* مجانب ها *

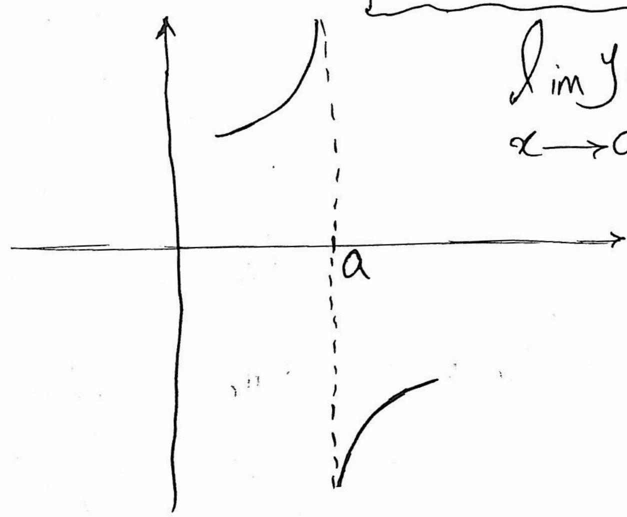
انواع مجانب: قائم، افقی، مایل

تعریف مجانب قائم:

خط $x=a$ را مجانب قائم منحنی $y=f(x)$ می‌نامیم، هرگاه با نزدیک شدن x به a، منحنی به $+\infty$ یا $-\infty$ برود. به عبارتی دیگر:

$$\text{if } x \to a \Longrightarrow \boxed{y \to \pm\infty}$$

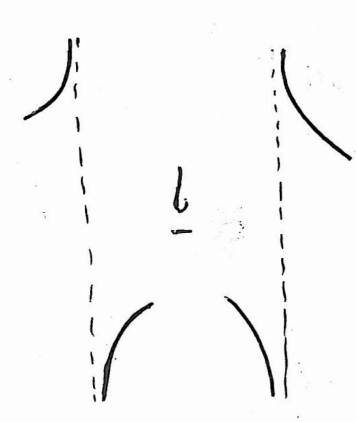
$$\lim_{x \to a} y = \pm\infty$$



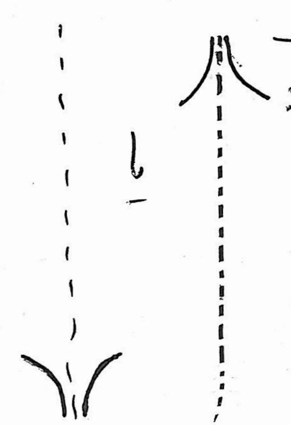
خط $x=a$ مجانب قائم

$$\lim_{x \to a^+} y = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} y = +\infty$$

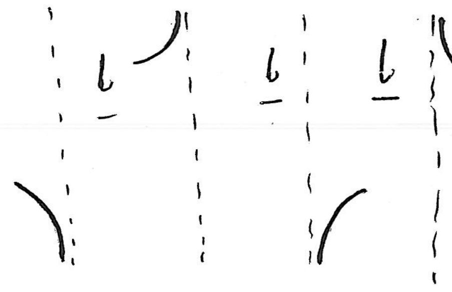
مجانب قائم ساده:



مجانب قائم مضاعف:



مجانب قائم یک طرفه : ۱) یا یا یا



برای محاسبه ی مجانب قائم :

* $x=a$ باید در دامنه ی تعریف تابع یا حداقل در همسایگی تعریف باشد

یعنی حداقل a^+ یا a^- عضو دامنه ی تعریف تابع باشد

* در توابع کسری :

ریشه ی مخرج کسر مجانب قائم است به شرطی که :

۱) ریشه ی مخرج کسر زیر رادیکال با فرجه ی زوج یا آنی لگاریتم را منفی نکند

۲) نباید ریشه ی مخرج کسر داخل Arcsin و Arccos را بیش تر از ۱ یا کمتر از ۱- کند

۳) نباید ریشه ی مخرج کسر صفر مطلق باشد

در توابعی که [ ] دارند اتفاق می افتد

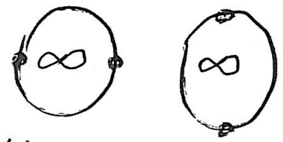
۴) نباید ریشه ی مخرج کسر، ریشه ی صورت کسر هم باشد ($\frac{0}{0}$) در این حالت باید از تابع حد بگیریم اگر

جواب حد ∞ شد قائم است

تذکر: معمولاً اگر $x=a$ ریشه ی مشترک صورت و مخرج باشد و مرتبه ی آن در مخرج از صورت بیش تر باشد، در این صورت $x=a$ مجانب قائم خواهد بود

* در توابع لگاریتم هم ریشه‌ی صورت کسر و هم ریشه‌ی مخرج کسر داخل لگاریتم مجانب قائم است (با شرط اینکه داخل لگاریتم منفی نشود)

* در توابع $\tan u$ و $\cot u$



$u = k\pi$ $\qquad$ $u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

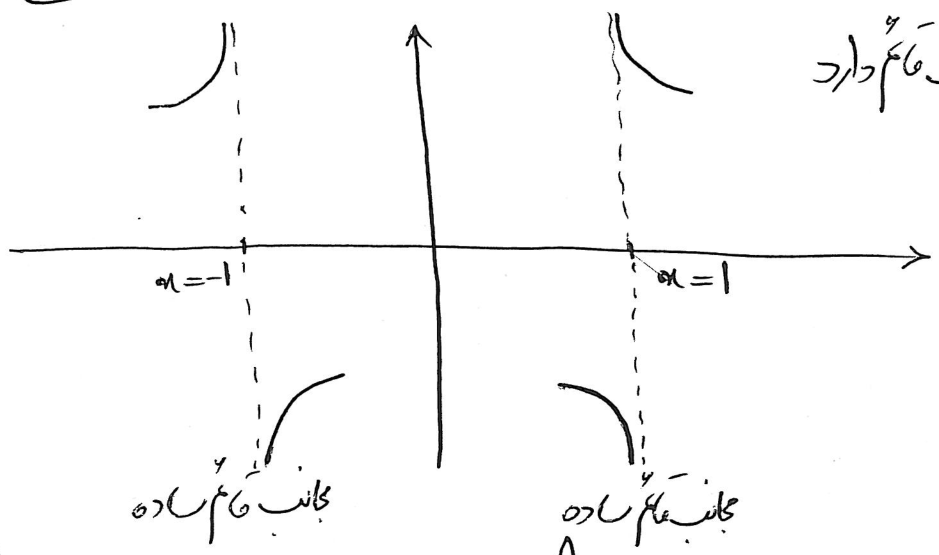
مثال:

$$* \ y = \frac{2x+3}{x^2-1}$$

$$\text{مخرج} = 0 \longrightarrow x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm 1$$

