

در تدوین این جزوه از تجربات مؤلفین کتاب‌های زیر

نیز استفاده شده و در تائیرخی از سوالات که از نظر نگارنده

غیر قابل چشم‌پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

۱- حرف آخر (عبدالرضا منتظری)

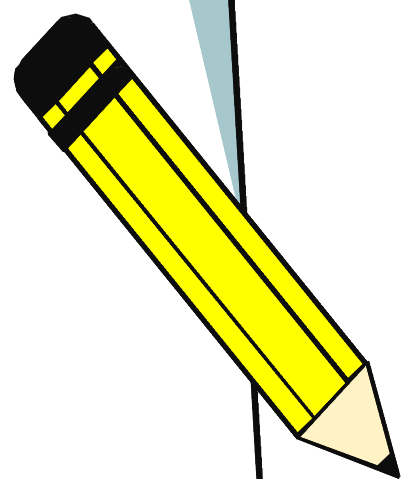
۲- دیفرانسیل تخته سیاه (مهندس محمد مهربان)

۳- سه سطحی قلم چی

۴- نردبام حسابان خیلی سبز (حسین شفیع زاده)

۵- سیر تا پیاز گاج

۶- آی کیو گاج



**جزء صحیح**

به بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی  $x$ ، جزء صحیح  $x$  می گویند و به صورت  $[x]$  می نویسیم. مثال:

$$\dots, 0, 1, 2, \dots : 2/7 \Rightarrow [2/7] = 2$$

$$1, 2, 3, 4, \dots : 4 \Rightarrow [4] = 4$$

$$\dots, -6, -5, -4, \dots : -3/2 \Rightarrow [-3/2] = -4$$

جزء اعشاری اون عدد + جزء صمیع اون عدد = هر عدد

$$x = [x] + 0 \leq P_x < 1$$

$$2/3 = 2 + 0/3$$

$$6 = 6 + 0$$

$$-4/3 = -5 + 0/3$$

$$k \leq x < k + 1 \Leftrightarrow [x] = k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

سؤال ۱: از نامساوی های زیر جزء صحیح بگیرید.

- ۱)  $-3 \leq x < -2 \Rightarrow [x] = -3$
- ۲)  $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow [x] = \{-1, 0, 1, 2\}$
- ۳)  $1/2 \leq x < 3/7 \Rightarrow [x] = 1, 2, 3$

سؤال ۲: اگر  $[y] = 4, [x] = 2$  آنگاه  $[x+y]$  برابر کدام است.

- ۱) ۷      ۲) ۶      ۳) ۶ یا ۷      ۴) ۸

$$\begin{cases} [x] = 2 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \\ [y] = 4 \Rightarrow 4 \leq y < 5 \end{cases} \Rightarrow 6 \leq x + y < 8 \Rightarrow [x+y] = 6 \text{ یا } 7$$

سؤال ۳: نزدیکترین عدد صحیح به  $(1+\sqrt{2})^4$  کدام است.

$$(1+\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2}-1)^4 = (3+2\sqrt{2})^2 + (3-2\sqrt{2})^2 = 9+8+12\sqrt{2} + 9+8-12\sqrt{2} = 34$$

$$\Rightarrow (1+\sqrt{2})^4 = 34 - (\sqrt{2}-1)^4$$

۱) ۲۹  
۲) ۳۰  
۳) ۳۳  
۴) ۳۴

چون  $\sqrt{2}-1 \approx 0.414$  پس  $(\sqrt{2}-1)^4 \approx 0.286$  لذا این عدد خیلی نزدیک ۳۴ است اما اگر سوال می گفت مقدار جز صحیح  $(1+\sqrt{2})^4$  کدام است:  $[(1+\sqrt{2})^4] = 33$  زیرا:  $33 < (1+\sqrt{2})^4 < 34$

سؤال ۴: اگر  $x^2 + x < 0$  باشد حاصل  $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$  کدام است؟ (کنکور)

- (۱) -۲      (۲) -۱      (۳) صفر      (۴) ۱

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow \frac{-1}{+} \quad \frac{0}{-} \quad \frac{+}{+} \Rightarrow -1 < x < 0$$

پس  $-1 < x < 0$  زوج  $x < 0$ ،  $x < 0$  فرد  $-1 < x$  در نتیجه:

$$[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = -1 + 0 - 1 + 0 = -2$$

سؤال ۵: اگر جز صحیح  $x^2 + x$  برابر (-۱) باشد، آنگاه  $[x^{20}]$  کدام است. (کنکور تجربی)

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0 \Rightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 + x) \leq 0 \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

همواره مثبت

$$\Rightarrow 0 < x^{20} < 1 \Rightarrow [x^{20}] = 0$$

سؤال ۶: اگر  $(1+\sqrt{2})^6 + (1-\sqrt{2})^6 = 198$  جز صحیح عدد  $(1+\sqrt{2})^6$  کدام است؟

- (۱) ۱۹۵      (۲) ۱۹۶      (۳) ۱۹۷      (۴) ۱۹۸

$$(1+\sqrt{2})^6 = 198 - (1-\sqrt{2})^6 \Rightarrow [(1+\sqrt{2})^6] = [198 - \underbrace{(1-\sqrt{2})^6}_{(-0/4)}] = [198 - \underbrace{(-0/4)}_{\text{عددی بین صفر و یک}}] = [197 / \text{کمی اعشار}] = 197$$

سؤال ۹: حاصل  $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{17}]$  کدام است.

- (۱) ۳۴      (۲) ۳۸      (۳) ۴۲      (۴) ۴۶

$$([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]) + ([\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + \dots + [\sqrt{8}]) + ([\sqrt{9}] + [\sqrt{10}] + \dots + [\sqrt{15}]) + [\sqrt{16}] + [\sqrt{17}] = 3 \times 1 + 5 \times 2 + 7 \times 3 + 2 \times 4 = 3 + 10 + 21 + 8 = 42$$

سؤال ۱۰: در تابع  $f(x) = 2x - [x^2]$  حاصل  $f(-4 + f(3 - \sqrt{2}))$  کدام است.

- (۱)  $4(\sqrt{2}-1)$       (۲)  $4(\sqrt{2}-2)$       (۳)  $-4(\sqrt{2}+2)$       (۴)  $-4(\sqrt{2}+1)$

$$f(x) = 2x - [x^2] \Rightarrow f(3 - \sqrt{2}) = 2(3 - \sqrt{2}) - [(3 - \sqrt{2})^2] = 6 - 2\sqrt{2} - 2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{3 - \sqrt{2} \approx (1/6)^2 = 2/56 \Rightarrow [3 - \sqrt{2}]^2 = 2}$$

$$f(-4 + f(3 - \sqrt{2})) = f(-4 + 4 - 2\sqrt{2}) = f(-2\sqrt{2}) \Rightarrow f(-2\sqrt{2}) = 2(-2\sqrt{2}) - [(-2\sqrt{2})^2]$$

$$= -4\sqrt{2} - [8] = -4(\sqrt{2} + 2)$$

سؤال ۱۱: مجموعه جواب معادله  $[x^2 + 4x] = -4$  بازه  $(a, b)$  است مقدار  $b - a$  کدام است.

$$[x^2 + 4x] = -4 \Rightarrow -4 \leq x^2 + 4x < -3 \Rightarrow (x^2 + 4x + 4)(x^2 + 4x + 3) \leq 0 \Rightarrow (x+2)^2(x+1)(x+3) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-3}{+} \quad \frac{-2}{-} \quad \frac{-1}{-} \quad \frac{+}{+} \Rightarrow x \in (-3, -1) \Rightarrow b - a = 2$$

سؤال ۱۲: معادله‌ی  $|x| + 3[x] = 16$  چند جواب دارد. (آزمون گاج)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

سمت راست معادله صحیح است در نتیجه  $x$  نیز صحیح است.

$$|x| = 16 - 3[x]$$

$$\Rightarrow |x| = 16 - 3x \xrightarrow{\substack{16-3x \geq 0 \\ x \leq \frac{16}{3}}} x = \pm(16 - 3x) \Rightarrow \begin{cases} x = 16 - 3x \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4 \\ x = -16 + 3x \Rightarrow -2x = -16 \Rightarrow x = 8 \end{cases} \xrightarrow{x \leq \frac{16}{3}} x = 4$$

سؤال ۱۳: اگر  $x + y = 2/7$  و  $[y] = 2$  باشد آنگاه  $[x]$  کدام است.

- (۱) ۰ یا -۱ (۲) ۰ یا ۱ (۳) ۰ (۴) -۱

$$[y] = 2 \Rightarrow 2 \leq y < 3 \xrightarrow{+x} 2+x \leq x+y < 3+x \xrightarrow{x+y=2/7} 2+x \leq 2/7 < 3+x$$

طرفین نامساوی را با  $-x$  جمع می کنیم:

$$2 \leq 2/7 - x < 3 \xrightarrow{-2/7} -\circ/7 \leq -x < \circ/3 \xrightarrow{\times(-1)} -\circ/3 < x \leq \circ/7 \Rightarrow [x] = 0 \text{ یا } -1$$

سؤال ۱۴: معادله‌ی  $[x] + [x^2] = \frac{x}{2}$  چند ریشه دارد.

- (۱) هیچ (۲) یک (۳) دو (۴) سه

$$\underbrace{2[x] + 2[x^2]}_{\text{صحیح}} = x$$

سمت چپ معادله بالا صحیح بوده لذا سمت راست نیز باید صحیح باشد یعنی:  $x \in Z$

$$\Rightarrow 2x + 2x^2 = x \Rightarrow 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(2x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in Z \text{ ق ق} \\ x = -\frac{1}{2} \notin Z \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

سؤال ۱۵: اگر  $x - \sqrt{x-1} = 13$  باشد حاصل  $\left[ \frac{x^2}{12} \right]$  کدام است. (سنجش)

- (۱) ۲۵ (۲) ۲۴ (۳) ۲۲ (۴) ۲۱

$$x - \sqrt{x-1} = 13 \Rightarrow x - 13 = \sqrt{x-1} \xrightarrow{\substack{x-13 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x \geq 13}} (x-13)^2 = x-1 \Rightarrow x^2 - 26x + 169 = x - 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 27x + 170 = 0 \Rightarrow (x-10)(x-17) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ ق ق} \\ x = 17 \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{x^2}{12} \right] = \left[ \frac{17^2}{12} \right] = \left[ \frac{289}{12} \right] = 24$$

سؤال ۱۶: اگر  $\left[ \frac{1-2x}{9} \right] = -5$  آنگاه عبارت  $\left[ \frac{11x+1}{3} \right]$  چند مقدار متمایز می تواند داشته باشد.

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

$$-5 \leq \frac{1-2x}{9} < -4 \Rightarrow -45 \leq 1-2x < -36 \Rightarrow -46 \leq -2x < -37$$

$$\Rightarrow \frac{37}{2} < x \leq 23 \Rightarrow \frac{4 \cdot 7}{2} < 11x \leq 253 \Rightarrow \frac{4 \cdot 9}{2} < 11x + 1 \leq 254 \Rightarrow \frac{4 \cdot 9}{6} < \frac{11x+1}{3} \leq \frac{254}{3} \Rightarrow 68 \leq \left[ \frac{11x+1}{3} \right] \leq 84$$

یعنی عبارت مورد نظر، می تواند هر یک از مقادیر ۶۸، ۶۹، ...، ۸۴ را داشته باشد که تعداد آنها برابر است با:  $(84 - 68) + 1 = 17$

سؤال ۱۷: برد تابع  $f(x) = [\sin x] + 2[\cos x]$  با دامنه  $0 \leq x \leq \pi$  چند عضو دارد.

۵ (۴)

۴ (۴)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 0 < \sin x < 1 \\ 0 < \cos x < 1 \end{smallmatrix}]{\circ} f(x) = \circ + 2(\circ) = \circ$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 0 < \sin x < 1 \\ -1 < \cos x < 0 \end{smallmatrix}]{\circ} f(x) = \circ + 2(-1) = -2$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 2 \times 1 = 2$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2 \times 0 = 1$$

$$x = \pi \Rightarrow f(\pi) = 0 \times 2(-1) = -2$$

بنابراین برد  $f$  مجموعه‌ی  $\{0, 1, 2, -2\}$  است.

سؤال ۱۸: با کدام ضابطه‌ی  $f(x)$  همواره تساوی  $f(x) = |f(x)|^{[x]}$  برقرار است. (داخل ریاضی ۹۱)

$\sin \pi x$  (۴)

$\sin 2\pi x$  (۳)

$\cos \pi x$  (۲)

$\cos 2\pi x$  (۱)

با تعیین بازه های براکت داریم:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow -f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \geq 0$$

پس تابع  $f(x)$  دارای دوره‌ی تناوب ۲ است و در بازه‌ی  $0 \leq x < 1$  مقداری نامنفی و در بازه‌ی  $1 \leq x < 2$  مقداری نامثبت دارد. در بین گزینه‌ها گزینه‌ی (۲) و (۴) دارای دوره‌ی تناوب ۲ هستند، که  $\sin \pi x$  در شرایط مسأله صدق می‌کند.

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq \pi x < \pi \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی اول و دوم}} \sin \pi x \geq 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow \pi \leq \pi x < 2\pi \xrightarrow{\text{ناحیه‌ی سوم و چهارم}} \sin \pi x \leq 0$$

سؤال ۱۹: اگر  $f(x) = |f(x)|^{[\frac{2x}{\pi}]}$  ضابطه‌ی  $f$  کدام می‌تواند باشد.

$\cos \frac{x}{2}$  (۴)

$\cos 2x$  (۳)

$\sin 2x$  (۲)

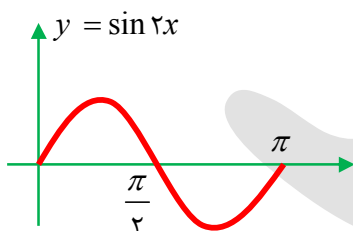
$\sin \frac{x}{2}$  (۱)

با تعیین بازه های براکت داریم:

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\left[\frac{2x}{\pi}\right]=0} f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi \xrightarrow{\left[\frac{2x}{\pi}\right]=1} -f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} \xrightarrow{\left[\frac{2x}{\pi}\right]=2} f(x) = |f(x)| \Rightarrow f(x) \geq 0$$



همانطور که مشخص است  $f(x)$  در یک دوره‌ی تناوب  $\pi$ ، قرار دارد و در نیمه‌ی اول دوره‌ی تناوب مثبت و در نیمه‌ی دوم دوره‌ی تناوب منفی باشد در بین گزینه‌ها  $\sin 2x$  و  $\cos 2x$  دارای دوره‌ی تناوب  $\pi$  می‌باشند و  $\sin 2x$  دارای شرایط مسأله است.

سؤال ۲۰: معادله‌ی  $[2x] = 3x$  چند جواب دارد.

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

$$3x \leq 2x < 3x + 1 \xrightarrow{-2x} 0 \leq x < 1 \Rightarrow -1 < x \leq 0 \xrightarrow{3x \in \mathbb{Z}} -3 < 3x \leq 0 \xrightarrow{3x \in \mathbb{Z}}$$

$$3x \in \{-2, -1, 0\} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right\}$$

سؤال ۲۱: معادله‌ی  $\left[\frac{x}{3}\right] = \frac{x}{2}$  چند جواب دارد.

چون حاصل  $\left[\frac{x}{3}\right]$  عدد صحیح می شود پس:  $\frac{x}{2} = k \leftarrow x = 2k \leftarrow k \in \mathbb{Z}$  از طرفی:

$$\frac{x}{2} \leq \frac{x}{3} < \frac{x}{2} + 1 \xrightarrow{\times 6} 3x \leq 2x < 3x + 6 \Rightarrow (2x - 3x)(2x - 3x - 6) \leq 0 \Rightarrow -x(-x - 6) \leq 0$$

$$\Rightarrow x(x + 6) \leq 0 \Rightarrow -6 < x \leq 0 \xrightarrow{x=2k} x = -4, -2, 0$$

سؤال ۲۲: معادله‌ی  $[x] = 4x$  چند ریشه دارد.

$$[x] = 4x = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k}{4}$$

$$[x] = 4x \Rightarrow 4x \leq x < 4x + 1 \Rightarrow (x - 4x)(x - 4x - 1) \leq 0 \Rightarrow -3x(-3x - 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 3x(3x + 1) \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < \frac{k}{4} \leq 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} < k \leq 0 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \\ k = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

دو ریشه دارد

سؤال ۲۳: معادله‌ی  $x^2 - x[x] = 2$  در بازه‌ی  $[1, 4]$  چند ریشه دارد.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

$$1 \leq x < 2 \xrightarrow{[x]=1} x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2, -1$$

هیچ کدام در بازه  $[1, 2)$  قرار ندارند.

$$2 \leq x < 3 \xrightarrow{[x]=2} x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

که تنها جواب  $x = 1 + \sqrt{3}$  در بازه  $[2, 3)$  قرار دارد.

$$3 \leq x < 4 \xrightarrow{[x]=3} x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

که تنها جواب  $\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$  داخل بازه  $[3, 4)$  قرار دارد.

$$x = 4 \xrightarrow{[x]=4} x^2 - 4x = 2 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

در  $x = 4$  معادله صدق نمی کند.

پس:  $x = 1 + \sqrt{3}$  و  $x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$  جواب های مسأله اند.

سؤال ۲۴: با فرض  $[4x] = [2x^2 + 2] = n \in Z$  حاصل  $[(x+1)^2]$  کدام است.

- (۱)  $n$       (۲)  $n-1$       (۳)  $2n$       (۴)  $2n-1$

$$\left. \begin{aligned} [4x] = n &\Rightarrow n \leq 4x < n+1 \\ [2x^2 + 2] = n &\Rightarrow n \leq 2x^2 + 2 < n+1 \end{aligned} \right\} \oplus 2n \leq 2x^2 + 4x + 2 < 2n+2$$

$$\xrightarrow{+2} n \leq x^2 + 2x + 1 < n+1 \Rightarrow n \leq (x+1)^2 < n+1 \Rightarrow [(x+1)^2] = n$$

$$\boxed{[x] = [y] = n \Rightarrow \left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor = n}$$

$$[4x] = [2x^2 + 2] = n \Rightarrow \left\lfloor \frac{2x^2 + 2 + 4x}{2} \right\rfloor = [x^2 + 1 + 2x] = n \Rightarrow [(x+1)^2] = n$$

**روش تستی:** ابتدا براکت ها را در نظر نگرفته و معادله را حل می کنیم.  $X$  بدست آمده را در صورت سؤال قرار داده تا  $n$  مشخص شود. حال حاصل خواسته شده را به ازای این  $x$  محاسبه کرده و گزینه ها را به ازای  $n$  بدست آمده مشخص می کنیم.



