}{3} \quad \text{قابل قبول} \end{cases}$$

۲) اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم: $\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L}$ آنگاه می گوئیم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟
بالای صفر



مسجد شیخ لطف الله

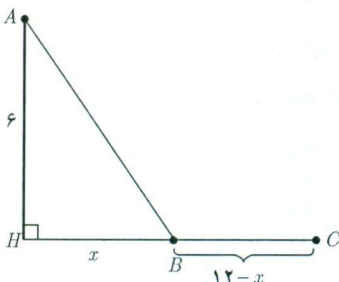
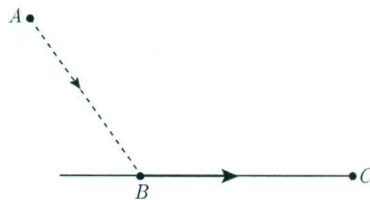
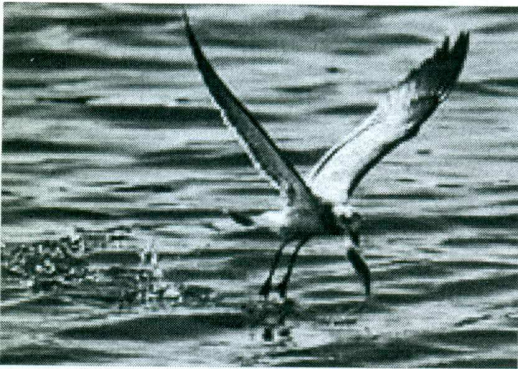
گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۲۰

معادلات شامل عبارتهای گنگ

طرح یک مسئله

معمولاً مرغ‌های دریایی، برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B می‌آید سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله‌ای از C باید باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟



❖ حل: برای درک بهتر صورت مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. فاصله B

از تصویر مرغ بر روی آب (H) را x می‌گیریم در نتیجه فاصله میان B و C برابر $12-x$ می‌شود. با استفاده از رابطه فیثاغورس طول AB برابر $\sqrt{36+x^2}$ می‌شود.

$$14\sqrt{36+x^2} + 10(12-x)$$

میزان انرژی مصرف‌شده توسط مرغ دریایی برابر است با:

برای آنکه مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند باید داشته باشیم:

$$14\sqrt{36+x^2} + 120 - 10x = 180 \Rightarrow 14\sqrt{36+x^2} = 10x + 60$$

$$7\sqrt{36+x^2} = 5x + 30$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله اخیر و ساده کردن به معادله درجه دوم $2x^2 - 25x + 72 = 0$ می‌رسیم که از آنجا $x = 8$ و

$x = 4/5$. در این صورت فاصله B تا C برابر $12 - 8 = 4$ یا $12 - 4/5 = 7/5$ خواهد بود.

اگر مرغ دریایی مستقیماً از A به C پرواز می‌کرد چقدر کالری مصرف می‌کرد؟ $AC = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 4\sqrt{5}$

آیا اقدام مرغ دریایی برای شکار ماهی‌ها هوشمندانه نمی‌باشد؟! و

$$x_{min} = 4/5$$

$$\text{مقدار کالری} = 4\sqrt{5} \times 14 = 117.18$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل اول: جبر و معادله ۲۱

برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده باید در معادله اصلی این عمل آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

❖ مثال: معادله $\sqrt{x+2} = x-4$ را حل کنید.

❖ حل:

$$(\sqrt{x+2})^2 = (x-4)^2$$

$$x+2 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x=2 \text{ و } x=7$$

آزمایش جواب‌ها

$$x_2 = 7: \sqrt{7+2} = 7-4 \\ 3 = 3 \quad \checkmark$$

جواب معادله است

بنابراین $x=7$ تنها جواب معادله است.

$$x_1 = 2: \sqrt{2+2} = 2-4$$

$$2 \neq -2 \quad \times$$

جواب مسئله نیست

❖ تذکر: در حل این مسئله طرفین معادله اولیه نامنفی بودند و به توان دو رساندن آنها مشکلی ایجاد نمی‌کرد. در حل معادلات گنگ می‌توان با تعیین دامنه تعریف معادله، جواب‌های نهایی را با استفاده از آن مورد بررسی قرار داد. در حل این مسئله برای به دست آوردن دامنه تعریف داریم:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک نواحی}} x \geq 4$$

کاردرکلاس

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابرش باشد؟

$$x + \sqrt{x} = 4 \quad \sqrt{x} = 4 - x$$

$$(\sqrt{x})^2 = (4-x)^2$$

$$x = 16 - 8x + x^2 \quad x^2 - 9x + 16 = 0 \quad (x-8)(x-9) = 0$$

$x=8$ و $x=9$

۲ معادله $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x} = 0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

نامنفی صفری شود که هر دو صفر باشند

حاصل جمع دو عبارت

$$\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x} = 0 \quad \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

جواب مسترک وجود نداشته در نتیجه جواب ندارد

v_1 سرعت رفت t_1 زمان رفت
 v_2 سرعت بازگشت t_2 زمان برگشت
 $v_2 = v_1 - 1$ $t_1 + t_2 = 17 - 2 = 15$ $t_1 = \frac{144}{v_1}$ $t_2 = \frac{144}{v_1 - 1}$
 $t_1 + t_2 = \frac{144}{v_1} + \frac{144}{v_1 - 1} = 15 \rightarrow v_1 = 24$ وق
 $v_1 = 23.7$ وق

تمرین

$144(v_1 - 1) + 144v_1 = 15v_1(v_1 - 1)$
 $144v_1 - 144 + 144v_1 = 15v_1^2 - 15v_1$
 $15v_1^2 - 50.8v_1 + 115.2 = 0 \rightarrow 5v_1^2 - 13.4v_1 + 28.8 = 0$ معادلات زیر را حل کنید.

۱ $\frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$

۲ $\frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = \frac{-3}{2}$

۳ $\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$

۴ $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$

۵ $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

۶ $\frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

۷ $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$

۸ پدر بزرگ برای اهدا به مهد کودک چند اسباب بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به پدر بزرگ تخفیف می داد او می توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

$xy = 120$ $(n-1)(y+4) = 120$ $120 + 4n - y - 4 = 120$ $y = 3n - 4$ وق
 $5xy = 120$ $x(4n-4) = 120$ $4n^2 - 4n - 120 = 0$ $n^2 - n - 30 = 0$ $n = 4$ وق
 $y = 24x - 4$ $n = -5$ وق

۴۰۰۰
قیمت قبل تخفیف

۹ ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟ بالایی صحیحتر

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه ای واقع شده اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.