۲ مجانب قائم دارد

علت:



$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

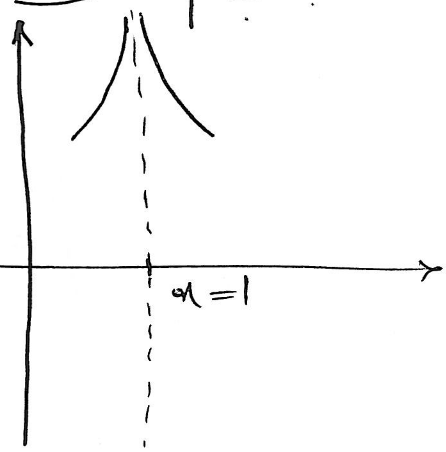
$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$*\ y=\frac{2x}{(x-1)^2}$$

مخرج $=0 \longrightarrow x=1 \longrightarrow$ یک مجانب قائم دارد

مجانب قائم مضاعف

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$



$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$*\ y=\frac{x^3-1}{x^2-1}$$

مخرج $=0 \longrightarrow x^2-1=0 \longrightarrow x=\pm 1 \longrightarrow \begin{cases} x=-1 & \text{قائم} \\ x=1 & \text{غ قائم} \end{cases}$

یک مجانب قائم دارد

روش ① $\longrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} \overset{\text{HOP}}{=\!=} \lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}\neq\infty$ غ قائم

روش ② $\longrightarrow \begin{cases} x=1 \longrightarrow \text{مرتبه‌ی ریشه در صورت} =1 \\ x=1 \longrightarrow \text{مرتبه‌ی ریشه در مخرج} =1 \end{cases} \longrightarrow$ غ قائم

ص ۳

$[u] \longrightarrow u=f(x)$

$*\ y=\dfrac{x}{[x]}$ — xهایی که u را این صورت $(0<u<1)$ می‌کنند مجانب قائم نمی‌باشند ولی بقیه مجانب قائم‌اند

$مخرج=0 \longrightarrow [x]=0 \longrightarrow 0\le x<1$

بی‌نهایت ریشه دارد ولی مخرج کسر صفر مطلق می‌شود پس اصلاً مجانب قائم ندارد

نکته: $[x]$ مجانب قائم تولید نمی‌کند

$*\ y=\dfrac{x^2+5}{x(3x-1)(4x-2)(2x-4)[x]}$

$مخرج=0 \longrightarrow x=\frac{1}{3} \longrightarrow$ مخرج را صفر مطلق می‌کند $\longrightarrow$ غ م ق

$x=\frac{2}{4} \longrightarrow$ مخرج را صفر مطلق می‌کند $\longrightarrow$ غ م ق

$x=2 \longrightarrow$ م ق

$x=0 \longrightarrow$ م ق

یک مجانب قائم دارد

$*\ y=\dfrac{x-4}{(2x-1)(2x-4)(3x-9)(4x-16)\left[\frac{x}{4}\right]}$

$مخرج=0 \longrightarrow x=\frac{1}{2} \longrightarrow$ مخرج را صفر مطلق می‌کند $\longrightarrow$ غ م ق

$x=2 \longrightarrow$ مخرج را صفر مطلق می‌کند $\longrightarrow$ غ م ق

$x=3 \longrightarrow$ م ق

$x=4 \longrightarrow$ ریشه‌ی صورت نیز بوده و درجه‌ی ریشه در مخرج با درجه‌ی ریشه در صورت برابر است $\longrightarrow$ غ م ق

یک مجانب قائم دارد

$*\ y=\dfrac{\left[\frac{x}{2}\right]}{x(x-1)(x-2)(x-3)[x-4]}$

$مخرج=0 \longrightarrow x=0 \longrightarrow$ ریشه‌ی صورت نیز می‌باشد و درجه‌ی ریشه‌ی صورت و مخرج برابر است $\longrightarrow$ غ م ق

$x=1 \longrightarrow$ 〃 $\longrightarrow$ 〃

$x=2 \longrightarrow$ م ق

$x=3 \longrightarrow$ م ق

دو مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3x}$$

مخرج $= 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow \text{زیرا رادیکال فرجه زوج را منفی می‌کند} \longrightarrow \text{غ ق ق} \\ x = 3 \longrightarrow \text{ق ق} \end{cases}$

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-6}$$

ریشه‌ها $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$

مخرج $= 0 \longrightarrow \begin{cases} x=-6 \longrightarrow \text{ق ق} \\ x = 1 \longrightarrow \text{ریشه‌ی صورت نیز می‌باشد و درجه‌ی ریشه در صورت و مخرج برابر است} \longrightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{4x-\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+7}}$$

مخرج $= 0 \longrightarrow 2x = \sqrt{3x+7}$

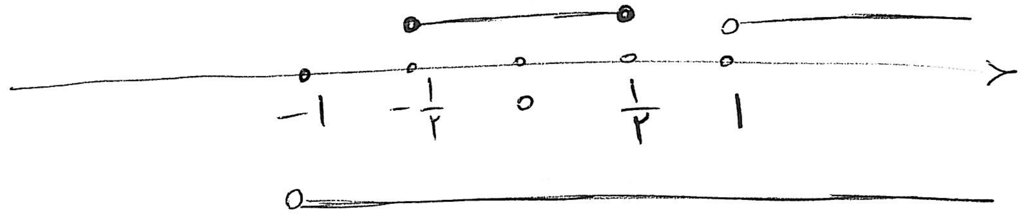
$$4x^2 = 3x+7$$

$$4x^2-3x-7=0 \begin{cases} x=-1 \longrightarrow \text{زیرا رادیکال فرجه زوج را منفی می‌کند} \longrightarrow \text{غ ق ق} \\ x = \frac{7}{4} \longrightarrow \text{ق ق} \end{cases}$$

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{1-4x^2}$$

$x > 1$ $\qquad$ $x > -1$ $\qquad$ $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$



اشتراکی بین دامنه ها وجود ندارد پس دامنه ی تابع $\varnothing$ بوده و هیچ مجانب قائمی هم در دامنه ی تابع قرار نمی گیرد

$$* \; y = \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{3x-1}}{x^2-4} + \frac{1}{x-5}$$

$x = 0 \leftarrow$ زیرا رادیکال فرجه زوج را صفر می کند

غ ق ق

$x = 2$ ق ق

$x = -2$ غ ق ق

$x = 5$ ق ق

۲ مجانب قائم دارد

$$* \; y = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \qquad y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