گزینه (۱)  $\Rightarrow 4 \xrightarrow{x=1} [(x+1)^2] = 4 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow [4] = [2+2] = n \xrightarrow{\text{در سوال}} 4x = 2x^2 + 2 \Rightarrow x = 1$

سؤال ۲۵: با فرض  $[x^2 + 8x] = [2x^2 + 2x + 9] = 11n$  حاصل  $[7x - x^2]$  کدام است.

- (۱)  $4n$       (۲)  $3n$       (۳)  $7n$       (۴)  $7x + x^2$

$$x^2 + 8x = 2x^2 + 2x + 9 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

در سوال قرار می دهیم  $\rightarrow [9 + 24] = [18 + 6 + 9] = 33 \Rightarrow 11 \times 3 \Rightarrow n = 3$

گزینه (۱)  $\Rightarrow 4n \xrightarrow{n=3} 12 \xrightarrow{x=3} [7x - x^2]$  حال

سؤال ۲۶: برای هر عدد طبیعی  $n > 2$  حاصل  $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$  کدام است؟ (داخل تجربی ۹۱)

- (۱)  $1$       (۲)  $2$       (۳)  $3$       (۴)  $4$

$$n > 2 \Rightarrow n = 3: [\sqrt{4(3)^2 - 3(3) + 1}] - 2[\sqrt{(3)^2 - 2(3)}] = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2(1) = 3 \Rightarrow \text{گزینه (۳)}$$

$$\Rightarrow (2n)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n-1)^2 \Rightarrow 4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 - 4n + 1 \Rightarrow \text{راه حل دوم}$$

$$2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1 \quad (1)$$

$$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2 \Rightarrow n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1$$

$$\Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 3$$

سؤال ۲۷: اگر  $n \in N$  عددی سه رقمی باشد حاصل  $[\sqrt{\lambda n^2 + 6n^2 + 1}]$  کدام است؟ (سنجش ۹۴)

- (۱)  $2n$       (۲)  $2n+1$       (۳)  $2n+3$       (۴)  $2n+2$

$$\lambda n^2 < \lambda n^2 + 6n^2 + 1 < \lambda n^2 + 6n^2 + 1 + 12n + 1 \Rightarrow (2n)^2 < \lambda n^2 + 6n^2 + 1 < (2n+1)^2 \Rightarrow [\sqrt{\lambda n^2 + 6n^2 + 1}] = 2n$$

سؤال ۲۸: اگر  $n$  عددی طبیعی بوده و داشته باشیم  $[\sqrt{n^2 + 4n + 1}] = 9$  حاصل  $[\sqrt{2n^2 + n + 1}]$  کدام است.

۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

۱۲ (۲)

۱۱ (۱)

$$\underbrace{n^2 + 2n + 1}_{(n+1)^2} < n^2 + 4n + 1 < \underbrace{n^2 + 4n + 4}_{(n+2)^2} \Rightarrow n+1 < \sqrt{n^2 + 4n + 1} < n+2 \Rightarrow [\sqrt{n^2 + 4n + 1}] = n+1$$

$$\Rightarrow n+1=9 \Rightarrow n=8 \Rightarrow [\sqrt{2n^2 + n + 1}] = [\sqrt{2(8)^2 + 8 + 1}] = [\sqrt{137}] = 11 \Rightarrow [11/\dots] = 11$$

$$11^2 < 137 < 12^2 \Rightarrow 11 < \sqrt{137} < 12 \Rightarrow [\sqrt{137}] = 11$$

سؤال ۲۹: اگر  $n$  عددی طبیعی باشد آنگاه حاصل  $[\sqrt{4n^2 + 2n}] + [\sin^2 n]$  کدام است.

$2n+2$  (۴)

$2n+1$  (۳)

$2n$  (۲)

$2n$  یا  $2n+1$  (۱)

$$\underbrace{4n^2}_{(2n)^2} < 4n^2 + 2n < \underbrace{4n^2 + 4n + 1}_{(2n+1)^2} \Rightarrow 2n < \sqrt{4n^2 + 2n} < 2n+1 \Rightarrow [\sqrt{4n^2 + 2n}] = 2n$$

می دانیم همواره  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$  و حالت  $\sin^2 x = 1$  زمانی اتفاق می افتد که  $x$  مضرب فرد  $\frac{\pi}{2}$  باشد که اگر  $x$  عددی طبیعی باشد این حالت اتفاق نمی افتد یعنی اگر  $n$  عدد طبیعی باشد  $0 \leq \sin^2 n < 1$  پس به ازای تمامی مقادیر طبیعی  $n$ ،  $[\sin^2 x] = 0$  بنابراین:

$$[\sqrt{4n^2 + 2n}] + [\sin^2 n] = 2n + 0 = 2n$$

سؤال ۳۰: نامعادلات زیر را حل کنید.

۱)  $[x] > 2 \Rightarrow [x] = 3, 4, 5, \dots \Rightarrow x \geq 3$

$$[x] > k \Rightarrow x \geq k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۲)  $[x] \geq 2 \Rightarrow [x] = 2, 3, 4, \dots \Rightarrow x \geq 2$

$$[x] \geq k \Rightarrow x \geq k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۳)  $[x] < 2 \Rightarrow [x] = \dots, -1, 0, 1 \Rightarrow x < 2$

$$[x] < k \Rightarrow x < k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۴)  $[x] \leq 2 \Rightarrow [x] = \dots, -1, 0, 1, 2 \Rightarrow x < 3$

$$[x] \leq k \Rightarrow x < k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

۵)  $[x] < \frac{1}{2} \Rightarrow [x] \leq 0 \Rightarrow [x] = \dots, -1, 0 \Rightarrow x < 1$

۶)  $[x] > -\frac{5}{3} \Rightarrow [x] \geq -1 \Rightarrow [x] = -1, 0, 1, 2, \dots \Rightarrow x \geq -1$



سؤال ۳۱: دامنه‌ی تابع  $\sqrt{([x]-\sqrt{2})(4-[x])}$  کدام است.

- (۱)  $2 < x < 4$  (۲)  $2 \leq x < 5$  (۳)  $2 \leq x < 4$  (۴)  $2 < x \leq 5$

$$[x] = a \Rightarrow (a - \sqrt{2})(4 - a) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2} \leq a \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leq [x] \leq 4 \Rightarrow [x] = 2, 3, 4 \Rightarrow 2 \leq x < 5$$

سؤال ۳۲: مجموعه جواب نامعادلات زیر را بدست آورید.

۱)  $[x]^2 - 5[x] + 4 < 0 \Rightarrow ([x]-1)([x]-4) < 0 \Rightarrow 1 < [x] < 4 \Rightarrow [x] = 2, 3 \Rightarrow 2 \leq x < 4$

۲)  $\frac{[x]-2}{5-[x]} \leq 0 \Rightarrow [x] = a \Rightarrow \frac{a-2}{5-a} \leq 0 \Rightarrow \frac{a-2}{a-5} \geq 0 \Rightarrow a > 5$  یا  $a \leq 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} [x] \leq 2 \Rightarrow [x] = \dots, 0, 1, 2 \Rightarrow x < 3 \\ [x] > 5 \Rightarrow [x] = 6, 7, \dots \Rightarrow x \geq 6 \end{cases} \Rightarrow (-\infty, 3) \cup [6, +\infty)$$

سؤال ۳۳: دامنه تابع  $\sqrt{2-[x^2+2x]}$  کدام مجموعه است.

- (۱)  $[-2, 0]$  (۲)  $(-3, 1)$  (۳)  $(-1, 4)$  (۴)  $(0, 2)$

$$D_f = 2 - [x^2 + 2x] \geq 0 \Rightarrow [x^2 + 2x] \leq 2 \Rightarrow x^2 + 2x < 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+3) < 0 \Rightarrow -3 < x < 1$$

سؤال ۳۴: اگر مجموعه جواب نامعادله‌ی  $0 \leq \left\lfloor \frac{3}{2}[x] \right\rfloor \leq 8$  بازه‌ی  $[a, b)$  باشد  $b - a$  کدام است.

- (۱) ۵ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) ۶

$$0 \leq \left\lfloor \frac{3}{2}[x] \right\rfloor \leq 8 \Rightarrow 0 \leq \frac{3}{2}[x] < 9 \Rightarrow 0 \leq [x] < 6 \Rightarrow 0 \leq x < 6 \Rightarrow x \in [0, 6) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 6 \end{cases} \Rightarrow b - a = 6$$

سؤال ۳۵: دامنه‌ی تعریف تابع  $\sqrt{(3-[x])([x]-\sqrt{20})}$  برابر  $[m, n)$  است حاصل  $m + 2n$  کدام است.

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۱ (۳) ۱۴ (۴) ۱۲

$$(3-[x])([x]-\sqrt{20}) \geq 0 \Rightarrow 3 \leq [x] \leq \sqrt{20} = 4 / \dots \Rightarrow 3 \leq [x] < 5$$

$$\Rightarrow 3 \leq x < 5 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 5 \end{cases} \Rightarrow m + 2n = 3 + 10 = 13$$

سؤال ۳۶: مجموعه جواب معادله‌ی  $[x] + \left[ x - \frac{1}{4} \right] - \left[ x + \frac{3}{4} \right] = 2$  کدام است.

$$[x] + \left[ x + \frac{3}{4} - 1 \right] - \left[ x + \frac{3}{4} \right] = 2 \Rightarrow [x] + \left[ x + \frac{3}{4} \right] - 1 - \left[ x + \frac{3}{4} \right] = 2 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

سؤال ۳۷: مجموعه جواب معادله‌ی  $\left[ x + \frac{1}{2} \right] + \left[ x - \frac{1}{2} \right] = 5$  کدام است. (گزینه ۲)

- (۱)  $\frac{5}{2} \leq x < \frac{7}{2}$  (۲)  $\frac{3}{2} \leq x < \frac{5}{2}$  (۳)  $\frac{5}{2} < x \leq \frac{7}{2}$  (۴)  $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$

$$\left[ x + \frac{1}{2} \right] + \left[ x - \frac{1}{2} \right] = \left[ x + \frac{1}{2} \right] + \left[ x + \frac{1}{2} - 1 \right] = 5 \Rightarrow \left[ x + \frac{1}{2} \right] + \left[ x + \frac{1}{2} \right] - 1 = 5 \Rightarrow 2 \left[ x + \frac{1}{2} \right] = 6$$

$$\Rightarrow \left[ x + \frac{1}{2} \right] = 3 \Rightarrow 3 \leq x + \frac{1}{2} < 4 \Rightarrow \frac{5}{2} \leq x < \frac{7}{2}$$

سؤال ۳۸: برد تابع  $y = [x - [x + 5]]$  کدام است.

- (۱)  $\{-4, -5\}$  (۲)  $\{-5\}$  (۳)  $\{-3\}$  (۴)  $\{-3, -5\}$

$$y = [x - ([x] + 5)] = [x - [x] - 5] = \underbrace{[x - [x]]}_{< عدد \le 0} - 5 = 0 - 5 = -5$$

سؤال ۳۹: مجموعه جواب نامعادله  $[x + [x]] > 3 - [x]$  کدام است.

$$[x] + [x] > 3 - [x] \Rightarrow 3[x] > 3 \Rightarrow [x] > 1 \Rightarrow [x] = 2, 3, \dots \Rightarrow x \geq 2$$

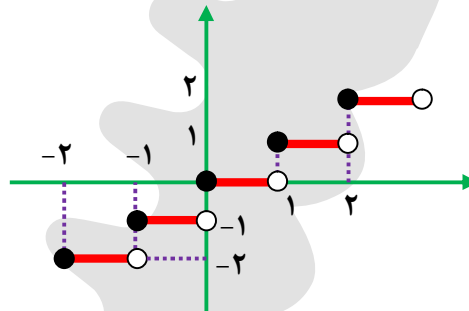
سؤال ۴۰: مجموعه جواب  $[x + 3[x]] = 2[x - 4]$  را بدست آورید.

چون  $3[x]$  عدد صحیح است می تواند از بارکت خارج شود.

$$[x] + 3[x] = 2[x] - 8 \Rightarrow [x] = -4 \Rightarrow -4 \leq x < -3$$

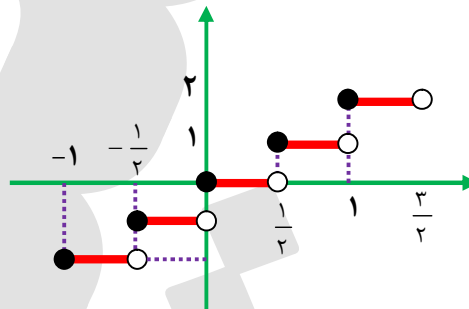
### نمودارهای تابع جزء صحیح

$[x]$



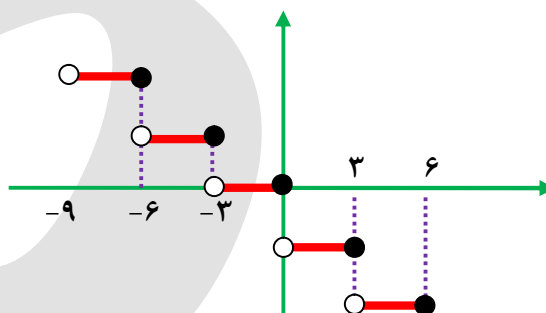
اعداد روی محور  $x$  ها را بر ۲ تقسیم می کنیم:

$[2x]$



اعداد روی محور  $x$  ها را بر  $-\frac{1}{3}$  تقسیم می کنیم:

$[-\frac{x}{3}]$



سؤال ۴۱: نمودار تابع  $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1; x \in [-2, 6)$  از چند پاره خط مساوی هم تشکیل شده است. (کنکور)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

می دانیم برای رسم  $\left[\frac{x}{2}\right]$  طول هر بازه  $\frac{1}{2}$  است.

طول بازه‌ی  $[-2, 6)$ ،  $6 - (-2) = 8$  است پس  $y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1$  از  $\frac{8}{2} = 4$  پله تشکیل شده است.

سؤال ۴۲: مساحت سطح محدود به نمودار  $y = [2x] - [x]$  و محور  $x$  ها در فاصله‌ی  $[0, 2)$  کدام است.

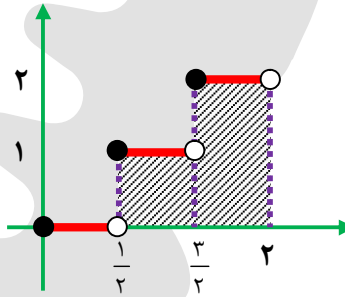
- (۱)  $\frac{3}{2}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{5}{2}$  (۴) ۳

$$[2x] - [x] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$$

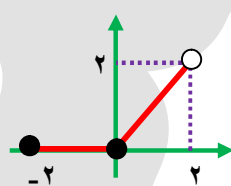
در واقع نمودار  $f(x) = [x]$  را باید به اندازه  $\frac{1}{2}$  به سمت چپ انتقال دهیم:

$$S = 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = 1 + 1 = 2$$

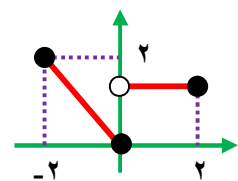
$$[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$$



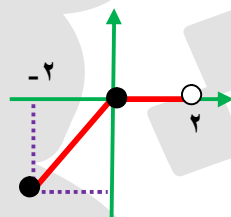
سؤال ۴۳: نمودار تابع  $y = x\left[\frac{x}{2}\right]$  در بازه‌ی  $[-2, 2)$  به کدام صورت است؟



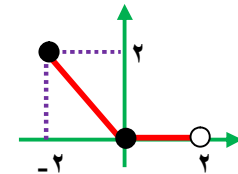
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = -1 \Rightarrow y = -x$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0 \Rightarrow y = 0$$

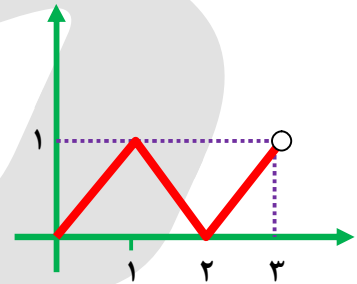
گزینه (۳) درست است.

سؤال ۴۴: نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x - [x] & \text{زوج } [x] \\ |x - [x + 1]| & \text{فرد } [x] \end{cases}$  در بازه  $[0, 3]$  را رسم کنید. (ویژه تیزهوشان)

$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$ : زوج  $\Rightarrow y = x - [x] = x - 0 = x$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1$ : فرد  $\Rightarrow y = |x - [x] - 1| = |x - 1 - 1| = |x - 2| = -x + 2$

$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2$ : زوج  $\Rightarrow y = x - [x] = x - 2$

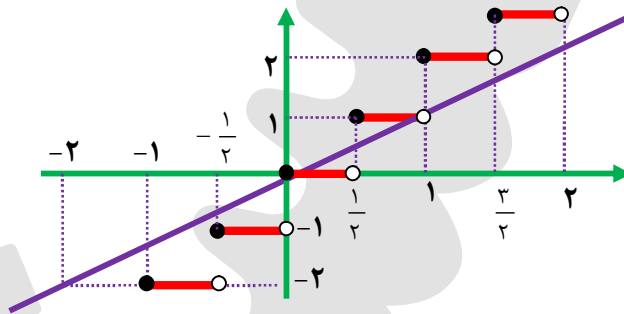


سؤال ۴۵: مجموعه جواب نامعادله  $x - [2x] > 0$  به صورت  $(-\infty, a) - \{b\}$  می باشد. حاصل  $a + b$  کدام است.

(ویژه تیزهوشان)

$x - [2x] > 0 \Rightarrow x > [2x]$

اکنون با استفاده از رسم مجموعه جواب را بدست می آوریم:



با توجه به شکل واضح است که مجموعه جواب نامعادله  $(-\infty, \frac{1}{2}) - \{0\}$  است یعنی:  $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$

سؤال ۴۶: مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^{[x]}$  در بازه  $(0, 2)$  و محور  $x$  ها کدام است.

۴ (۴)

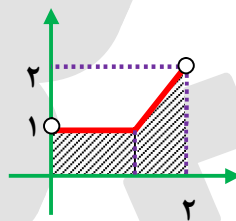
۳/۵ (۳)

۲ (۲)

۲/۵ (۱)

$0 < x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = x^0 = 1$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = x^1 = x$



مساحت ناحیه رنگی  $= 1 \times 1 + \frac{(1+2) \times 1}{2} = 2/5$

سؤال ۴۷: مجموعه جواب معادله  $[x] + [3x] = 0$  بازه  $[a, b]$  است مقدار  $b - a$  کدام است.

