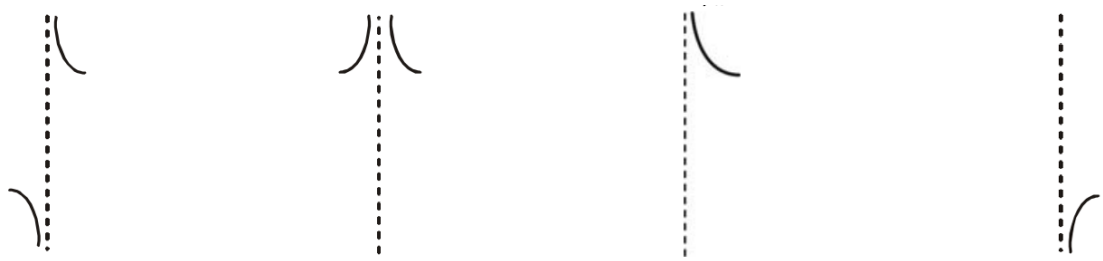
مجانب قائِم

تعریف: خط $x=a$ مجانب قائم $y=f_{(x)}$ است اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f_{(x)}$ یا $\lim\limits_{x\to a^-} f_{(x)}$ نامتناهی شود.



مجانب قائم — مثال: $y=\frac{-1}{\sqrt{x}}$

مجانب قائم — مثال: $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

مجانب قائم با انفصال مضاعف — مثال: $y=\frac{1}{x^2}$

مجانب قائم با انفصال ساد — مثال: $y=\frac{1}{x}$

به جز توابع خاص مانند $f_{(x)}=\log_{(x)}$ ، معمولا توابع کسری یا توابعی که قابل نوشتن به صورت کسر باشند در ریشه مخرج **ممکن است** مجانب قائم داشته باشند.

نکته ۱: برای تعیین مجانب توابع می توانیم توابع را ساده نماییم.

نکته ۲: ریشه های مخرج کسر نقاطی هستند که برای یافتن مجانب قائم باید بررسی شوند. دقت شود تنها ریشه هایی باید بررسی شوند که همسایگی محذوف راست یا چپ آن ها در دامنه ی تابع باشند به عبارت ساده تر دامنه تابع حداقل از یک طرف همسایگی نقطه مورد نظر تعریف شده باشد.

نکته ۳ : ریشه هایی از مخرج کسر که ریشه ی صورت نیستند، در صورتی که حداقل از یک طرف همسایگی محذوف تعریف شده باشند مجانب قائم می باشند.

نکته ۴ : برای ریشه هایی از مخرج کسر که ریشه ی صورت هم هستند، باید حد تابع را پس از رفع ابهام در آن نقطه حساب کنید. اگر این حد نامتناهی شود، مجانب قائم را مشخص می کند.

نکته ۵: مجانب قائم را به صورت $x=a$ نمایش می دهند.

مثال: مجانب قائم توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$y=\frac{\sin(x)}{x}$$

حل: نقطه $x=0$ ریشه مخرج می باشد ولی این نقطه ریشه صورت هم می باشد پس با توجه به نکته ۴ باید حد تابع را پس از رفع ابهام حساب کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\sim\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

چون حاصل حد نامتناهی نشده است پس نقطه $x=0$ مجانب قائم تابع نمی باشد.

$$y=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$$

حل: ریشه مخرج به صورت $x=\pm 3$ می باشد پس تابع در این دو نقطه ممکن است مجانب قائم داشته باشد ولی از انجایی که دامنه تابع به صورت $D_f=\{x\geq 2\}-\{3\}$ می باشد پس هیچ همسایگی برای نقطه $x=-3$ تعریف شده نمی باشد در نتیجه با توجه به نکته ۲ فقط نقطه $x=+3$ مجانب قائم تابع می باشد.

رفتار تابع در اطراف مجانب قائم:

برای تعیین رفتار تابع در اطراف مجانب قائم کافی است حد تابع را در اطراف نقطه مجانب قائم بیابیم.(به عبارت ساده تر کافی است علامت ∞ را در اطراف نقطه مجانب قائم تعیین کنیم).