۱ مجانب قائم دارد

x		-3		1	
y	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
	ج				ج

مخرج $= 0 \rightarrow x = -3$

ق ق

مخرج $= 0 \rightarrow x = -3$

زیرا رادیکال فرجه زوج را صفر می کند

پس اصلا مجانب قائم ندارد

$$* \; y=\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\text{مخرج}=0 \longrightarrow x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \overset{Hop}{=} \lim \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{قائم}$$

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y=\frac{\sqrt{2x-1}}{|x+1|-3}$$

$$\text{مخرج}=0 \longrightarrow |x+1|=3 \longrightarrow \begin{cases} x+1=3 \longrightarrow x=2 \;\; \text{قائم} \\ x+1=-3 \longrightarrow x=-4 \end{cases}$$

زیرا رادیکال زیر جذر را منفی می‌کند ← غیر قائم

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y=\frac{\sin x}{x}$$

$$\text{مخرج}=0 \longrightarrow x=0 \;\; \text{غیر قائم}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq \infty$$

مجانب قائم ندارد

$$y=\frac{\tan x}{x^2}$$

$$\text{مخرج}=0 \longrightarrow x=0 \;\; \text{قائم}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\tan} x}{x^2} = \infty$$

یک مجانب قائم دارد

$$* \; y=\frac{\operatorname{Arcsin}(x+3)}{x-5}$$

$$\text{مخرج}=0 \longrightarrow x=5 \longrightarrow \text{غیر قائم}$$

کمان را بالاتر از ۱ می‌کند

مجانب قائم ندارد

ص ۵

$$* \; y = \text{Arcsin}\,\frac{1}{x}$$

$x = 0 \longrightarrow$ ققع

$\downarrow$

همان را بالاتر از ۱ و کمتر از ۱- می‌کند

مجانب قائم ندارد

$$* \; y = \log_{5}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$$

ریشه‌ی صورت

$x = 3$ قق

$x = -2$ قق $\longrightarrow$ ۲ مجانب قائم داریم

ریشه‌ی مخرج

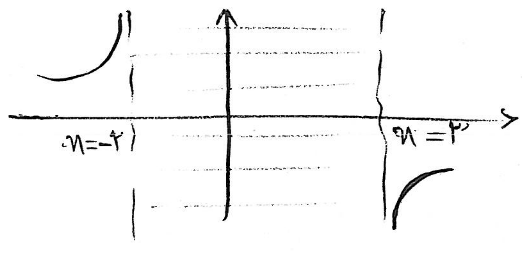
x		-2		3	
علامت	$+$	$\varnothing$	$-$	$\varnothing$	$+$
	ق				ق

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \log_5 \frac{0^+}{5} = \log_{5>1} 0^+ = -\infty \longrightarrow x = 3 \text{ مجانب قائم}$$

$$\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = \log_5 \frac{-5}{0^-} = \log_{5>1} +\infty = +\infty$$

$\downarrow$

$x = -2$ مجانب قائم است



$$*\ y=\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

ریشه‌ی صورت: $x=0 \longrightarrow$ داخل log را منفی می‌کند $\longrightarrow$ غ ق ق

ریشه‌ی مخرج: $x=5 \longrightarrow$ ق ق

یک مجانب قائم دارد

$$*\ y=\log \frac{x^2(x^2-9)}{x^2-25}$$

ریشه‌های صورت: $x=\pm 3$ ق ق ، $x=0$

ریشه‌های مخرج: $x=\pm 5$ ق ق

x		-5		-3		0		3		5	
آنی	$-$		$-$		$+$		$+$		$-$		$+$
	ج			ج		ج				ج	

چهار مجانب قائم دارد

$$*\ y=\frac{2x+5}{\sin^2 3x-\sin 3x} \qquad (0, \pi)$$

$$\text{مخرج}=0 \longrightarrow \sin 3x(\sin 3x-1)=0$$

$$\sin 3x=0 \longrightarrow 3x=k\pi \longrightarrow x=\frac{k\pi}{3} \longrightarrow x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi$$

$k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

$$\sin 3x=1 \longrightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \longrightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \longrightarrow x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$$

شش مجانب قائم دارد

نکته: در تست‌ها مجانب باز یا بسته بودن بازه تأثیری در انتخاب ندارد و در هر صورت انتخاب می‌شود

$$*y=\frac{2+\tan x}{\sin 5x} \qquad (0,\pi)$$

مخرج $=0 \longrightarrow \sin 5x=0 \longrightarrow 5x=k\pi$

$$\longrightarrow x=\frac{k\pi}{5} \longrightarrow x=\left\{0,\frac{\pi}{5},\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\pi\right\}$$

نکته: توابع tan و cot هرجا به جز مخرج کسر باشند مجانب قائم تولید می‌کنند

$$\tan x=0 \longrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \longrightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

۷ مجانب قائم دارد

$$*y=\tan 3x+\cot 2x \qquad (0,\pi)$$

برای tan $\longrightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2} \longrightarrow x=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \longrightarrow x=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right\}$

برای cot $\longrightarrow 2x=k\pi \longrightarrow x=\frac{k\pi}{2} \longrightarrow \left\{0,\frac{\pi}{2},\pi\right\}$

تکراری

۵ مجانب قائم دارد

$$*y=\frac{\sin x}{1-\cos x} \qquad \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$$

$x=0$ ریشه‌ی مخرج در بازه‌ی مورد نظر

درجه‌ی ریشه در صورت ۱ < درجه‌ی ریشه در مخرج ۲

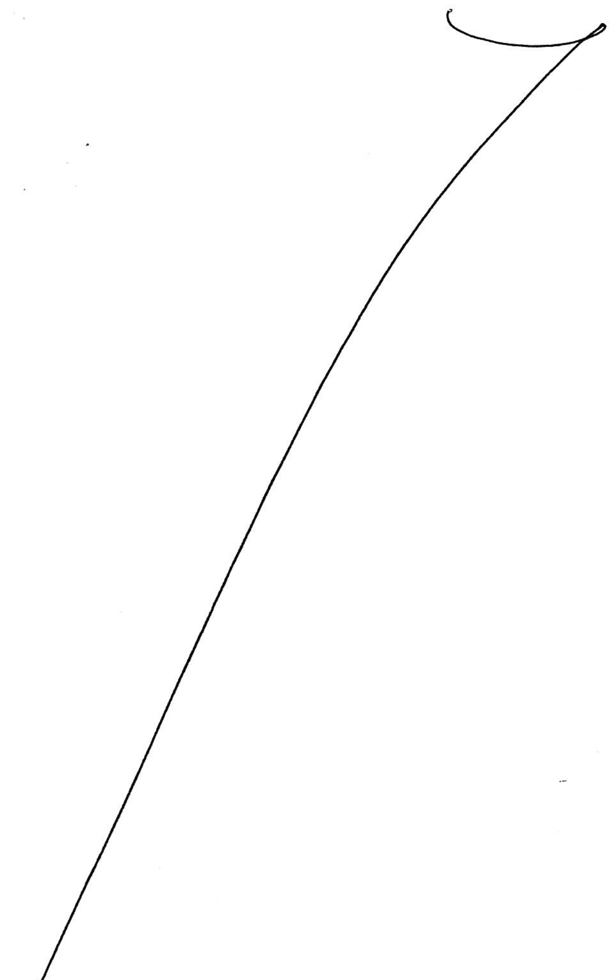
یک مجانب قائم دارد

$$*\ y=\frac{x\sin x}{x-\sin x} \qquad \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$x=0$ ریشه‌ی مخرج در بازه‌ی مورد نظر