رودخانه اروند (استان خوزستان)

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+15} = \frac{1}{18}$
 $18(n-15) + 18n = n(n-15)$
 $n^2 - 51n + 270 = 0$
 $(n-45)(n-4) = 0$

$n = 45$ $n - 15 = 30$ (۱۰)
 $n = 4$ $n - 15 = -9$ وق

$$1) \frac{q}{x} = r + \frac{u}{x+1} \xrightarrow{x(n+1)} q(x+1) = r(x+1) + u(x)$$

$$4x+4 = 2x^2 + 2x + u^2 \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Delta = 14 + \sqrt{12} \wedge \wedge$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{14}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{2 + \sqrt{14}}{2} \quad \text{قب} \\ n = \frac{2 - \sqrt{14}}{2} \quad \text{قب} \end{array} \right.$$

$$2) \frac{p}{r-p} + \frac{r}{p} = a \xrightarrow{p(r-p)} p(r) + r(r-p) = a p(r-p)$$

$$\rightarrow p^2 + r - rp = 10p - ap^2 \rightarrow 4p^2 - 12p + 1 = 0 \rightarrow 4p^2 - 12p + 1 = 0$$

$$\Delta = 144 - 16 = 128 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{128}}{8} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{12 + \sqrt{128}}{8} \quad \text{قب} \\ n = \frac{12 - \sqrt{128}}{8} \quad \text{قب} \end{array} \right.$$

$$3) \frac{3y+a}{y^2+ay} + \frac{y+c}{y+a} = \frac{y+1}{y}$$

$$\xrightarrow{y(y+a)} 3y+a + y(y+c) = (y+1)(y+a)$$

$$3y+a+y^2+cy = y^2+4y+a \rightarrow y=0 \quad \text{قب}$$

$$4) 2\sqrt{x} = \sqrt{3x+c} \rightarrow (2\sqrt{x})^2 = (\sqrt{3x+c})^2 \rightarrow 4x = 3x+c \quad x=c \quad \text{قب}$$

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x \rightarrow (1+\sqrt{x})(1-x) = 1-\sqrt{x}$$

$$(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x}) = 0$$

$$(1-\sqrt{x}) [(1+\sqrt{x})^2 - 1] = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1-\sqrt{x} = 0 \quad \sqrt{x} = 1 \quad x = 1 \quad \text{قب} \\ (1+\sqrt{x})^2 - 1 = 0 \quad (1+\sqrt{x})^2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+\sqrt{x} = 1 \rightarrow \sqrt{x} = 0 \quad x = 0 \\ 1+\sqrt{x} = -1 \rightarrow \sqrt{x} = -2 \end{array} \right. \quad \text{جواب صحیح ندارد}$$

$$5) \frac{1}{\sqrt{x}+2} = r + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \xrightarrow{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$\sqrt{x}-2 = r(x-4) + \sqrt{x}+2 \quad 2x = 4 \quad x = 2 \quad \text{قب}$$

$$6) 3\sqrt{3x+1} = 1 - \sqrt{x+3} \quad (3\sqrt{3x+1})^2 = (1 - \sqrt{x+3})^2$$

$$9(3x+1) = 1 - 14\sqrt{x+3} + x+3 \rightarrow 14\sqrt{x+3} = 29 - 24x$$

$$14\sqrt{x+3} = 29 - 14x \rightarrow (14\sqrt{x+3})^2 = (29 - 14x)^2 \quad 49(x+3) = 841 - 784x + 196x^2$$

$$149x^2 - 1111x + 449 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \quad \text{قب} \\ x = \frac{c}{a} = \frac{449}{149} = 3 \quad \text{قب} \end{array} \right.$$

۴

درس

قدر مطلق و ویژگی های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی از ویژگی های آن آشنا شدید. همان طور که می دانید قدر مطلق عدد حقیقی a به صورت زیر تعریف می شود.

$$|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$$

کاردرکلاس

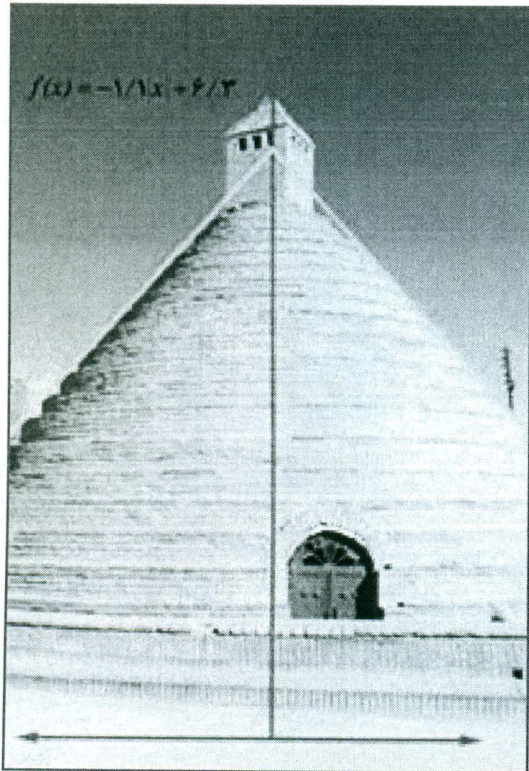
۱ حاصل هریک از عبارت های زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $|-5 - (-3)| = 1 - 2 = 2$ ب) $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| = -(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

۲ عبارت های زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} = \sqrt{(a^2 + 1)^2} = |a^2 + 1| = a^2 + 1$

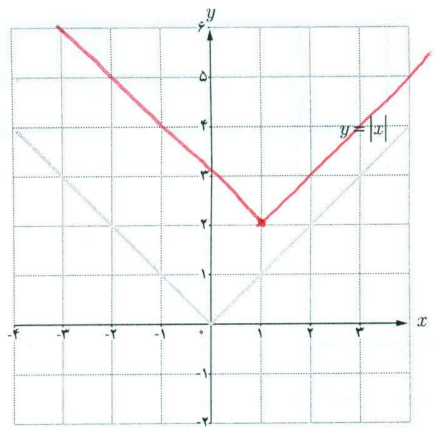
ب) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$



آب انبار - روستای بیابانک (استان سمنان)

رسم توابع قدر مطلقى

فعالیت



شکل (۱)

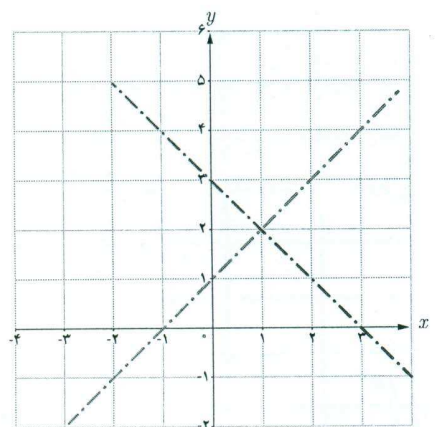
می‌خواهیم نمودار تابع $y = |x-1| + 2$ را رسم کنیم.