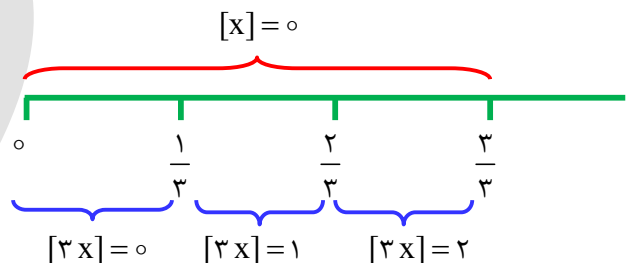
۲/۳ (۴)

۶ (۳)

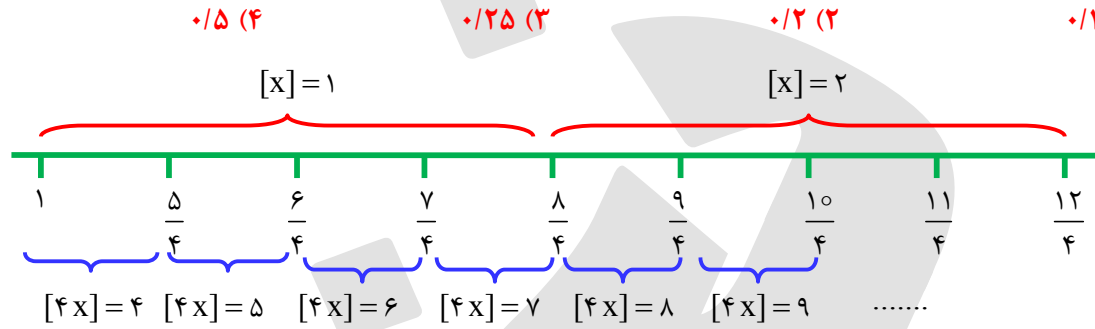
۱/۳ (۲)

۳ (۱)

$[x] + [3x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$



سؤال ۴۸: مجموعه جواب معادله  $[x] + [4x] = 6$  به صورت  $[a, b)$  است. مقدار  $b - a$  کدام است.



$$[x] + [4x] = 6 \Rightarrow \frac{5}{4} \leq x < \frac{6}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{4} \\ b = \frac{6}{4} \end{cases}$$

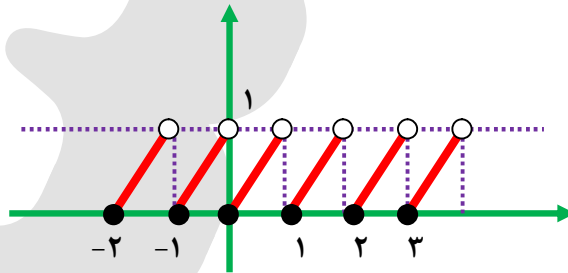
$$b - a = \frac{6}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

ویژگی های جزء صحیح

$$x = [x] + P_x \Rightarrow x - [x] = P_x \xrightarrow{0 \leq P_x < 1} 0 \leq x - [x] < 1$$

$$0 \leq x - [x] < 1$$

رسم نمودار  $x - [x]$



سؤال ۴۹: در توابع زیر محدوده  $y$  را بیابید. (برد تابع را بیابید).

۱)  $3x - [3x] + 2$

$$0 \leq 3x - [3x] < 1 \xrightarrow{+2} 2 \leq 3x - [3x] + 2 < 3 \Rightarrow 2 \leq y < 3$$

۲)  $3x - 3[x] + 2$

$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq 3x - 3[x] < 3 \xrightarrow{+2} 2 \leq 3x - 3[x] + 2 < 5 \Rightarrow 2 \leq y < 5$$

۳)  $\sqrt{\Delta x - \Delta[x]} - 1$

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq \Delta x - \Delta[x] < 1 \Rightarrow -1 \leq \Delta x - \Delta[x] - 1 < 0 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\Delta x - \Delta[x]} - 1 < 1 \Rightarrow 1 \leq y < 2$$

$$۴) \sqrt{x - ۴ \left[ \frac{x}{۴} \right]}$$

$$x - ۴ \left[ \frac{x}{۴} \right] = ۴ \left( \frac{x}{۴} - \left[ \frac{x}{۴} \right] \right) \Rightarrow ۰ \leq ۴ \left( \frac{x}{۴} - \left[ \frac{x}{۴} \right] \right) < ۴ \Rightarrow ۰ \leq \sqrt{۴ \left( \frac{x}{۴} - \left[ \frac{x}{۴} \right] \right)} < ۲$$

$\leq$  عددی < ۱  
 $\leq$  عددی < ۱

سؤال ۵۰: معادله‌ی  $x^2 - 1 = x[x]$  در بازه‌ی  $[0, 100]$  چند ریشه دارد.

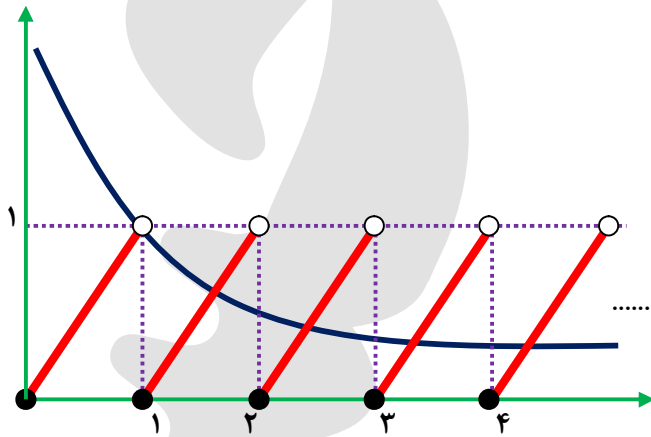
۱۰۲ (۳)

۱۰۱ (۳)

۱۰۰ (۲)

۹۹ (۱)

$$x^2 - x[x] = 1 \Rightarrow x(x - [x]) = 1 \Rightarrow x - [x] = \frac{1}{x}$$



در این بازه  $x - [x]$  از ۱۰۰ شاخه تشکیل شده است که  $\frac{1}{x}$  همه‌ی آنها به جز شاخه‌ی اول را قطع می‌کند پس معادله ۹۹ ریشه دارد.

سؤال ۵۱: معادله‌ی  $2x - [2x] = x^2 - 2x + 2$  چند جواب در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارد.

۴ بی شمار

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$$2x - [2x] = (x - 1)^2 + 1$$

$\leq$  عددی < ۱  
 $\geq$  عددی

تساوی هرگز رخ نمی‌دهد پس معادله جواب ندارد.

سؤال ۵۲: برد تابع  $f(x) = \sqrt{4 + x - 4 \left[ \frac{x}{۴} \right]}$  کدام است.

$[1, \sqrt{2}]$  (۴)

$[2, 2\sqrt{2}]$  (۳)

$[\sqrt{6}, 3]$  (۲)

$[1, 4]$  (۱)

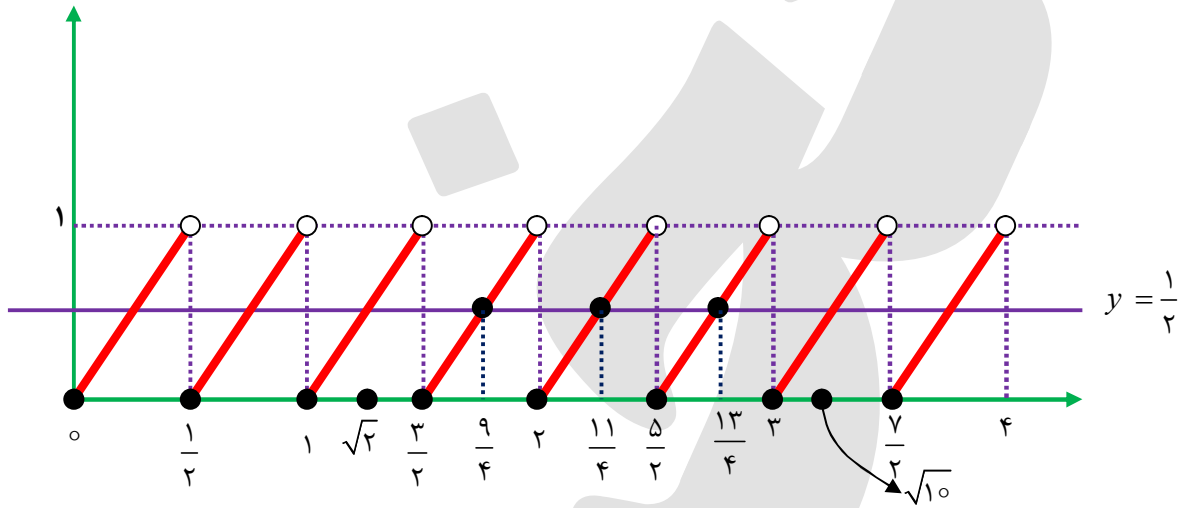
$$A = 4 + x - 4 \left[ \frac{x}{۴} \right] = 4 + 4 \left( \frac{x}{۴} - \left[ \frac{x}{۴} \right] \right) \Rightarrow 4 \leq A < 8 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{A} < 2\sqrt{2} \Rightarrow R_f = [2, 2\sqrt{2})$$

$\leq$  عددی < ۱

سؤال ۳۳: معادله  $2x - [2x] = \frac{1}{2}$  در بازه  $[\sqrt{2}, \sqrt{10}]$  چند جواب دارد؟ (آزاد ۹۱)

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱

$\sqrt{2} \cong 1/4, \sqrt{10} \cong 3/16$



معادله ۳ جواب  $x = \frac{9}{4}, \frac{11}{4}, \frac{13}{4}$  در بازه  $[\sqrt{2}, \sqrt{10}]$  دارد.

سؤال ۵۴: اگر  $f(x) = [x]$  مجموعه مقادیر  $f(x - f(x))$  کدام است. (کنکور)

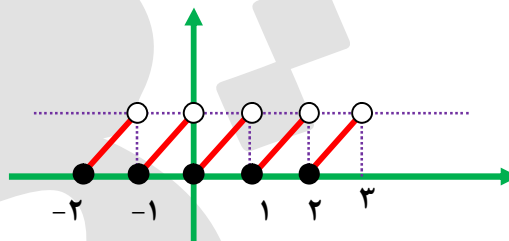
- (۱)  $\{0\}$  (۲)  $\{1\}$  (۳)  $\{0, 1\}$  (۴)  $\{-1, 0, 1\}$

$f(x - f(x)) \xrightarrow{f(x)=[x]} f(x - [x]) = \underbrace{[x - [x]]}_{\text{عددی } \leq 0} = 0$

سؤال ۵۵: نمودار تابع  $y = x - [x], x \in [-2, 3]$  از n پاره خط مساوی به اندازه L تشکیل شده است. دوتایی مرتب

(n, L) کدام است؟ (کنکور)

- (۱) (۴, ۱) (۲) (۴,  $\sqrt{2}$ ) (۳) (۵, ۱) (۴) (۵,  $\sqrt{2}$ )



نمودار تابع  $y = x - [x]$  در بازه  $[-2, 3]$  دارای ۵ پاره خط است که طول هر یک  $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  است. گزینه (۴) درست است.

سؤال ۵۶: اگر  $f(x) = -x + [x]$  و  $g(x) = 2^x$  آنگاه برد تابع  $gof$  کدام است؟ (داخل ریاضی ۹۰)

- (۱)  $(\frac{1}{2}, 1)$  (۲)  $(1, 2)$  (۳)  $(\frac{1}{2}, 1)$  (۴)  $(1, 2)$

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < -x + [x] \leq 0$$

$$gof(x) = 2^{[x]-x} \Rightarrow 2^{-1} < gof(x) \leq 2^0 \Rightarrow \frac{1}{2} < gof(x) \leq 1 \Rightarrow R_{gof} = (\frac{1}{2}, 1]$$

سؤال ۵۷: اگر  $f(x) = x - [x]$ ،  $g(x) = \frac{1-x}{x}$  برد تابع  $gof$  کدام بازه است. (کنکور)

- (۱)  $(0, +\infty)$  (۲)  $[0, +\infty)$  (۳)  $(1, +\infty)$  (۴)  $[1, +\infty)$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x - [x] \\ g(x) &= \frac{1}{x} - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow gof(x) = g(x - [x]) = \frac{1}{x - [x]} - 1$$

می دانیم همواره  $0 \leq x - [x] < 1$  و از طرفی نباید  $x - [x] = 0$  باشد چون تابع  $gof$  تعریف نشده می شود بنابراین:

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} > 1 \xrightarrow{-1} \frac{1}{x - [x]} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow gof(x) > 0 \Rightarrow R_{gof} = (0, +\infty)$$

سؤال ۵۸: حاصل  $\left[ 2x - 4 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right]$  به ازای مقادیر مختلف  $x$  چند مقدار مختلف را می پذیرد.

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی شمار

$$2x - 4 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 4 \left( \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right)$$

چون  $0 \leq \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor < 1$  است لذا:

$$0 \leq 4 \left( \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right) < 4 \Rightarrow \left[ 4 \left( \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \right) \right] = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3$$

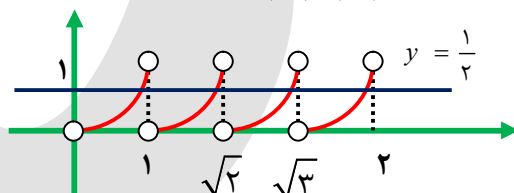
سؤال ۵۹: معادله  $x^2 - [x^2] = \frac{1}{2}$  در بازه  $(0, 2)$  چند ریشه دارد.

طبق معادله داریم:  $x^2 = [x^2] + \frac{1}{2}$  و از آنجا که داریم:  $\{x^2\} = \frac{1}{2}$  پس  $x^2 = [x^2] + \frac{1}{2}$  جز اعشاری  $A$  می

$$0 < x < 2 \Rightarrow 0 < x^2 < 4$$

باشد پس داریم:

چون  $\{x^2\} = \frac{1}{2}$  پس در بازه  $0 < x^2 < 4$  اعداد  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$  در معادله به جای  $x^2$  صدق می کنند، لذا ۴ جواب داریم.





سؤال ۶۰: معادله‌ی  $x^{\lceil \cdot \rceil} + 1 = \lfloor 2x \rfloor$  چند جواب دارد.

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) بی شمار

$$x^{\lceil \cdot \rceil} + 1 = \lfloor 2x \rfloor \Rightarrow x^{\lceil \cdot \rceil} + 1 - 2x = \lfloor 2x \rfloor - 2x \Rightarrow (x - 1)^{\lceil \cdot \rceil} = \lfloor 2x \rfloor - 2x$$

در حالت کلی می دانیم  $0 < u - \lfloor u \rfloor < 1$  پس  $0 \leq u - \lfloor u \rfloor \leq 1 - \lfloor u \rfloor$  است چون  $(x - 1)^{\lceil \cdot \rceil} \geq 0$  است پس:

$$\underbrace{(x - 1)^{\lceil \cdot \rceil}}_{\geq 0} = \underbrace{\lfloor 2x \rfloor - 2x}_{-1 < \leq 0}$$

لذا وجه اشتراک دو عبارت هنگامی است که هر دو برابر صفر باشند.

$$\begin{cases} (x - 1)^{\lceil \cdot \rceil} = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \lfloor 2x \rfloor - 2x = 0 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2x \end{cases}$$

که  $x = 1$  در معادله‌ی دوم نیز صدق می کند از تنها جواب معادله  $x = 1$  است.

سؤال ۶۱: دامنه‌ی  $f(x) = \sqrt{-\sin^{\lceil \cdot \rceil} \pi \lfloor x \rfloor}$  کدام است.

(۱)  $\mathbb{R}$  (۲)  $\emptyset$  (۳)  $\mathbb{Z}$  (۴)  $\mathbb{N}$

$$-\sin^{\lceil \cdot \rceil} \pi \lfloor x \rfloor \geq 0 \Rightarrow \sin^{\lceil \cdot \rceil} \pi \lfloor x \rfloor \leq 0 \Rightarrow \sin \pi \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow \pi \lfloor x \rfloor = k\pi \Rightarrow \lfloor x \rfloor = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

سؤال ۶۲: برد  $y = x - \sqrt{(\lfloor x \rfloor - x)^{\lceil \cdot \rceil}}$  کدام است.

(۱)  $\mathbb{R}^+$  (۲)  $\mathbb{R}$  (۳)  $\mathbb{Z}$  (۴)  $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

$$y = x - \underbrace{|\lfloor x \rfloor - x|}_{\geq 0} \xrightarrow{\text{زیرا } \lfloor x \rfloor \leq x} y = x + \lfloor x \rfloor - x = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{ درست است. (۳) گزینه}$$

سؤال ۶۳: تابع  $f(x) = \frac{1}{\lfloor \cos \pi x \rfloor}$  با ضابطه‌ی در کدام بازه قابل تعریف است. (سراسری تجربی ۸۹)

(۱)  $(0, 1)$  (۲)  $(0, 1)$  (۳)  $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  (۴)  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

$$\lfloor \cos \pi x \rfloor \neq 0 \Rightarrow (\cos \pi x) \notin [0, 1) \Rightarrow \cos \pi x \in [-1, 0) \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \pi x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$$

ویژگی:

$$\begin{cases} \lfloor \lfloor 2 \rfloor \rfloor + \lfloor \lfloor -2 \rfloor \rfloor = 2 + (-2) = 0 \\ \lfloor \lfloor 2/1 \rfloor \rfloor + \lfloor \lfloor -2/1 \rfloor \rfloor = 2 + (-3) = -1 \end{cases} \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \rightarrow 0 \\ x \notin \mathbb{Z} \rightarrow -1 \end{cases}$$

سؤال ۶۴: دامنه‌ی تابع  $y = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor}$  کدام است.

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor} = \frac{1}{0} \text{ غ ق ق} \\ x \notin \mathbb{Z} : \frac{1}{\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor} = \frac{1}{-1} = -1 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

سؤال ۶۵: دامنه‌ی تابع  $y = \frac{1}{[x]+[-x]+1}$  کدام است.

$$\begin{cases} x \in Z : \frac{[x]+[-x]=0}{\circ+1} \rightarrow y = \frac{1}{\circ+1} = 1 \\ x \notin Z : \frac{[x]+[-x]=-1}{-1+1} \rightarrow y = \frac{1}{-1+1} = \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

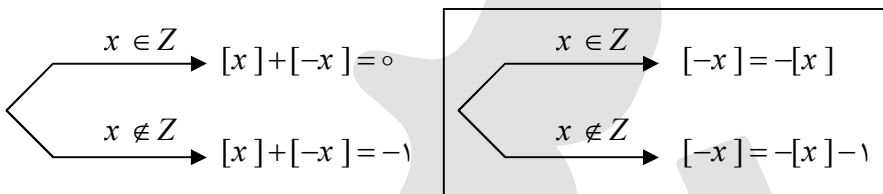
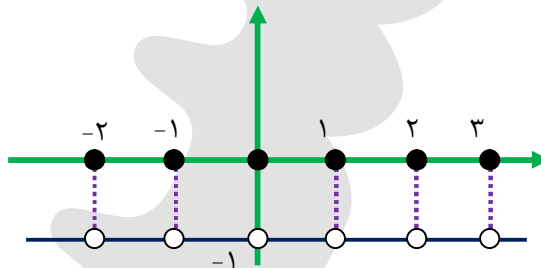
سؤال ۶۶: معادله‌ی  $\frac{1}{[x]+[-x]} = 2x^2 - 5x + 2$  چند ریشه دارد.

$$2x^2 - 5x + 2 = \frac{1}{[x]+[-x]} \rightarrow \begin{cases} x \in Z \rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = \frac{1}{\circ} \text{ غ ق ق} \\ x \notin Z \rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = \frac{1}{-1} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in Z \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{3}{2} \notin Z \checkmark \end{cases}$$

رسم نمودار  $y = [x]+[-x]$

$$[x]+[-x] = \begin{cases} \circ & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$



سؤال ۶۷: مجموعه جواب معادله‌ی  $3[x]+[-x]+5=0$  کدام است.

$$\begin{aligned} x \in Z &\Rightarrow 3x - x + 5 = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \notin Z \\ x \notin Z &\Rightarrow 3[x] + (-[x]-1) + 5 = 0 \Rightarrow 2[x] - 1 + 5 = 0 \Rightarrow 2[x] = -4 \\ &\Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1 \xrightarrow{x \notin Z} -2 < x < -1 \end{aligned}$$

سؤال ۶۸: معادله‌ی  $\frac{x+1}{x} + \frac{x-1}{x} = 2$  چند ریشه در بازه‌ی  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$  دارد.