درجه‌ی ریشه در صورت (۲) < درجه‌ی ریشه در مخرج (۳)

یک مجانب قائم دارد



ص ۷

$$y=\frac{2x-4}{x^2+mx+9} \longrightarrow$$ فقط یک مجانب قائم دارد

$m=?$

یک قائم دارد $\longrightarrow$ یعنی مخرج کسر یک ریشه دارد $\longrightarrow \Delta=0$

$\longrightarrow m^2-36=0$

ق ق $\boxed{m=\pm 6} \longleftarrow m^2=36$

$$y=\frac{2x-4}{x^2+mx-9} \longrightarrow$$ فقط یک مجانب قائم دارد

$m=?$

$\Delta=m^2+36\neq 0 \longrightarrow m^2+36>0 \longrightarrow \Delta>0$

$\longrightarrow$ مخرج ۲ ریشه دارد

صفر

0

$\frac{5}{2}$

$-\frac{2}{5}$

ولی چون یک قائم دارد پس یکی از ریشه‌ها مخرج کسر ریشه صورت هم بوده

که حذف شده و یکی ق ق شده است

پس $\longrightarrow$ صورت $=0 \longrightarrow x=2 \longrightarrow$ یکی از ریشه‌های مخرج $=2$

$4+2m-9=0 \longrightarrow m=\frac{5}{2}$

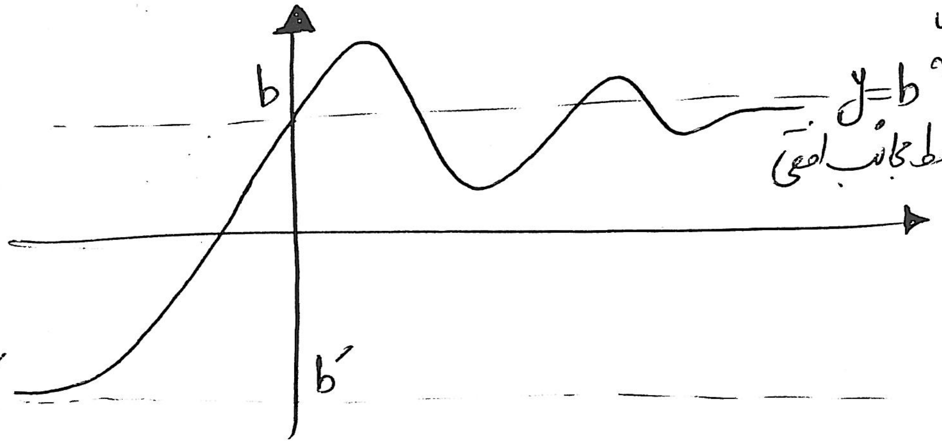
تعریف مجانب افقی:

خط $y=b$ را مجانب افقی منحنی $y=f(x)$ می‌نامیم، هرگاه با میل کردن x به $+\infty$ یا $-\infty$، منحنی هم به خط افقی $y=b$ میل می‌کند. به عبارتی دیگر:

$$\text{if} \quad x \longrightarrow \pm\infty \Longrightarrow \boxed{y=b}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = b$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = b$$



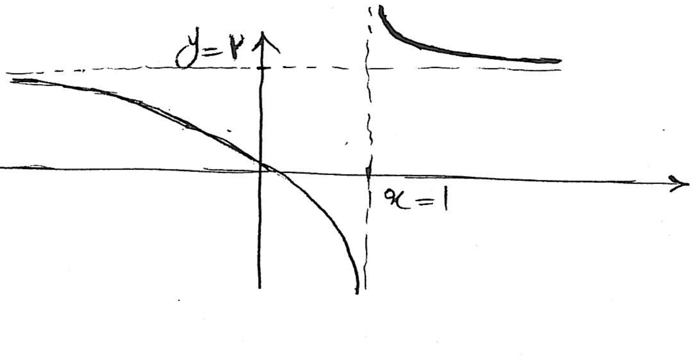
$$\lim_{x\to-\infty} y = b'$$

مثال:

$$y=\frac{۲x+۳}{x-۱}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{۲x}{x} = ۲$$

$y=۲$
خط مجانب افقی



$$*\; y=\frac{2x^2+5x-4}{x^2+8}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$y=2$
خط مجانب افقی

$$*\; y=\frac{\sqrt{x^2+3x+1}+9x}{x-4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|+9x}{x}$$

$\xrightarrow{+\infty}$ $\frac{10\cancel{x}}{\cancel{x}}=10 \longrightarrow y=10$
خط مجانب افقی

$\xrightarrow{-\infty}$ $\frac{8x}{x}=8 \longrightarrow y=8$
خط مجانب افقی

۲ مجانب افقی دارد

$$*\; y=\frac{2x+4}{|3x|+[x]}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\frac{2x}{|3x|+x}$$

$\xrightarrow{+\infty}$ $\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2} \longrightarrow y=\frac{1}{2}$
خط مجانب افقی

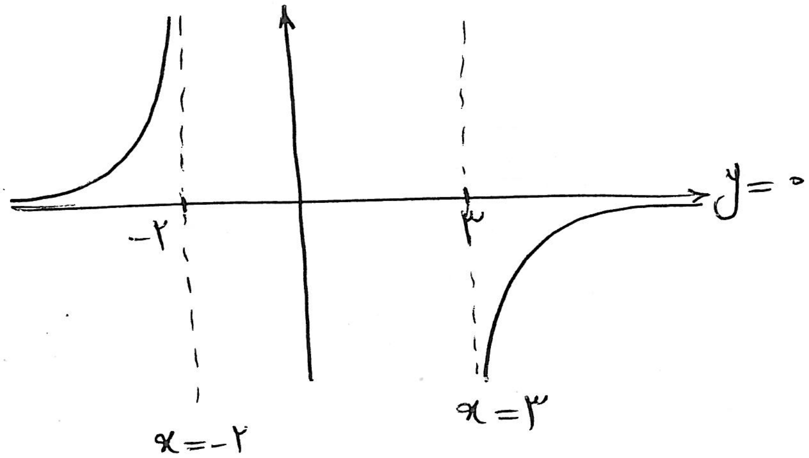
$\xrightarrow{-\infty}$ $\frac{2x}{-2x}=-1 \longrightarrow y=-1$
خط مجانب افقی

$$\text{if } u\longrightarrow\infty \Longrightarrow [u]\sim u$$

* $y = \log_{5} \dfrac{x-3}{x+2}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim \log_{5} 1 = 0 \longrightarrow y = 0$$