روش اول: با توجه به نمودار $y = |x|$ در شکل (۱) و استفاده از انتقال منحنی، نمودار آن را رسم کنید.

روش دوم: گام اول؛ با استفاده از تعیین علامت، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.

$$y = |x-1| + 2 = \begin{cases} x-1+2 & , x \geq 1 \\ -x+1+2 & , x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ -x+3 & x < 1 \end{cases}$$

گام دوم؛ با توجه به شکل (۲) نمودار y را رسم کنید.



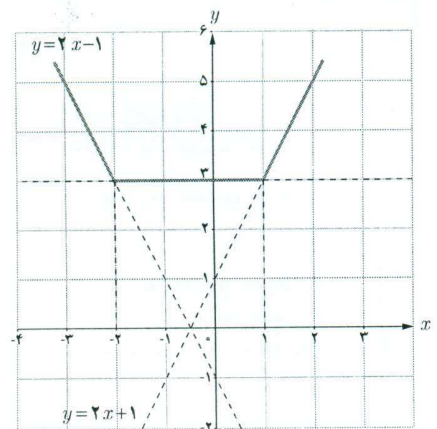
شکل (۲)

❖ مثال: نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = |x-1| + |x+2|$ را رسم کنید.
 ❖ حل: در اینجا نمی‌توانیم از رسم تابع $y = |x|$ و انتقال استفاده کنیم. بنابراین از روش تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها کمک می‌گیریم. برای این کار ابتدا عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x		-۲	۱	
$x-1$		-	۰	+
$x+2$		-	۰	+

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1) + (x+2) = 2x+1 \\ f(x) &= -(x-1) + (x+2) = 3 \\ f(x) &= -(x-1) - (x+2) = -2x-1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & , x < -2 \\ 3 & , -2 \leq x \leq 1 \\ 2x+1 & , x > 1 \end{cases}$$



شکل (۳)

نمودار تابع از سه قسمت که هر یک بخشی از یک خط هستند تشکیل می‌شود (شکل ۳).

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل اول: جبر و معادله ۲۵

ویژگی‌های قدر مطلق

در سال‌های قبل با برخی از ویژگی‌های قدر مطلق آشنا شده‌اید که عبارت‌اند از:

الف) $|x| \geq 0$

ب) $\sqrt{x^2} = |x|$

پ) $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ یا $x = -a$

($a \geq 0$)

ت) $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ یا $x = -a$

ث) $|-x| = |x|$

ج) $|x^2| = x^2$

فعالیت

فرض کنید a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند. $|ab| = |a||b|$ از رابطه $\sqrt{a^2} = |a|$ استفاده کنید و نشان دهید که:

$|ab| = |a||b|$

$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \sqrt{b^2} = |a||b|$

$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

با فرض $b \neq 0$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید که:

$|a| = \left| \frac{a}{b} \times b \right| = \left| \frac{a}{b} \right| |b| \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$

$\left| \frac{a}{b} \right| = \sqrt{\left(\frac{a}{b} \right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$

فعالیت

فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هریک از نامعادله‌های زیر را به جواب متناظر آن وصل کنید.

الف) $|x| < c, (c \neq 0)$

(۱)



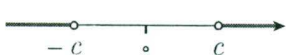
ب) $|x| > c$

(۲)



پ) $|x| \leq c$

(۳)



ت) $|x| \geq c$

(۴)



(۲) $\begin{cases} n \geq 0 \rightarrow |n| = n \rightarrow -|n| \leq n \\ n < 0 \rightarrow |n| = -n \rightarrow n \leq |n| \end{cases} \Rightarrow -|a| \leq a \leq |a|$

برای هر عدد حقیقی a نشان دهید که: $-|a| \leq a \leq |a|$

برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید که: $-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

با استفاده از قسمت قبل «نامساوی مثلث» را برای هر دو عدد حقیقی a و b نتیجه بگیرید:

$-|a| \leq a \leq |a|$
 $-|b| \leq b \leq |b|$

$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

$\rightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$
 $|a+b| \leq |a| + |b|$

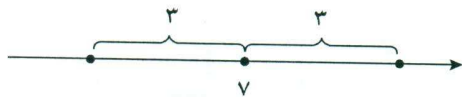
(۳) $\begin{cases} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{cases} \oplus$

$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$

(۳)

معادلات قدر مطلق

حل یک مسئله



بر روی محور اعداد حقیقی فاصله چه نقاطی از نقطه ثابت ۷ برابر ۳ است؟
 برای حل مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم.
 اگر طول نقطه جواب مسئله را x بنامیم، شرط مسئله به این معناست که $|x-7|=3$. با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق خواهیم دانست $x-7 = \pm 3$ ، و در نتیجه $x=10$ و $x=-4$ ؛ و هر دو جواب‌های معادله هستند.

جواب‌های معادله $|f(x)| = |g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x) = g(x)$ و $f(x) = -g(x)$ هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند معادلات قدر مطلق می‌گویند.

مثال: معادله $|3x-2| = |x-4|$ را حل کنید.

روش اول: با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق: جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادله $3x-2 = x-4$ و $3x-2 = -(x-4)$ است.
 $x = -1$ و $x = \frac{3}{2}$

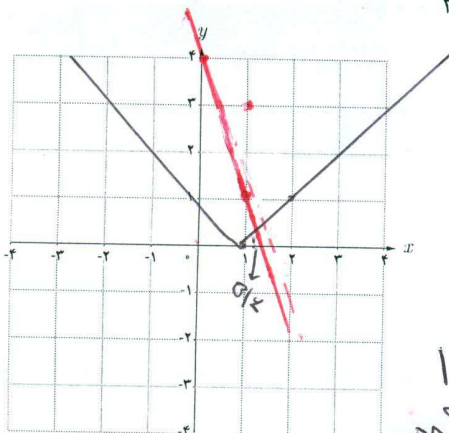
روش دوم: با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 12x + 4$ ؛ و از آنجا $2x^2 - x - 3 = 0$.
 جواب‌های این معادله -1 و $\frac{3}{2}$ هستند.