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

$$\left[ \frac{x+1}{x} \right] + \left[ \frac{x-1}{x} \right] = \left[ 1 + \frac{1}{x} \right] + \left[ 1 - \frac{1}{x} \right] = 2$$

$$\Rightarrow 1 + \left[ \frac{1}{x} \right] + 1 + \left[ -\frac{1}{x} \right] = 2 \Rightarrow \left[ \frac{1}{x} \right] + \left[ -\frac{1}{x} \right] = 0$$

$$[u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in Z \\ -1 & u \notin Z \end{cases}$$

پس اگر  $\left[ \frac{1}{x} \right] + \left[ -\frac{1}{x} \right] = 0$  است یعنی:  $\frac{1}{x} = k \in Z$  بنابراین  $x = \frac{1}{k}$  لذا:

$$0/1 < \frac{1}{k} < 0/2 \Rightarrow 0 < k < 1 \cdot \xrightarrow{k \in Z} k = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1} = 1$$

سؤال ۶۹: در تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$  مقدار  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$  کدام است.

(خارج ریاضی - ۸۹)

$$\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1 \xrightarrow{\sin \pi x \leq 1} \sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2} \Rightarrow D_f = \left\{ x \mid x = 2k + \frac{1}{2}, k \in Z \right\}$$

یعنی مقادیر  $x$ ، غیر صحیح هستند.

$$\Rightarrow f(x) = [x] + [-x] + 0 \quad \underline{x \notin Z} \quad -1 \Rightarrow f(x) = -1, x \notin Z \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

سؤال ۷۰: تابع با ضابطه‌های  $f(x) = [x] + [-x]$  و  $g(x) = x^2 + x - 2$  مفروض اند. اگر  $g(f(x)) = -2$  باشد،

مجموعه مقادیر  $x$  کدام است. (داخل ریاضی ۸۹)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)  $R - Z$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in R - Z \\ 0 & x \in Z \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} g(-1) & x \in R - Z \\ g(0) & x \in Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} -2 & x \in R - Z \\ -2 & x \in Z \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = -2$$

بنابراین برای  $g(f(x)) = -2, x \in R$  هر است.

سؤال ۷۱: اگر  $f(x) = \frac{3^{[-x]}}{3^{-[x]}}$  باشد حاصل  $f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + \dots + f(\sqrt{10})$  کدام است.

۷ (۴)

۲۱ (۳)

۲۴ (۲)

۱۶ (۱)

$$f(x) = 3^{[-x] + [x]} = \begin{cases} 3^0 & x \in Z \\ 3^{-1} & x \notin Z \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \in Z \\ \frac{1}{3} & x \notin Z \end{cases}$$

اعداد  $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{10}$  صحیح هستند یعنی حاصل عبارت به ازای ۳ مقدار برابر یک و به ازای هفت مقدار برابر  $\frac{1}{3}$  می شود.

$$f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{2}) + \dots + f(\sqrt{10}) = 3 \times 1 + 7 \times \frac{1}{3} = 3 + \frac{7}{3} = \frac{16}{3}$$

سؤال ۷۲: معادله  $2x - [-x] = [x] + [2x]$  در بازه  $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$  چند جواب دارد.

۴ (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

$$2x - [2x] = [x] + [-x]$$

$\circ$  یا  $-۱$ 
 $\circ$  عددی  $\leq ۰$

تساوی عبارت سمت چپ و راست زمانی رخ می دهد که هر دو عبارت صفر شوند یعنی  $x \in Z$  باشد.

$$x \in \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \xrightarrow{x \in Z} x = 2, 3$$

سؤال ۷۳: معادله  $2x^2 + 3x = [x] + [-x]$  چند جواب دارد.

۴ (۴)      ۳ (۳)      ۲ (۲)      ۱ (صفر)

$$x \in Z : 2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(2x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in Z \checkmark \\ x = -\frac{3}{2} \notin Z \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$x \notin Z : 2x^2 + 3x = -1 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)(2x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \in Z \text{ غ ق ق} \\ x = -\frac{1}{2} \notin Z \checkmark \end{cases}$$

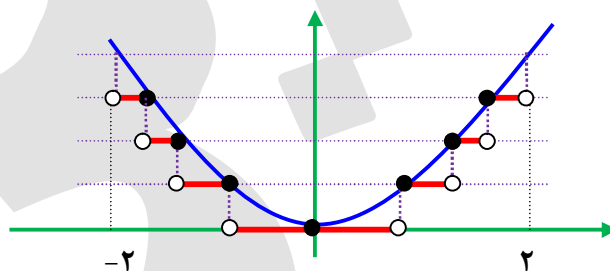
معادله دو جواب دارد.  $x \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$

### رسم نمودار $[f(x)]$

۱. خطوط افقی  $y = k \in Z$  را رسم می کنیم که نمودار  $y = k \in Z$  را قطع کند. این نقاط را توپر می کنیم.
۲. آنگاه این نقاط را نیز روی خط افقی پایین تصویر کرده و تصویر نقاط را توخالی می کنیم.
۳. نقاط توپر و توخالی ای که روی خطوط افقی بدست آمده است را به هم وصل می کنیم.
۴. پاره خط های افقی حاصل شده نمودار  $[f(x)]$  است.

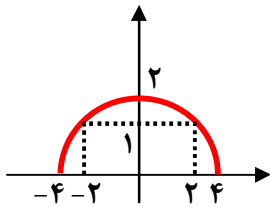
سؤال ۷۴: نمودار تابع  $y = [x^2]$  روی بازه  $x \in (-2, 2)$  از چند پاره خط تشکیل شده است. (خارج تجربی ۹۱)

۴ (۱)      ۵ (۲)      ۶ (۳)      ۷ (۴)



مشخص است که دو نمودار از ۷ پاره خط تشکیل شده است.

سؤال ۷۵: شکل مقابل نمودار تابع  $f$  را نشان می دهد مجموعه‌ی جواب معادله‌ی  $[f(x)] = 2$  کدام است.

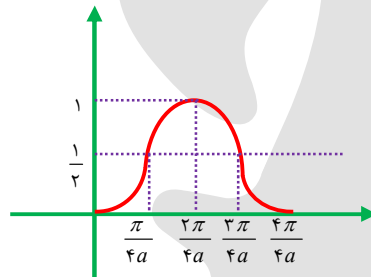


- (۱)  $[-4, 4]$
- (۲)  $[-4, -2) \cup (2, 4]$
- (۳)  $(-2, 2)$
- (۴)  $\{0\}$

با توجه به شکل واضح است که  $f(0) = 2$  پس:

$$[f(x)] = 0 \Rightarrow 0 \leq f(x) < 1 \Rightarrow x \in [-4, -2) \cup (2, 4]$$

مهم: نمودار  $\sin^2 ax$  به صورت زیر است:



سؤال ۷۶: نمودار تابع با ضابطه‌ی  $f(x) = [4 \sin^2 \pi x]$  روی بازه‌ی  $(0, \frac{1}{2})$  از چند پاره خط ساخته شده است.

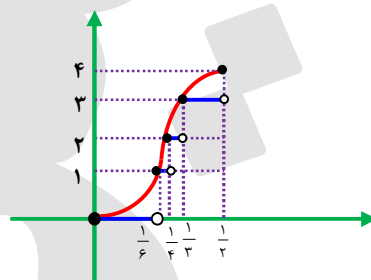
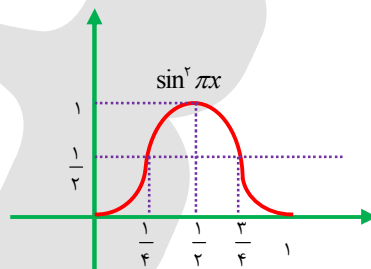
(خارج ۸۹)

۴ (۴)

۳ (۳)

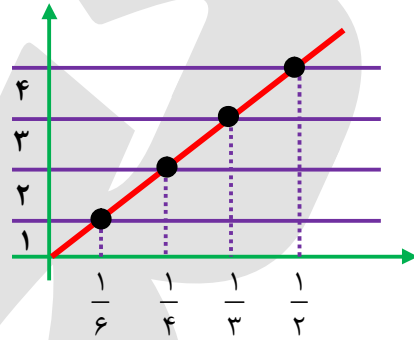
۲ (۲)

۱ (۱)



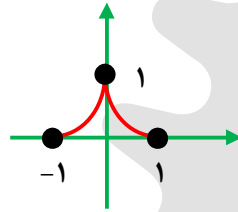
روش دوم: نمودار  $f(x) = 4 \sin^2 \pi x$  را با چند نقطه می کشیم:

$x$	$0$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$y$	$0$	$4 \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1$	$4 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 2$	$4 \sin^2 \frac{\pi}{3} = 3$	$4 \sin^2 \frac{\pi}{2} = 4$



پس با تصویر نمودار روی خطوط افقی  $y = 0, y = 1, y = 2, y = 3$  چهار پاره خط داریم.

سؤال ۷۷: اگر نمودار  $y = f(x)$  به صورت مقابل باشد، نمودار تابع  $f([x])$  کدام است.

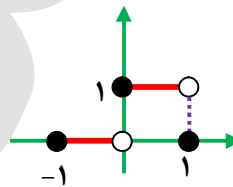


دامنه‌ی  $f(x)$ ،  $[-1, 1]$  است.

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = f([x]) = f(-1) = 0$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = f([x]) = f(0) = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = f([x]) = f(1) = 0$$



$$۱۴) [x+y] = \begin{cases} [x]+[y] & 0 \leq P_x + P_y < 1 \\ [x]+[y]+1 & 1 \leq P_x + P_y < 2 \end{cases}$$

این تساوی را به صورت  $[x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1$  نیز نشان می دهند.

اثبات:

$$\begin{cases} x = [x] + P_x \\ 0 \leq P_x < 1 \end{cases}, \begin{cases} y = [y] + P_y \\ 0 \leq P_y < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x+y] = [(x) + P_x] + [(y) + P_y] = [x] + [y] + [P_x + P_y]$$

اگر  $0 \leq P_x + P_y < 1$  است. حال اگر  $0 \leq P_x + P_y < 1$ ، آنگاه  $[P_x + P_y] = 0$  و  $[x+y] = [x]+[y]$  و اگر

$1 \leq P_x + P_y < 2$ ، آنگاه  $[P_x + P_y] = 1$  و  $[x+y] = [x]+[y]+1$ .

سؤال ۷۸: با توجه به معادله  $[x] + [y] + 3 = 0$  حدود  $x + y$  را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به ویژگی مطرح شده:

$$[x] + [y] + 3 = 0 = \begin{cases} [x + y] \\ [x + y] - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x + y] + 3 = 0 \Rightarrow [x + y] = -3 \Rightarrow -3 \leq x + y < -2 \\ [x + y] + 2 = 0 \Rightarrow [x + y] = -2 \Rightarrow -2 \leq x + y < -1 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x + y < -1$$

پس حدود  $x + y$  عبارت است از  $(-3, -1)$ .

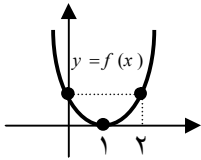
سؤال ۷۹: مجموعه‌ی جواب معادله  $Max \{k \mid k \leq 2x, k \in Z\} = 1$  کدام است؟

$$[2x] = 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq x < 1}$$

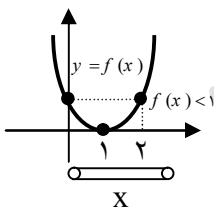
سؤال ۸۰: مجموعه‌ی جواب معادله  $Max \{k \mid k \leq |x|, k \in Z\} > 2$  کدام است؟

$$[|x|] > 2 \Rightarrow [|x|] = 3, 4, 5, \dots \Rightarrow |x| \geq 3 \Rightarrow \boxed{x \leq -3 \text{ یا } x \geq 3}$$

سؤال ۸۱: نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل مقابل مفروض است.



مجموعه جواب نامعادله‌ی  $Max \{n \mid n \leq f(x), n \in Z\}$  کدام است؟

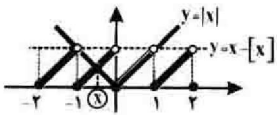


$$Max \{n \mid n \leq f(x), n \in Z\} \leq 0 \Rightarrow [f(x)] \leq 0 \Rightarrow [f(x)] = \dots, -2, -1, 0 \Rightarrow \boxed{f(x) < 1}$$

بچه ها! نمودار بالا داره نشون میده که در محدوده‌ی  $0 < x < 2$  رابطه  $f(x) < 1$  برقراره. پس مجموعه‌ی جواب این نامعادله  $0 < x < 2$  هست.

سؤال ۸۲: مجموعه جواب معادله‌ی  $[x] - x + [x] = 0$  به صورت  $\{a\} \cup (0, 1)$  می باشد.  $a$  چیست؟

معادله‌ی بالا رو به صورت  $|x| = x - [x]$  می نویسیم و از روش هندسی مجموعه جواب رو به دست می آرم. همون طور که در شکل زیر می بینید دو تابع  $|x| = x - [x]$  و  $y = |x|$  علاوه بر این که در بازه‌ی  $(0, 1)$  با هم برخورد دارن در یک نقطه به طول منفی هم، یکدیگر رو قطع می کنن. با توجه به شکل، این نقطه در محدوده‌ی  $0 < x < 1$  قرار داره. پس:

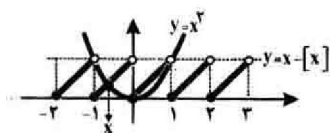


$$(-1 < x < 0) \xrightarrow[\text{را بازنویسی می کنیم.}]{\text{معادله } |x| - x + [x] = 0} -x - x - 1 = 0 \rightarrow -2x = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

بنابراین مجموعه جواب این معادله  $\{a\} \cup (0, 1)$  هست. پس:  $\boxed{a = -\frac{1}{2}}$

سؤال ۸۳: معادله‌ی  $x^2 + [x] - x = 0$  چند ریشه دارد و ریشه‌ی منفی آن کدام است؟

بچه ها! کافیه معادله‌ی بالا رو به صورت  $x^2 = x - [x]$  بنویسید و تعداد جواب های معادله رو از روش هندسی به دست بیارید. همون طور که در شکل روبرو می بینید دو تابع  $y = x^2$  و  $y = x - [x]$  فقط در دو نقطه برخورد دارن. پس معادله فقط دو ریشه داره. یه ریشه‌ی صفر و

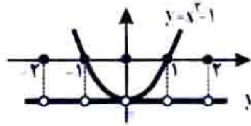


یه ریشه‌ی منفی. کمی به شکل دقت کنید، می بینید که ریشه‌ی منفی این معادله در محدوده‌ی  $-1 < x < 0$  قرار داره پس:

$$-1 < x < 0 \quad \xrightarrow{\text{معادله } x^2 + [x] - x = 0} \quad \text{را بازنویسی می کنیم} \quad x^2 + (-1) - x = 0 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \xrightarrow{\Delta=5} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow$$

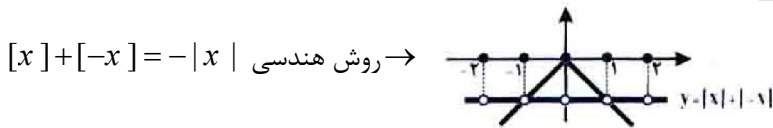
$$\text{ریشه‌ی منفی} \rightarrow x = \boxed{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$$

سؤال ۸۴: معادله‌ی  $[x] + 1 - x^2 + [-x] = 0$  چند ریشه دارد؟



کافیه معادله‌ی بالا رو به صورت  $[x] + [-x] = x^2 - 1$  بنویسیم و از روش هندسی، تعداد ریشه‌های معادله رو به دست بیاریم. همون طور که می بینید دو تابع  $y = x^2 - 1$  و  $y = [x] + [-x]$  فقط در دو نقطه به طول های ۱ و -۱ برخورد دارن. پس معادله‌ی بالا دارای دو ریشه‌ی  $x = 1$  و  $x = -1$  داره.

سؤال ۸۵: معادله‌ی  $[x] + |x| + [-x] = 0$  چند ریشه دارد؟

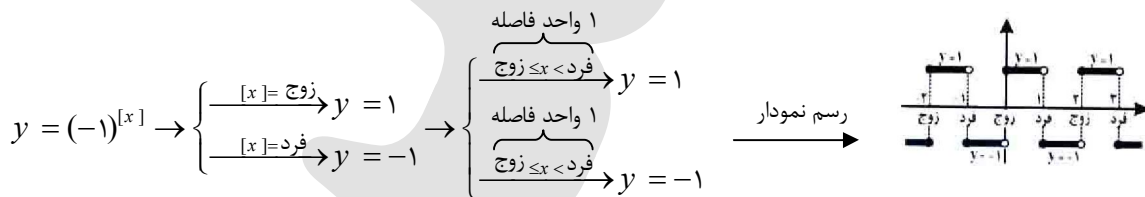


تنها نقطه‌ی برخورد  $(x = 0)$  هست. بنابراین معادله فقط یک ریشه داره.

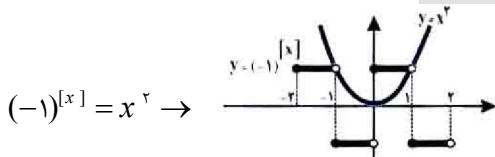
رسم نمودار تابع  $y = (-1)^{[x]}$

بچه‌ها! همون طور که می دونید:  $1 = \text{زوج}(-1)$  و  $-1 = \text{فرد}(-1)$

با توجه به این تساوی‌ها می‌خوام نمودار تابع  $y = (-1)^{[x]}$  رو رسم کنم. از اون جایی که  $[x]$ ، عدد صحیح هست، از دو حالت نمی‌تونه خارج باشه. یعنی  $[x] = \text{زوج}$  یا  $[x] = \text{فرد}$  بنابراین می‌تونم تابع  $y = (-1)^{[x]}$  رو به صورت دو ضابطه‌ای بنویسم و بعدش هر ضابطه رو در دامنه‌ی خودش رسم کنم.