خط مجانب افقی



* $y = \dfrac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim \frac{\text{عددی بین } -1 \text{ و } +1}{\pm\infty} = 0 \longrightarrow y = 0$$

خط مجانب افقی

* $y = \sqrt{4x^2 + 8x - 1} - 2x$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim 2\left|x + \frac{\cancel{8}^{\,1}}{\cancel{8}}\right| - 2x \;\begin{cases} \xrightarrow{x \to +\infty} 2x + 2 - 2x = 2 \longrightarrow y = 2 \text{ مجانب افقی} \\ \xrightarrow{x \to -\infty} -2x - 2 - 2x = -4x - 2 \end{cases}$$

ص ۹

* $y=\sqrt[3]{x^3+12x^2-1}-\sqrt{x^2-2x}$ مجانب افقی $y=5$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{12}{3}\right)-\left|x-\frac{2}{2}\right| \begin{cases}\xrightarrow{x\to+\infty}(x+4)-(x-1)=5\\ \xrightarrow{x\to-\infty}(x+4)+(x-1)=2x+3\end{cases}$$

* $y=\sqrt{9x^2+5x}\,\tan\frac{15}{6x+2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}|3x|\times\frac{15}{6x} \begin{cases}\xrightarrow{x\to+\infty} y=\frac{15}{2} & \text{مجانب افقی}\\ \xrightarrow{x\to-\infty} y=-\frac{15}{2} & \text{مجانب افقی}\end{cases}$$

دو خط مجانب افقی دارد

* $y=\sqrt{4x^2-x-2}-\sqrt{4x^2+2x+1}$

خط مجانب افقی
سمت
دو سمت را عمودار

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\Big(\overbrace{2\left(x-\frac{1}{8}\right)-2\left(x+\frac{2}{8}\right)}^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\Big)=-\frac{3}{4}$$

$y=-\frac{3}{4}$ خط مجانب افقی

$$* \; y = \frac{x^2 \tan^{-1} x}{3x + 2x^2}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} \operatorname{Arctan} x$$

$x \to +\infty$: $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ — $y = \frac{\pi}{4}$ خط مجانب افقی

$x \to -\infty$: $\frac{1}{2} \times -\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ — $y = -\frac{\pi}{4}$ خط مجانب افقی

دو خط مجانب افقی دارد

$$* \; y = \operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{x^4 - 2}{x^4 - 4}\right)$$

مجانب افقی ندارد چون مخرج > صورت ۱ و داخل Arc sin بزرگتر از ۱ می‌شود

$$* \; y = \frac{6x + \sqrt{x - 5}}{\sqrt{3 - x} + x^3}$$

مجانب افقی ندارد چون x نمی‌تواند به سمت $\pm\infty$ میل کند زیرا دامنه‌ی تابع اجازه نمی‌دهد

$$* \; \text{if } y = \frac{(a-1)x^3 + 2x^2 - 1}{bx^2 - x - 1} \longrightarrow a + b = ?$$

دارای یک مجانب افقی به صورت $y = 3$ باشد

باید درجه‌ی صورت با درجه‌ی مخرج برابر باشد تا حاصل حد یک عدد شود

$$a - 1 = 0 \longrightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{bx^2} = \frac{2}{b} = 3 \longrightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$a + b = \frac{5}{3}$$

ص ۱۰

* if $y=\frac{3}{2}$ مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{Ax^3+1}{(A-1)x^3+16}$ باشد $\longrightarrow$ معادله‌ی مجانب قائم؟

$$\frac{A}{A-1}=\frac{3}{2}\longrightarrow A=3$$

$$2x^3+16=0\longrightarrow x^3=-8\longrightarrow x=-2$$

* if $y=\frac{3}{2}$ مجانب افقی تابع $f(x)=2x-1+\sqrt{ax^2+bx}$ باشد $\longrightarrow$ b؟

$a>0$ و $x\longrightarrow-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x-1+\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|\right)=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left((2-\sqrt{a})x+\left(-1-\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right)=\frac{3}{2}\begin{cases}2-\sqrt{a}=0\longrightarrow a=4\\ -1-\frac{b}{4}=\frac{3}{2}\longrightarrow b=-10\end{cases}$$

$$* \text{ if } \begin{cases} f(x) = \dfrac{x+11}{x^2-3x-4} \\ \\ g(x) = \dfrac{3}{x-4} \end{cases} \longrightarrow$$ نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های تابع $f-g$ کدام است؟

$$f(x)-g(x) = \frac{x+11}{(x-4)(x+1)} - \frac{3}{x-4} = \frac{-2x+8}{(x-4)(x+1)} = \frac{-2(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \frac{-2}{x+1}$$

$$\begin{cases} x+1=0 \longrightarrow x=-1 & \text{مجانب قائم} \\ \lim\limits_{x\to\infty}(f-g) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2}{x+1} = 0 \longrightarrow y=0 & \text{مجانب افقی} \end{cases}$$

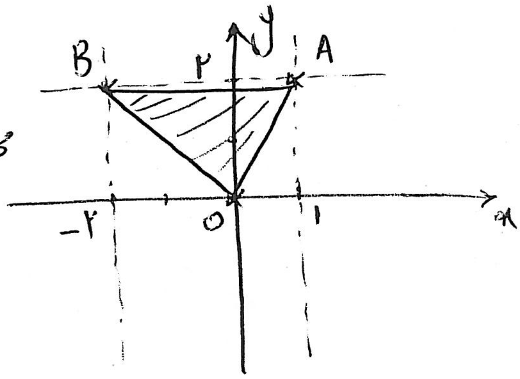
نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها ← $(-1, 0)$

$$* \begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+2} \\ \\ g(x) = \dfrac{x^2}{x-1} \end{cases} \longrightarrow$$ اگر A و B محل تلاقی مجانب‌های افقی و قائم منحنی تابع $(g-f)$ و O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟

$$g-f = \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{2x^2+x}{(x-1)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to\infty} y = 2 \longrightarrow y=2 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$\begin{cases} x-1=0 \longrightarrow x=1 \\ \\ x+2=0 \longrightarrow x=-2 \end{cases} \quad \text{مجانب‌های قائم}$$



$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

رفتارشناسی نمودار در اطراف مجانب افقی:

