

اتحاد های مثلثاتی

شهریور ۹۰	$\sin \alpha = \frac{-4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5} \quad (0/25)$ $\cos \beta = \frac{-5}{13} \Rightarrow \sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13} \quad (0/25)$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \left(\frac{-4}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) + \left(\frac{-3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) = \frac{56}{65} \quad (0/25)$	۱
دی ۹۰	$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha \quad (0/5)$ $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (0/25) = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \quad (0/25) = 2\cos^2 \alpha - 1 \quad (0/25)$	۲
دی ۹۲	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \underbrace{(1 - \sin^2 \alpha)}_{(0/25)} - \underbrace{\sin^2 \alpha}_{(0/25)} = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad (0/25)$	۳
دی ۹۱	$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	۴
دی ۸۹	$\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \sin x \cos^2 x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$ <p style="text-align: center;">(0/5)                      (0/5)                      (0/25)                      (0/25)</p>	۵
خرداد ۹۰	$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin x + \cos x$ <p style="text-align: center;">(0/5)                      (0/5)                      (0/25)</p>	۶

خرداد ۹۱	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2 22.5^\circ \quad (./25) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2 22.5^\circ \quad (./25) \Rightarrow$ $2\sin^2 22.5^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 22.5^\circ = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad (./25) \Rightarrow \sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad (./25)$	۷
شهریور ۹۱	$\frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \stackrel{(. / 25)}{=} \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} \stackrel{(. / 25)}{=} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \stackrel{(. / 25)}{=} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1} \stackrel{(. / 25)}{=} \cos^2 x \quad (./25)$	۸
خرداد ۹۲	$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left( \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) =$ $\underbrace{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}_{(. / 25)} (\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x \quad (./25)$	۹
شهریور ۹۲	$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \times \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \times \cos 30^\circ \quad (./5)$ $= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad (./5)$	۱۰
شهریور ۹۳	$\cos 30^\circ = 2\cos^2 15^\circ - 1 \quad (./25) \Rightarrow 2\cos^2 15^\circ = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $\cos^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 2}{4} \quad (./25) \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2} \quad (./25)$	۱۱
دی ۹۳	$\tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \quad (./25)$	۱۲

۹۳ خرداد	$\sin(x+h) + \underbrace{\sin(-x)}_{(./۲۵)} = \underbrace{۲\sin\frac{h}{۲}}_{(./۲۵)} \times \underbrace{\cos\frac{۲x+h}{۲}}_{(./۲۵)}$	۱۳
۹۴ خرداد	$\cos\alpha = \frac{۴}{۵} (./۲۵), \sin\beta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} (./۲۵) \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \underbrace{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}_{(./۲۵)} = -\frac{\sqrt{۲}}{۱۰} (./۲۵)$	۱۴
شهریور ۹۴	<p>روش اول:</p> $\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} = \frac{۱+(\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha)}{۲} (./۲۵)$ $= \frac{(۱-\sin^۲\alpha) + \cos^۲\alpha}{۲} = \frac{\cos^۲\alpha + \cos^۲\alpha}{۲} (./۲۵) = \frac{۲\cos^۲\alpha}{۲} (./۲۵) = \cos^۲\alpha (./۲۵)$ <p>روش دوم:</p> $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ (./۵) \Rightarrow ۲\cos^۲\alpha = ۱ + \cos ۲\alpha (./۲۵) \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} (./۲۵)$	۱۵
	تعیین کمان (معکوس مثلثاتی)	
دی ۸۹	$\tan^{-1}(-۱) = \frac{-\pi}{۴} (./۲۵) \text{ پس } (./۲۵) \tan\left(\frac{-\pi}{۴}\right) = -۱ \text{ است از طرفی } \left(\frac{-\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right) \text{ زاویه ای در بازه } \frac{-\pi}{۴}$	۱
۹۰ خرداد	$\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{۳\pi}{۸}\right)\right) = \frac{۳\pi}{۸}$ <p>(./۵) (./۲۵) (./۲۵)</p>	۲
شهریور ۹۰	$\cos(\tan^{-1}(-\sqrt{۳})) = \cos\left(-\frac{\pi}{۳}\right) = \frac{۱}{۲} (./۲۵)$ <p>(./۲۵)</p>	۳

دی ۹۰	$\tan^{-1}(1) \text{ (} \cdot / ۲۵ \text{)} = \frac{\pi}{۴} \text{ (} \cdot / ۲۵ \text{)}$	۴
خرداد ۹۱	$\tan^{-1}\left(\frac{۳}{۴}\right) = \alpha \rightarrow \tan \alpha = \frac{۳}{۴} \text{ (} \cdot / ۲۵ \text{)} \quad \cos\left(\tan^{-1}\frac{۳}{۴}\right) = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \text{ (} \cdot / ۵ \text{)}$	۵
شهریور ۹۱	$\sin \frac{۴\pi}{۳} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{۳}\right) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ (} \cdot / ۲۵ \text{)} \quad \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = -\frac{\pi}{۳} \text{ (} \cdot / ۵ \text{)}$	۶
دی ۹۱	$\cos \frac{\pi}{۳} = \frac{1}{۲} \text{ (} \cdot / ۲۵ \text{)} \rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{1}{۲}\right) = \frac{\pi}{۶} \text{ (} \cdot / ۵ \text{)}$	۷
خرداد ۹۲	$\cos^{-1}\left(\frac{۳}{۵}\right) = \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{۳}{۵} \text{ (} \cdot / ۲۵ \text{)} \rightarrow \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{۳}{۵}\right)\right) = \sin \alpha = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{۴}{۵} \text{ (} \cdot / ۵ \text{)}$	۸
شهریور ۹۲	$\tan \frac{\pi}{۴} = 1 \text{ (} \cdot / ۲۵ \text{)} \rightarrow \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{۲} \text{ (} \cdot / ۵ \text{)}$	۹
دی ۹۲	$\sin^{-1}\left(\underbrace{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{۳}\right)}_{\text{(} \cdot / ۲۵ \text{)}}\right) = \sin^{-1}\left(\underbrace{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}_{\text{(} \cdot / ۲۵ \text{)}}\right) = -\frac{\pi}{۳} \text{ (} \cdot / ۵ \text{)}$	۱۰
خرداد ۹۳	$\sin^{-1}\left(\underbrace{-\sin \frac{\pi}{۴}}_{\text{(} \cdot / ۲۵ \text{)}}\right) = \sin^{-1}\left(\underbrace{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}_{\text{(} \cdot / ۲۵ \text{)}}\right) = -\frac{\pi}{۴} \text{ (} \cdot / ۲۵ \text{)}$	۱۱