مثال: نمودار تابع با ضابطه $y=\frac{x+1}{x^3+x}$ رادر اطراف مجانب قائم به چه صورتی می باشد؟ **(کنکور سراسری 82)**

حل: برای تعیین مجانب قائم باید ریشه مخرج را تعیین کنیم.

$$x^3+x=0\to x(x^2+1)=0\to x=0$$

تابع در نقطه $x=0$ ممکن است مجانب قائم داشته باشد از آنجایی که دامنه تابع در همسایگی محذوف $x=0$ تعریف شده می باشد و هم چنین این نقطه ریشه صورت هم نمی باشد لذا نقطه $x=0$ مجانب قائم تابع می باشد برای تعیین رفتار تابع باید حد تابع را در اطراف نقطه مجانب قائم بیابیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x^3+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{0^+\times 1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x^3+x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{0^-\times 1}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{0^-}=-\infty$$

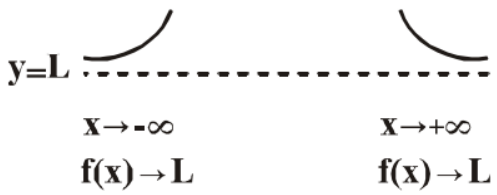
پس رفتار تابع به صورت مقابل می باشد:

مجانب افقی

تعریف: خط $y=a$ مجانب افقی $y=f_{(x)}$ است، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{(x)}=a$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty} f_{(x)}=a$.

روش یافتن مجانب های افقی:

برای یافتن مجانب های افقی تابع $y=f_{(x)}$ ، کافی است دو حد $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{(x)}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_{(x)}$ را پیدا کنیم. اگر حاصل آن ها عددی حقیقی شد، مجانب های افقی پیدا شده اند.



نکته ۶ : برای محاسبه مجانب افقی می توانیم می توانیم از هم ارزی های $x\to\pm\infty$ استفاده شود.

الف. حد هر چندجمله ای از x وقتی $x\to\pm\infty$ برابر حد جمله ی دارای بزرگترین توان چندجمله ای می باشد

$$\underset{x\to\pm\infty}{ax^n+bx^{n-1}+\dots} \simeq \underset{x\to\pm\infty}{ax^n}$$

ب. برای توابع گویا در حالتی که $x\to\pm\infty$ می باشد می توان بزرگترین درجه صورت و بزرگترین درجه مخرج را در نظر گرفت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+\cdots}{a'x^n+b'x^{n-1}+c'x^{n-2}+\cdots}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^m}{a'x^n}$$

که سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

$$1)\ m<n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

$$2)\ m=n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{a'}$$

$$3)\ m>n \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty \text{ یا } -\infty \text{ یا } \pm\infty$$

ج. برای توابع رادیکالی وقتی $x \to \pm\infty$ می توانیم از روابط زیر استفاده کنیم.

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + c} = \sqrt[n]{a}\left|x + \frac{b}{na}\right| \ (n \in 2k)$$

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \ldots + c} = \sqrt[n]{a}(x + \frac{b}{na}) \ (n \in 2k+1)$$

باید به این نکته توجه شود که در حالت قدر مطلق $(n \in 2k)$ توجه به هر دو شاخه $\pm\infty$ حائز اهمیت می باشد.

نکته ۷: مجانب افقی را به صورت $y = b$ نمایش می دهند.

نکته ۸: برای محاسبه مجانب افقی توابع باید هر **دو** شاخه $\pm\infty$ در نظر گرفته شود (در صورت تعریف شدن در دامنه تابع).

نکته ۹ : توابع که دارای دامنه کران دار باشند مجانب افقی ندارند (به عنوان مثال توابع $y = \sqrt{4 - x^2}$ و یا $y = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$ فاقد مجانب افقی هستند)

نکته ۱۰: توابع متناوب غیر ثابت دارای مجانب افقی نیستند (به عنوان مثال توابع $y = \frac{\sin(x) + 1}{\sin(x) - 1}$ و یا $y = \tan(x).\cot(x)$ فاقد مجانب افقی هستند)

نکته ۱۱: اگر (a,b) محل برخورد مجانب های قائم و افقی تابع باشد به ترتیب $x = a$ نشان دهنده مجانب قائم و $y = b$ نشان دهنده مجانب افقی تابع می باشد.

نکته ۱۲: در توابع گویا زمانی مجانب افقی خواهیم داشت که بزرگترین درجه مخرج بزرگتر یا مساوی بزرگترین درجه صورت باشد.

مثال: مجانب های تابع $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ را بیابید.

حل: دامنه تابع به صورت $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ می باشد پس تابع در همسایگی نقطه $x=0$ تعریف شده نمی باشد پس نقطه $x=0$ علی رغم اینکه ریشه مخرج می باشد ولی مجانب قائم تابع نمی باشد.