روش حل تست: بازنویسی تابع

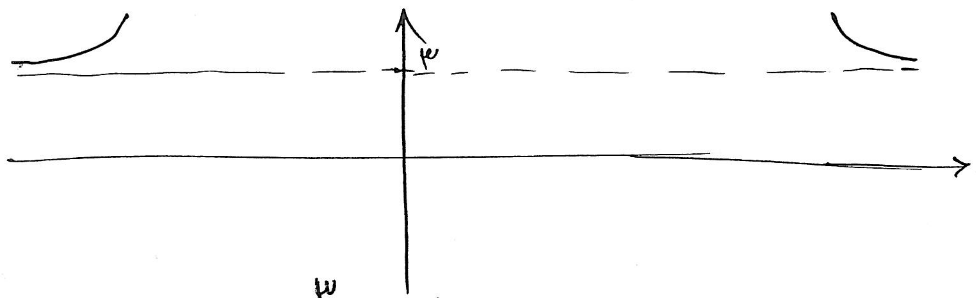
مثال:

$$* \quad y=\frac{3x^2+10}{x^2+3} \qquad y=3$$

مجانب افقی

$$y=\frac{3(x^2+3)+1}{x^2+3}=3+\frac{1}{x^2+3}$$

$$x \longrightarrow \pm\infty \longrightarrow y \longrightarrow 3^+$$



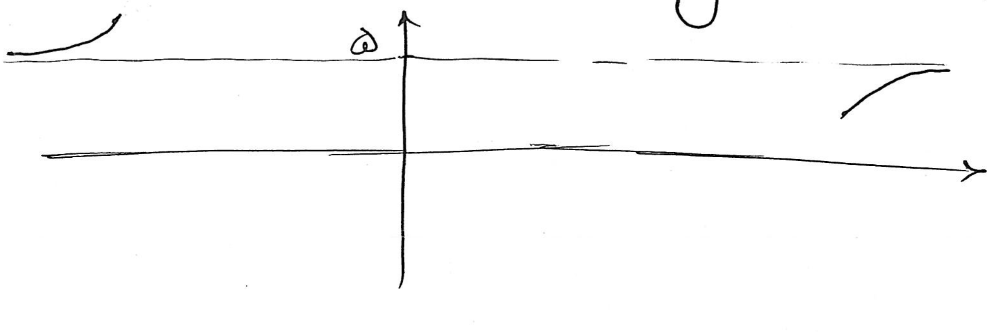
$$* \quad y=\frac{5x^3-4}{x^3+3} \qquad y=5$$

مجانب افقی

$$y=\frac{5(x^3+3)-19}{x^3+3}=5-\frac{19}{x^3+3}$$

$$x \longrightarrow +\infty \longrightarrow y \longrightarrow 5^-$$

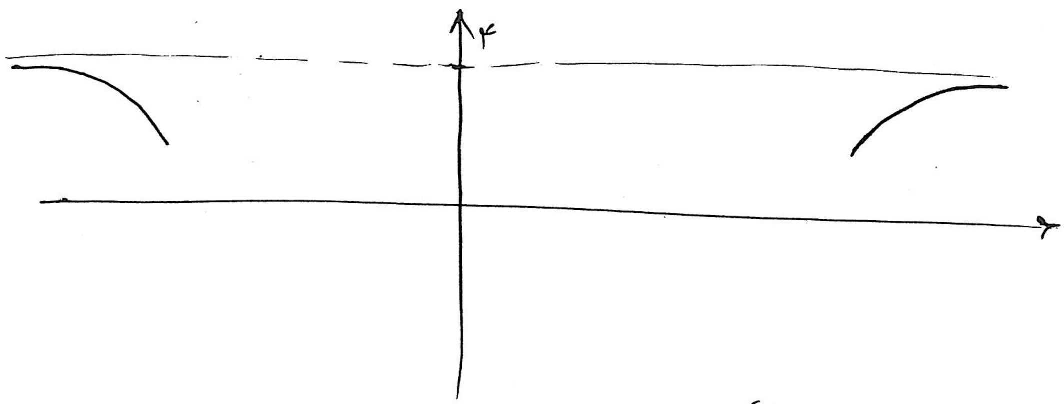
$$x \longrightarrow -\infty \longrightarrow y \longrightarrow 5^+$$



$$*\; y = \frac{4x^5 - 6x}{x^5 + x}$$ $y = 4$ مجانب افقی

$$\begin{array}{r|l} \cancel{4x^5} - 6x & x^5 + x \\ \hline \cancel{4x^5} + 4x & 4 \\ \hline -10x & \end{array}$$

$$y = 4 + \frac{-10x}{x^5 + x} = 4 - \frac{10}{x^4} \quad \begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow y \to 4^- \\ x \to -\infty \Rightarrow y \to 4^- \end{cases}$$



روش یافتن مجانب های افقی و قائم توابع ضمنی :

مجانب افقی $\Leftarrow$ چون $x \to \infty$ پس معادله را بر حسب x مرتب کرده و ضریب بزرگترین درجه را صفر می کنیم

مجانب قائم $\Leftarrow$ چون $y \to \infty$ پس معادله را بر حسب y مرتب کرده و ضریب بزرگترین درجه را صفر می کنیم

مثال : مجانب افقی؟ $*\; x^2y^2 - 4x^2 + xy - 2x + 1 = 0$

$$(y^2 - 4)x^2 + (y - 2)x + 1 \longrightarrow y^2 - 4 = 0 \longrightarrow y = \pm 2$$

دو مجانب افقی دارد

$*\; x^2 + y^2 + x^2y - 3xy^2 = 0$ مجانب قائم؟

$$(1 - 3x)y^2 + x^2y + x^2 = 0 \longrightarrow 1 - 3x = 0 \xrightarrow{\text{مجانب قائم}} x = \frac{1}{3}$$

* فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد مجانب‌های $(2x-2)(y-1)=3$ تا خط $3x+4y+23=0$ کدام است؟

هذلولی: در توابعی با ضابطه‌ی $(ax+b)(cx+d)=$ عدد ثابت غیر صفر:

مجانب قائم $x=-\frac{b}{a} \longleftarrow$ ریشه‌ی پرانتز اول

مجانب افقی $y=-\frac{d}{c} \longleftarrow$ ریشه‌ی پرانتز دوم

محل تلاقی مجانب‌ها $\longleftarrow (1,1) \longleftarrow$ مجانب قائم $x=1$ ، مجانب افقی $y=1$

