فعالیت های اینجانب در زمینه های تالیف کتاب های آموزشی:

۱) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حساب دیفرانسیل گاج (چاپ ۹۰)
۲) مولف کتاب تست میکرو طبقه بندی حسابان گاج
۳) مولف کتاب ریاضیات ۳ تجربی منتگران
۴) مولف کتاب ریاضیات ۲ دوم دبیرستان منتگران
۵) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۱) دیفرانسیل و ریاضیات پایه (کتاب لقمه) مهروماه
۶) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته ریاضی جلد (۲) هندسه و گسسته (کتاب لقمه) مهروماه
۷) مولف کتاب مفاهیم و فرمول های ریاضی رشته تجربی (کتاب لقمه) مهروماه
۸) مولف کتاب موضوعی مشتق مهروماه
۹) مولف کتاب های آموزشی ریاضی نوبل
۱۰) طراح تست آزمون های کانون فرهنگی آموزش قلم چی (سال های ۹۰-۸۸)
۱۱) طراح تست آزمون های منتگران (سال های ۹۰-۸۴)

ارادتمند شما رحیم قهرمان
۰۹۳۸۷۷۳۶۴۱۸
Rahim.ghahreman

لیست جزوات ریاضیات (مولف :رحیم قهرمان)

1.ریاضیات تجربی جامع(دهم ،یازدهم و دوازدهم – ویژه کنکور)

2.ریاضی پایه و حسابان (ریاضی دهم ،حسابان یازدهم و دوازدهم – ویژه کنکور)

3.ریاضی دوازدهم تجربی (ویژه کنکور)

4.حسابان دوازدهم (ویژه کنکور)

5.ریاضی دوازدهم تجربی (ویژه امتحان نهایی)

6.حسابان دوازدهم (ویژه امتحان نهایی)

7.ریاضی یازدهم تجربی (ویژه کنکور)

8.حسابان یازدهم (ویژه کنکور)

9.ریاضی دهم و ریاضی تجربی (ویژه کنکور)

10.ریاضی نهم (ویژه تیز هوشان)

11.ریاضی نهم (ویژه امتحان نهایی)

(۱)

فصل اول حسابان (۱) (یازدهم)

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف: رحیم قهرمان

درسنامه‌ی (۱) مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$، مجموع n جمله‌ی اول را با نماد S_n نمایش می‌دهند و تعریف می‌شود:

$$a_1+a_2+\dots+a_n=S_n$$

اگر a_1 جمله‌ی اول، a_n جمله‌ی n ام و d قدر نسبت دنباله‌ی حسابی باشد، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌های زیر حاصل می‌شود:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n) \quad \text{یا} \quad S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

تست: اگر مجموع ۶ جمله‌ی نخست یک دنباله‌ی حسابی (S_6) برابر ۳۰ و مجموع ۸ جمله‌ی نخست آن (S_8) برابر ۷۲ باشد، جمله‌ی چهارم آن دنباله کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} S_6=\frac{6}{2}(2a_1+5d) \Rightarrow 30=3(2a_1+5d) \Rightarrow 2a_1+5d=10 \\ S_8=\frac{8}{2}(2a_1+7d) \Rightarrow 72=4(2a_1+7d) \Rightarrow 2a_1+7d=18 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو معادله دو مجهول}}$$

$$a_1=-5, d=4 \Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d \xrightarrow{n=4} a_4=a_1+3d=-5+3(4)=7$$

تست: مجموع چند جمله از دنباله‌ی حسابی $a, 2, 5a-2, \dots$ برابر ۵۵ است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$\boxed{\text{یادآوری:}\quad a,b,c \xrightarrow[\text{حسابی}]{\text{دنباله}} 2b=a+c}$$

چون $5a-2$، ۲ و a تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند، پس:

$$(a)+(5a-2)=2(2) \Rightarrow 6a-2=4 \Rightarrow a=1$$

حال جملات دنباله‌ی مزبور به صورت ۱, ۲, ۳, ... در می‌آید و در نتیجه:

$$S_n=55 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=55 \Rightarrow \frac{n}{2}(2+(n-1))=55 \Rightarrow$$

$$n(n+1)=110 \Rightarrow n(n+1)=10\times 11 \Rightarrow n=10$$

تست: در یک دنباله‌ی حسابی، اگر به جمله‌ی اول ۳ واحد اضافه کنیم و از قدر نسبت ۲ واحد کم کنیم، مجموع بیست جمله‌ی اول چه تغییری می‌کند؟

۱) ۳۲۰ واحد اضافه می‌شود ۲) ۱۹۰ واحد کم می‌شود

۳) ۳۲۰ واحد کم می‌شود ۴) ۱۴۰ واحد اضافه می‌شود

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$(\text{قدیم}) S_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) \Rightarrow (\text{قدیم}) S_{20} = 10(2a_1+19d)$$

$$\Rightarrow (\text{جدید}) S_{20} = 10(2(a_1+3)+19(d-2)) = 10(2a_1+19d+6-38) =$$

$$= 10\underbrace{(2a_1+19d)}_{(\text{قدیم}) S_{20}} - 320 \Rightarrow (\text{جدید}) S_{20} = (\text{قدیم}) S_{20} - 320$$

نکات:

۱) اگر تعداد جملات یک دنباله‌ی حسابی فرد باشد، داریم:

$$S_n = n \times (\text{جمله وسط}) \quad \text{یا} \quad S_{2n-1} = (2n-1)\times a_n$$

تست: در یک دنباله‌ی حسابی دارای ۲۷ جمله است. اگر مجموع سه جمله‌ی وسط برابر ۱۵ باشد، مجموع جملات این ۲۷ جمله چقدر است؟

۱) ۴۰۵ ۲) ۳۶۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۸۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$\text{مجموع سه جمله‌ی وسط} = 3\times(\text{جمله وسطی}) \Rightarrow 15 = 3\times \text{جمله وسط} \Rightarrow$$

$$\text{جمله وسط} = 5$$

سه جمله‌ی وسط عبارتند از جملات a_{13} و a_{14} و a_{15} به عبارتی:

$$a_{13}+a_{14}+a_{15}=15 \Rightarrow (a_{13}+a_{15})+a_{14}=15 \Rightarrow 2a_{14}+a_{14}=15$$

$$\Rightarrow a_{14}=5 \quad \text{و} \quad S_{27} = \frac{27}{2}(a_1+a_{27}) = \frac{27}{2}(2a_{14}) \xrightarrow{a_{14}=5} 135$$

۲) مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n=\alpha n^2+\beta n$ است. برای یافتن جمله عمومی دنباله حسابی از طریق S_n، کافی است S_1 و S_2 را بدست آوریم، داریم:

$$\begin{cases} S_1=a_1 \ (*) \\ S_2=a_1+a_2 \end{cases} \Rightarrow S_2-S_1=a_2 \xrightarrow{(*)} d=a_2-a_1=S_2-2S_1 \ (**)$$

با داشتن d و a_1، دنباله حسابی مشخص می‌شود.

تست:

۳) روش دیگر برای یافتن جمله عمومی از روی S_n، استفاده از رابطه $a_n=S_n-S_{n-1}$ است.

تست: مجموع n جمله اول از دنباله حسابی $S_n=\frac{n(2n-3)}{4}$ است. جمله دهم کدام است؟

۱) ۸/۲۵ ۲) ۸/۷۵ ۳) ۹/۲۵ ۴) ۹/۷۵

پاسخ: گزینه ۲) $a_n=S_n-S_{n-1}$، بنابراین:

$$a_{10}=S_{10}-S_9=\frac{10\times(2\times10-3)}{4}-\frac{9\times(2\times9-3)}{4}=\frac{170}{4}-\frac{135}{4}=8/75$$

تست: مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت $S_n=\frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات، با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

۱) ۹ ۲) $\frac{29}{3}$ ۳) $\frac{49}{3}$ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۴) اگر جملات دنباله حسابی را با $a_1, a_2, \dots$ نشان دهیم، داریم:

$$a_7+a_8+\dots+a_{17}+a_{18}=S_{18}-S_6=\frac{18(18-15)}{6}-\frac{6(6-15)}{6}=9+9=18$$

تست: بین دو عدد ۴ و ۶ حداقل چند واسطه حسابی باید درج کرد تا مجموع کلیه این اعداد دنباله بزرگتر از ۵۰ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

مولف:رحیم قهرمان

پاسخ: گزینه‌ی ۲) فرض کنیم m واسطه‌ی بین ۴ و ۶ درج کرده‌ایم، پس از جمع دنباله‌ی تشکیل شده m+2 عضو خواهد داشت و باید جمع همه‌ی این اعضا بزرگ‌تر از ۵۰ باشد، یعنی:

$$S_{m+2} > 50 \Rightarrow \frac{m+2}{2}(\underbrace{a_1}_{\text{جمله‌ی اول}} + \underbrace{a_{m+2}}_{\text{جمله‌ی آخر}}) > 50 \Rightarrow \frac{m+2}{2}(4+6) > 50$$

$$\Rightarrow m+2>10 \Rightarrow m>8 \Rightarrow m\geq 9$$

یعنی باید حداقل ۹ عدد بین ۴ و ۶ اضافه شود.