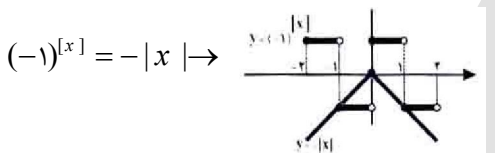


سؤال ۸۶: معادله‌ی  $(-1)^{[x]} - x^2 = 0$  چند جواب دارد؟



معادله‌ی بالا جواب نداره  $\rightarrow$  دو تابع برخوردی با هم ندارن  $\rightarrow (-1)^{[x]} = x^2$

سؤال ۸۷: معادله‌ی  $(-1)^{[x]} + |x| = 0$  چند جواب دارد؟

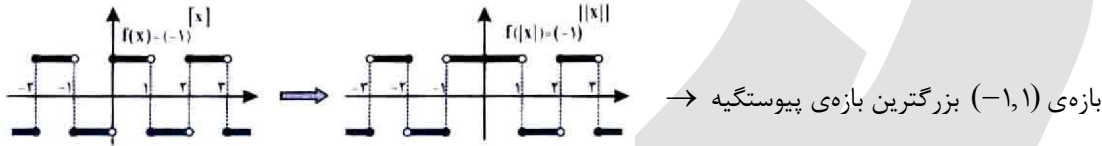


معادله دو جواب دارد.  $\rightarrow x = -1, x = 1$  طول نقاط برخورد دو تابع هستن.  $\rightarrow (-1)^{[x]} = -|x|$



سؤال ۸۸: بزرگترین بازه ای که تابع  $y = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$  در آن پیوسته می باشد چیست؟

- (۱) رسم نمودار  $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$  نمودار  $f(x)$  رو رسم می کنیم.
- (۲) قسمتی از  $f$  رو که در سمت چپ محور  $y$  هاست، پاک می کنیم.
- (۳) به جای قسمت پاک شده، باید قسمت باقیمانده از نمودار  $f$  رو که در سمت راست محور  $y$  ها قرار داره، نسبت به محور  $y$  قرینه کنیم.



بازه  $(-1, 1)$  بزرگترین بازه پیوستگی  $\rightarrow$

سؤال ۸۹: اگر  $a = 121/48$  و  $b = 0/12$  حاصل  $\lfloor \log a \rfloor + \lfloor \log b \rfloor$  کدام است؟ (آزاد ۷۴)

بچه ها برای محاسبه  $\lfloor \log_k^a \rfloor$  باید عدد صحیحی مانند  $n$  رو پیدا کنیم که  $k^n \leq a < k^{n+1}$

$$10^2 < 121/48 < 10^3 \rightarrow \log 10^2 < \log 121/48 < \log 10^3 \rightarrow 2 < \log 121/48 < 3 \rightarrow \lfloor \log a \rfloor = 2$$

$$10^{-1} < 0/12 < 10^0 \rightarrow \log 10^{-1} < \log 0/12 < \log 10^0 \rightarrow -1 < \log 0/12 < 0 \rightarrow \lfloor \log b \rfloor = -1$$

$$\Rightarrow \lfloor \log a \rfloor + \lfloor \log b \rfloor = 2 - 1 = 1$$

سؤال ۹۰: برد تابع جز صحیح  $y = \left\lfloor \frac{3x}{x^2+1} \right\rfloor$  شامل چند عدد صحیح است؟ (آزاد ۸۶)

بچه ها این رو بدونین که  $-\frac{a}{2} \leq \frac{ax}{x^2+1} \leq \frac{a}{2}$  (تو مثلثات براتون اثبات کردم)

$$\rightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{3x}{x^2+1} \leq \frac{3}{2} \rightarrow \left\lfloor \frac{3x}{x^2+1} \right\rfloor = -2, -1, 0, 1$$

سؤال ۹۱: ماکزیمم مجموعه  $\{n : n \in \mathbb{Z}, nx^r + n \leq x^r\}$  کدام است؟ (آموزش و پرورش ۸۴)

$$\text{Max}\{n : n \in \mathbb{Z}, nx^r + n \leq x^r\} = \text{Max}\left\{n : n \in \mathbb{Z} : n \leq \frac{x^r}{x^r+1}\right\}$$

$$0 \leq \frac{x^r}{x^r+1} < 1 \rightarrow \left\lfloor \frac{x^r}{x^r+1} \right\rfloor = 0$$

سؤال ۹۲: اگر  $(a, b) \cup \{c\}$  مجموعه جواب معادله  $3\lfloor x \rfloor + 2\lfloor -x \rfloor = 5$  مجموعه جواب معادله  $a + b + c$  باشد

مقدار عددی  $a + b + c$  کدام است؟ (آموزش و پرورش ۸۴)

$$3\lfloor x \rfloor + 2\lfloor -x \rfloor = 5$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \rightarrow 3\lfloor x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 5 \rightarrow \lfloor x \rfloor = 5 \rightarrow x = 5 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \notin \mathbb{Z} \rightarrow 3\lfloor x \rfloor + 2(-\lfloor x \rfloor - 1) = 5 \rightarrow \lfloor x \rfloor - 2 = 5 \rightarrow \lfloor x \rfloor = 7 \end{cases}$$

$$\rightarrow 7 \leq x < 8 \xrightarrow{x \notin \mathbb{Z}} 7 < x < 8 \quad (2)$$

$$(1) \cup (2) = 7 < x < 8 \cup \{5\} = (7, 8) \cup \{5\} \rightarrow a + b + c = 7 + 8 + 5 = 20$$

سؤال ۹۳: معادله  $\lfloor x \rfloor + \lfloor x^2 \rfloor = \frac{x}{2}$  چند ریشه دارد؟ (آموزش و پرورش ۸۵)

$$2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor x^2 \rfloor = x$$

سمت چپ معادله همواره صحیح است، پس باید سمت راست آن نیز همواره صحیح باشد یعنی  $x \in Z$  پس:

$$\lfloor x^2 \rfloor = x^2 \text{ و } \lfloor x \rfloor = x$$

$$\rightarrow 2x + 2x^2 = x \rightarrow x + 2x^2 = 0 \rightarrow x(1+2x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \in Z \quad \checkmark \\ x = -\frac{1}{2} & \notin Z \quad \times \end{cases}$$

سؤال ۹۴: معادله  $x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} = \lfloor x \rfloor$  چند جواب دارد؟ (گزینه ۲ - ۸۵)

$$\underbrace{x - \lfloor x \rfloor}_{\leq 1} = \underbrace{-(\sqrt{x} + \frac{1}{4})}_{\downarrow}$$

همواره منفی

این معادله هیچ وقت جواب نمی تونه داشته باشد.

سؤال ۹۵: چند عدد طبیعی در نامعادله  $\lfloor 2x \rfloor < \lfloor x + 5 \rfloor$  صدق می کند؟ (گزینه ۲ - ۸۵)

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor < \lfloor x \rfloor + 5 \rightarrow \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor < 5 \rightarrow \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \leq 4 \rightarrow x + \frac{1}{2} < 5 \rightarrow x < 4.5 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x = 1, 2, 3, 4$$

سؤال ۹۶: مجموعه جواب معادله  $\lfloor \frac{x+2}{x} \rfloor = 2$  کدام است؟ (گزینه ۲ - ۸۶)

$$\lfloor \frac{x+2}{x} \rfloor = 2 \rightarrow 1 + \lfloor \frac{2}{x} \rfloor = 2 \rightarrow \lfloor \frac{2}{x} \rfloor = 1$$

$$1 \leq \frac{2}{x} < 2 \rightarrow \frac{1}{2} < \frac{x}{2} \leq 1 \rightarrow 1 < x \leq 2$$

سؤال ۹۷: اگر  $x = \lfloor x \rfloor + P$  ،  $-x = \lfloor -x \rfloor + P'$  حاصل  $P + P'$  کدام است؟ (گزینه ۲ - ۸۶)

$$\begin{cases} x = \lfloor x \rfloor + P \rightarrow P = x - \lfloor x \rfloor \\ -x = \lfloor -x \rfloor + P' \rightarrow P' = -x - \lfloor -x \rfloor \end{cases} \rightarrow P + P' = -(\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor) = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ 1 & x \notin Z \end{cases}$$

سؤال ۹۸: اگر  $P = \frac{1}{x^2+2} - \lfloor \frac{1}{x^2+2} \rfloor$  و  $x \neq 0$  آنگاه محدوده P کدام است؟

$$x \neq 0 \rightarrow x^2 > 0 \rightarrow x^2 + 2 > 2 \rightarrow 0 < \frac{1}{x^2+2} < \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{x^2+2} < \frac{1}{2} \\ \lfloor \frac{1}{x^2+2} \rfloor = 0 \end{cases} \rightarrow 0 < p < \frac{1}{2}$$

سؤال ۹۹: دامنه تابع  $y = \frac{x+1}{\lfloor \sin x \rfloor}$  در بازه  $(0, 2\pi)$  شامل چند عدد صحیح است؟

$$D_f = (0, 2\pi) - \{x \mid \lfloor \sin x \rfloor = 0\}$$

$$\lfloor \sin x \rfloor = 0 \rightarrow 0 \leq \sin x < 1 \xrightarrow{x \in (0, 2\pi)} \begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases} \rightarrow D_f = (\pi, 2\pi) \cup \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\rightarrow D_f = (3/14, 6/28) \cup \{1/57\} \rightarrow \text{اعداد صحیح داخل دامنه} \rightarrow 4, 5$$

سؤال ۱۰۰: برد تابع  $-5 - 20 \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor - 2x$  شامل چند عدد صحیح است؟

$$A = 2x - 20 \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor - 5 = 20 \left( \frac{x}{10} - \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor \right) - 5$$

$$0 \leq \frac{x}{10} - \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor < 1 \rightarrow 0 \leq 20 \left( \frac{x}{10} - \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor \right) < 20$$

$$\rightarrow A = -5 \leq 20 \left( \frac{x}{10} - \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor - 5 \right) < 15 \rightarrow \text{اعداد صحیح} \rightarrow -5, -4, \dots, 14 \rightarrow 14 - (-5) + 1 = 20$$

سؤال ۱۰۱: اگر  $\lfloor x^2 - x \rfloor = 6$  و  $\lfloor 5x^2 - 2x \rfloor = 18$  آنگاه  $\lfloor 2x^2 - x \rfloor$  کدام است؟

$$\begin{cases} \lfloor x^2 - x \rfloor = 6 \\ \lfloor 5x^2 - 2x \rfloor = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 \leq x^2 - x < 7 \\ 18 \leq 5x^2 - 2x < 19 \end{cases} \rightarrow \text{جمع} \rightarrow 24 \leq 6x^2 - 3x < 26$$

$$\text{بر ۳ تقسیم} \rightarrow 8 \leq 2x^2 - x < 8 \dots \rightarrow \lfloor 2x^2 - x \rfloor = 8$$

سؤال ۱۰۲: معادله  $\frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{x}{3} \right\rfloor$  چند ریشه در بازه  $(-20, 20)$  دارد؟

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor < 1 \\ \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{x}{3} \right\rfloor = \begin{cases} 0 & x = 3k \\ -1 & x \neq 3k \end{cases} \end{cases}$$

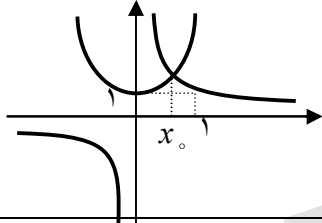
پس تساوی زمانی رخ می دهد که  $\frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0$  یا  $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$  یا  $x = 2k'$  یا از طرفی  $x = 3k$  پس  $x = 6k$

$$\rightarrow x = -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18$$

سؤال ۱۰۳: معادله  $\frac{\lfloor x \rfloor}{|x|} = x^2 + 1$  چند ریشه در بازه  $(-\infty, 2)$  دارد؟

سمت راست معادله همواره مثبت است. پس سمت چپ معادله نیز باید مثبت باشد،  $|x|$  هم مثبت است اما چون در مخرج است پس  $x \neq 0$ ، پس باید  $\lfloor x \rfloor$  مثبت باشد پس باید جواب معادله را در بازه  $(0, 2)$  بیابیم اگر  $0 < x < 1$  باشد آنگاه داریم:  $\lfloor x \rfloor = 0$

$$\rightarrow 0 = x^2 + 1$$



پس باید  $1 \leq x < 2$  که در این صورت  $\lfloor x \rfloor = 1, |x| = x$  پس معادله  $\frac{1}{x} = x^2 + 1$  داریم. نقطه تقاطع در بازه  $(0, 1)$  است که با فرض در تناقض است پس معادله فوق فاقد جواب است.

سؤال ۱۰۴: ریشه های معادله  $6x - 2 \lfloor 2x \rfloor = 3$  چقدر است؟

$$6x - 2 = 2 \lfloor 2x \rfloor$$

$$\lfloor 2x \rfloor = \frac{6x - 2}{2} = k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \frac{2k + 2}{6} \rightarrow \left\lfloor \frac{2k + 2}{3} \right\rfloor = k \rightarrow k \leq \frac{2k + 2}{3} < k + 1$$

$$\rightarrow 3k \leq 2k + 2 < 3k + 3 \rightarrow \begin{cases} 3k \leq 2k + 2 \\ 2k + 2 < 3k + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k \leq 2 \\ k > 0 \end{cases} \rightarrow 0 < k \leq 2 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 1, 2, 3$$

$$\xrightarrow{x = \frac{2k+2}{6}} \left\{ \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{9}{6} \right\}$$

سؤال ۱۰۵: معادله  $\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 1$  چند ریشه زوج دارد؟

$$\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 1 \rightarrow \left\lfloor \frac{(x-1)+3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 1 \rightarrow \left\lfloor \frac{x-1}{3} + 1 \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 1$$

$$\rightarrow \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 1 \rightarrow 2 \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 0 \rightarrow \left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 0$$

$$\rightarrow 0 \leq \frac{x-1}{3} < 1 \rightarrow 0 \leq x-1 < 3 \rightarrow 1 \leq x < 4 \rightarrow x = 2$$

سؤال ۱۰۶: حاصل عبارت  $\lfloor 2\sqrt{5^{\Delta^{\circ}} - 5^{2\Delta}} + 1 \rfloor$  کدام است؟

$$2\sqrt{5^{\Delta^{\circ}} - 5^{2\Delta}} + \frac{1}{4} < 2\sqrt{5^{\Delta^{\circ}} - 5^{2\Delta}} + 1 < 2\sqrt{5^{\Delta^{\circ}}} \rightarrow 2\sqrt{\left(5^{2\Delta} - \frac{1}{2}\right)^2} < 2\sqrt{5^{\Delta^{\circ}} - 5^{2\Delta}} + 1 < 2 \times 5^{2\Delta}$$

$$\rightarrow 2\left(5^{2\Delta} - \frac{1}{2}\right) < 2\sqrt{5^{\Delta^{\circ}} - 5^{2\Delta}} + 1 < 2 \times 5^{2\Delta} \rightarrow 2 \times 5^{2\Delta} - 1 < 2\sqrt{5^{\Delta^{\circ}} - 5^{2\Delta}} + 1 < 2 \times 5^{2\Delta}$$

$$\rightarrow \lfloor 2\sqrt{5^{\Delta^{\circ}} - 5^{2\Delta}} + 1 \rfloor = 2 \times 5^{2\Delta} - 1$$

سؤال ۱۰۷: مجموعه جواب معادله  $|x + |x|| = x + [x]$  چیست؟

سمت چپ عددی صحیح است پس سمت راست هم باید صحیح باشد. یعنی باید  $x \in \mathbb{Z}$

$$\rightarrow |x + |x|| = x + x = 2x = 2|x| \rightarrow x + |x| = 2|x| \rightarrow x = |x| \rightarrow x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$$

سؤال ۱۰۸: مجموعه جواب  $x + \lfloor -x \rfloor = \frac{1}{x}$  کدام است؟

$$x = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - \lfloor -x \rfloor \rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

$$x - x = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0 \rightarrow 0 \leq \frac{1}{x} < 1 \rightarrow x > 1 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

سؤال ۱۰۹: معادله  $\lfloor x - \sqrt{x} \rfloor = \sqrt{x} - [x]$  چند جواب دارد؟

سمت چپ معادله صحیح است پس باید  $\sqrt{x} - [x]$  نیز صحیح باشد پس  $x - [x]$  باید مربع یک عدد صحیح باشد اما:

$$0 \leq x - [x] < 1$$

پس باید  $x - [x] = 0$  یا  $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  یعنی  $x = [x]$  یا  $x - [x] = 0$

$$\rightarrow \sqrt{x} - [x] = 0 \rightarrow 0 \leq x - \sqrt{x} < 1 \rightarrow 0 \leq x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} < 1 \rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{x} - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < \sqrt{x} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x \geq 0} 0 \leq x < 2/6 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x = 0, 1, 2$$

سؤال ۱۱۰: تابع  $y = \frac{[x+1]}{x-1} + x$  محور طول ها را در چند نقطه قطع می کند؟

$$\frac{[x+1]}{x-1} + x = 0 \xrightarrow{x \neq 1} \frac{[x+1]}{x-1} = -x \rightarrow [x+1] = -x^2 + x = x - x^2 \rightarrow [x] + 1 = x - x^2 \rightarrow x - [x] = \underbrace{1+x^2}_{\geq 1}$$

تساوی فوق امکان پذیر نیست پس معادله فوق جواب ندارد.

سؤال ۱۱۱: معادله  $(x^2+1)[x] = |x|(x^2+3)$  چند ریشه دارد؟

$$\frac{[x]}{|x|} = \frac{x^2+3}{x^2+1} > 1$$

پس باید  $[x] > 0$  باشد یعنی  $x \geq 1$  اما در درس به شما گفتم که برای اعداد مثبت  $\frac{[x]}{x} \leq 1$  پس معادله جواب ندارد. اما توجه کنین تنها جواب معادله تنها می تونه  $x = 0$  باشه که توی دامنه معادله اصلی هست.