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی (α,β) از خط $ax+by+c=0$ برابر است با:

$$d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d=\frac{30}{5}=6$$

* مجانب‌های معکوس تابع $y=\frac{3x^2+5x+1}{x^2-1}$ کدامند؟

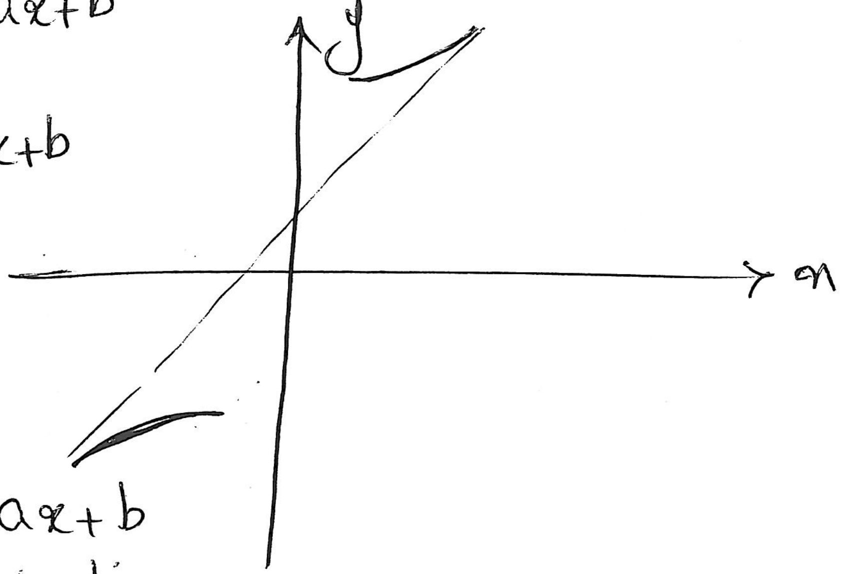
نکته: مجانب‌های قائم و افقی تابع f به ترتیب مجانب‌های افقی و قائم تابع f^{-1} هستند.

مجانب‌های قائم f: $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ مجانب افقی f: $y=3 \xrightarrow{f^{-1}}$ مجانب‌های افقی: $\begin{cases} y=1 \\ y=-1 \end{cases}$ مجانب قائم f^{-1}: $x=3$

تعریف مجانب مایل:

خط $y=ax+b$ را مجانب مایل منحنی $y=f(x)$ می‌نامیم هرگاه با میل کردن x به $+\infty$ یا $-\infty$ ، فاصله‌ی بین منحنی $f(x)$ و خط $y=ax+b$ بسیار ناچیز شود

$$\text{if } x \longrightarrow \pm\infty$$
$$\Downarrow$$
$$y \sim ax+b$$
$$\downarrow$$
$$y=ax+b$$



$y=ax+b$
خط مجانب مایل

نکته:

* در توابع کسری فقط زمانی مجانب مایل داریم که درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج 1 واحد بیشتر باشد و لاغیر

* در توابع رادیکالی که زیر رادیکال یک عبارت کسری فقط زمانی مجانب مایل داریم که درجه‌ی صورت کسر از درجه‌ی مخرج کسر به اندازه‌ی فرجه‌ی رادیکال بیشتر باشد و لاغیر

مثال:

$$*\ y=\frac{2x^4+3x^2+5}{x^2+9x-1}$$

اصلا توان ۲ واحد اختلاف $\longrightarrow$ مجانب مایل ندارد

$$*\ y=\frac{2x^3+x^2+6x-1}{x^2+5x+1}$$

روش ①

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+x^2+6x-1 & x^2+5x+1 \\ \underline{2x^3+10x^2+2x} & 2x-9 \\ -9x^2+4x-1 & \\ \underline{-9x^2-45x-9} & \\ 49x+8 & \end{array}$$

$y=2x-9$

خط مجانب مایل

روش ②

تکنیک: $\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^{n-1}+b'x^{n-2}+\cdots} \sim \dfrac{a}{a'}x-\dfrac{ab'-ba'}{a'^2}$

$x\longrightarrow\infty$

$$y=2x-\frac{9}{1}\Rightarrow y=2x-9$$

خط مجانب مایل

سوال: اگر پرسیده شود تابع فوق مجانب مایلش را در چه طولی قطع می‌کند، جواب چیست؟

$$49x+8=0\longrightarrow x=-\frac{8}{49}$$

$$*\; y = \frac{4x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2 + 7}$$

$$y = 2x - \frac{42}{4} \;\overset{8}{}\; \Longrightarrow y = 2x - 8$$

خط مجانب مایل

$$*\; y = \frac{2x^3 - 7x - 1}{x^2 + 5x + 6}$$

$$y = 2x - \frac{10}{1} \Longrightarrow y = 2x - 10$$

خط مجانب مایل

$$*\; y = \frac{x^3 - ax^2 + x - 1}{x^2 - 2x}$$

if عرض از مبداء مجانب مایل باشد $= -2$

$a = ?$

$$y = x - \frac{-2 + a}{1} \quad -2$$

$$y = ax + b$$

$a \downarrow$ شیب ، $b \downarrow$ عرض از مبداء

$$\frac{2 - a}{1} = -2 \rightsquigarrow a = 4$$

$$* \quad y = 3x + [2x] + \frac{2x^3+6x^2-9x+1}{x^2-3x+10} + \frac{\sqrt{4x^2+5x}}{x+6}$$

$$y = 3x + 2x + 2x - \frac{-12}{1} + \frac{|2x|}{x}$$

$$x \to +\infty \longrightarrow y = 7x + 12 + 2x = 9x + 12$$

$$x \to -\infty \longrightarrow y = 7x + 12 - 2x = 5x + 12$$

دو خط مجانب مایل دارم

$$* \quad y = 2x + 5 + \frac{x^2 + |3x|}{x+1} + \frac{3x^2+5x}{x^2+2}$$

$$x \to +\infty \longrightarrow y = 2x + 8 + x - \frac{-2}{1} = 3x + 10$$

$$x \to -\infty \longrightarrow y = 2x + 8 + x - \frac{4}{1} = 3x + 4$$

دو خط مجانب مایل دارم

$$* \quad y = 2x + \sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 9x - 1}$$

$$x \to \infty \longrightarrow y = 2x + \left(x - \cancel{\frac{27}{3}}^{\,9}\right) = 3x - 9$$

یک خط مجانب مایل دارم

$$*\ y = 5x - 3 + \sqrt{x^2 - 4x - 1}$$

$$y = 5x - 3 + \left| x - \frac{4}{2} \right|$$

$$x \longrightarrow +\infty \longrightarrow y = 5x - 3 + x - 2 = 6x - 5$$

$$x \longrightarrow -\infty \longrightarrow y = 5x - 3 - x + 2 = 4x - 1$$

دو خط مجانب مایل داریم

سوال: محل برخورد مجانب های مایل تابع فوق را بیابید؟

$$6x - 5 = 4x - 1 \longrightarrow 2x = 4 \longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$*\ y = x\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