تست: حداکثر چند جمله از جملات دنباله‌ی حسابی ۳، $\frac{5}{2}$، ۲، $\frac{3}{2}$، ... را با هم جمع کنیم تا حاصل عددی مثبت گردد.

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

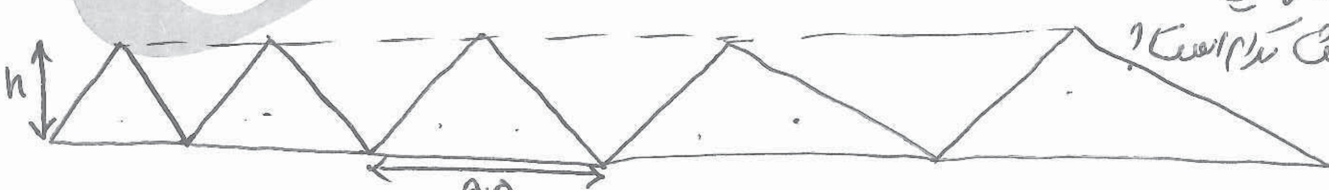
گزینه‌ی ۴) در واقع می‌خواهیم در دنباله‌ی فوق $S_n>0$ باشد، پس داریم:

$$S_n>0 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)>0 \Rightarrow \frac{n}{2}(2(3)+(n-1)(-\frac{1}{2}))>0 \xrightarrow{\times 2}$$

$$n(6-\frac{(n-1)}{2})>0 \xrightarrow{\times 2} n(12-n+1)>0 \Rightarrow n(13-n)>0 \Rightarrow 0<n<13$$

بنابراین حداکثر مقداری که n می‌تواند اختیار کند تا به ازای آن S_n عددی مثبت باشد برابر ۱۲ است.

تست: ۵ مثلث داریم که هم ارتفاع هستند و اندازه‌ی قاعده‌ی آن‌ها تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر مجموع مساحت‌های این مثلث‌ها برابر ۹۵ و اندازه‌ی قاعده‌ی مثلث میانی برابر ۹/۵ باشد، اندازه‌ی ارتفاع این مثلث کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$\begin{cases} n=5 \\ S_5=95 \\ a_3=\frac{1}{2}(9.5)h \end{cases} \Rightarrow 95=\frac{5}{2}[2a_1+(5-1)(d)] = 95=\frac{5}{2}(2a_1+4d) \longrightarrow$$

$$a_1+2d \xrightarrow{a_3=a_1+2d} \frac{1}{2}(9.5)h=19 \Rightarrow h=4$$

(۵)

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف: رحیم قهرمان

درسنامه (۲) مجموع جملات دنباله هندسی

در دنباله هندسی $\{a_n\}$، مجموع n جمله اول را با نماد S_n نمایش می‌دهند و تعریف می‌شود:

$a_1+a_2+\dots+a_n=S_n$

اگر a_1 جمله اول و a_{n+1} جمله (n+1)ام و q قدر نسبت دنباله هندسی باشند $(q\neq 1)$ مجموع n جمله اول از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

تست: حاصل مجموع $1+x+x^2+\dots+x^{12}$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $128+64\sqrt{2}$ ۲) $127+64\sqrt{2}$ ۳) $128+63\sqrt{2}$ ۴) $127+63\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه (۴)

$1+x+x^2+\dots+x^{12}=$ (مجموع ۱۳ جمله از یک دنباله هندسی با $q=x, a_1=1$) $=\frac{1\times(1-x^{13})}{1-x}$

$$=\frac{1-x^{13}}{1-x}\overset{x=\sqrt{2}}{=}\frac{1-(\sqrt{2})^{13}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1-64\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{1+\sqrt{2}-64\sqrt{2}-128}{-1}$$

$=127+63\sqrt{2}$

تست: دنباله هندسی ... و $\frac{1}{2}$ و x و ۲ غیر نزولی است. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

۱) $\frac{41}{32}$ ۲) $\frac{21}{16}$ ۳) $\frac{11}{8}$ ۴) $\frac{23}{16}$

پاسخ: گزینه (۲) در دنباله هندسی مذکور $a_3=\frac{1}{2}$ و $a_1=2$ بنابراین:

$$\frac{a_3}{a_1}=q^2\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}}{2}=q^2\Rightarrow q=\pm\frac{1}{2}$$

به ازای $q=\frac{1}{2}$ دنباله نزولی و به ازای $q=-\frac{1}{2}$ نه نزولی و نه صعودی خواهد بود (زیرا علامت جمله‌ها مثبت و منفی می‌شود) پس بر اساس مفروضات این تست باید $q=-\frac{1}{2}$ را انتخاب کنیم:

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2(1-(-\frac{1}{2})^6)}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{21}{16}$$

تست: در یک دنباله‌ی هندسی مجموع هشت جمله‌ی اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله‌ی اول آن است. جمله‌ی هفتم چند برابر جمله‌ی اول است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{5}{32}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲

$$S_8 = \frac{5}{4} S_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{5}{4}\left(\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}\right) \Rightarrow$$

$$1-q^8 = \frac{5}{4}(1-q^4) \Rightarrow (1-q^4)(1+q^4) = \frac{5}{4}(1-q^4) \xrightarrow{q^4 \neq 1}$$

$$1+q^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

در نتیجه:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

دقت داشته باشید که اگر $q^4=1$ باشد آنگاه قدر مطلق همه جملات با هم برابر شده و در نتیجه $\frac{a_7}{a_1}=1$ که در گزینه‌ها موجود نیست.

تست: حداقل چند جمله از دنباله‌ی هندسی ...، ۲، ۱، $\frac{1}{2}$ را با شروع از جمله‌ی اول جمع کنیم تا حاصل بزرگتر از ۹۰۰ شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲) باید از نامساوی $S_n > 900$ کم‌ترین مقدار n را بیابیم.

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right) > 900 \Rightarrow 2^n - 1 > 1800 \Rightarrow 2^n > 1801 \Rightarrow n > 10$$

$\Rightarrow$ کم‌ترین مقدار n برابر ۱۱ است.

تست: تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی، عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ی ۳) فرض کنیم دنباله ی هندسی، ۲n جمله داشته باشد، بنابه فرض داریم:

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=3(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})$$

جملات با ردیف فرد، یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت q^2 می دهند. بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=3\times\frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2}\Rightarrow\frac{1}{1-q}=\frac{3}{(1-q)(1+q)}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{3}{1+q}\Rightarrow q=2$$

تست: در یک دنباله ی هندسی، مجموع ۶ جمله اول، ۵۷ برابر مجموع دو جمله ی اول است. مجموع چهار جمله ی اول این دنباله چند برابر مجموع دو جمله ی اول آن است؟

۱) ۵۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶۵

پاسخ: گزینه ی ۳) جمله ی اول را a_1 و قدر نسبت را q فرض می کنیم. طبق فرض $\frac{S_6}{S_2}=57$ بنابراین:

$$\frac{1-q^6}{1-q^2}=57\Rightarrow\frac{(1-q^2)(1+q^2+q^4)}{1-q^2}=57\Rightarrow q^4+q^2-56=0\Rightarrow$$

$$(q^2+8)(q^2-7)=0$$

پس $q^2=7$ حال با نوشتن فرمول های S_4 و S_2 نتیجه می گیریم.

$$\frac{S_4}{S_2}=\frac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=8$$

تست: برای محافظت در تابش های مضر مواد رادیواکتیو، لایه ها یی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آن ها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش دست کم ۹۹ درصد کاهش یابد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

مولف:رحیم قهرمان

پاسخ: گزینه «۳» اولین لایه، مواد مضر را نصف می‌کند، دومین لایه نیز نیم باقیمانده، نیمی از مواد مضر، یعنی $\frac{1}{4}$ مواد مضر را برطرف می‌کند و ... . دنباله‌ی این اعداد به صورت $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ است. بدیهی است که این اعداد، جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $q=\frac{1}{2}$ و جمله‌ی اول $a_1=\frac{1}{2}$ است. بنابر فرض باید داشته باشیم:

$$S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n \geq 7$$

پس تعداد لایه‌ها باید حداقل هفت باشد.

نکته: برای یافتن جمله عمومی از روی S_n می‌توان از رابطه‌ی $a_n=S_n-S_{n-1}$ استفاده کرد.