شهریور ۹۳	$\cos^{-1}(\sin \frac{\pi}{8}) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sin \frac{\pi}{8} \text{ (./۲۵)}, \cos \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) \text{ (./۲۵)} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{8} \text{ (./۲۵)}$	۱۲
دی ۹۳	$\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \text{ (./۲۵)} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ (./۲۵)}$	۱۳
خرداد ۹۴	$\tan \frac{4\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ (./۲۵)} \Rightarrow \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \text{ (./۲۵)}$	۱۴
شهریور ۹۴	$\sin^{-1}(\cos \frac{2\pi}{9}) = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \cos \frac{2\pi}{9} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}) = \sin \frac{5\pi}{18} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{18} \text{ (./۲۵)}$	۱۵
	معادلات مثلثاتی	
دی ۸۹	$\tan x = \tan 2x \Rightarrow 2x = k\pi + x \Rightarrow x = k\pi$ (./۲۵) (./۵) (./۲۵)	۱
شهریور ۹۰	$\tan x \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \frac{1}{\tan x} = \cot x \Rightarrow \tan 2x = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \text{ (./۲۵)}$ $2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ (./۲۵)}$	۲

دی ۹۰	$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad (./\vartheta\delta) \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (./\vartheta\delta)$ $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \quad (./\vartheta\delta) \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (./\delta)$	۳
خرداد ۹۱	$\cos x (2\cos x - 1) = 0 \quad (./\vartheta\delta) \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \quad (./\vartheta\delta) \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (./\vartheta\delta) \\ 2\cos x - 1 = 0 \quad (./\vartheta\delta) \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases} \quad (./\vartheta\delta)$	۴
شهریور ۹۱	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (./\vartheta\delta) \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \quad (./\vartheta\delta) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (./\vartheta\delta) \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \quad (./\vartheta\delta) \end{cases}$	۵
دی ۹۱	$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 1 \quad (./\vartheta\delta) \rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \quad (./\vartheta\delta) & \text{غیر قابل قبول} \\ \cos x = 1 \quad (./\vartheta\delta) \rightarrow \{x = 2k\pi \quad (./\vartheta\delta)\} \end{cases}$	۶
خرداد ۹۲	$2\sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (./\vartheta\delta) \rightarrow$ $\cos x (2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \quad (./\vartheta\delta) \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (./\vartheta\delta) \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (./\vartheta\delta) \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \quad (./\vartheta\delta) \end{cases} \end{cases}$	۷

شهریور ۹۲	$\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \quad (./25) \rightarrow$ $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (./25) \rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} \quad (./25) \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (./25) \\ x = 2k\pi + \pi \quad (./25) \end{cases}$	۸
دی ۹۲	$\Delta x = 2k\pi + 2x \quad (./25) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad (./25)$ $\Delta x = 2k\pi + (\pi - 2x) \quad (./25) \Rightarrow 3x = (2k+1)\pi \quad (./25) \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} \quad (./25)$	۹
خرداد ۹۳	$2(1 - \cos^2 x) + 9 \cos x + 3 = 0 \quad (./25) \Rightarrow 2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \Rightarrow \cos x = 5 \quad (./5) \text{ غ ق ق}$ $\cos x = -\frac{1}{2} \quad (./25) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (./25) \\ x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \quad (./25) \end{cases}$	۱۰
شهریور ۹۳	$2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x = 0 \quad (./25) \Rightarrow \cos x = 0 \quad (./25) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (./25)$ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (./25) \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (./25), x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (./25)$	۱۱
دی ۹۳	$\sin x (2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \quad (./25) \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \quad (./25)$ $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (./25) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad (./25), x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (./25) \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \quad (./25)$	۱۲
خرداد ۹۰	$\sqrt{y^2} = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos \theta \quad (./25) \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{3} \quad (./25) \Rightarrow \theta = 60 \quad (./25)$	۱۳

۹۴ خرداد	$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \quad (./25) \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \quad (./25)$ $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (./25)$ $\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \quad (./25) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (./25)$	۱۴
۹۴ شهریور	$1 - \cos^2 x = \cos^2 x + 1 \quad (./25) \Rightarrow 2\cos^2 x = 0 \quad (./25) \Rightarrow \cos x = 0 \quad (./25) \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (./25)$	۱۵

تهیه کننده : احمد عچرش کلاس سوم ریاضی دبیرستان امام حسین (ع) باوی