نکته: $(x+a)\sqrt[k]{\frac{x+b}{x+c}} \sim x + a + \frac{b-c}{k}$

$x \longrightarrow \infty$

$$y = x + \frac{3}{2}$$

$$*\ y = (x+5)\sqrt[3]{\frac{x+10}{x+2}}$$

$$y = x + 5 + \frac{8}{3} = x + \frac{23}{3}$$

$$*\; y=\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x-2}} \longrightarrow$$ مجانب مایل وقتی $x\to-\infty$ ؟

$$y=|x|\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle x\to-\infty}$$

$$y=-\left(x+\frac{3}{2}\right) \longrightarrow y+x+\frac{3}{2}=0$$

$$2y+2x+3=0$$

مجانب مایل

سؤال: اگر محل تلاقی مجانب‌ها $(a \text{ و } b)$ باشد، $a+b$ کدام است؟

$$y=x+\frac{3}{2}$$

$$y=-\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$\longrightarrow x+\frac{3}{2}=-\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$2\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$$

$$2x+3=0$$

$$a+b=-\frac{3}{2} \longleftarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2}=a \\ y=0=b \end{cases}$$

سؤال: فاصله‌ی محل تلاقی دو مجانب با مبداء مختصات چقدر است؟

$$\text{فاصله}=\frac{3}{2}$$

$$*\; y=(x-2)\sqrt{\frac{x+a}{x-1}} \xrightarrow{\text{مجانب مایل}} y=x+2 \qquad a=?$$

$$y=\boxed{x-2+\frac{a+1}{2}} \qquad \frac{a+1}{2}=4$$

$$2 \qquad\qquad a=7$$

$$*\; y=\sqrt{\frac{4x^3+ax^2}{x-2}} \xrightarrow{\text{مجانب مایل}} y-2x=2 \qquad a=?$$

$$y=|x|\sqrt{\frac{4x+a}{x-2}}$$

$$x\to+\infty \Rightarrow y=x\times 2\times\sqrt{\frac{x+\frac{a}{4}}{x-2}}=2\left(x+\frac{\frac{a}{4}+2}{2}\right)$$

$$y=2x+\left(\frac{a}{4}+2\right)$$

$$y-2x=\underbrace{\left(\frac{a}{4}+2\right)}_{2} \longrightarrow \frac{a}{4}+2=2 \longrightarrow a=0$$

$$*\; y=2x\sqrt{\frac{x-1}{9x-1}} \rightsquigarrow$$

شیب مجانب؟
عرض از مبداء مجانب؟

$$x\to\infty \Longrightarrow y=\frac{2}{3}x\sqrt{\frac{x-1}{x-\frac{1}{9}}} \longrightarrow y=\frac{2}{3}\left(x+\frac{-\frac{8}{9}}{2}\right)$$

$$=\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{شیب}}x-\underbrace{\frac{8}{27}}_{\text{عرض از مبداء}}$$

$$*\ y = 2x + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arccos} \frac{1}{x}$$

$$x \to \infty \Longrightarrow y = 2x + \frac{1}{\pi} \underbrace{\operatorname{Arccos}(0)}_{\frac{\pi}{2}} = 2x + \frac{1}{2}$$

$$*\ y = \frac{x^2-1}{2+3x} \quad \text{و} \quad y = \frac{x^2+3}{5-2x}$$ مجانب‌های مایل منحنی‌های

باهم چه زاویه‌ای می‌سازند؟

نکته: اگر θ زاویه‌ی بین دو خط متقاطع به معادله $y_2 = m_1 x + n_1$ و $y_1 = m_2 x + n_2$

باشد، آن‌گاه:

$$\tan\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{1}{3} \\ m_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \to \tan\theta = \left| \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} \right| = 1 \longrightarrow \theta = 45^\circ$$

رفتارشناسی نمودار در اطراف مجانب مایل:

راه‌حل تست: بازنویسی تابع

مثال:

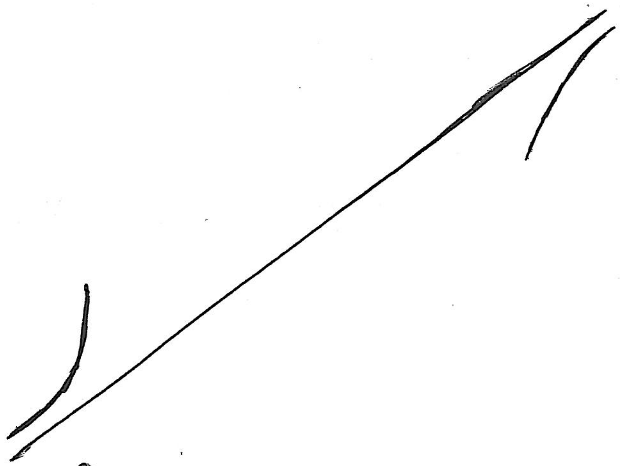
$$*\ y = \frac{6x^2 + 10x + 2}{2x + 2}$$

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 + 10x + 2 & 2x + 2 \\ \underline{6x^2 + 6x} & \overline{3x + 2} \\ 4x + 2 & \\ \underline{4x + 4} & \\ -2 & \end{array}$$

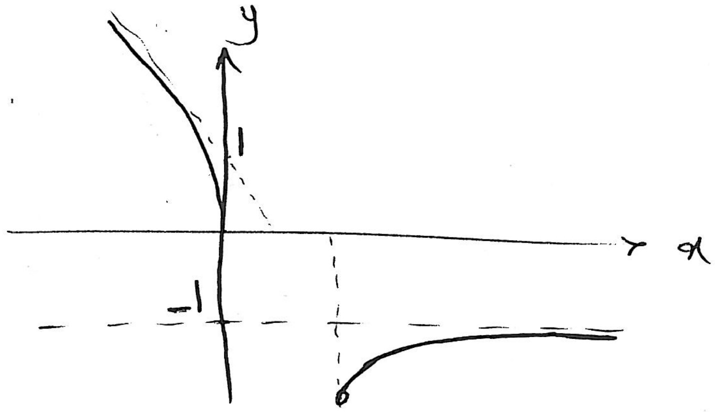
$$y = 3x + 2 - \frac{2}{2x + 2}$$

$$x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow y \longrightarrow (3x+2)^-$$

$$x \longrightarrow -\infty \Longrightarrow y \longrightarrow (3x+2)^+$$



$* \; f(x) = ax + \sqrt{x^2 + bx} \longrightarrow (a,b)\,?$



$$x \longrightarrow +\infty \Longrightarrow y = ax + x + \frac{b}{2} = (a+1)x + \frac{b}{2} = -1$$

$a = -1$

$b = -2$