همچنین داریم $a_1=S_1$ و $a_2=S_2-S_1$ در نتیجه

$$q=\frac{S_2-S_1}{S_1}$$

تست: اگر مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی به صورت $S_n=3(1-2^{-n})$ باشد، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$S_n=3(1-2^{-n}) \Rightarrow \begin{cases} S_2=a_1+a_2 \xrightarrow{n=2} \frac{9}{4} \\ S_1=a_1 \xrightarrow{n=1} \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a_1+a_2=\frac{9}{4} \xrightarrow{a_1=\frac{3}{2}}$$

$$a_2=\frac{3}{4} \Rightarrow q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$$

درسنامه‌ی (۳) چند اتحاد مهم

۱) اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$، آنگاه:

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

۲) اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$ عددی فرد باشد، آنگاه:

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

۳) اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$ عددی زوج باشد، آنگاه:

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1})$$

حالات خاص

۱) اگر n عدد طبیعی باشد، داریم:

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$$

۲) اگر n عددی فرد باشد، داریم:

$$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+1)$$

مثال: به کمک اتحادهای ذکر شده حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\dfrac{(x^2-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x^{20}-1}$

ب) $\dfrac{(x^5+1)(x^2-x+1)}{x^3+1}$

پاسخ:

الف) $\dfrac{\left((x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\right)\left((x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\right)}{x^{20}-1}=\dfrac{(x^5-1)(x^5+1)}{x^{20}-1}$

$$=\frac{x^{10}-1}{(x^{10}-1)(x^{10}+1)}=\frac{1}{x^{10}+1}$$

ب) $\dfrac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=x^4-x^3+x^2-x+1$

تست: حاصل $A=(x^{21}-1)(1+x^{-1}+x^{-2}+\cdots+x^{-20})^{-1}$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $512(\sqrt{2}-1)$ ۲) $1024(\sqrt{2}+1)$ ۳) $512(\sqrt{2}+1)$ ۴) $1024(\sqrt{2}-1)$

پاسخ: گزینه ۴

$$A=(x^{21}-1)\left(1+\frac{1}{x^1}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^{20}}\right)^{-1}=(x^{21}-1)\left(\frac{x^{20}+x^{19}+\cdots+x+1}{x^{20}}\right)^{-1}$$

$$=(x^{21}-1)\left(\frac{x^{20}}{x^{20}+x^{19}+\cdots+1}\right)=(x-1)(x^{20}+x^{19}+\cdots+1)\times\frac{x^{20}}{x^{20}+x^{19}+\cdots+1}$$

$$=x^{20}(x-1)\implies A=x^{20}(x-1)$$

حال حاصل بدست آمده را به ازای $x=\sqrt{2}$ بدست می‌آوریم:

$$A(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^{20}(\sqrt{2}-1)=1024(\sqrt{2}-1)$$

(درسنامه ی شماره ۴)

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور** معادله های درجه ی دوم

مولف: رحیم قهرمان اگر x_1 و x_2 ریشه های معادله ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، داریم: $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ و $P=x_1x_2=\frac{c}{a}$

تذکر: حالات دیگر را می توان به رابطه ی دیگر بین S و P تبدیل کرد، به عنوان مثال داریم:

1) $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$ 2) $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$ 3) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

4) $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$ 5) $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{S}{\sqrt{P}}$

6) $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{S^2-4P}$

تست: اگر α و β ریشه های معادله ی $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)

پاسخ: گزینه ی ۳

$4x^2-12x+1=0 \Rightarrow S=3,\ P=\frac{1}{4}\ (*)$

$$A=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}\overset{(*)}{=}\frac{\sqrt{3+2\times\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=4$$

تست: به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله ی $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ می باشد؟

(سراسری تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ ۴) -1 و $\frac{9}{5}$

پاسخ: گزینه ی ۱ اگر ریشه های معادله را α و β بنامیم، داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=6 \xrightarrow[P=\frac{5}{m}]{S=\frac{m+3}{m}} \left(\frac{m+3}{m}\right)^2-\frac{10}{m}=6 \Rightarrow \frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}=6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} 5m^2+4m-9=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{9}{5} \end{cases}$$

از مقادیر به دست آمده برای m باید ببینیم کدام یک دلتای معادله ی اصلی را منفی می کنند:

$$\begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow \Delta=16-20<0 & \text{غ ق ق} \\ m=-\frac{9}{5} \Rightarrow \Delta>0 & \text{ق ق} \end{cases}$$

تست: عدد $2\sqrt{3}$ واسطه ی هندسی بین ریشه های معادله ی $2x^2-mx=1-m$ است، m کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ی ۴

$\boxed{\text{}}$ یادآوری: اگر a و b دو عدد مثبت باشند، واسطه ی هندسی بین آنها مساوی $\sqrt{ab}$ است

اگر $2\sqrt{3}$ واسطه ی هندسی x_1 و x_2 باشد آنگاه:

$$\sqrt{x_1x_2}=2\sqrt{3} \Rightarrow x_1x_2=12 \xrightarrow{x_1x_2=\frac{c}{a}} \frac{m-1}{2}=12 \Rightarrow m=25$$

تست: هرگاه یکی از ریشه های معادله ی $ax^2+bx+a=0$ سه برابر ریشه ی دیگر باشد، مقدار $\frac{a^2}{b^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{16}$

گزینه ی ۴) نگاهی دقیق به معادله واضح می سازد که حاصلضرب ریشه های مساوی (۱) است

$(x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{a}{a}=1 \Rightarrow x_1x_2=1)$ این مطلب کمک زیادی به ما خواهد کرد:

$$\begin{cases} x_1x_2=1 \\ x_1=3x_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x_2}=3x_2 \Rightarrow x_2^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x_1^2=3$$

در نتیجه:

$$x_1^2+x_2^2=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3} \Rightarrow S^2-2P=\frac{10}{3} \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2=\frac{10}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{3}{16}$$

تست: اگر $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ ریشه های معادله ی $x^2+bx+c=0$ باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_2^3}+\frac{x_2}{x_1^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{3c^2-1}{c^3}$ ۲) $\frac{c^2+2}{c^3}$ ۳) $\frac{1-2c^2}{c^3}$ ۴) $\frac{2c^2-1}{c^3}$

پاسخ: گزینه ی ۳

$\boxed{\text{نکته: } \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

$$\frac{x_1}{x_2^3}+\frac{x_2}{x_1^3}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^3x_2^3}$$

حال با جایگذاری مقدار $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ در رابطه ی بدست آمده داریم:

$$\frac{x_1^4+x_2^4}{(x_1x_2)^4}=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha)^4}=\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha)^4}$$

$$=\frac{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^4}$$

کافی است برای محاسبه‌ی رابطه‌ی اخیر حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم یعنی $\sin\alpha\cos\alpha$ که همان مقدار c است در آن جایگذاری کنیم، بنابراین:

$$\frac{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^4}=\frac{1-2c^2}{c^4}$$

ویژگی معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ (در حالت $\Delta>0$)

۱) اگر $c=0 \Leftrightarrow$ معادله یک ریشه برابر صفر دارد. $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$

۲) اگر $b=0 \Leftrightarrow$ معادله دو ریشه قرینه دارد.

۳) اگر $a=0$ ، $b\neq 0 \Leftrightarrow x=-\frac{c}{b}$

۴) اگر $a=c \Leftrightarrow$ دو ریشه معادله عکس یکدیگرند

۵) اگر $a=-c \Leftrightarrow$ دو ریشه معادله قرینه عکس یکدیگرند.

۶) اگر $a+b+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

۷) اگر: $a+c=b \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{c}{a} \end{cases}$

تست: به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی $mx^2+3x+m^2=3$ ، معکوس یکدیگرند؟

(سراسری تجربی خارج ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه‌ی ۲) معادله دارای دو ریشه حقیقی است، بنابراین:

$$mx^2+3x+m^2-2=0 \xrightarrow{\Delta>0} 9-4m(m^2-2)>0 \quad (*)$$

به علاوه در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، مجموع ریشه‌ها برابر با $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{c}{a}$ است. پس داریم:

$$mx^2+3x+m^2-2=0 \Rightarrow \qquad P=\frac{m^2-2}{m}$$

چون ریشه‌ها معکوس یکدیگرند، پس بایستی $a=c$ یعنی

$$m^2-2=m \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m+1)(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

حال هر یک از مقادیر بدست آمده را در رابطه ی (*) قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} m=-1 \xrightarrow{(*)} 9-4(-1)(1-2)>0 \Rightarrow 5>0 \Rightarrow \text{قابل قبول} \\ m=2 \xrightarrow{(*)} 9-4\times 2(4-2)>0 \Rightarrow -7>0 \qquad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین فقط به ازای $m=-1$ ریشه‌های معادله مثبت و معادله دارای دو ریشه است.

نکاتی درباره جواب‌های معادله ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

۱) اگر $\Delta>0 \Longleftrightarrow$ معادله دو ریشه ی متمایز دارد.

الف) $\frac{c}{a}<0 \Rightarrow$ دو ریشه مختلف العلامت دارد $\Rightarrow$

- $-\frac{b}{a}<0$ ، $|x_1|>|x_2|$
- $-\frac{b}{a}=0$ ، دو ریشه قرینه یکدیگرند
- $-\frac{b}{a}>0$ ، $|x_2|>|x_1|$

ب) $\frac{c}{a}=0 \Rightarrow$ یک ریشه صفر و دیگری $-\frac{b}{a}$ است.