سؤال ۱۱۲: مجموعه جواب معادله  $[x]^2 - 3[x] - 10 = 0$  کدام است؟

$$([x]-5)([x]+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} [x] = 5 \\ [x] = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 \leq x < 6 \\ -2 \leq x \end{cases} \rightarrow x \in [-2, -1) \cup [5, 6)$$

سؤال ۱۱۳: معادله  $[2-x^2] = |2-x^2|$  چند جواب دارد؟

سمت چپ تساوی صحیح است پس باید سمت راست معادله و در نتیجه  $2-x^2$  عددی صحیح باشد. پس:

$$2-x^2 = |2-x^2| \xrightarrow{u=|u| \Rightarrow u \geq 0} 2-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 2 \rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

سؤال ۱۱۴: معادله  $\sqrt{\frac{x+7}{2}} = \frac{x+1}{2}$  چند جواب دارد؟

$$\frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z} \rightarrow \frac{x+1}{2} = k$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{x+7}{2}} = \frac{x+1}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{x+1+6}{2}} = \frac{x+1}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{x+1}{2} + 3} = \frac{x+1}{2} \rightarrow [\sqrt{k+3}] = k$$

$$k \leq \sqrt{k+3} < k+1$$

$$k \leq \sqrt{k+3} \rightarrow k^2 \leq k+3 \rightarrow k^2 - k - 3 < 0 \rightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad (1)$$

$$\rightarrow \sqrt{k+3} < k+1 \rightarrow k+3 < k^2 + 2k + 1 \rightarrow k^2 + k - 2 < 0$$

$$\rightarrow (k+2)(k-1) < 0 \rightarrow -2 < k < 1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow 1 < k < \frac{1+\sqrt{13}}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 2 \text{ دارد یک جواب}$$

سؤال ۱۱۵: معادله  $\left\lfloor \frac{2x}{x+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x+1} \right\rfloor = 2$  در بازه چند جواب دارد؟

$$\left\lfloor \frac{2(x+1)-2}{x+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x+1} \right\rfloor = 2$$

$$\rightarrow 2 + \left\lfloor \frac{-2}{x+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x+1} \right\rfloor = 2 \rightarrow \left\lfloor \frac{-2}{x+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{x+1} \right\rfloor = 0 \rightarrow \frac{2}{x+1} \in \mathbb{Z} \rightarrow x+1 = \pm 1, \pm 2 \rightarrow x = 0, -2, 1, -3$$

سؤال ۱۱۶: معادله  $\lfloor \sin x + \cos x \rfloor = \lfloor \operatorname{tg} x + \cot x \rfloor$  در فاصله  $(0, \pi)$  چند ریشه دارد؟

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2} \rightarrow \lfloor \sin x + \cos x \rfloor \in \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$\text{اگر } \operatorname{tg} x > 0 \rightarrow \operatorname{tg} x + \cot x \geq 2 \rightarrow \lfloor \operatorname{tg} x + \cot x \rfloor \geq 2 \quad \times$$

$$\operatorname{tg} x < 0 \rightarrow \operatorname{tg} x + \cot x \leq -2 \rightarrow \lfloor \operatorname{tg} x + \cot x \rfloor < -1$$

$$\lfloor \sin x + \cos x \rfloor = \lfloor \operatorname{tg} x + \cot x \rfloor = -2$$

حالت تساوی زمانی رخ می دهد که:

$$\operatorname{tg} x + \cot x = -2 \rightarrow \operatorname{tg} x = \cot x = -1$$

اگر  $\operatorname{tg} x = -1$  داریم  $\sin x = -\cos x$  یا  $\sin x + \cos x = 0$

پس  $\lfloor \sin x + \cos x \rfloor = 0$  که با فرض  $\lfloor \sin x + \cos x \rfloor = 0$  در تناقض است پس معادله ی بالا جواب ندارد.

سؤال ۱۱۷: دامنه تعریف  $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \lfloor \sin x \rfloor}$  کدام است؟

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \rightarrow \lfloor \sin x \rfloor = -1, 0, 1$$

$$\xrightarrow{(1)} f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 1} \rightarrow \sin^2 x - 1 \geq 0 \rightarrow \sin^2 x \geq 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 \rightarrow \sin x = \pm 1 \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{(2)} f(x) = \sqrt{\sin^2 x} \rightarrow \sin^2 x \geq 0 \rightarrow R$$

$$\xrightarrow{(3)} f(x) = \sqrt{\sin^2 x + 1} \rightarrow \sin^2 x + 1 \geq 0 \rightarrow R$$

$$\rightarrow (1) \cup (2) \cup (3) \rightarrow R$$

سؤال ۱۱۸: برد تابع  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-\lfloor x \rfloor}}$  کدام است؟

$$1 - \lfloor x \rfloor > 0 \rightarrow \lfloor x \rfloor < 1 \rightarrow x < 1$$

$$x < 1: \begin{cases} 0 \leq x < 1 \rightarrow f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-0}} = x \rightarrow 0 \leq f(x) < 1 & (1) \\ x < 0 \rightarrow \lfloor x \rfloor < 0 \rightarrow 1 - \lfloor x \rfloor > 0 \rightarrow f(x) < 0 & (2) \end{cases}$$

$$\rightarrow R_f = (1) \cup (2) = f(x) < 1$$

سؤال ۱۱۹: برد تابع  $\lfloor \sin x - 2 \cos x + 2\sqrt{5} \rfloor$  شامل چند عدد صحیح می شود؟


$$\boxed{-\sqrt{a^2+b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{توجه:}$$

$$\rightarrow -\sqrt{5} \leq \sin x - 2 \cos x \leq \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{5} \leq \sin x - 2 \cos x + 2\sqrt{5} \leq 3\sqrt{5}$$

$$\boxed{2 < \sqrt{5} < 3}$$

$$\boxed{6 < 3\sqrt{5} < 7}$$


$$\lfloor \sin x - 2 \cos x + 2\sqrt{5} \rfloor \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

سؤال ۱۲۰: برد تابع  $\left[ \operatorname{tg} 3x + \operatorname{cot} 3x + \frac{3}{2} \right]$  کدام است؟  $(0 < x < \frac{\pi}{3})$  

$$0 < x < \frac{\pi}{3} \rightarrow 0 < 3x < \frac{\pi}{2} \rightarrow \operatorname{tg} 3x > 0 \rightarrow \operatorname{tg} 3x + \operatorname{cot} 3x \geq 2 \rightarrow \operatorname{tg} 3x + \operatorname{cot} 3x + \frac{3}{2} \geq \frac{7}{2} = \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \left[ \operatorname{tg} 3x + \operatorname{cot} 3x + \frac{3}{2} \right] \geq 4 \rightarrow y \geq 4$$

یادآوری:  $a > 0 \left\{ a + \frac{1}{a} \geq 2 \right.$

سؤال ۱۲۱: برد تابع  $\left[ \frac{x^3 + 1}{x^3 + 8} \right]$  کدام است؟ (آزاد ۸۷) 

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^3 + 8} \rightarrow R_y = R - \{1\}$$

پس  $f(x)$  هر مقدار حقیقی غیر از ۱ می تواند باشد پس  $[f(x)]$  هر مقدار صحیحی را می تواند اختیار کند.  
دقت کنین که با وجود  $f(x) \neq 1$  برای  $f(x) < 2$  و  $f(x) > 1$  پس برد تابع مجموعه  $Z$  است.

**تست جزء صحیح**

سؤال ۱: معادله  $[\sin x] = \frac{2}{\pi}x$  چند جواب دارد.

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

می دانیم  $-1 \leq \sin x \leq 1$  پس:

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1 &\Rightarrow [\sin x] = -1, 0, 1 \\ [\sin x] &= \frac{2}{\pi}x \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{\pi}x = 1 &\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow [\sin x] = 1 = \frac{2}{\pi}x \\ \frac{2}{\pi}x = 0 &\Rightarrow x = 0 \Rightarrow [\sin x] = 0 = \frac{2}{\pi}x \\ \frac{2}{\pi}x = -1 &\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow [\sin x] = -1 = \frac{2}{\pi}x \end{aligned} \right.$$

پس ۳ مقدار صفر و  $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$  برای  $x$  به دست می آید.

سؤال ۲: مجموعه  $A = \{[\sqrt{n^2+7-n}] : n \in \mathbb{N}\}$  چند عضوی است.

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ بی شمار

$$\begin{aligned} n \in \mathbb{N} &\Rightarrow 4n > 3 \xrightarrow{4n+4 > 7} 0 < n^2 + 7 < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 \Rightarrow \sqrt{n^2+7} < n+2 \\ &\Rightarrow 0 < \sqrt{n^2+7} - n < 2 \Rightarrow [\sqrt{n^2+7} - n] = 0 \text{ یا } 1 \end{aligned}$$

سؤال ۳: اگر  $n > 1$  عددی طبیعی باشد حاصل  $[\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}]$  برابر کدام است. (ویژه تیزهوشان)

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴  $2n$  یا  $2n-1$  یا  $2n+1$

$$[x+y] = \begin{cases} [x]+[y] \\ \text{یا} \\ [x]+[y]+1 \end{cases} \Rightarrow [x+y] \geq [x]+[y] \text{ می دانیم:}$$

$$[\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}] \geq [\sqrt{n^2-1}] + [\sqrt{n^2+1}]$$

$$\left\{ \begin{aligned} n^2 < n^2+1 < (n+1)^2 &\Rightarrow n < \sqrt{n^2+1} < n+1 \Rightarrow [\sqrt{n^2+1}] = n \\ (n-1)^2 < n^2-1 < n^2 &\Rightarrow n-1 < \sqrt{n^2-1} < n \Rightarrow [\sqrt{n^2-1}] = n-1 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow [\sqrt{n^2+1}] + [\sqrt{n^2-1}] = 2n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2+1}] \geq 2n-1 \quad (1)$$

$$\text{از طرفی } A = \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} \Rightarrow A^2 = n^2+1+n^2-1+2\sqrt{n^2-1} = 2n^2+2\sqrt{n^2-1}$$

$$\sqrt{n^2-1} < \sqrt{n^2} = n \rightarrow A^2 < 2n^2 + 2n^2 = 4n^2 \Rightarrow A < 2n \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \rightarrow 2n-1 \leq A < 2n \Rightarrow [\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}] = 2n-1$$

سؤال ۴: دامنه تابع  $\sqrt{([x]-1)([x]-\sqrt{2})}$  کدام بازه است.

- ۱  $(-\infty, 1]$       ۲  $[2, +\infty)$       ۳  $[1, +\infty)$       ۴  $R$



$$\begin{cases} [x] = a \Rightarrow (a-1)(a-\sqrt{2}) \geq 0 \Rightarrow a \geq \sqrt{2} \cup a \leq 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} [x] \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \\ \text{یا} \\ [x] \leq 1 \Rightarrow x < 2 \end{cases} \xrightarrow{U} R \end{cases}$$

سؤال ۵: مجموعه جواب نامعادله  $[3x+1] \leq \frac{5}{3}$  کدام است.

- (۱)  $x \leq \frac{1}{3}$       (۲)  $x \leq \frac{1}{3}$       (۳)  $x < \frac{2}{3}$       (۴)  $\emptyset$

$$[3x+1] \leq \frac{5}{3} \Rightarrow [3x+1] \leq 2 \Rightarrow 3x+1 < 3 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

اعداد صحیح از داخل جز صحیح بیرون می آید:  $[x \pm k] \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} [x] \pm k$

مثال:  $[x+2] = [x] + 2$

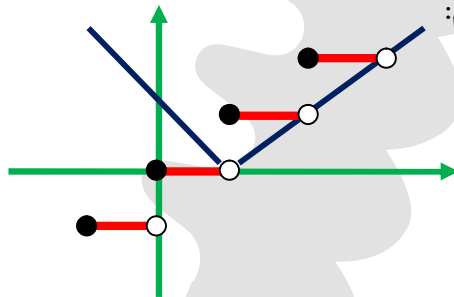
$[x+[x]] = [x] + [x] = 2[x]$

سؤال ۶: به ازای کدام عدد  $m$  معادله  $|x-m| = [x]$  جواب ندارد.

- (۱)  $m = 1$       (۲)  $m = 2$       (۳)  $m = 0$       (۴)  $m = \frac{1}{2}$

گزینه ها را در معادله جایگذاری می کنیم:

$m = 1 \Rightarrow |x-1| = [x]$



با توجه به شکل واضح است که معادله جواب ندارد پس  $m = 1$  گزینه مطلوب تست است. اکنون فقط برای تمرین بیشتر گزینه های دیگر را بررسی می کنیم:

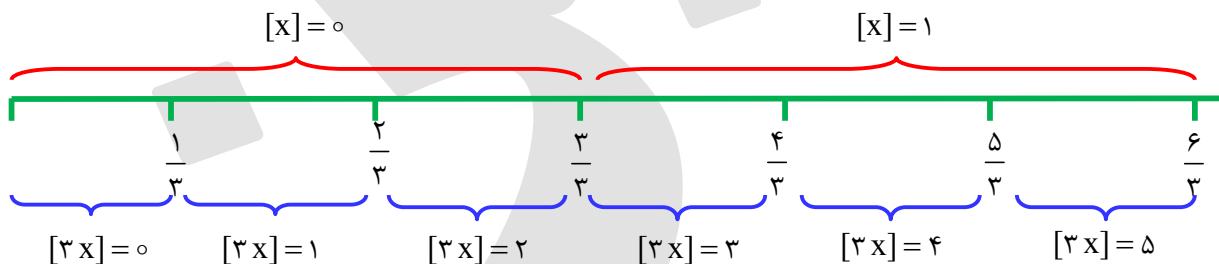
$m = 2: |x-2| = [x] \xrightarrow{x=1} |1-2| = [1] \Rightarrow 1 = 1$  در معادله صدق می کند

$m = 0: |x-0| = [x] \xrightarrow{x=0} |0| = [0] \Rightarrow 0 = 0$  در معادله صدق می کند

$m = \frac{1}{2}: |x-\frac{1}{2}| = [x] \xrightarrow{x=\frac{3}{2}} |1| = [\frac{3}{2}] \Rightarrow 1 = 1$  در معادله صدق می کند.

سؤال ۷: جواب معادله  $[x] + [3x] = 2$  یک بازه است حداکثر طول این بازه کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲)  $\frac{2}{3}$       (۳) ۱      (۴)  $\frac{4}{3}$



$[x] + [3x] = 2 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1 \Rightarrow \text{طول بازه} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

سؤال ۸: در مجموعه جواب معادله‌ی  $\left[\frac{x}{3}\right] = 3 + \left[-\frac{x}{3}\right]$  چند عدد صحیح وجود دارد.

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

$$\left[\frac{x}{3}\right] - \left[-\frac{x}{3}\right] = 3$$

$$[-u] = \begin{cases} -[u] & u \in Z \\ -[u] - 1 & u \notin Z \end{cases}$$

$$\frac{x}{3} \in Z : \left[\frac{x}{3}\right] - \left(-\left[\frac{x}{3}\right]\right) = 3 \Rightarrow 2\left[\frac{x}{3}\right] = 3 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = \frac{3}{2} \quad \text{غ ق ق}$$

$$\frac{x}{3} \notin Z : \left[\frac{x}{3}\right] - \left(-\left[\frac{x}{3}\right] - 1\right) = 3 \Rightarrow 2\left[\frac{x}{3}\right] + 1 = 3 \Rightarrow 2\left[\frac{x}{3}\right] = 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = 1 \xrightarrow{x \notin Z}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{3} < 2 \Rightarrow 3 < x < 6 \xrightarrow{x \in Z} x = 4, 5$$

سؤال ۹: برد تابع  $f(x) = \begin{cases} [x] & ; x < -1 \\ x & ; x \geq -1 \end{cases}$  کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۱, +∞)      ۲ (۱, ۲)      ۳ [۱, ۲]      ۴ (۰, ۲)

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم  $[x] + 1 > x \geq [x]$  بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} [x] \leq x \xrightarrow{x < -1} \frac{[x]}{x} \geq \frac{x}{x} \Rightarrow \frac{[x]}{x} \geq 1 \\ [x] + 1 > x \xrightarrow{x < -1} \frac{[x] + 1}{x} < \frac{x}{x} \Rightarrow \frac{[x]}{x} < 1 - \frac{1}{x} \\ x < -1 \Rightarrow \frac{1}{x} > -1 \Rightarrow \frac{-1}{x} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} < 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{[x]}{x} < 2$$

اشتراک  $\rightarrow 1 \leq \frac{[x]}{x} < 2$

چون به ازای  $x \geq -1$  حاصل تابع برابر ۲ می باشد، پس برد تابع  $f(x)$  بازه  $[1, 2]$  می شود.

سؤال ۱۰: اگر رابطه  $\{\Delta x\} = \Delta[x] + 2$  برقرار باشد دقیق ترین محدوده  $P = x - [x]$  کدام است؟

- ۱ (۱)  $0 \leq P < \frac{1}{5}$       ۲ (۲)  $\frac{1}{5} \leq P < \frac{2}{5}$       ۳ (۳)  $\frac{2}{5} \leq P < \frac{3}{5}$       ۴ (۴)  $\frac{3}{5} \leq P < \frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه ۳

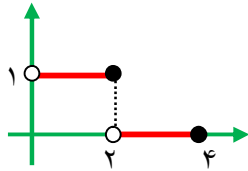
اگر جزء اعشار  $x$  را  $P$  در نظر بگیریم آنگاه:

$$x = [x] + P \Rightarrow x - [x] = P \quad (0 \leq P < 1)$$

$$\{\Delta x\} = \Delta[x] + 2 \Rightarrow \{\Delta([x] + P)\} = \Delta[x] + 2 \Rightarrow \Delta[x] + \{\Delta P\} = \Delta[x] + 2$$

$$\Rightarrow \{\Delta P\} = 2 \Rightarrow 2 \leq \Delta P < 3 \Rightarrow \frac{2}{5} \leq \Delta P < \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2}{5} \leq x - [x] < \frac{3}{5}$$

سؤال ۱۱: شکل رو به رو قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = [ax] + b$  است.  $a + b$  کدام است؟



- ۱ (۱)
- ۱/۵ (۲)
- ۲ (۳)
- ۲/۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدای پاره فط باز و انتهای آنها بسته است پس  $a < 0$  طول پاره فط ها برابر ۲ است بنابراین:

$$\frac{1}{|a|} = 2 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \left[ -\frac{x}{2} \right] + b$$

با توجه به شکل  $f(2) = 1$  در نتیجه:

$$f(2) = \left[ -\frac{2}{2} \right] + b = 1 \Rightarrow -1 + b = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$a + b = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

سؤال ۱۲: اگر  $\alpha, \beta$  ریشه  $x^2 - 2x - 4 = 0$  باشند،  $[\alpha] + [\beta]$  چه عددی است؟

- ۱ (۱)
- ۱ (۲)
- ۲ (۳)
- ۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا ریشه های معادله  $x^2 - 2x - 4 = 0$  را به دست می آوریم:

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 + \sqrt{5} \\ \beta = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 < \alpha < 4 \Rightarrow [\alpha] = 3 \\ -2 < \beta < -1 \Rightarrow [\beta] = -2 \end{cases} \Rightarrow [\alpha] + [\beta] = 3 - 2 = 1$$

سؤال ۱۳: مقدار  $[\sqrt{10 + 4\sqrt{6}}]$  کدام است؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۵ (۳)
- ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

به کمک مربع سازی عدد  $10 + 4\sqrt{6}$  را به صورت مربع حاصل جمع دو عدد می نویسیم:

$$(a + b)^2 = 10 + 4\sqrt{6} \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = \underbrace{10}_{a^2 + b^2} + \underbrace{4\sqrt{6}}_{2ab}$$

$$\left. \begin{aligned} 2ab &= 4\sqrt{6} \\ a^2 + b^2 &= 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow ab = 2\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{6} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 10 + 4\sqrt{6} = (\sqrt{6} + 2)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{10 + 4\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{6} + 2)^2} = \sqrt{6} + 2 \Rightarrow [\sqrt{10 + 4\sqrt{6}}] = [\sqrt{6} + 2] = 4$$

سؤال ۱۴: اگر  $[2x] = 2x - 0/7$  مقدار  $x$  کدام می تواند باشد؟

- ۳/۷ (۱)      ۰/۶۵ (۲)      ۲/۶۵ (۴)      -۳/۷ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

مطابق تعریف برای هر عدد مانند  $t$  داریم  $t = [t] + p$  که در آن  $p$  را قسمت اعشاری  $t$  گوئیم که  $0 \leq p < 1$  است. در نتیجه قسمت اعشاری هر عدد برابر تفاضل آن عدد از جزء صحیح آن است:  $p = t - [t]$   
اگر فرض کنیم  $2x = t$  است داریم:

$$[2x] = 2x - 0/7 \xrightarrow{2x=t} [t] = t - 0/7 \Rightarrow t - [t] = 0/7$$

با توجه به اینکه  $2x = t$  است پس گزینه ای که قسمت اعشاری دو برابر آن برابر  $0/7$  است پاسخ سوال است.