برای محاسبه مجانب افقی تابع با استفاده از هم ارزی های نکته ۶ :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{x}$$

که با توجه به نکته ۸ باید هر دو شاخه $\pm\infty$ بررسی شود

که برای شاخه $+\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1\to y=1$$

و برای شاخه $-\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1\to y=-1$$

پس تابع دو مجانب افقی دارد.

رفتار تابع در اطراف مجانب افقی:

برای تعیین وضعیت نمودار تابع در اطراف خط مجانب افقی به معادله $y=b$ کافی است علامت تابع $f(x)-b$ را در $x\to\infty$ بررسی کنیم که دو حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

الف. $f(x)-b>0$ که نشان دهنده این است که تابع بالای خط مجانب افقی ($y=b$) می باشد.

ب. $f(x)-b<0$ که نشان دهنده این است که تابع پایین خط مجانب افقی ($y=b$) می باشد.

مثال: نمودار تابع با ضابطه $y=\frac{2x-1}{5x+1}$ در اطراف مجانب افقی آن رسم کنید.

حل: خط $y=\frac{2}{5}$ مجانب افقی تابع می باشد (با استفاده از هم ارزی پر توان) بنابراین:

$$y-\frac{2}{5}=\frac{2x-1}{5x+1}-\frac{2}{5}=\frac{-7}{5(5x+1)}$$

حال باید هر دو شاخه $\pm\infty$ بررسی شود.

برای شاخه $+\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{5(5x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-7}{+\infty}=0^-$$

و برای شاخه $-\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-7}{5(5x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-7}{-\infty}=0^+$$

پس رفتار تابع در اطراف مجانب افقی به صورت:

مثال: منحنی به معادله $a\neq 0$، $y=\frac{x^2+3x}{ax^2+4x-1}$ فقط دو خط مجانب دارد، مختصات نقطه ی تلاقی مجانب ها کدام می تواند باشد؟ (سراسری تجربی ۸۷)

حل: از آنجایی که بزرگترین درجه صورت و بزرگترین درجه مخرج برابر می باشد پس تابع مجانب افقی خواهد داشت و مجانب افقی تابع برابر با $y=\frac{1}{a}$ خواهد بود.

طبق داده مسئله تابع دارای دو مجانب می باشد پس باید یک مجانب قائم داشته باشد از انجایی که معادله مخرج درجه ۲ می باشد لذا زمانی معادله درجه دوم تنها یک ریشه دارد که $\Delta = 0$ باشد.در این صورت:

$$b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 4^2 - 4 \times a \times -1 = 0 \rightarrow -16 = 4a \rightarrow a = -4$$

هم چنین با توجه به مقدار بدست آمده برای a تابع مجانب افقی برابر با $y = \frac{1}{-4}$

و در ریشه مخرج مجانب قائم خواهد داشت که ریشه مخرج هم برابر با $x = \frac{1}{2}$ می باشد. که در این صورت محل برخورد مجانب های تابع $(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4})$ می باشد.(نکته ۱۱)

مجانب مایل

خط $y = ax + b$ (که $a \neq 0$) که مجانب مایل تابع $y = f_{(x)}$ است، هرگاه داشته باشیم

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f_{(x)} - (ax + b) \right) = 0$$

یا $\lim_{x \to -\infty} \left(f_{(x)} - (ax + b) \right) = 0$.

روش یافتن مجانب مایل:

اگر $y = ax + b$ مجانب مایل تابع $y = f_{(x)}$ باشد. ضرایب a و b به صورت زیر به دست می آیند:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f_{(x)}}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(f_{(x)} - ax \right)$$

که a و b هر دو باید موجود باشند در غیر اینصورت تابع فاقد مجانب مایل می باشد.

نکته ۱۲: برای محاسبه مجانب افقی می توانیم از هم ارزی های $x \to \infty$ استفاده شود (رجوع شود به نکته ۶)

نکته۱۳: برای محاسبه مجانب مایل توابع باید هر دو شاخه $\pm\infty$ در نظر گرفته شود. (در صورت تعریف شدن در دامنه تابع)

مثال: مجانب های تابع $y=4x+\sqrt{x^2+2x+5}$ را بیابید.

حل: از آنجایی که تابع مخرج ندارد پس تابع فاقد مجانب قائم می باشد.