ج) $\frac{c}{a}>0 \Rightarrow$ دو ریشه هم علامت اند $\Rightarrow$

- $-\frac{b}{a}<0$ هر دو ریشه منفی اند
- $-\frac{b}{a}=0$ غیر ممکن است
- $-\frac{b}{a}>0$ هر دو مثبت اند

۲) اگر $\Delta=0 \Rightarrow$ معادله دارای ریشه مضاعف است.

$$\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow x_1=x_2>0 \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow x_1=x_2<0 \end{cases}$$

۳) اگر $\Delta<0$ $\Leftarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تست: حدود m برای آن که معادله $(m-1)x^2+mx+m-3=0$ دو ریشه مختلف العلامه داشته باشد، کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $1<m<3$ ۳) $m<1$ ۴) $0<m<1$

پاسخ: گزینه (۲) می‌دانیم معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه مختلف العلامه است، هرگاه $\frac{c}{a}<0$ باشد.

$$(m-1)x^2+mx+m-3=0 \Rightarrow \frac{m-3}{m-1}<0 \Rightarrow 1<m<3$$

تست: به ازای چه مقدار m، معادله‌ی $3x^2+(m^2-16)x+m+3=0$ دارای دو ریشه قرینه است؟

۱) -4 ۲) ± 4 ۳) -3 ۴) ± 3

پاسخ: گزینه (۱) می‌دانیم معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ با شرط $b=0$ و $\frac{c}{a}<0$ دو ریشه‌ی قرینه هم دارد. پس داریم:

$$\begin{cases} m^2-16=0 \\ \frac{m+3}{3}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-4 \text{ یا } m=4 \\ m<-3 \end{cases} \Rightarrow m=-4$$

تست: کدام یک از معادلات زیر، دو جواب مختلف العلامه دارد که جواب منفی از نظر قدر مطلق از جواب مثبت بزرگ‌تر است؟

۱) $8x^2-4x-3=0$ ۲) $-x^2-8x+7=0$

۳) $-x^2-9x-12=0$ ۴) $-x^2+7x+8=0$

گزینه (۲) چنانچه این که معادله دارای دو جواب مختلف العلامت است، لذا باید $\frac{c}{a}<0$ باشد، از طرفی اگر جواب منفی از لحاظ قدر مطلق از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع دو ریشه عددی منفی است یعنی $\frac{b}{a}>0$ است. بنابراین باید $\frac{c}{a}<0$ و $\frac{b}{a}>0$ باشد که تنها معادله گزینه‌ی (۲) دارای این شرایط است.

درسنامه‌ی (۵) تشکیل معادله درجه دوم

۱) معادله‌ی درجه‌ی دومی که جواب‌های آن اعداد حقیقی x_1 و x_2 باشند و داشته باشیم $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ آن‌گاه معادله‌ی درجه دوم آن به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$x^2-Sx+P=0$$

تست: معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌هایش $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ و $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-(3+\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$

۲) $x^2+(3+\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$

۳) $x^2-(3-\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$

۴) $x^2-(3+\sqrt{2})x+1=0$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ ابتدای S و P را می‌یابیم:

$$\begin{cases} S=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=3+\sqrt{2} \\ P=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\times\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

حال با داشتن $S=3+\sqrt{2}$ و $P=\frac{1}{2}$ معادله درجه دوم را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-(3+\sqrt{2})x+\frac{1}{2}=0$$

۲) اگر عدد اصم $\alpha+\sqrt{\beta}$ ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دومی با ضرایب گویا باشد، در این صورت ریشه‌ی دیگر، $\alpha-\sqrt{\beta}$ خواهد بود.

تست: عدد $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ ریشه‌ی کدام یک از معادلات زیر است؟

۱) $x^2-4x+1=0$

۲) $x^2+3x-1=0$

۳) $x^2-2x-1=0$

۴) $x^2-7x+4=0$

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$x_1=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=|2-\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x_1=2-\sqrt{3} \Rightarrow x_2=2+\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=1 \end{cases} \Rightarrow x^2-4x+1=0$$

۳) برای یافتن معادله درجه دومی جدیدی که ریشه های آن رابطه ای با ریشه های معادله ی قبلی داشته باشد، P' و S' را برای معادله ی جدید به دست آورده و آن گاه معادله ی $x^2-S'x+P'=0$ را تشکیل می دهیم.

تست: اگر α و β ریشه های معادله ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله، به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1\right\}$ است؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

1) $4x^2-5x+1=0$ 2) $4x^2-x+1=0$ 3) $4x^2-5x-1=0$ 4) $4x^2-3x-1=0$

پاسخ: گزینه ی ۳

$$2x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2} \\ \alpha\beta=\frac{c}{a}=-2 \end{cases}$$

ریشه های معادله ی مورد نظر عبارتند از: $\alpha'=\frac{1}{\alpha}+1$ و $\beta'=\frac{1}{\beta}+1$، پس:

$$\begin{cases} S'=\alpha'+\beta'=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2=\frac{5}{4} \\ P'=\alpha'\beta'=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1=\frac{-1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)+1=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2-S'x+P'=0$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2-5x-1=0$$

تست: ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $2x^2-3x-1=0$، یک واحد کمتر است؟

(سراسری تجربی ۹۴)

1) $x^2-3x+1=0$ 2) $x^2+3x+1=0$ 3) $x^2+5x+2=0$ 4) $x^2-5x+2=0$

پاسخ: گزینه ی ۳) اگر ریشه های این معادله را α و β بنامیم، داریم:

$$2x^2-3x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2} \\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2} \end{cases}$$

مولف:رحیم قهرمان

معادله‌ای که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادله اولیه یک واحد کم‌تر است، به صورت زیر خواهد بود:

$$\left\{\frac{1}{\alpha}-1 \text{ و } \frac{1}{\beta}-1\right\}$$

$$S'=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=-5$$

$$P'=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1=\frac{1}{\alpha\beta}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+1 \Rightarrow$$

$$P'=\frac{1}{-\frac{1}{2}}-(-3)+1=2$$

با توجه به رابطه‌ی $x^2-S'x+P'=0$ می‌توانیم معادله‌ی مورد نظر را به دست آوریم.

$$\begin{cases} S'=-5 \\ P'=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+5x+2=0$$

معادله درجه چهار (معادلاتی که به روش تغییر متغیر قابل حل می‌باشند)

در برخی از معادلات می‌توان با در نظر گرفتن یک متغیر جدید، آن معادله را به یکی از معادلاتی که می‌شناسیم، تبدیل کرد. در این حالت بعد از حل معادله‌ی حاصل، جواب‌ها را در عبارت تغییر متغیر قرار داده و مقادیر مجهول اصلی معادله‌ی اولیه را به دست آوردیم.

تست: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

پاسخ: گزینه «۲» معادله را از روش تغییر متغیر حل می‌کنیم، داریم:

$$(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0 \xrightarrow{x^2+x=t} t^2-18t+72=0 \Rightarrow (t-6)(t-12)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه حقیقی دارد}} x_1+x_2=-1 \\ t=x^2+x=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه حقیقی دارد}} x_3+x_4=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=x_1+x_2+x_3+x_4=-2$$

مولف:رحیم قهرمان

درسنامه ی (۴) نمودار تابع درجه ی دوم (سهمی)

۱) اگر $a>0$ باشد، دهانه ی سهمی به سمت بالا و به صورت ∪ است (تابع می نیمم دارد.)

۲) اگر $a<0$ باشد، دهانه سهمی به سمت پایین و به صورت ∩ است، (تابع ماکزیمم دارد.)

۳) مختصات راس سهمی از فرمول $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ بدست می آید که به آن نقطه ی می نیمم (هرگاه $a>0$) یا نقطه ی ماکزیمم (هرگاه $a<0$) نیز می گویند و خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

تست: اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می کند؟ (سراسری تجربی ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

گزینه ی ۴) $x=2$ محور تقارن تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ می باشد لذا:

$$x=\frac{-1}{2(a-1)}: \text{محور تقارن} \xrightarrow{x=2 \text{ محور تقارن}} \frac{-1}{2(a-1)}=2 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

بنابراین ضابطه ی تابع به شکل $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$ در می آید و محل تقاطعش با جهت مثبت محور x ها عبارت است از:

$$y=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2+x+3=0 \Rightarrow x^2-4x-12=0 \Rightarrow (x+2)(x-6)=0 \xRightarrow{x>0} x=6$$

تست: نقطه ی می نیمم تابع $y=x^2+ax+2$ روی نیمساز قرار دارد. a کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

پاسخ: گزینه ی ۴

$$y=x^2+ax+2 \Rightarrow S\left(-\frac{a}{2}, \frac{-(a^2-4(2)(1))}{4}\right) \Rightarrow S\left(-\frac{a}{2}, \frac{8-a^2}{4}\right)$$

که روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی روی خط $y=x$ قرار دارد، بنابراین:

$$y_S=x_S \Rightarrow \frac{8-a^2}{4}=-\frac{a}{2} \Rightarrow 2a^2-4a-16=0 \Rightarrow a^2-2a-8=0 \Rightarrow$$

$$(a+2)(a-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=4 \end{cases}$$

اما چون نقطه‌ی مینیمم S روی نیمساز ربع سوم قرار دارد، لذا $x_S<0$ ، یعنی:

$-\frac{a}{2}<0 \Rightarrow a>0$

بنابراین فقط $a=4$ قابل قبول است.

۴) هر تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ را می‌توان به صورت $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ نیز نوشت که در آن $S(\alpha,\beta)$ راس سهمی است.