کاردرکلاس

معادله قدر مطلق $|x-1| = 4-3x$ را به سه روش زیر حل کنید.
 روش اول: (با استفاده از تعریف قدر مطلق)

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$$

حالت اول: $x \geq 1 \Rightarrow x-1 = 4-3x \Rightarrow x = \frac{5}{4}$ ، حالت دوم: $x < 1 \Rightarrow \dots$ ، مجموعه جواب $\{ \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \}$



$$-x+1 = 4-3x \quad 2x \geq 3 \quad x \geq \frac{3}{2}$$

روش دوم: (روش هندسی)

الف) توابع $y = |x-1|$ و $y = 4-3x$ را رسم کنید.

ب) طول‌های محل تلاقی دو نمودار را مشخص کنید. $x = \frac{5}{4}$

پ) جواب‌های معادله را به دست آورید. $x = \frac{3}{2}$

روش سوم: (به توان رساندن طرفین)

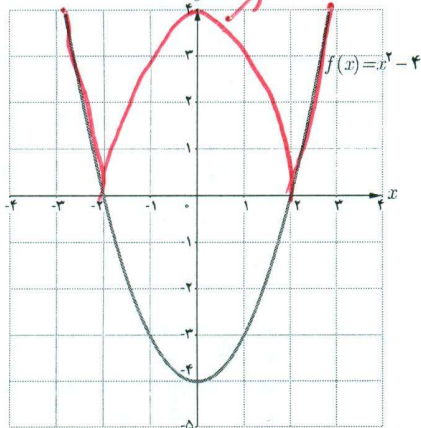
$$|x-1| = 4-3x \quad |x-1|^2 = (4-3x)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 16 - 24x + 9x^2 \rightarrow 8x^2 - 22x + 15 = 0$$

$$\frac{1}{8}(8x-12)(8x-10) = 0 \quad \begin{cases} 8x \geq 12 & x \geq \frac{3}{2} \\ 8x \geq 10 & x \geq \frac{5}{4} \end{cases}$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فعالیت



در شکل روبه‌رو نمودار تابعی با ضابطه $f(x) = x^2 - 4$ آمده است.

۱ با توجه به علامت عبارت $x^2 - 4$ و استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع

$y = |x^2 - 4|$ را به صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

۲ نمودار $y = |x^2 - 4|$ را رسم کنید.

۳ تابع $y = |f(x)|$ را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای بنویسید.

$$y = |f(x)| = \begin{cases} x^2 - 4, & f(x) \geq 0 \\ 4 - x^2, & f(x) < 0 \end{cases}$$

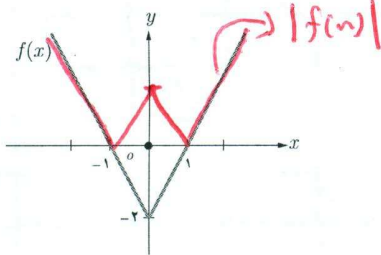
۴ با توجه به قسمت‌های قبل یک روش رسم برای تابع $y = |f(x)|$ از روی

نمودار $y = f(x)$ بیان کنید. $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$

۵ در شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y = |f(x)|$ را از روی نمودار تابع

$y = f(x)$ رسم کنید.

با توجه به فعالیت بالا:

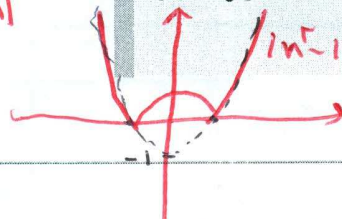
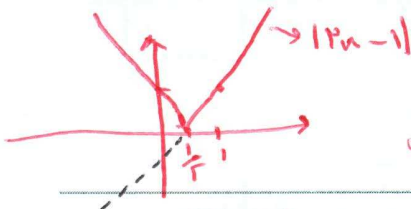


۱ نمودار $y = -f(x)$ قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x هاست.

۲ برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را رسم

کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x هاست، تصویر آینه‌وار

نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x رسم کنیم. $۱۳۵-۴۱$



کاردر کلاس

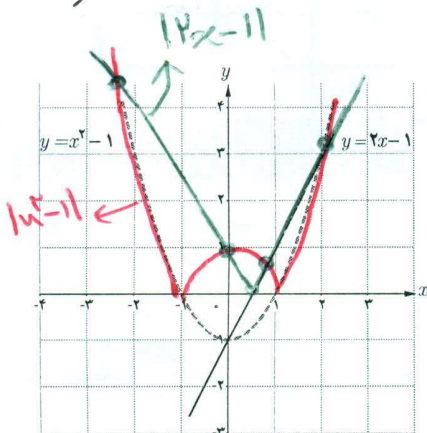
۱ با استفاده از شکل روبه‌رو، نمودار توابع $y = |x^2 - 1|$ و $y = |2x - 1|$ را

رسم کنید و تعداد جواب‌های معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها

را به دست آورید.

۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادله

$|x^2 - 1| = |2x - 1|$ را حل کنید.



$$|x^2 - 1| = |2x - 1| \begin{cases} \text{حالت اول} & x^2 - 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2 \\ \text{حالت دوم} & x^2 - 1 = -(2x - 1) \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \quad \Delta = 12 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{3} \approx 0.732 \\ x_2 = -1 - \sqrt{3} \approx -2.732 \end{cases}$$

(ج) $x < -5$ $x > -1$
 $|x+3| > 2$
 $x+3 > 2 \rightarrow x > -1$
 $x+3 < -2 \rightarrow x < -5$

(ب) $x \geq 4-2=2$ $x \geq 4+2=6$
 $2|x-4| \geq 6 \rightarrow |x-4| \geq 3$
 $|x-4| \geq 3 \begin{cases} x-4 \geq 3 & x \geq 7 \\ x-4 \leq -3 & x \leq 1 \end{cases}$

(الف) $|x-3|=7$
 $x-3=7 \rightarrow x=10$
 $x-3=-7 \rightarrow x=-4$
 $|x-3| \geq 7 \begin{cases} x-3 \geq 7 & x \geq 10 \\ x-3 \leq -7 & x \leq -4 \end{cases}$

تمرین

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطه هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

ب) $g(x) = |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 \\ -x^2+1 & -1 < x < 1 \end{cases}$

پ) $h(x) = |x-1| + |x+1| = \begin{cases} -2x & x \leq -1 \\ 2 & -1 < x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$

۲ بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱- و ۳ روی محور x ها برابر ۶ باشد؟

$|x+1| + |x-3| = 6$
 $x \leq -1 \rightarrow -2x+2=6 \rightarrow -2x=4 \rightarrow x=-2$
 $-1 < x < 3 \rightarrow 2=6$ (غیرممکن)
 $x \geq 3 \rightarrow 2x-2=6 \rightarrow 2x=8 \rightarrow x=4$

۳ هر یک از عبارات زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

- الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است. **بالای صفر**
- ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است. **بالای صفر**
- ب) فاصله بین x و ۳- بزرگ تر از ۲ است. **بالای صفر**

۴ دو معادله زیر را حل کنید.