- ۱)  $x = 3/7 \Rightarrow t = 2x = 6/7 \Rightarrow t - [t] = 6/7 - 0 = 6/7$   
۲)  $x = -0/65 \Rightarrow t = 2x = -0/65 \Rightarrow t - [t] = -0/65 - (-1) = 1 - 0/65 = 0/65$   
۳)  $x = 2/65 \Rightarrow t = 2x = 4/65 \Rightarrow t - [t] = 4/65 - 0 = 4/65$   
۴)  $x = -3/7 \Rightarrow t = 2x = -6/7 \Rightarrow t - [t] = -6/7 - (-1) = 1 - 6/7 = 0/7$

سؤال ۱۵: در یک دایره به شعاع  $\sqrt{3}$  مساحت  $S$  و محیط  $l$  می باشد  $[S] + [l]$  کدام است؟

- ۱۵ (۱)      ۱۸ (۲)      ۱۹ (۳)      ۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$\text{محیط} = 2\pi r \Rightarrow L = 2\pi \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi = \sqrt{4 \times 3} \times \pi = \sqrt{12}\pi$$

$$\text{مساحت} = \pi r^2 \Rightarrow S = \pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

می دانیم  $9 < \pi^2 < 10$  پس:

$$9 \times 12 < 12\pi^2 < 10 \times 12 \Rightarrow 108 < 12\pi^2 < 120 \Rightarrow \sqrt{\frac{108}{39}} < \sqrt{12\pi^2} < \sqrt{\frac{120}{95}} \Rightarrow [\sqrt{12\pi^2}] = 10$$

$$[3\pi] = 9 \Rightarrow [S] + [L] = 9 + 10 = 19$$

سؤال ۱۶: اگر  $x^2 + x < 0$  حاصل  $[x^2] - 2[x]$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      -۱ (۳)      -۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow \underbrace{x}_{x=0} \underbrace{(x+1)}_{x=-1} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccc} x & & -1 & 0 \\ \hline x(x+1) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$$

پس باید  $0 < x < -1$  باشد تا  $x^2 + x < 0$  شود در نتیجه:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1$$

$$[x^2] - 2[x] = 0 - 2(-1) = 2$$

سؤال ۱۷: اگر  $(2 + \sqrt{3})^6 + (2 - \sqrt{3})^6 = 2702$  مقدار  $[(2 + \sqrt{3})^6]$  چقدر از  $[(2 - \sqrt{3})^6]$  بیشتر است؟

- ۲۷۰۱ (۱)      ۲۷۰۲ (۲)      ۱۳۵۰ (۳)      ۱۳۵۱ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

عدد  $2 - \sqrt{3}$  عددی است بین صفر و یک در نتیجه توان ششم آن نیز عددی بین صفر و یک است اگر این عدد را  $\alpha$  بنامیم داریم:

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})^6 = 2702 - \alpha \Rightarrow 2701 < (2 - \sqrt{3})^6 < 2702 \\ \alpha = (2 - \sqrt{3})^6 \Rightarrow 0 < \alpha < 1 \Rightarrow [(2 - \sqrt{3})^6] = 0 \end{cases}$$

پس عدد  $(2 - \sqrt{3})^6$  عددی بین  $2701$  و  $2702$  است در نتیجه جزء صحیح آن  $2701$  است پس:

$$[(2 - \sqrt{3})^6] - [(2 - \sqrt{3})^6] = 2701$$

سؤال ۱۸: جواب معادله  $[x]^2 + 5[x] + 6 = 0$  بازه  $[a, b]$  است مقدار  $b - a$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

اگر فرض کنیم  $[x] = t$  است داریم:

$$[x]^2 + 5[x] + 6 = 0 \Rightarrow t^2 + 5t + 6 = 0$$

معادله فوق یک معادله درجه دوم است به کمک تجزیه مقادیر  $t$  را مناسبه می‌کنیم:

$$(t + 2)(t + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -3 \end{cases}$$

با توجه به آن که  $t = [x]$  است داریم:

$$[x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

$$[x] = -3 \Rightarrow -3 \leq x < -2$$

از اجتماع دو بازه فوق عبور  $X$  به دست می‌آید:  $x \in ([-2, -1) \cup [-3, -2)) = [-3, -1)$  پس  $b - a = 2$  است.

سؤال ۱۹: اگر  $[x - 2[x]] = k + [x]$  دارای جواب باشد  $k$  کدام می‌تواند باشد؟

- ۱۶- (۱)       $\frac{33}{2}$  (۲)      ۱۷ (۳)       $\frac{31}{3}$  (۴)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم  $2[x]$  عدد صحیحی است پس در حاصل جمع با  $X$  می‌تواند مطابق خاصیت  $[x + k] = [x] + k (k \in \mathbb{Z})$  از جزء صحیح فارغ شود:

$$[x - 2[x]] = [x] - 2[x] \Rightarrow [x - 2[x]] = k + [x] \Rightarrow [x] - 2[x] = k + [x] \Rightarrow -2[x] = k$$

با توجه به آن که  $[x]$  عدد صحیحی است پس  $-2[x]$  عددی زوج است پس  $k$  باید عددی زوج باشد. تنها گزینه ای که عددی زوج است (۱) است.

سؤال ۲۰: اگر  $(2 + \sqrt{3})^5 + (2 - \sqrt{3})^5 = 724$  باشد جزء صحیح عدد  $(2 + \sqrt{3})^5$  کدام است؟

- ۷۲۲ (۱)      ۷۲۳ (۲)      ۷۲۴ (۳)      ۷۲۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

با تعیین معروده  $(2 + \sqrt{3})^5$  جزء صحیح آن را به دست می آوریم:

$$(2 + \sqrt{3})^5 = 724 - (2 - \sqrt{3})^5$$

$$0 < 2 - \sqrt{3} < 1 \Rightarrow 0 < (2 - \sqrt{3})^5 < 1 \Rightarrow -1 < -(2 - \sqrt{3})^5 < 0$$

$$\Rightarrow 723 < 724 - (2 - \sqrt{3})^5 < 724$$

یعنی عبارت  $(2 - \sqrt{3})^5$  عددی بین ۷۲۳ و ۷۲۴ است بنابراین جزء صحیح آن برابر ۷۲۳ می باشد.

سؤال ۲۱: مجموعه جواب معادله  $\left\lfloor \frac{2x-1}{x} \right\rfloor = 3$  به صورت بازه  $[a, b)$  می باشد. مقدار  $a + b$  کدام است؟

- $-\frac{1}{2}$  (۱)      -۱ (۲)       $-\frac{3}{2}$  (۳)      صفر (۴)

پاسخ: گزینه ۳

با استفاده از تعریف  $\lfloor x \rfloor = k \Leftrightarrow k \leq x < k + 1 (k \in Z)$  داریم:

$$\left\lfloor \frac{2x-1}{x} \right\rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq \frac{2x-1}{x} < 4 \Rightarrow 3 \leq 2 - \frac{1}{x} < 4 \Rightarrow 1 \leq -\frac{1}{x} < 2$$

از نامساوی  $1 \leq -\frac{1}{x} < 2$  نتیجه می گیریم  $-\frac{1}{x}$  تماماً مثبت است. از طرفی می دانیم اگر  $a$  و  $b$  مثبت باشند و  $a > b$  آنگاه

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

$$1 \leq -\frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < -x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow a + b = -1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

سؤال ۲۲: اگر  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \text{زوج } [x] \\ x^2-1 & ; \text{فرد } [x] \end{cases}$  باشد حاصل  $f(\cos 3^\circ) + f(\cot 3^\circ)$  کدام است؟

- صفر (۱)      ۱ (۲)       $\sqrt{3} + 3$  (۳)       $\sqrt{3} + 2$  (۴)

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم  $\cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ ،  $\left\lfloor \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rfloor = 0$  می باشد حال چون صفر عددی زوج است پس برای مناسبه  $f(\cos 3^\circ)$  از

ضابطه اول استفاده می کنیم:

$$f(\cos 3^\circ) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \sqrt{3} + 1$$

همپنین  $f(\cos 3^\circ) = \sqrt{3}$ ,  $f(\cot 3^\circ) = \sqrt{3}$  می باشد. چون اعدادی فرد است، پس برای مناسبه  $f(\cot 3^\circ)$  از ضابطه دوام استفاده می کنیم:

$$f(\cot 3^\circ) = f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow f(\cos 3^\circ) + f(\cot 3^\circ) = \sqrt{3} + 1 + 2 = \sqrt{3} + 3$$

سؤال ۳۳: مجموعه  $A = \left\{ \left[ x^2 + \frac{1}{2} \right] \mid |x+1| < 3 \right\}$  چند عضو دارد؟

- ۱۷ (۱)      ۱۶ (۲)      ۱۳ (۳)      ۱۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

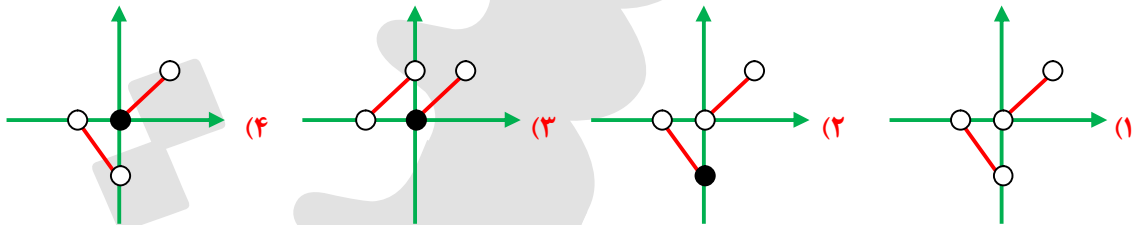
ابتدا از نامساوی  $|x+1| < 3$  مفروضه  $x$  را به دست آورده و سپس از روی آن مفروضه  $x^2 + \frac{1}{2}$  را تعیین می کنیم:

$$|x+1| < 3 \Rightarrow -3 < x+1 < 3 \Rightarrow -4 < x < 2$$

$$-4 < x < 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 < 16 \Rightarrow 0 \leq x^2 + \frac{1}{2} < 16 \Rightarrow \left[ x^2 + \frac{1}{2} \right] = 0, 1, 2, \dots, 16$$

پس مجموعه  $A$ ، ۱۷ عضو دارد.

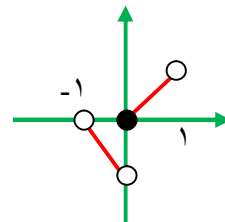
سؤال ۳۴: نمایش هندسی  $y = |x| + [x]$  در فاصله  $-1 < x < 1$  کدام است؟



پاسخ: گزینه ۳

راه اول) با استفاده از جدول زیر نمودار تابع را رسم می کنیم:

$x$	$-1 < x < 0$	$0 \leq x < 1$
$[x]$	$-1$	$0$
$y =  x  + [x]$	$y = -x - 1$	$y = x + 0$

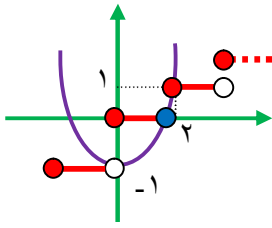


راه دوم (عددگذاری) با تعیین مقادیر  $f(0) = 0$ ,  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$  تنها گزینه ای که این شرایط را دارد گزینه ۳ است.

سؤال ۳۵: معادله  $\left[ \frac{x}{2} \right] = x^2 - 1$  چند جواب دارد؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱



از روش هندسی استفاده کرده و نمودارهای  $y = \left[ \frac{x}{2} \right]$  و  $y = x^2 - 1$  را رسم می‌کنیم. برای رسم

$y = \left[ \frac{x}{2} \right]$  کافی است طول تمام نقاط  $y = [x]$  را در ۲ ضرب کنیم. (انبساط در راستای

معمودات) با توجه به شکل دو نمودار فقط در یک نقطه مشترک هستند.

سؤال ۱۶: اگر مجموعه جواب نامعادله  $4 < [2[x] + 1 + x] < 6$  به صورت بازه  $(a, b)$  باشد مقدار  $b - 2a$  کدام

است؟

- ۵ (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

می‌دانیم اگر  $k \in \mathbb{Z}$   $2 < [x] < 5$  آنگاه  $[x + k] = [x] + k$  بنابراین:

$$[2[x] + 1 + x] = 2[x] + 1 + [x] = 3[x] + 1$$

$$-6 < 3[x] + 1 < 4 \Rightarrow -7 < 3[x] < 3 \Rightarrow -\frac{7}{3} < [x] < 1 \Rightarrow -2 \leq x < 1 \Rightarrow b - 2a = 1 - 2(-2) = 5$$

شاید قبلی‌هاها به این نامساوی‌ها برافورد کردی. مثلاً  $2 < [x] < 5$  یا  $6 \leq [x] < 9$  یا ... و ممکنه دنبال رابطه‌ای برای حل این سوال‌ها رفته باشی. ولی هیچ رابطه‌ای نمی‌فوار. فقط چند تا عدد اطراف دو سر بازه بره تا مفروضه جواب‌ها رو بتونی پیدا کنی. در این جا مجموعه جواب به ترتیب  $5 < x \leq 7$  و  $2 \leq x \leq 5$  همیشه.

سؤال ۱۷: اگر  $[x^2] = 0$  باشد حاصل  $\sqrt{x^2 - 2x\sqrt{x} + x} + \sqrt{1 + x - 2\sqrt{x}}$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۱ - x (۲)      1 - \sqrt{x} (۳)      1 - [x] (۴)

پاسخ: گزینه ۲

هر دو عبارت زیر رادیکال به صورت مربع کامل هستند بنابراین:

$$\sqrt{x^2 - 2x\sqrt{x} + x} + \sqrt{1 + x - 2\sqrt{x}} = \sqrt{(x - \sqrt{x})^2} + \sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2} = |x - \sqrt{x}| + |\sqrt{x} - 1|$$

چون  $[x^2] = 0$  پس  $0 \leq x < 1$  است. از طرفی دامنه عبارت بالا  $x \geq 0$  می‌باشد. بنابراین مفروضه  $0 \leq x < 1$  به صورت  $0 \leq x < 1$  در می‌آید و می‌دانیم در این بازه  $\sqrt{x} \geq x$  و  $\sqrt{x} \leq 1$  است پس داریم:

$$|x - \sqrt{x}| + |\sqrt{x} - 1| = \sqrt{x} - x + 1 - \sqrt{x} = 1 - x$$

سؤال ۱۸: اگر جواب معادله  $-\frac{x}{2} - [x] = -2$  به صورت بازه  $(a, b)$  باشد، بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۲/۵ (۳)      ۴ (۴)



پاسخ: گزینه ۲

از رابطه  $[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$  می توان نتیجه گرفت  $[x] = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right]$  بنابراین:

$$\left[\frac{x}{2} - [x]\right] = -2 \xrightarrow{[x] \in \mathbb{Z}} \left[\frac{x}{2}\right] - [x] = -2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right] = -2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right] = 2 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{2} < 3 \Rightarrow 1/5 \leq \frac{x}{2} < 2/5 \Rightarrow 3 \leq x < 5 \Rightarrow a = 3, b = 5, b - a = 2$$

سؤال ۲۹: برد تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x & ; x < 0 \\ [x] & ; \\ 0 & ; x \geq 0 \end{cases}$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, 0]$       (۲)  $[0, 1]$       (۳)  $(0, 1)$       (۴)  $[0, +\infty)$

پاسخ: گزینه ۲

می دانیم  $[x] \leq x$  بنابراین  $1 \geq \frac{x}{[x]}$   $x < 0 \rightarrow$

پون  $x, [x]$  در بازه  $(-\infty, 0)$  هم علامت هستند پس  $\frac{x}{[x]}$  همواره مثبت است و داریم:  $0 < \frac{x}{[x]} \leq 1$

$$\begin{cases} x < 0 \Rightarrow 0 < y \leq 1 \\ x \geq 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow R_y = [0, 1]$$

سؤال ۳۰: اگر مجموعه جواب معادله  $\left[x - \frac{1}{3}\right] + \left[x - \frac{4}{3}\right] + \left[x - \frac{7}{3}\right] = 3$  به صورت بازه  $[a, b)$  باشد مقدار

$b - a$  کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

می دانیم اگر  $k \in \mathbb{Z}$  باشد آنگاه  $[x + k] = [x] + k$  بنابراین:

$$\left[x - \frac{1}{3}\right] + \left[x - \frac{1}{3} - 1\right] + \left[x - \frac{1}{3} - 2\right] = 3 \Rightarrow \left[x - \frac{1}{3}\right] + \left[x - \frac{1}{3}\right] - 1 + \left[x - \frac{1}{3}\right] - 2 = 3$$

$$\Rightarrow 3 \left[x - \frac{1}{3}\right] = 6 \Rightarrow \left[x - \frac{1}{3}\right] = 2 \Rightarrow 2 \leq x - \frac{1}{3} < 3 \Rightarrow \frac{7}{3} \leq x < \frac{10}{3} \Rightarrow b - a = \frac{10}{3} - \frac{7}{3} = 1$$

سؤال ۳۱: برد تابع  $y = \sqrt{x - 3} \left[\frac{x - 3}{3}\right]$  شامل چند عدد صحیح می باشد؟

- (۱) صفر      (۲) ۳      (۳) ۲      (۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴

می دانیم  $0 \leq U - [U] < 1$  باشد پس:

$$y = \sqrt{x - 3 \left[ \frac{x}{3} - 1 \right]} = \sqrt{x - 3 \left[ \frac{x}{3} \right] + 3} = \sqrt{3 \left( \frac{x}{3} - \left[ \frac{x}{3} \right] \right) + 3}$$

$$0 \leq \frac{x}{3} - \left[ \frac{x}{3} \right] < 1 \Rightarrow 3 \leq 3 \left( \frac{x}{3} - \left[ \frac{x}{3} \right] \right) + 3 < 6 \Rightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{3 \left( \frac{x}{3} - \left[ \frac{x}{3} \right] \right) + 3} < \sqrt{6}$$

بنابراین برد تابع بازه  $[\sqrt{3}, \sqrt{6}]$  است که شامل یک عدد صحیح ۲ می باشد.