تست: نقاط $A(1,3)$ و $B(-3,3)$ روی منحنی تابع $y=a(x-b)^2+c$ قرار دارند، هرگاه:

(مشابه سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

۱) $b=-1$ ۲) $b=1$

۳) $b=0$ ۴) $b=-2$

پاسخ: گزینه‌ی ۱) نقاط A و B روی منحنی تابع y قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند:

$$A(1,3)\xrightarrow{y=a(x-b)^2+c} 3=a(1-b)^2+c \Rightarrow 3-c=a(1-b)^2 \quad (I)$$

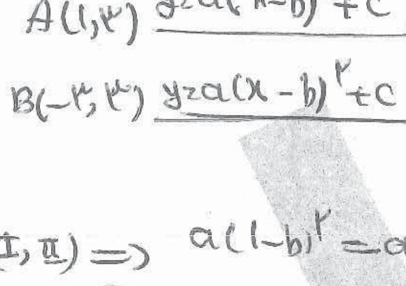
$$B(-3,3)\xrightarrow{y=a(x-b)^2+c} 3=a(-3-b)^2+c \Rightarrow 3-c=a(-3-b)^2 \quad (II)$$

$$(I,II)\Rightarrow a(1-b)^2=a(-3-b)^2 \xrightarrow{a\neq 0} (1-b)^2=(-3-b)^2 \Rightarrow |1-b|=|-3-b|$$

$$\xrightarrow{|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y} \begin{cases} 1-b=-3-b \Rightarrow 1=-3 \times \\ 1-b=3+b \Rightarrow 2b=-2 \rightarrow b=-1 \end{cases}$$

۵) اگر تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ محور xها را در نقاطی به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، آنگاه معادله را به صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ نیز می‌توان نوشت.

تست: نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ مانند شکل مقابل است. حاصل $a+3b-c$ کدام است؟



۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$

۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲) با توجه به شکل $x=0$ و $x=2$ دو ریشه‌ی تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ است، بنابراین

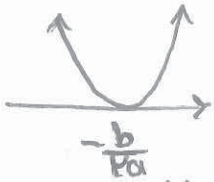
معادله‌ی آن را می‌توان به صورت $f(x)=a(x)(x-2)$ در نظر گرفت. داریم:

$$f(x)=a(x)(x-2) \xrightarrow{f(-1)=-1} -1=a(-1)(-1-2) \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$f(x)=-\frac{1}{3}(x)(x-2)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+0 \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a+3b-c=\frac{5}{3}$$

۶) اگر تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ محور xها را فقط در یک نقطه مانند x_1 قطع کند (مماس)، آنگاه معادله‌اش را به صورت $y=a(x-x_1)^2$ می‌توان نوشت.

۷) در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر $\begin{cases} \Delta=0 \\ a>0 \end{cases}$ سهمی بالای محور xها و بر آن مماس است.



تست: به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور xها و مماس بر آن است؟

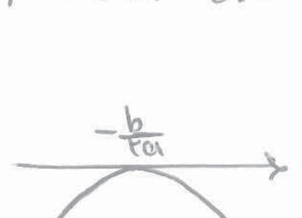
۱) -3 ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3 (سراسری ریاضی ۸۲)

پاسخ: گزینه‌ی ۳ تابع بالای محور xها است، پس رو به بالا است و در نتیجه $a>0$ است. از طرفی بر محور xها مماس است، پس معادله‌ی $y=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است و در نتیجه $\Delta=0$.

$$\begin{cases} \Delta=0 \Rightarrow 9-4(m-2)(m+2)=0 \Rightarrow 9-4(m^2-4)=0 \\ a>0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2 \end{cases}$$

$$9-4(m^2-4)=0 \Rightarrow m^2=\frac{25}{4} \xrightarrow{m>2} m=\frac{5}{2}$$

۸) در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر $\begin{cases} \Delta=0 \\ a<0 \end{cases}$ سهمی پایین محور xها و بر آن مماس است.



تست: به ازای کدام مقدار m نمودار سهمی $f(x) = (2m-1)x^2 - 2mx + 2m-1$ پایین محور xها بر آن مماس باشد؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{9}$

پاسخ: گزینه ی ۳

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4(2m-1)^2 = 0 \Rightarrow m^2 - (2m-1)^2 = 0 \\ 2m-1 < 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (m+2m-1)(m-2m+1) = 0 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \text{ یا } m = 1 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

با توجه به اینکه $m < \frac{1}{2}$ غیر قابل قبول است، پس $m = \frac{1}{3}$ جواب است.

۹) نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره بالای محور xها است (به عبارت دیگر چندجمله‌ای ax^2+bx+c همواره مثبت است) اگر و تنها اگر $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

تست: به ازای کدام مقادیر m نمودار تابع $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره بالای محور xها است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۵)

۱) $m > -2$ ۲) $-2 < m < -1$ ۳) $-2 < m < 2$ ۴) $-1 < m < 2$

پاسخ: گزینه ی ۴) نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ همواره بالای محور xها است اگر $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad (*) \\ \Delta < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 < 0 \Rightarrow (m+1)(m-2) < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*) \cap (**) \Rightarrow -1 < m < 2$$

۱۰) نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره پایین محور xها است (به عبارت دیگر چندجمله‌ای ax^2+bx+c همواره منفی است) اگر و تنها اگر $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

مثال: به ازای کدام مقادیر m، نمودار $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره در زیر محور xها است؟

(سراسری ریاضی داخل ۸۵)

۱) $m<-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}<m<1$ ۳) $1<m<\frac{3}{2}$ ۴) $m>\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ی (۱) می دانیم نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها است اگر $a<0$ و $\Delta<0$ باشد. داریم:

$$\begin{cases} a<0 \Rightarrow m-1<0 \Rightarrow m<1 \quad (*) \\ \Delta<0 \Rightarrow 3-4m(m-1)<0 \Rightarrow -4m^2+4m+3<0 \Rightarrow 4m^2-4m-3>0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$(2m+1)(2m-3)>0 \Rightarrow m<-\frac{1}{2} \text{ یا } m>\frac{3}{2} \quad (**)$$

$$(*)\cap(**) \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$$

۱۱) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیه ی محورهای مختصات عبور کند هرگاه $\frac{c}{a}<0$ باشد، یعنی دارای دو ریشه مختلف العلامت باشد.

مثال: با کدام مقادیر m، منحنی به معادله ی $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیه ی محورهای مختصات می گذرد؟

(سراسری ریاضی داخل ۸۷)

۱) $m<-2$ ۲) $m<-1$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $-3<m<-2$

پاسخ: گزینه ی (۱) تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیه عبور می کند، هرگاه دارای دو ریشه مختلف العلامت باشد، به عبارت دیگر $\frac{c}{a}<0$ شود:

$$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{1}{m+2}<0 \Rightarrow m<-2$$

۱۲) صفرهای تابع درجه دوم: نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها، نقاط با طول مشترک آنها را صفرهای تابع می نامیم، چرا که در این نقاط مقدار تابع صفر می شود.

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

تست: اگر $x=m$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^2-(3m+1)x+2$ باشد، صفر دیگر آن کدام است؟ $(m\in \mathbb{N})$

۱) $2m+1$ ۲) $2m$ ۳) $2m-1$ ۴) $-m$

پاسخ: گزینه‌ی ۱)

$$f(x)=x^2-(3m-1)x+2 \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3m+1 \quad (*)$$

یکی از صفرهای تابع $x_1=m$ است، در نتیجه:

$$(*) \Rightarrow m+x_2=3m+1 \Rightarrow x_2=2m+1$$

درسنامه‌ی (۷) روش یافتن ماکزیمم یا مینیمم توابع درجه دوم

در سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ نقطه‌ی $S(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ نقطه‌ی اکسترمم یا همان راس سهمی است. توجه داریم:

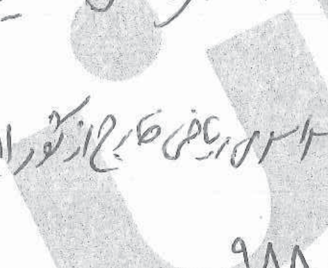
۱) اگر $a>0$، $y=\frac{-\Delta}{4a}$ مقدار مینیمم تابع است.

۲) اگر $a<0$، $y=\frac{-\Delta}{4a}$ مقدار ماکزیمم تابع است.

تست: بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲) با توجه به شکل و فرض مسئله $2x+y=88$ است، پس $y=88-2x$. تابع مساحت مستطیل برابر است با:



$$S=xy \Rightarrow S(x)=x(88-2x)=88x-2x^2$$

$$S_{max}=\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{(88^2-4(-2)(0))}{4(-2)}=968$$

درسنامه‌ی (۸) معادلات شامل عبارات گویا

معادله‌هایی که در آن‌ها عبارات گویا وجود داشته باشند، معادله‌هایی شامل عبارت‌های گویا می‌نامند.

برای حل این گونه معادلات باید مراحل زیر را انجام دهیم.

۱) دامنه‌ی معادله را به دست می‌آوریم.

۲) همه‌ی عبارات جبری را به یک طرف معادله انتقال می‌دهیم.

۳) ک.م.م مخرج‌ها را به دست می‌آوریم و معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب و ساده‌تر می‌کنیم
و جواب‌ها را به دست می‌آوریم (البته ریشه‌ی مخرج نباشد)

۴) جواب‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی جواب معادله قرار داشته باشند.