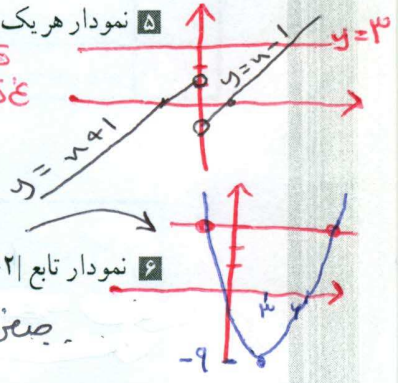
الف) $\frac{2-x}{|x-3|} = 1 \rightarrow |x-3| = 2-x$
 $x-3=2-x \rightarrow 2x=5 \rightarrow x=2.5$
 $x-3=-(2-x) \rightarrow x-3=-2+x \rightarrow -3=-2$ (غیرممکن)

ب) $\sqrt{x^2-2x+1} = 2x+1$
 $(x-1)^2 \geq (2x+1)^2$
 $x^2-2x+1 \geq 4x^2+4x+1$
 $-3x^2-6x \geq 0$
 $3x^2+6x \leq 0$
 $x(x+2) \leq 0$
 $x \in [-2, 0]$

۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y = x - \frac{x}{|x|}$
 $x > 0 \rightarrow y = x - 1 = 3 \rightarrow x = 4$
 $x < 0 \rightarrow y = x + 1 = 3 \rightarrow x = 2$

ب) $y = x^2 - 6x$
 $x^2 - 6x = 3$
 $x^2 - 6x - 3 = 0$
 $\Delta = 36 + 12 = 48$
 $x = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{3}$

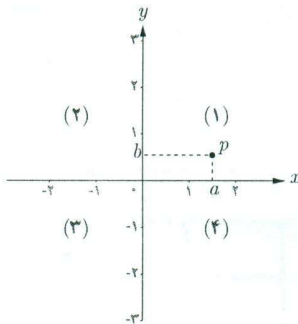


۶ نمودار تابع $f(x) = ||x|-2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x) = 1$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۷ نمودار تابع $f(x) = |x^2-2x|$ را رسم کنید، سپس به روش هندسی و جبری معادله $|x^2-2x| = 2$ را حل نمایید.



آشنایی با هندسه تحلیلی



در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شده‌اید. محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند.

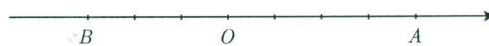
به هر نقطه P در صفحه مختصات یک زوج مرتب (a, b) نظیر می‌شود. به این زوج مختصات نقطه P گفته می‌شود. طول نقطه P را با x_p و عرض آن را با y_p نشان می‌دهیم. در این درس با برخی از ویژگی‌های نقطه در صفحه مختصات آشنا می‌شویم.

فاصله بین دو نقطه

فعالیت

روی محور اعداد زیر به مبدأ O ، نقطه متناظر با 4 را با A و نقطه متناظر با -3 را با B مشخص کرده‌ایم:

۱ طول پاره‌خط‌های OA و OB چقدر است؟ $|OA| = 4$ $|OB| = 3$



۲ طول پاره خط BA چقدر است؟ $|AB| = 7$

۳ فاصله دو نقطه A و B متناظر با 4 و (-3) از یکدیگر چقدر است؟ 7

۴ بر روی هر یک از دو محور زیر، در مورد فاصله بین دو نقطه A و B چه می‌توان گفت؟



$$|AB| = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

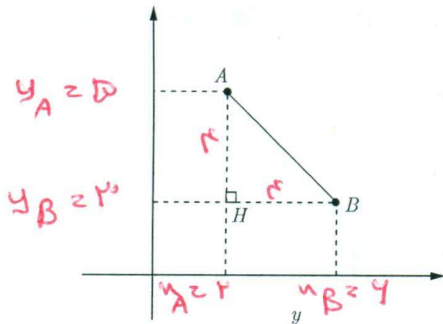
اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله بین A و B را به صورت $|AB| = |x_B - x_A|$ تعریف می‌کنیم.

خواندنی

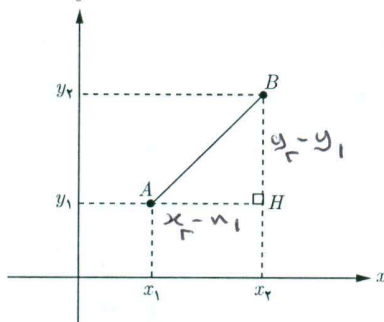
هندسه تحلیلی شاخه‌ای از ریاضیات است که از ترکیب هندسه و جبر مقدماتی به وجود آمده است. در این رشته اشکال هندسی و روابط بین آنها را با مقادیر و معادلات عددی و جبری بیان می‌کنند. بنیان‌گذاران هندسه تحلیلی دکارت و فرما در قرن ۱۷ میلادی بوده‌اند. این رشته در مورد اندازه، فاصله، زاویه و فرمول‌های مربوط به آن بحث می‌کند.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فعالیت



۱ دو نقطه $A(2, 5)$ و $B(6, 3)$ را، در شکل روبه‌رو، در نظر بگیرید:
 الف) روی محور افقی x_A و x_B و روی محور عمودی y_A و y_B را مشخص کنید.
 ب) در مثل قائم‌الزاویه AHB ($\hat{H} = 90^\circ$) با استفاده از رابطه فیثاغورس، طول پاره خط AB را به دست آورید.



۲ در شکل روبه‌رو، اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند، طول AB را محاسبه کنید.

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

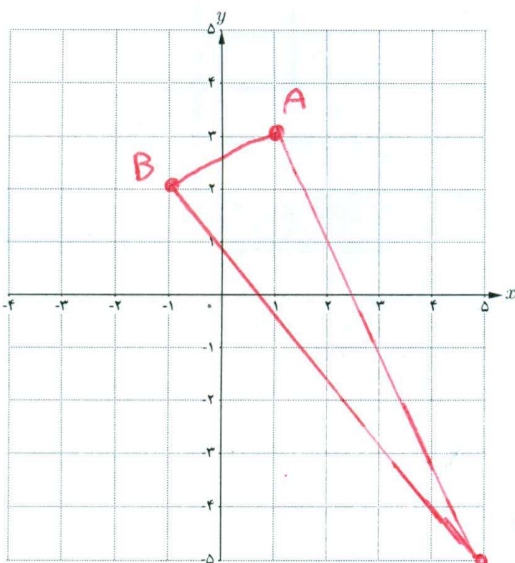
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

به طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را داشته باشیم، طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

کاردرکلاس



سه نقطه $A(1, 3)$ ، $B(-1, 2)$ و $C(5, -5)$ سه رأس مثلث ABC ، در صفحه مختصات روبه‌رو، هستند.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) طول اضلاع مثلث را به دست آورید.

$$AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$$

$$BC = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$$

ب) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \quad 65 = 80 + 5 \quad \checkmark$$

رابطه فیثاغورس برقرار شد. قائم‌الزاویه است.
 ت) شیب دو خط AC و AB را به دست آورید.

چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 3}{-1 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5 - 3}{5 - 1} = -2$$

$$m_{AB} \times m_{AC} = \frac{1}{2} \times -2 = -1$$

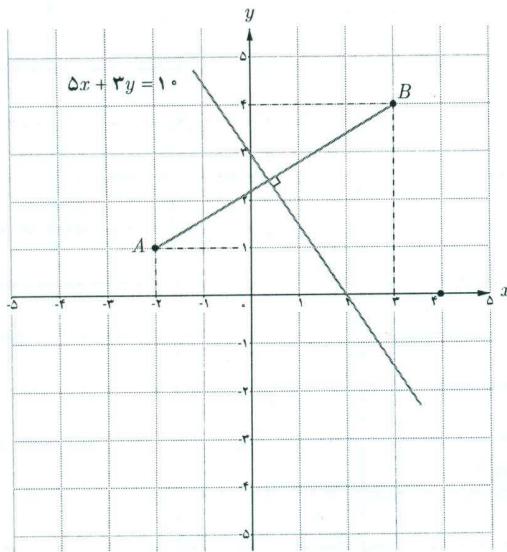
شیبها معکوس و قرینه یکدیگرند. حوضت برهم عمودند.

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل اول: جبر و معادله ۳۱

❖ مثال: در شکل زیر، معادله عمودمنصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه $A(-2, 1)$ و $B(3, 4)$ را به هم وصل کرده است.
 ❖ حل: عمودمنصف یک پاره خط شامل همه نقاطی است که فاصله آنها از دو سر پاره خط به یک اندازه است. بنابراین اگر $PA=PB$ آنگاه P روی عمودمنصف AB قرار دارد. فرض کنیم $P(x, y)$ آنگاه با استفاده از فرمول فاصله پاره خط می توان نوشت:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}$$



با به توان دو رساندن طرفین و ساده کردن داریم:

$$5x + 3y = 10$$

این معادله برای تمام نقاطی که از A و B هم فاصله اند برقرار است، بنابراین، معادله عمودمنصف AB است.

در مثال بالا شیب خط AB برابر $\frac{3}{5}$ و شیب خط عمودمنصف آن برابر $-\frac{5}{3}$ است. چه رابطه ای بین این دو شیب مشاهده می شود؟

شیبها کرمین و عکس کلمه میشوند

به طور کلی:

اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $mm' = -1$ و برعکس.

کارد کلاس

نشان دهید نقطه $P(-12, 11)$ روی عمودمنصف پاره خط واصل دو نقطه $A(0, -3)$ و $B(6, 15)$ قرار دارد.

$$PA = \sqrt{12^2 + 14^2} = \sqrt{340} \rightarrow PA = PB$$

$$PB = \sqrt{12^2 + 14^2} = \sqrt{340}$$

چون فاصله P از دو سر A و B یک فاصله است بنابراین P روی عمودمنصف AB قرار دارد

$$AB \text{ خط } M \left| \begin{array}{l} \frac{y+0}{x} = 3 \\ \frac{15-0}{6} = 3 \end{array} \right. \quad m_{AB} = \frac{15}{6} = 3 \quad m = -\frac{1}{3} \text{ عمود منصف}$$

$$P \left| \begin{array}{l} -12 = x \\ 11 = y \end{array} \right. \quad 11 = -\frac{1}{3}(-12) + 7 \rightarrow 11 = 4 + 7 \quad \checkmark \quad \text{روی عمود منصف } AB \text{ است}$$

$$m_{PM} = \frac{11-11}{-12-0} = -\frac{1}{3} \quad m_{AB} = \frac{15-0}{6} = 3$$

$$m_{AB} \times m_{PM} = -1 \rightarrow PM \perp AB$$

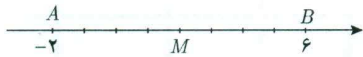
PM عمود منصف AB است

مختصات نقطه وسط یک پاره خط

فعالیت

۱ در شکل زیر نقطه M وسط پاره خط AB است. طول نقطه M چقدر است؟

$$x_M = 2$$

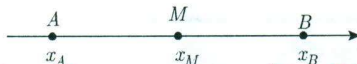


۲ چه ارتباطی بین طول نقطه M و طول نقاط A و B مشاهده می کنید؟ طول نقطه M میانگین طول نقاط A و B است.

۳ اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور x ها و M وسط AB باشد، طول نقطه M را برحسب طول های نقاط A و B به دست آورید.

$$AM = MB$$

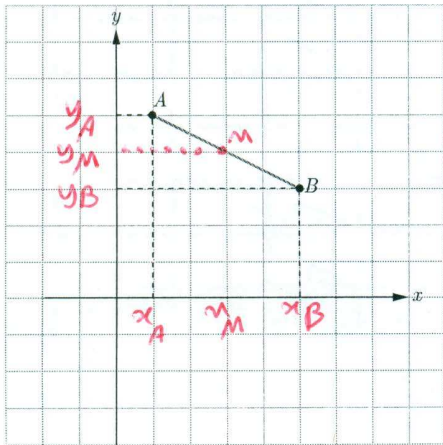
$$x_M - x_A = x_B - x_M \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$



۴ اگر A و B روی محور y ها و عرض نقاط A و B را با y_A و y_B نشان دهیم و M وسط پاره خط AB باشد، چه دستوری برای محاسبه عرض نقطه M می توان بیان کرد؟

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

کاردرکلاس



اگر $A(1, 5)$ و $B(5, 3)$ دو سر پاره خط AB و $M(a, b)$ وسط این پاره خط باشد:

الف) تصویر نقاط A و B و M را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

ب) با توجه به تصویر نقاط A و B و M روی محورهای مختصات نقطه M را به دست آورید.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

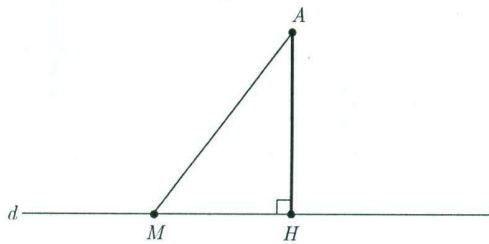
اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره خط AB باشد. مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad , \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