سؤال ۳۲: مجموعه جواب معادله  $[x - 2] + 3[1 - x] = 6$  به صورت بازه  $(a, b)$  می باشد مقدار  $a - 2b$  کدام

است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا اعداد صحیح را از درون پارکنت فارج می کنیم:  $[x] + 3[-x] = 5 \Rightarrow [x] - 2 + 3(1 + [-x]) = 6 \Rightarrow [x] + 3[-x] = 5$   
در دو حالت  $x \notin Z, x \in Z$  معادله را حل می کنیم:

$$\begin{cases} x \in Z \Rightarrow x + 3(-x) = 5 \Rightarrow -2x = 5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{با توجه به شرط قابل قبول نیست} \\ x \notin Z \xrightarrow{[-x] = -1 - [x]} [x] + 3(-1 - [x]) = 5 \Rightarrow -2[x] = 8 \\ \Rightarrow [x] = -4 \Rightarrow -4 \leq x < -3 \xrightarrow{x \notin Z} -4 < x < -3 \\ \Rightarrow z - 2b = -4 - 2(-3) = 2 \end{cases}$$

سؤال ۳۳: دامنه تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{-2[x]^2 + [x] + 1}}{(2x)!}$  شامل چند عضو است؟

- ۱) بی شمار      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)      ۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

می دانیم تابع  $(2x)! = y$  به ازای مقادیری از  $x$  تعریف می شود که  $2x$  متعلق به مجموعه اعداد حسابی باشد پس داریم:

$$2x = k, k \in W \Rightarrow x = \frac{k}{2}, k \in W \Rightarrow \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots \right\}$$

از طرفی زیر رادیکال باید نامنفی باشد بنابراین باید  $-2[x]^2 + [x] + 1 \geq 0$  باشد:

$$[x] = t \Rightarrow -2t^2 + t + 1 \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq [x] \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

هم چنین می دانیم همواره  $(2x)! \neq 0$  است حال دامنه تابع  $f(x)$  را می یابیم:

$$D_{f(x)} = [0, 2) \cap \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} \right\}$$

در نتیجه دامنه تابع  $f(x)$  شامل ۴ عضو می باشد.

سؤال ۳۴: مجموعه جواب معادله  $[x + [x]] = 3$  کدام است؟

- (۱)  $[2, 3)$  (۲)  $[1, 2)$  (۳)  $[0, 1)$  (۴)  $\emptyset$

پاسخ: گزینه ۴

می دانیم اگر  $k \in \mathbb{Z}$  باشد آنگاه:  $[x + k] = [x] + k$

از آنجا که است بنابراین:

$$[x + [x]] = 3 \Rightarrow [x] + [x] = 3 \Rightarrow 2[x] = 3 \Rightarrow [x] = \frac{3}{2}$$

فروبی جزء صحیح همواره عددی صحیح است و هیچگاه برابر  $\frac{3}{2}$  نمی شود پس معادله بالا جواب ندارد.

سؤال ۳۵: مجموعه جواب معادله  $3[x] - [x - 1] = 5$  کدام است؟

- (۱)  $[1, 3)$  (۲)  $[2, 3)$  (۳)  $[2, 4)$  (۴)  $[3, 4)$

پاسخ: گزینه ۲

$$3[x] - [x - 1] = 5 \Rightarrow 3[x] - ([x] - 1) = 5 \Rightarrow 2[x] + 1 = 5 \Rightarrow 2[x] = 4 \Rightarrow [x] = 2$$

$$\Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow x \in [2, 3)$$

سؤال ۳۶: مجموعه جواب معادله  $[x]^2 + 12 = 7[x]$  کدام است؟

- (۱)  $[3, 4)$  (۲)  $[4, 5)$  (۳)  $[3, 5)$  (۴)  $[3, 5)$

پاسخ: گزینه ۴

با فرض  $[x] = A$  (\*) داریم:

$$A^2 + 12 = 7A \Rightarrow A^2 - 7A + 12 = 0 \Rightarrow (A - 3)(A - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \xrightarrow{(*)} [x] = 3 \\ \text{یا} \\ A = 4 \xrightarrow{(*)} [x] = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x < 4 \\ 4 \leq x < 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} 3 \leq x < 5 \Rightarrow x \in [3, 5)$$

سؤال ۳۷: مجموعه جواب نامعادله  $|2[x] + 1| < 2$  به صورت  $[a, b)$  است  $a - b$  کدام است؟

- (۱)  $-4$  (۲)  $-3$  (۳)  $-2$  (۴)  $-1$

پاسخ: گزینه ۳

اول باید یک نامعادله قدرمطلقى حل کنیم:

$$|2[x] + 1| < 2 \Rightarrow -2 < 2[x] + 1 < 2 \Rightarrow -3 < 2[x] < 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} < [x] < \frac{1}{2}$$

با توجه به این که  $[x] \in \mathbb{Z}$  است بنابراین با توجه به هر دو  $[x]$  داریم:

$$\begin{cases} [x] = -2 \Rightarrow -1 \leq x < 0 \\ [x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} -1 \leq x < 1$$

مجموعه جواب  $[a, b) = [-1, 1) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a - b = -2$

سؤال ۳۸: اگر مجموعه جواب معادله  $\left[\frac{1}{2} - x\right] + \left[\frac{3}{2} - x\right] = 5$  به صورت  $(a, b)$  باشد  $a$  کدام است؟

- (۱) -۲      (۲) -۲/۵      (۳) -۳      (۴) -۳/۵

پاسخ: گزینه ۲

در جزء صحیح دو  $\frac{3}{2}$  را به صورت  $1 + \frac{1}{2}$  می نویسیم تا بتوانی عبارت های یکسان ایجاد کنیم:

$$\left[\frac{1}{2} - x\right] + \left[1 + \frac{1}{2} - x\right] = 5$$

اعددی صحیح است پس می تواند از جزء صحیح بیرون بیاید.

$$\left[\frac{1}{2} - x\right] + \left[\frac{1}{2} - x\right] + 1 = 5 \Rightarrow 2\left[\frac{1}{2} - x\right] = 4 \Rightarrow \left[\frac{1}{2} - x\right] = 2$$

$$\Rightarrow 2 \leq \frac{1}{2} - x < 3 \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \leq -x < \frac{5}{2} \xrightarrow{\times(-1)} -\frac{5}{2} < x \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{5}{2} = -2.5$$

سؤال ۳۹: معادله  $x = \sqrt{2} - [x]$  چند جواب حقیقی دارد؟

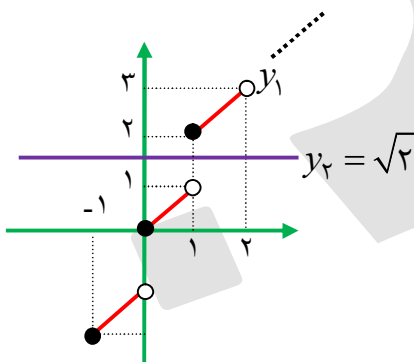
- (۱) صفر      (۲) ۱      (۳) ۲      (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۱

معادله را به صورت زیر مرتب می کنیم:

$$x = \sqrt{2} - [x] \Rightarrow x + [x] = \sqrt{2}$$

حالا از روش رسم استفاده می کنیم:  $\underbrace{x + [x]}_{y_1} = \underbrace{\sqrt{2}}_{y_2}$



با توجه به شکل نمودارهای  $y_1$  و  $y_2$  در هیچ نقطه ای متقاطع نیستند پس معادله جواب حقیقی ندارد.

سؤال ۴۰: اگر  $[x + y] = [x] + [y + 1]$  آنگاه حدود  $x + y - [x + 1] - [y]$  کدام است؟

- (۱)  $(0, 1)$       (۲)  $(-1, 0)$       (۳)  $(-1, 0)$       (۴)  $(0, 1)$

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا توجه کنید که:

$$[y+1] = [y] + 1 \Rightarrow [x+y] = [x] + [y] + 1 \quad (*)$$

هم چنین در عبارت داده شده داریم:

$$[x+1] = [x] + 1 \Rightarrow x + y - [x] - 1 - [y] \Rightarrow x + y - [x] - [y] - 1 \Rightarrow x + y - ([x] - [y] + 1)$$

با توجه به (\*) خواهیم داشت:

$$\text{عبارت} = x + y - [x + y]$$

$$\text{از آن جا که } 0 \leq x - [x] < 1 \text{ بنابراین: } 0 \leq x + y - [x + y] < 1$$

سؤال ۴۱: اگر  $f(x) = \frac{[-x]}{1-[x]}$  آنگاه  $f\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)$  کدام است؟

۰/۵ (۴)

۰/۲۵ (۳)

۱ (۲)

۰/۷۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا عدد  $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$  را گویا می کنیم:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = -(1+\sqrt{2})$$

از آن جا که  $\sqrt{2} = 1/4$  بنابراین:

$$-(1+\sqrt{2}) = -2/4 \Rightarrow \begin{cases} [-x] = [-(-2/4)] = [2/4] = 2 \\ [x] = [-2/4] = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{1-(-3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0/5$$

سؤال ۴۲: اگر  $|x-1| < 1$  باشد مجموعه جواب  $\left[-\frac{1}{x+1}\right]$  کدام است؟

{1} (۴)

{0,1} (۳)

{0,-1} (۲)

{-1} (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$|x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

حالا عدد  $-\frac{1}{x+1}$  را می یابیم:

$$0 < x < 2 \xrightarrow{+1} 1 < x+1 < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x+1} < 1$$

$$\Rightarrow -1 < -\frac{1}{x+1} < -\frac{1}{3} \Rightarrow \left[-\frac{1}{x+1}\right] = -1$$

سؤال ۴۳: معادله  $x^2 + 2x = [x] - x$  چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

پون  $x \in Z$  است پس می توانیم  $[x]$  را از عبارت  $[x] - x$  خارج کنیم.

$$[x] + [-x] = x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \notin Z : -1 = x^2 + 2x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \\ x \in Z : 0 = x^2 + 2x \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0, -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \notin Z : x = -1 \quad \text{غ ق ق} \\ x \in Z : x = 0, -2 \quad \checkmark \end{cases}$$

سؤال ۴۴: مجموع ریشه های معادله  $x - \frac{1}{x} = [x]$  در بازه ی  $(0, 10)$  کدام است؟

- (۱) ۴۵ (۲) ۴۰ (۳) ۵۰ (۴) ۵

پاسخ: گزینه (۳)

$$x - [x] = \frac{1}{x} \Rightarrow x = [x] + \frac{1}{x} \xrightarrow{x \in (0, 10)} x = 0 + \frac{1}{x}, 1 + \frac{1}{x}, 2 + \frac{1}{x}, \dots, 9 + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه ها} = (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9) + 10 \times \frac{1}{x} = 45 + 5 = 50$$

سؤال ۴۵: اگر به ازای هر عدد حقیقی  $a$  و  $b > 0$  ،  $a - c = \left[\frac{a}{b}\right]b$  آنگاه:

- (۱)  $0 \leq c < b$  (۲)  $b \leq c < 0$  (۳)  $0 \leq c < a$  (۴)  $a \leq b$

پاسخ: گزینه (۱)

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \left[\frac{a}{b}\right] \Rightarrow \frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right] = \frac{c}{b}$$

از طرفی  $0 \leq \frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right] < 1$  ، پس  $0 \leq \frac{c}{b} < 1$  و از آن جا  $0 \leq c < b$ .

سؤال ۴۶: معادله ی  $\frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3}\right] = \left[\frac{x}{2}\right] + 3$  چند ریشه دارد؟

- (۱) بی شمار (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۱

پاسخ: گزینه (۴)

می دانیم  $0 \leq \frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3}\right] < 1$  است. از طرفی سمت راست تساوی همواره مقداری صحیح است، پس سمت چپ آن نیز می بایست

$$\frac{x}{3} - \left[\frac{x}{3}\right] = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} \in Z \text{ است و از آن جا } \frac{x}{3} = 0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots \text{ خواهد بود و:}$$

پس نتیجه می گیریم این معادله فقط یک ریشه  $(x = -6)$  دارد.

سؤال ۴۷: معادله ی  $[x + 4[x]] + [x - 3[x]] = 1$  دارای چند ریشه است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه (۱)

در این تست از ویژگی های (۹) و (۱۰) استفاده می کنیم.  $4[x]$  و  $-3[x]$  صحیح هستند و در نتیجه از داخل جزء صحیح بیرون می آیند، پس:

$$([x] + 4[x]) + ([x] - 3[x]) = 1 \Rightarrow 2[x] = 1 \Rightarrow [x] = \frac{1}{2} \notin Z$$

غیرقابل قبول است. پس معادله ریشه ندارد:

در دو تست بعدی از ویژگی (۱۱) هم استفاده می کنیم. ببینید:

سؤال ۴۸: معادله  $7[x] + 3[-x] = 4$  چند ریشه ی حقیقی دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه (۳)

$$\begin{cases} 7[x] - 3[x] = 4 & x \in Z \\ 7[x] + 3(-[x] - 1) = 4 & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4[x] = 4 & x \in Z \\ 4[x] = 7 & x \notin Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [x] = 1 & x \in Z \\ [x] = \frac{7}{4} & x \notin Z \end{cases} \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2 \xrightarrow{x \in Z} x = 1$$

پس معادله فقط یک جواب دارد آن هم  $x = 1$ .

سؤال ۴۹: اگر  $x \notin Z$  و  $2a = (6a - 4)[x] - x$  آنگاه  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۲

پاسخ: گزینه (۳)

$[x]$  مقداری صحیح است، بنابراین از داخل جزء صحیح بیرون می آید.

$$[[x] - x] = [x] + [-x] \xrightarrow{x \notin Z} [x] + [-x] = -1 \Rightarrow (6a - 4)(-1) = 2a \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

سؤال ۵۰: معادله  $\left[x + \frac{1}{2}\right] \left[x - \frac{3}{2}\right] = x - 5$  مفروض است، حاصل  $[x]^2 - 3[x]$  چقدر است؟

- (۱) -۴ (۲) -۵ (۳) -۶ (۴) -۷

پاسخ: گزینه (۲)

سمت چپ تساوی حاصل ضرب دو مقدار صحیح است، بنابراین سمت چپ تساوی همیشه صحیح خواهد بود و در نتیجه سمت راست تساوی و از آن جا  $x$  نیز صحیح خواهد بود. اما می دانیم مقادیر صحیح از داخل جزء صحیح بیرون می آیند. بنابراین:

$$\left(x + \left[\frac{1}{2}\right]\right) \left(x + \left[-\frac{3}{2}\right]\right) = x - 5 \Rightarrow (x)(x - 2) = x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x = x - 5 \Rightarrow x^2 - 3x = -5 \xrightarrow{x \in Z}$$

$$[x]^2 - 3[x] = -5$$

سؤال ۵۱: نامعادله  $2 \cos x - 1 > 0$  چند ریشه در بازه  $[0, 2\pi]$  دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

پاسخ: گزینه (۳)

$$[2 \cos x - 1] > 0 \Rightarrow 2 \cos x - 1 \geq 1 \Rightarrow 2 \cos x \geq 2 \Rightarrow \cos x \geq 1$$

حالت  $\cos x > 1$  که غیرممکن است، بنابراین فقط ممکن است  $\cos x = 1$  باشد و در نتیجه  $x = 0$  و  $x = 2\pi$  جواب خواهند بود.

سؤال ۵۲: اگر  $x > -1$  باشد، مجموعه جواب نامعادله  $\frac{2}{[x]} \leq -1$  دارای کدام ویژگی است؟ (گزینه ۲- ۸۶)

(۲) Min دارد  
(۴) نامتناهی است.

(۲) Max دارد  
(۳) هم Max و هم Min دارد

پاسخ: ﴿﴾

$$x > -1 \rightarrow [x] \geq -1 \quad (1)$$

$$[x] < 0 \rightarrow [x] \leq -1 \quad (2)$$

برای برقراری نامعادله  $\frac{2}{[x]} \leq -1$  باید:

$$(1) \cap (2) \rightarrow [x] = -1 \rightarrow -1 \leq x < 0 \xrightarrow{x > -1} -1 < x < 0. \text{ گزینه (۴) درست است.}$$

سؤال ۵۳: به ازای کدام یک از حالات زیر  $[x] = [y]$  است؟

$$|x - y| < 1 \quad (۴)$$

$$|x - y| < \frac{3}{2} \quad (۳)$$

$$|x - y| > 1 \quad (۲)$$

$$x = y + 1 \quad (۱)$$

پاسخ: ﴿﴾ گزینه (۴)

باید  $x, y$  بین دو عدد متوالی باشند یعنی:  $|x - y| < 1$

سؤال ۵۴: عبارت  $P = \left| x - \left[ x + \frac{5}{2} \right] \right|$  به ازای جميع مقادیر  $x$  کدام عدد زیر نمی تواند باشد؟

$$\frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{7}{3} \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$\frac{5}{2} \quad (۱)$$

پاسخ: ﴿﴾ گزینه (۴)

کلک می زنم و به داخل قدر مطلق  $\frac{5}{2}$  اضافه و کم می کنم:

$$P = \left| \left( x + \frac{5}{2} \right) - \left[ x + \frac{5}{2} \right] - \frac{5}{2} \right|$$

$$0 \leq \left( x + \frac{5}{2} \right) - \left[ x + \frac{5}{2} \right] < 1 \rightarrow -\frac{5}{2} \leq \left( x + \frac{5}{2} \right) - \left[ x + \frac{5}{2} \right] - \frac{5}{2} < -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2} < P \leq \frac{5}{2}$$

پس  $P$  هرگز  $\frac{3}{2}$  نمی تونه باشه.



همه‌ی برگ‌های من رو شد  
در دلم هرچه داشتم گفتم  
آس دل را زدی زمین، بردی  
من به حکمت به خاک می افتم  
\*\*\*

آرزویی نمانده توی دلم  
از تو سیرم از عاشقی سیرم  
حکم کردی که از تو دور شوم  
می روم... گرچه بی تو می میرم  
\*\*\*

فشت فشت من از تو بر جا بود  
این بریدن و رای فوم من است  
برگ‌هایم که ریفت فومیدم  
بافتن تا همیشه سوم من است  
\*\*\*

وای اگر حکم، حکم من باشد  
شک نکن بی درنگ می کشمت  
با همین دست‌های فون آلود  
بار دیگر به شعر می کشمت

«دکتر نوید دانایی هوشیار»