تست: در معادله‌ی $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3 \Rightarrow$ ک.م.م مخرج‌ها $=(x-2)x$

$$\left(\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3\right)\times x(x-2) \Rightarrow x^2+x-2=3(x-2)x \Rightarrow 2x^2-7x+2=0$$

معادله‌ی $2x^2-7x+2=0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز است چون $x=2$ یا $x=0$ ریشه‌های معادله نیستند (صفرکننده‌های مخرج کسرها) بنابراین هر دو ریشه قابل قبول می‌باشند.
با توجه به اینکه $\frac{c}{a}=\frac{2}{2}=1$ لذا حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با ۱ است.

درسنامه‌ی (۹) معادلات رادیکالی

برای حل یک معادله شامل رادیکال مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱) رادیکال را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و بقیه جملات را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان عدد فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

۳) معادله را ساده می‌کنیم. حال اگر رادیکال باقی مانده باشد باز دوباره آن را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و طرفین معادله را به توان عدد فرجه می‌رسانیم و نتیجه را ساده و حل می‌کنیم.

۴) تمام جواب های بدست آمده را در معادله اصلی امتحان می کنیم. و جواب های محال را کنار می گذاریم.

تست: مجموع جواب های معادله رادیکالی $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1 \Rightarrow \sqrt{3x+4}=1+\sqrt{2x+1} \xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$3x+4=1+2\sqrt{2x+1}+2x+1 \Rightarrow x+2=2\sqrt{2x+1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$x^2+4x+4=8x+4 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=4$$

هر دو جواب بدست آمده در معادله اصلی صدق می کنند. بنابراین قابل قبول می باشند. پس مجموع دو جواب بدست آمده برابر ۴ است.

تست: معادله $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+a}=0$ به ازای چند مقدار a، دارای جواب است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی شمار

پاسخ: گزینه ۲) می دانیم مجموع دو عدد نامنفی همواره نامنفی است. مجموع چند عبارت نامنفی زمانی می تواند صفر باشد که تمام عبارات هم زمان صفر شوند. $\sqrt{x^2-3x+2}$ همواره نامنفی است و به ازای $x=1$ و $x=2$ صفر می شود. اگر عبارت همواره نامنفی $\sqrt{x^2+a}$ نیز به ازای $x=1$ یا $x=2$ صفر شود، در این صورت معادله $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+a}=0$ جواب خواهد داشت:

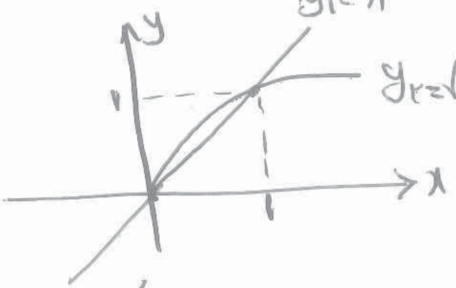
الف) اگر $x=1$ جواب معادله $\sqrt{x^2+a}$ باشد، آنگاه $1^2+a=0$ در نتیجه $a=-1$ است.

ب) اگر $x=2$ جواب معادله $\sqrt{x^2+a}$ باشد، آنگاه $2^2+a=0$، در نتیجه $a=-4$ است.

به ازای $a=-1$ یا $a=-4$، معادله داده شده دارای جواب است.

درسنامه‌ی (۱۰) حل معادلات به روش هندسی

گاهی اوقات بعضی از معادلات به روش جبری قابل حل نیستند و یا حل جبری بسیار وقت گیر می‌باشد. اکنون می‌خواهیم روش هندسی حل معادلات را مورد بررسی قرار دهیم. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم تعداد جواب‌های معادله‌ی $x=\sqrt{x}$ را به روش هندسی به دست آوریم. بدین منظور در یک دستگاه مختصات نمودار دو تابع $y_1=x$ و $y_2=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم.



همان طور که می‌بینید، نمودار این دو تابع در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. پس معادله‌ی $x=\sqrt{x}$ دو جواب دارد.

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط محل تلاقی نمودارهای توابع f و g جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس یعنی هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.

تست: معادله‌ی $\frac{2x-1}{x}=5-x^2$ چند جواب دارد؟

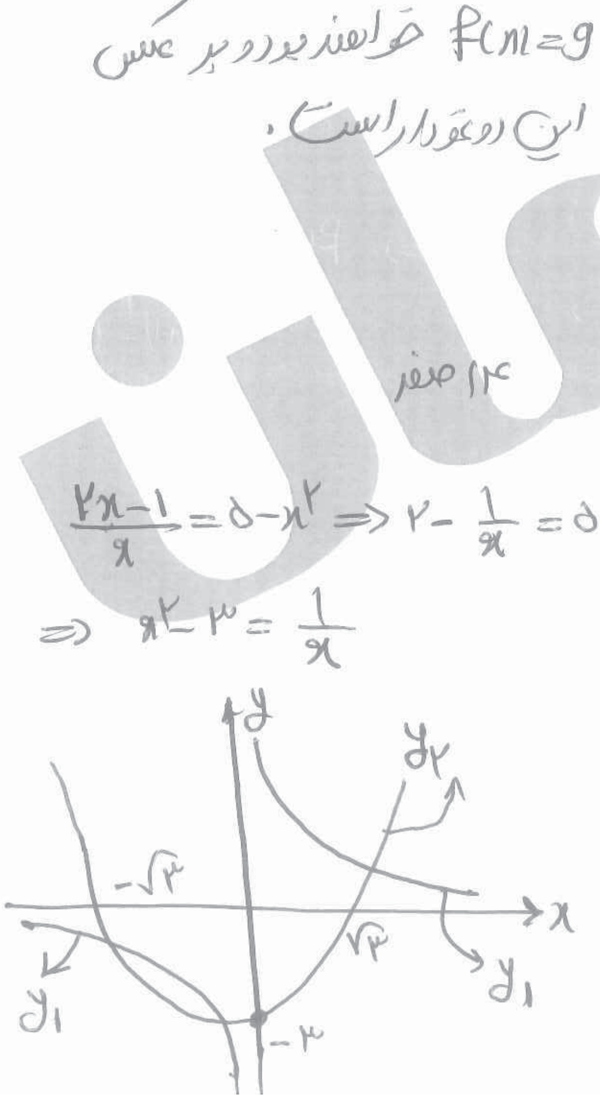
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۳) معادله را بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{2x-1}{x}=5-x^2 \Rightarrow 2-\frac{1}{x}=5-x^2$$

$$\Rightarrow x^2-3=\frac{1}{x}$$

نمودار توابع $y_1=\frac{1}{x}$ و $y_2=x^2-3$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. چون نمودار $y_1=\frac{1}{x}$ و $y_2=x^2-3$ یکدیگر را در سه نقطه قطع کرده‌اند، پس معادله‌ی داده شده سه جواب دارد.

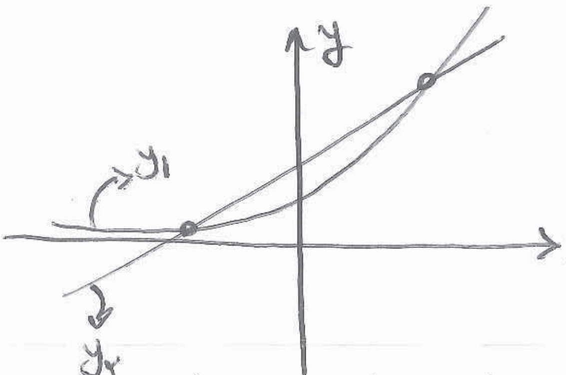


مولف:رحیم قهرمان

تست: معادله‌ی $2^x = 2x+2$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۳) نمودار دو تابع $y_1 = 2^x$ و $y_2 = 2x+2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



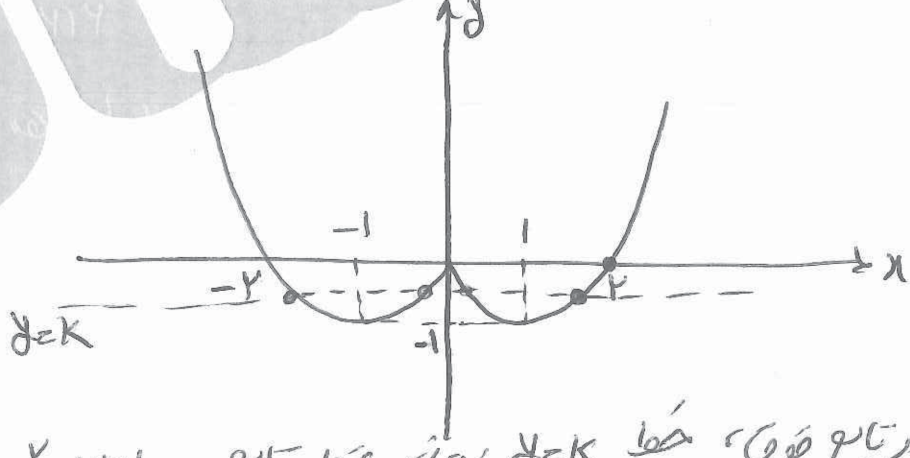
$\Rightarrow$ معادله دو جواب دارد.