فصل اول: جبر و معادله ۳۳

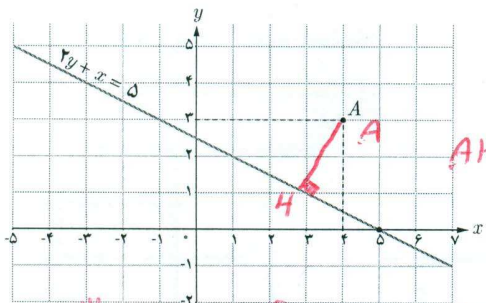
فاصله یک نقطه از یک خط



اگر خط d و نقطه A در خارج آن داده شده باشد، فاصله نقطه A از خط d را همان کوتاه‌ترین فاصله A از d تعریف می‌کنیم. با توجه به آنکه طول عمود از طول مایل کوتاه‌تر است (چرا؟) این فاصله را عمود AH در نظر می‌گیریم. بنابراین برای به دست آوردن فاصله هر نقطه از خط کافی است از آن نقطه بر خط عمودی رسم و طول پاره خط عمود شده را اندازه‌گیری کنیم.

فعالیت

در شکل روبه‌رو خط d به معادله $2y + x = 5$ و نقطه $A(4, 3)$ داده شده است.



۱ عمود AH را بر خط d رسم کنید.

۲ رابطه بین شیب‌های دو خط d و AH را به دست آورید.

۳ شیب AH را به دست آورده و معادله خط AH را بنویسید.

۴ دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه H) را به دست آورید.

۵ طول پاره خط AH را محاسبه کنید.

$m_d = -\frac{2}{1}$ $m_{AH} = \frac{1}{2}$ $y - d = \frac{1}{2}(x - 4)$
 $\rightarrow 2x - 4 = 2y - 2 \rightarrow 2x - 2y = 2 \rightarrow x - y = 1$
 $\rightarrow 2x - 2y = 2$ AH معادله

$2y - 10 = 2x - 8 \rightarrow 2y - 2x = 2 \rightarrow y - x = 1$

به‌طور کلی اگر بخواهیم فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ را به دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که طول عمود AH برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

که در آن، وجود علامت قدرمطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.

۱- از اثبات فرمول به دلیل طولانی شدن صرف نظر می‌شود. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند خود به اثبات آن بپردازند.

$\rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$
 $\rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$
 $\rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$
 $AH = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

❖ مثال: فاصله نقطه $A(-2, 4)$ از خط $y = \frac{4}{3}x + 4$ را به دست آورید.

❖ حل: ابتدا معادله خط را به صورت $4x - 3y + 12 = 0$ می نویسیم. طبق فرمول فاصله نقطه از خط، فاصله نقطه A تا خط d را AH فرض می کنیم و داریم:

$$AH = \frac{|4(-2) - 3(4) + 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8|}{5} = \frac{8}{5}$$

❖ مثال: فاصله نقطه $A(1, -4)$ از خط $8x + 6y = k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

❖ حل: ابتدا معادله خط را به صورت $8x + 6y - k = 0$ می نویسیم. مطابق فرمول فاصله نقطه از خط داریم:

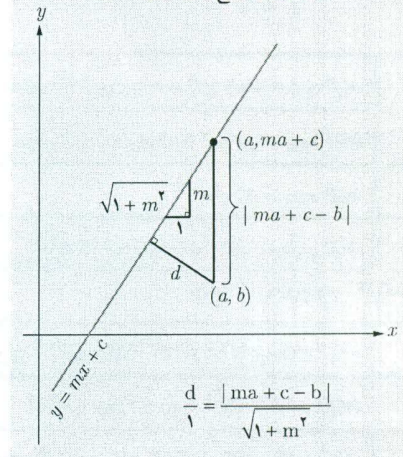
$$AH = \frac{|8(1) + 6(-4) - k|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} \Rightarrow 4 = \frac{|-16 - k|}{10} \Rightarrow |-16 - k| = 40$$

$$-16 - k = 40 \Rightarrow k = -56$$

$$-16 - k = -40 \Rightarrow k = 24$$

خواندنی

اثبات بدون توضیح فاصله نقطه از خط

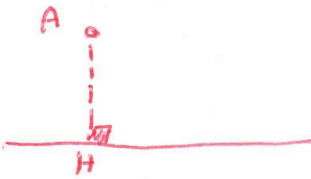


$$\frac{d}{1} = \frac{|ma + c - b|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

کارد کلاس

۱ اگر نقطه $A(2, 3)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع $3x - 4y = 9$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

$$AH = \frac{|3(2) - 4(3) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow S = 3 \times 3 = 9$$

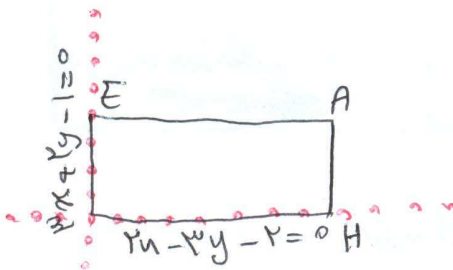


۲ دو خط $2x - 3y = 2$ و $3x + 2y = 1$ معادله های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(2, 5)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

$$AH = \frac{|2(2) - 3(5) - 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

$$AE = \frac{|3(2) - 2(5) - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{15}{\sqrt{13}}$$

$$S = AH \times AE = \frac{13}{\sqrt{13}} \times \frac{15}{\sqrt{13}} = 15$$



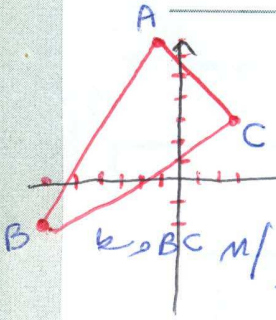
$m_{BC} = \frac{a}{9} \quad c \mid \frac{3}{9} \quad y-3 = \frac{a}{9}(x-3) \quad 9y-27 = ax-1a \quad (1)$

$ax-9y+12=0 \quad BC \text{ معادله}$

$AH = \frac{|a(-1) - 9(7) + 12|}{\sqrt{a^2+9^2}} = \frac{54}{\sqrt{104}}$

فصل اول: جبر و معادله ۳۵

تمرین



۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-1, 7)$ و $B(-6, -2)$ و $C(3, 3)$ را در نظر بگیرید.

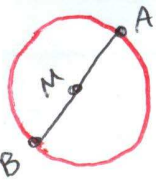
$AB = \sqrt{a^2+9^2} = \sqrt{104} \rightarrow AB=BC$
 $BC = \sqrt{9^2+a^2} = \sqrt{104}$

(الف) مثلث را رسم کنید.

(ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

(پ) معادله عمود منصف ضلع BC را به دست آورید. (ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

پاسخ: ۵۰/۵



۲ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

AB وسط $M \mid \frac{0+8}{2} = 4$ مرکز دایره $MA = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}$

شعاع دایره

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $y = x^2 - 8x - 20$ مطابق شکل زیر مدل سازی می‌شود.

(الف) مختصات نقاط انتهایی عدسی A و B را به دست آورید.

$A(-2, 0) \quad B(10, 0)$

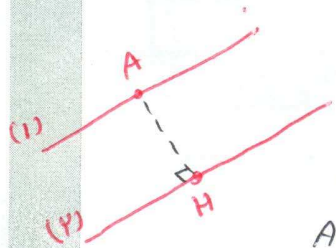
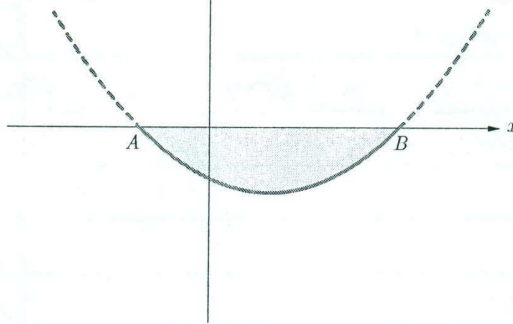
(ب) اگر x بر حسب سانتی متر باشد طول AB را به دست آورید.

(پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟

$x^2 - 8x - 20 = 0 \quad (x-10)(x+2) = 0 \quad \begin{cases} x=10 \\ x=-2 \end{cases}$
 $AB = |10 - (-2)| = 12$

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow y_{min} = 4^2 - 8(4) - 20 = -36$

بیشترین ضخامت = $| -36 | = 36$

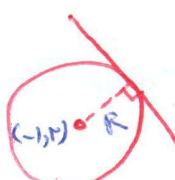


۴ ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌باشد.

نقطه $A(x_0, y_0)$ روی خط (۱) قرار دارد $ax_0+by_0=-c$
 $AH = \frac{|ax_0+by_0+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-c+c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

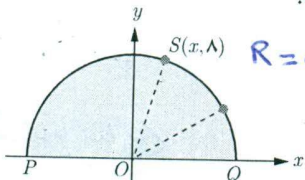
۵ خط $4x+3y=5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

$R = \frac{|4(-1) + 3(2) - 5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{3}{5}$



گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

۶ نقطه $S(x, 8)$ روی نیم دایره‌ای به شعاع 10° در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) مقدار x را به دست آورید. $R = OS = \sqrt{x^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow x^2 + 64 = 100 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به دست آورید.

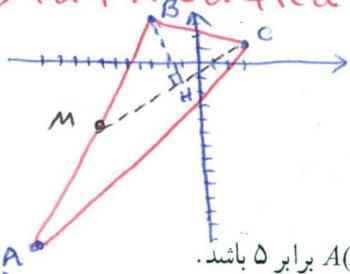
پ) نشان دهید \hat{PSQ} قائمه است.

$S \mid \lambda \ P \mid \lambda \rightarrow m_{PS} = \frac{8-0}{6-0} = \frac{4}{3}$
 $S \mid \lambda \ Q \mid \lambda \rightarrow m_{SQ} = \frac{8-0}{6-6} = \text{undefined}$

$m_{PS} \times m_{SQ} = \frac{4}{3} \times (-1) = -1 \Rightarrow PS \perp SQ$
 $\hat{PSQ} = 90^\circ$

۷ اگر فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟
 $AH = \frac{|a(1) + 4(2) - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow \frac{|3a + 7|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2$

$\rightarrow 3a^2 + 42a + 49 = 2a^2 + 32a + 64 \Rightarrow a^2 - 10a - 15 = 0$
 $\frac{10 \pm \sqrt{100 + 60}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{160}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{10}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{10}$



الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

جواب: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

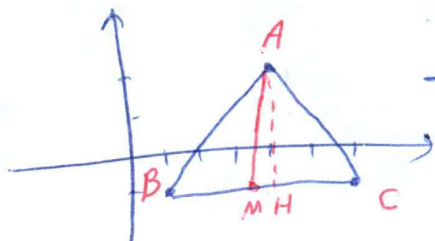
۹ نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.

جواب: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

۱۰ نقاط $A(2, 2)$ و $B(1, -1)$ و $C(8, -2)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM

باشند طول MH را به دست آورید.

جواب: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$



$H \mid \epsilon \mid -1$
 $M \mid \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \rightarrow M \mid \frac{10}{2} = 5$
 $\frac{-1 + (-1)}{2} = -1$

$\rightarrow MH = |5 - \frac{10}{2}| = \frac{1}{2}$

مسئله BC و M

۹- نقطه M روی $y = 2x$
 $M(0, 0) + M(x, 2x) = A(2, 4)$
 $\sqrt{x^2 + 4x^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (2x-4)^2} = 5$
 $\sqrt{5x^2} + \sqrt{(x-2)^2 + 4(x-2)^2} = 5$
 $|x| + |x-2| = \sqrt{5}$
 Case 1: $0 \leq x \leq 2$
 $-x - x + 2 = \sqrt{5} \Rightarrow 2 - 2x = \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{2 - \sqrt{5}}{2}$
 $x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$
 Case 2: $x > 2$
 $x + x - 2 = \sqrt{5} \Rightarrow 2x - 2 = \sqrt{5} \Rightarrow 2x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$
 $M \mid \frac{1 - \frac{\sqrt{5}}{2}}{2 - \sqrt{5}} \quad M \mid \frac{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2 + \sqrt{5}}$

$AB \perp CM \mid \frac{-10-2}{2} = -6 \Rightarrow \frac{10-2}{2} = 4$
 $m_{MC} = \frac{1 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1$
 $y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$
 $12x - 19y - 17 = 0$
 معادله میانه CM
 $BH = \frac{|1(-2) - 19(2) - 17|}{\sqrt{12^2 + 19^2}} = \frac{110}{\sqrt{505}}$
 ب) در مختصات (x, y) مرکز ثقل
 $\begin{cases} \frac{-3 + x_D}{3} = \frac{-1 + 2}{3} \\ \frac{2 + y_D}{3} = \frac{-1 + 2}{3} \end{cases}$
 $\begin{cases} -3 + x_D = -1 + 2 \\ 2 + y_D = -1 + 2 \end{cases}$
 $\begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -1 \end{cases}$