برای محاسبه مجانب مایل با استفاده از هم ارزی های $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}(4x+\sqrt{x^2+2x+5})\sim\lim_{x\to\infty}4x+\sqrt{1}\left|x+\frac{2}{2}\right|=\lim_{x\to\infty}4x+|x+1|$$

که باید هر دو شاخه ∞ بررسی شود.

برای شاخه $+\infty$ با تعیین علامت قدر مطلق خواهیم داشت:

$$4x+x+1=5x+1\to y=5x+1$$

و برای شاخه $-\infty$ با تعیین علامت قدر مطلق خواهیم داشت:

$$4x-x-1=3x-1\to y=3x-1$$

پس تابع دارای دو مجانب مایل می باشد.

روش یافتن مجانب مایل در توابع گویا:

نکته: در توابع گویا اگر درجه صورت دقیقا یک واحد از درجه مخرج بیشتر باشد، مجانب مایل خواهیم داشت. برای یافتن این مجانب کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کرده و خارج قسمت تقسیم را به عنوان مجانب مایل تابع در نظر بگیریم.

روش یافتن مجانب مایل در توابع گویای رادیکالی:

در توابع گویا (کسری) رادیکالی با فرجه n اگر درجه صورت دقیقا n واحد از درجه مخرج بیشتر باشد، مجانب مایل خواهیم داشت. برای یافتن این مجانب کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کرده و خارج قسمت تقسیم رابه عنوان عبارت زیر رادیکال در نظر گرفته و با استفاده از هم ارزی نیوتن (رادیکالی) مجانب مایل را محاسبه می نماییم.

مثال: معادله ی مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x-2}}$ وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

حل:برای بدست آوردن مجانب مایل توابع گویا رادیکالی صورت را بر مخرج تقسیم کرده و خارج قسمت را زیر رادیکال قرار می دهیم سپس با استفاده از هم ارزی رادیکالی مجانب مایل تابع را بدست می آوریم.

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x-2}}=\sqrt{x^2+3x+6+\frac{12}{x-2}}$$

وقتی که $x\to-\infty$ کسر $\frac{12}{x-2}$ به صفر میل می کند و می توانیم عبارت را هم ارز با $\sqrt{x^2+3x+6}$ در نظر گرفت حال با استفاده از هم ارزی خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3x+6}\sim\lim_{x\to-\infty}\left|x+\frac{3}{2}\right|=-x-\frac{3}{2}$$

پس خط $y=-x-\frac{3}{2}$ مجانب مایل تابع می باشد.

رفتار تابع در اطراف مجانب مایل:

برای تعیین وضعیت نمودار تابع در اطراف خط مجانب افقی به معادله $y=ax+b$ کافی است علامت تابع $f(x)-ax+b$ را در ∞ بررسی کنیم که دو حالت زیر ممکن است اتفاق بیفتد:

الف. $f(x)-ax+b>0$ که نشان دهنده این است که تابع بالای خط مجانب مایل می باشد.

ب. $f(x)-ax+b<0$ که نشان دهنده این است که تابع پایین خط مجانب مایل می باشد

مثال: نمودار تابع با ضابطه ی $y=\frac{x^3}{x^2+4}$ نسبت به خط مجانب آن کدام وضعیت را دارد؟

حل: از آنجایی که بزرگترین درجه صورت دقیقا یک واحد از بزرگترین درجه مخرج بزرگتر می باشد پس تابع دارای مجانب مایل می باشد و معادله مجانب مایل از تقسیم صورت بر مخرج محاسبه می شود که با تقسیم صورت بر مخرج معادله مجانب مایل به صورت $y=x$ حاصل می شود

برای تعیین وضعیت تابع در اطراف مجانب مایل باید $f(x)-ax+b$ را حل نماییم در این صورت:

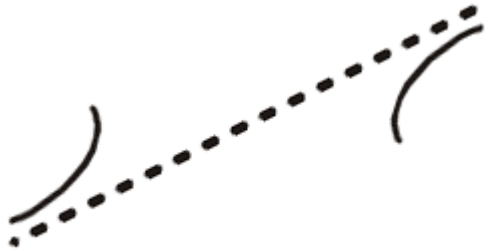
برای شاخه $+\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2+4}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x^2+4}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{x^2}=\frac{-4}{x}=0^-$$

و برای شاخه $-\infty$ داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+4}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x^2+4}\sim\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x^2}=\frac{-4}{x}=0^+$$

پس رفتار تابع در اطراف مجانب مایل خود به صورت:



E-MAIL: Milad.sajjadi619@gmail.com