تست: اگر معادله‌ی $x^2 - 2|x| = k$ دارای چهار ریشه‌ی حقیقی باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>0$ ۲) $k>1$ ۳) $-1<k<0$ ۴) $-1 \le k \le 0$

پاسخ: گزینه‌ی ۳) تابع $f(x) = x^2 - 2|x|$ را در نظر بگیرید و با توجه به ریشه‌ی داخل قدر مطلق و با استفاده از تعیین علامت، آن را به یک تابع دو ضابطه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x ; & x \ge 0 \\ x^2 + 2x ; & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - 1 ; & x \ge 0 \\ x^2 + 2x + 1 - 1 ; & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 ; & x \ge 0 \\ (x+1)^2 - 1 ; & x < 0 \end{cases}$$



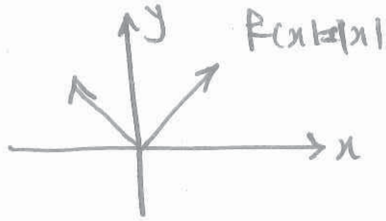
با توجه به نمودار تابع فوق، خط $y=k$ زمانی نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2|x|$ را در چهار نقطه قطع می‌کند که:

$-1 < k < 0$

درسنامه (۱۱)

تابع قدر مطلق: تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود و با $f(x)=|x|$ نشان داده می‌شود. یعنی $f:A\to B$ با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ یک تابع قدر مطلق روی A نامیده می‌شود.

نمودار تابع قدر مطلق: اگر دامنه‌ی تابع قدر مطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ به کمک دو خط $y=x$ و $y=-x$ قابل رسم است. چون به ازای هر x حقیقی، $|x|\geq 0$، لذا وقتی دامنه‌ی $f(x)=|x|$، $\mathbb{R}$ باشد آن‌گاه برد، مجموعه اعداد حقیقی نامنفی یعنی $[0,+\infty)$ است.



$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & ; x\geq 0 \\ -x & ; x<0 \end{cases}$$

خواص قدر مطلق:

1) $\sqrt[2k]{x^{2k}}=|x|$ 2) $|x|=|-x|$ 3) $|xy|=|x||y|$

4) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\ (y\neq 0)$ 5) $|x|=a \xrightarrow{a\geq 0} x=\pm a$

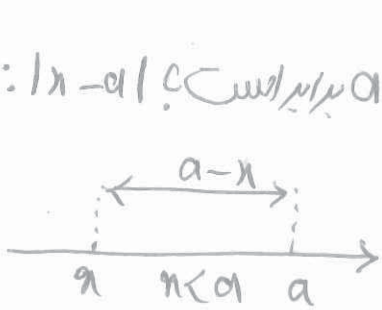
6) $|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y$ 7) $|x|<a \xrightarrow{a>0} -a<x<a$

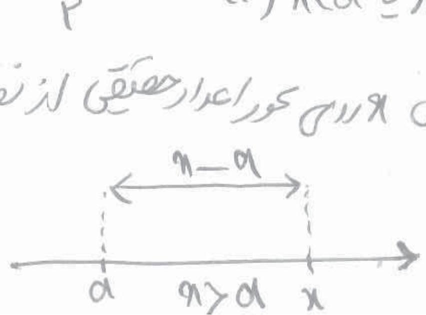
8) $|x|>a \xrightarrow{a\geq 0} x>a$ یا $x<-a$ 9) $|x+y|\leq |x|+|y|$ (نامساوی مثلث)

10) $|x+y|=|x|+|y| \Leftrightarrow xy\geq 0$ 11) $|x|<|y| \Leftrightarrow x^2<y^2 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)<0$

12) $a<x<b \overset{a<b}{\Longleftrightarrow} \left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$ 13) $x<a$ یا $x>b \overset{a>b}{\Longleftrightarrow} \left|x-\frac{a+b}{2}\right|>\frac{b-a}{2}$

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ای به طول x روی محور اعداد حقیقی از نقطه‌ای به طول a برابر است با: $|x-a|$.





مولف:رحیم قهرمان

تست: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{x-3}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\right| > -\frac{1}{3}$ کدام است؟

۱) $[0,\frac{2}{3})$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $[0,1)$

پاسخ: گزینه‌ی ۴) نامعادله‌ی $|f(x)|>a$ وقتی a منفی باشد، همواره و برای هر مقدار در دامنه‌ی f برقرار است. پس باید دامنه تابع $\frac{x-3}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$ را تعیین کنیم.

$$\begin{cases}x\ge 0\\ 1-\sqrt{x}>0 \Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow x\in[0,1)\end{cases}$$

تست: مجموعه جواب‌های دستگاه $\begin{cases}|x|<2\\ |2x-3|<x\end{cases}$ با مجموعه جواب‌های کدام نامعادله زیر برابر است؟

۱) $|3x-2|<1$ ۲) $|x-1|<1$ ۳) $|2x-3|<1$ ۴) $|x-2|<1$

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$$|x|<2 \xrightarrow{\text{خاصیت (7)}} -2<x<2 \quad (1)$$

$$|2x-3|<x \xrightarrow[\text{خاصیت (7)}]{x\ge 0} -x<2x-3<x \Rightarrow \begin{cases}2x-3<x \Rightarrow x<3\\ 2x-3>-x \Rightarrow x>1\end{cases} \Rightarrow 1<x<3 \quad (2)$$

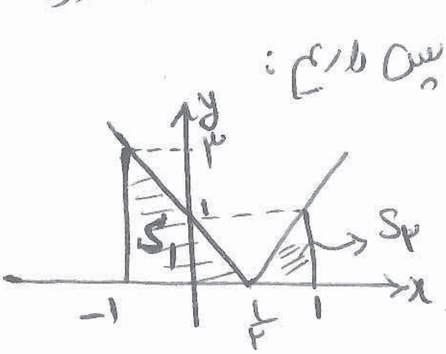
$$(1)\cap(2) \Rightarrow 1<x<2 \xrightarrow{\text{خاصیت (12)}} \left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{2-1}{2} \Rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{|2x-3|}{2}<\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2>0} |2x-3|<1$$

تست: مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x)=|2x-1|$ و محور xها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) 2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3 (سراسری تجربی ۹۰)

پاسخ: گزینه‌ی ۳) برای تعیین مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f(x)=|2x-1|$، محور xها و دو خط $x=-1$ و $x=1$ یکی از روش‌ها رسم نمودار تابع است. پس داریم:



$$S=S_1+S_2=\frac{\frac{3}{2}\times 3}{2}+\frac{\frac{1}{2}\times 1}{2}=\frac{5}{2}$$

تست: مجموعه جواب نامعادله $-3|x+3| + 2(x+3)^2 + 1 \le 0$ کدام است؟

۱) $[-4,-\frac{5}{2}] \cup [-2,-\frac{3}{2}]$ ۲) $[-4,-\frac{3}{2}]$

۳) $[-4,-\frac{7}{2}] \cup [-\frac{5}{2},-2]$ ۴) $[-\frac{7}{2},-2]$

پاسخ: گزینه ۳

$$-3|x+3| + 2(x+3)^2 + 1 \le 0 \xrightarrow{|x|^2 = x^2} 2|x+3|^2 - 3|x+3| + 1 \le 0$$

$$\xrightarrow{|x+3| = A} 2A^2 - 3A + 1 \le 0 \Rightarrow (A-1)(2A-1) \le 0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} \frac{1}{2} \le A \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \le |x+3| \le 1 \xrightarrow{a \le x \le b \Rightarrow \begin{cases} x \ge a \\ x \le b \end{cases}} \begin{cases} |x+3| \le 1 \\ |x+3| \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{|x| \ge a \xrightarrow{a \ge 0} \begin{cases} x \ge a \\ \text{یا} \\ x \le -a \end{cases}}]{|x| \le a \xrightarrow{a \ge 0} -a \le x \le a} \begin{cases} -1 \le x+3 \le 1 \\ x+3 \ge \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad x+3 \le -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \le x \le -2 \\ x \ge -\frac{5}{2} \quad \text{یا} \quad x \le -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} (-\frac{5}{2} \le x \le -2) \cup (-4 \le x \le -\frac{7}{2})$$

تست: اگر نمودار تابع $f(x) = ||x-2| - a| - 3$ دقیقاً سه بار محور xها را قطع کند، آنگاه مقدار a کدام است؟

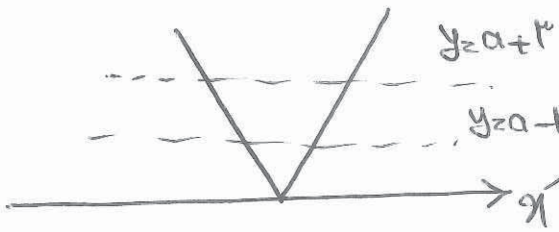
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲) از فرض سوال نتیجه می‌گیریم معادله $f(x)=0$ سه ریشه دارد، بنابراین معادله $||x-2|-a| = 3$ سه ریشه دارد، دو معادله زیر را داریم:

1) $|x-2| - a = 3 \Rightarrow |x-2| = a+3$

2) $|x-2| - a = -3 \Rightarrow |x-2| = a-3$

پس باید تعداد نقاط تقاطع نمودار $y=|x-2|$ را با خط‌های افقی $y=a+3$ و $y=a-3$ را بیابیم. مطابق شکل این خطوط و نمودار حداکثر ۴ نقطه برخورد دارند، و فقط در حالتی سه نقطه‌ی برخورد دارند که خط $y=a-3$ از راس زاویه متناظر نمودار بگذرد یعنی $a-3=0$، بنابراین $a=3$ (خطوط و نمودار می‌توانند ۲ و یا ۰ نقطه‌ی برخورد نیز داشته باشند که این حالات مورد نظر نمی‌باشند.)



تست: اگر مجموعه جواب معادله $|x^2-x|+x^2=|x|$ و نامعادله $|x-\alpha|<\beta$ معادل یکدیگر باشند، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر   ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی (۱) می‌دانیم $|a-b|\le|a|+|b|$ حالت تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $ab\le 0$

$$|x^2-x|+x^2=|x| \Rightarrow |x^2-x|+|x^2|=|x| \Rightarrow$$

$$\underbrace{|x^2-x|}_{b}+\underbrace{|x^2|}_{a}=\left|\underbrace{(x^2)}_{a}-\underbrace{(x^2-x)}_{b}\right| \Rightarrow x^2(x^2-x)\le 0 \xRightarrow{\text{حل نامعادله}}$$

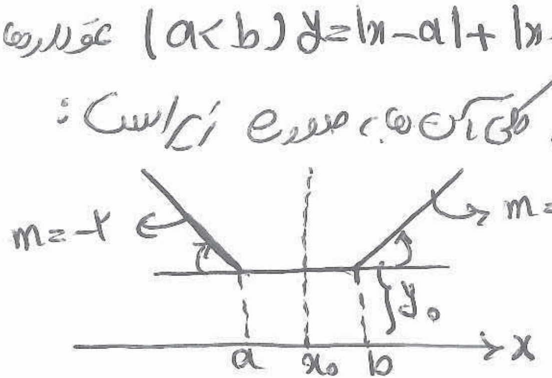
$$0\le x\le 1 \xrightarrow{a\le x\le b \Leftrightarrow |x-\frac{a+b}{2}|\le\frac{b-a}{2}} \left|x-\frac{1+0}{2}\right|\le\frac{1-0}{2}$$

$$\Rightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{1}{2}} \alpha+\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

درسنامه‌ی (۱۲) نمودارهای گلدانی

$$(a<b)\ y=|x-a|+|x-b|$$

بررسی نمودار توابع به فرم $(a<b)\ y=|x-a|+|x-b|$ نمودارهای این توابع، نمودارهای گلدانی معروف هستند و شکل کلی آن‌ها به صورت زیر است:



با توجه به نمودار داریم:

۱) رئوس یا تک تک قدر مطلق‌ها یعنی $x=a$ و $x=b$ محل‌های شکستگی نمودار تابع است.

۲) خط $x_0=\frac{a+b}{2}$ محور تقارن منحنی است.

۳) $y_0=|a-b|$ کمترین مقدار y است، لذا برد تابع به صورت $R_y=[|a-b|,+\infty)$ می‌باشد.

۴) نمودار در بازه‌ی $[a,b]$ تبدیل به پاره خطی موازی با محور xها می‌شود، یعنی مقدار y در این بازه عددی ثابت است که با جایگذاری هر عدد مانند x_0 از بازه‌ی $[a,b]$ این مقدار ثابت $(|a-b|)$ به دست می‌آید.

تست: خط $x=-2$ محور تقارن نمودار تابع $y=|2x+1|+|2x+3k|$ است. در این صورت مقدار k کدام است؟

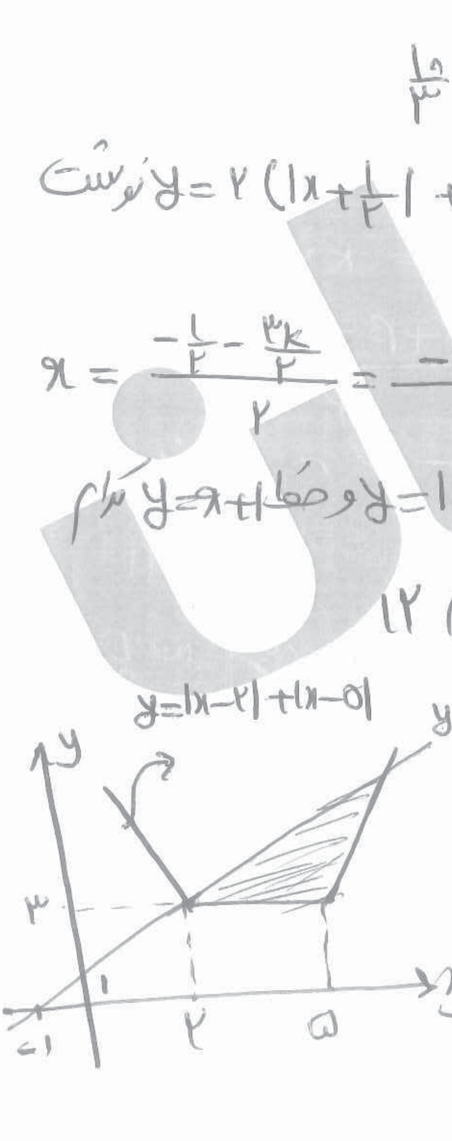
۱) $\frac{13}{3}$ ۲) 4 ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{15}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی (۳) معادله‌ی تابع را می‌توان به صورت $y=2(|x+\frac{1}{2}|+|x+\frac{3k}{2}|)$ نوشت که محور تقارن خط زیر است:

$$x=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3k}{2}}{2}=\frac{-1-3k}{4}\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\frac{-1-3k}{4}=-2\Rightarrow k=\frac{11}{3}$$

تست: مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $y=|x-2|+|x-5|$ و خط $y=x+1$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۱۲



پاسخ: گزینه‌ی (۲) خط $y=x+1$ و نمودار تابع $y=|x-2|+|x-5|$ را رسم می‌کنیم. دو منحنی در نقطه‌ی $(2,3)$ تلاقی دارند. مختصات نقطه‌ی تلاقی دوم از حل دستگاه زیر است و به دست می‌آید (دقت کنید که معادله‌ی نیم خط دوم $y=2x-7$ است، زیرا به ازای $x\geq5$ ضابطه‌ی تابع $y=2x-7$ می‌شود)

مولف:رحیم قهرمان

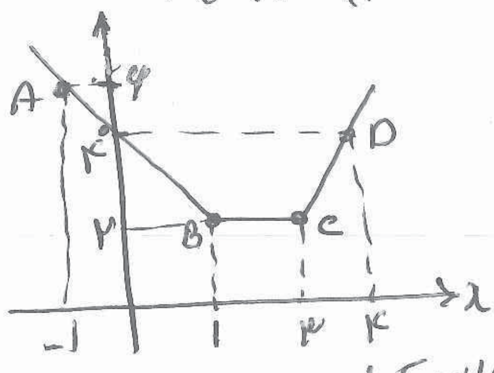
$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=2x-7 \end{cases} \Rightarrow x+1=2x-7 \Rightarrow x=8 \Rightarrow y=9$$

پس ارتفاع شکل هاشور خورده برابر $9-3=6$ است در نتیجه مساحت آن $\frac{6\times 3}{2}=9$ واحد مربع.

تست: طول خط شکسته‌ی نمودار تابع $y=|x-1|+|x-3|$ در بازه‌ی $[-1,4]$ کدام است؟

۱) $3+2\sqrt{5}$ ۲) $2+3\sqrt{5}$ ۳) $3+2\sqrt{2}$ ۴) $2+3\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲) نمودار تابع به صورت شکل مقابل است.



$$|AB|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$$

$$|BC|=2 \quad , \quad |CD|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |AB|+|BC|+|CD|=2+3\sqrt{5}$$

نکته: جواب‌های معادله‌ی $|x-\alpha|+|x-\beta|=k$ به صورت زیر است؛

الف) $k<|\alpha-\beta| \Leftarrow$ معادله جواب ندارد.

ب) $k=|\alpha-\beta| \Leftarrow$ معادله بی‌شمار جواب دارد و مجموعه جواب معادله در این حالت $[a,b]$ است.

ج) $k>|\alpha-\beta| \Leftarrow$ معادله دو جواب دارد. اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله در این حالت باشند، آنگاه $x_{1,2}=\frac{\alpha+\beta\pm k}{2}$ و $x_1+x_2=\alpha+\beta$ و $|x_1-x_2|=k$ است.

تست: مجموعه جواب معادله‌ی $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=1$ کدام است؟

۱) $[2,3]$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\mathbb{R}-[2,3]$ ۴) ϕ

پاسخ: گزینه‌ی ۱) با توجه به $x^2-4x+4=(x-2)^2$ و $x^2-6x+9=(x-3)^2$ معادله‌ی را به صورت $|x-2|+|x-3|=1$ می‌توانیم بنویسیم. با توجه به نمودار مقابل شکل تابع $y=|x-2|+|x-3|$ به ازای x هایی که $2\le x\le 3$ جواب‌های معادله اند.