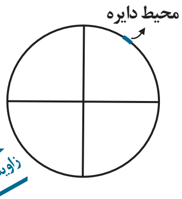
فصل ۹

مثلثات

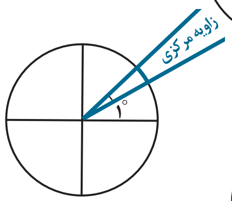
۱ واحدهای زاویه (درجه) ۱

درجه



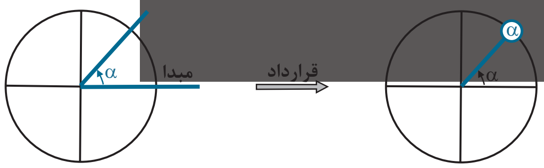
بچه‌ها! می‌خوام ۱ درجه‌رو براتون تعریف کنم. به همین منظور محیط یک دایره‌رو به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کرده و یک تیکه‌ی دلخواه‌رو انتخاب می‌کنم.

آقا اجازه؟! حتماً می‌خواید بگید که هر تیکه، یک درجه هست. مگه نه؟

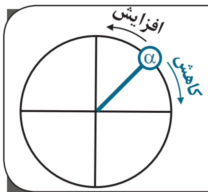


نه عزیزم. اصلاً نمی‌خواستم اینو بگم!اشتباه خیلی از دانش‌آموزها اینه که فکر می‌کنن $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط یک دایره برابره با ۱ درجه، اما من می‌خوام این اشتباه رو تصحیح کنم.

«به $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره نباید بگیم ۱ درجه،بلکه به زاویه‌ای مرکزی که $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره‌رو در برمی‌گیره می‌گیم ۱ درجه»

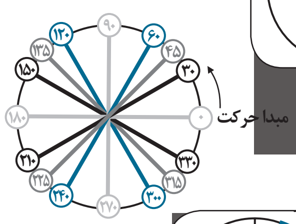


بچه‌ها! یه قرارداد: برای راحتی کار، از این به بعد هر زاویه‌رو روی نوک عقربه‌اش نمایش بدید. یعنی:



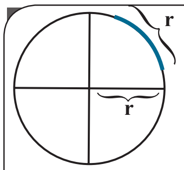
توجه: اگر زاویه‌ی α برخلاف عقربه‌ی ساعت حرکت کنه می‌گیم α در حال افزایشه (حرکت در جهت مثبت) و در غیر اینصورت در حال کاهشه. (حرکت در جهت منفی)

با توجه به قرارداد بالا میشه زوایای معروف روی دایره رو به صورت روبرو نمایش داد: (بر حسب درجه)

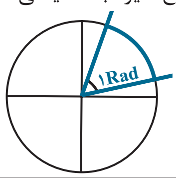


رادیان

بچه‌ها! حالا می‌خوام یک رادیان رو براتون تعریف کنم. پس خوب دقت کنید:



۱) قسمتی از محیط دایره‌رو انتخاب می‌کنم که اندازه‌اش برابر شعاع دایره باشه. یعنی:

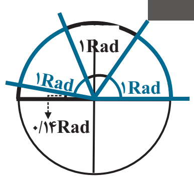


۲) زاویه‌ای مرکزی رسم می‌کنم که از دو سر این قطعه بگذره.

به این زاویه یک رادیان می‌گیم. نگاه کنید:

آقا اجازه؟! هر یک رادیان چند درجه میشه؟ هر رادیان تقریباً ۵۷/۳ درجه هست.

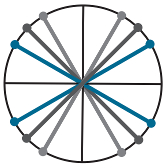
آقا اجازه؟! هر نیم دور از دایره چند رادیانه؟



با توجه به شکل روبرو، هر نیم دور از یک دایره تقریباً ۳/۱۴ Rad

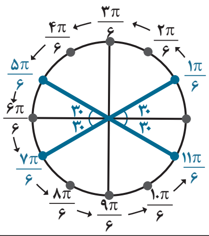
به عبارت دیگه ۱۸۰درجه معادل با π رادیانه.

دوستان من! معادل زوایای °۰، °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰ و °۳۶۰ بر حسب رادیان عبارتند از: ۰، $\frac{\pi}{۲}$ Rad، π Rad، $\frac{۳\pi}{۲}$ Rad، ۲π Rad



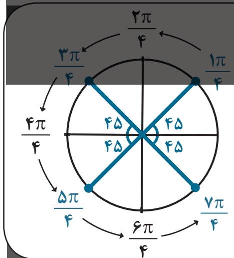
بچه‌ها! اینبار می‌خوام ۱۲ تا زاویه‌ای که توی ربع‌های اول تا چهارم قرار دارن رو در غالب ۳ تا ضربدر بیان کنم. (بر حسب رادیان)

۱) ضربدر با مدل ۳۰ درجه:



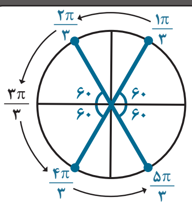
هر کدوم از ضلع‌های این ضربدر، با افق زاویه‌ی ۳۰ درجه (یعنی $\frac{\pi}{۶}$) می‌سازن. بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۳۰ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۶}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۶}$، $\frac{۵\pi}{۶}$، $\frac{۷\pi}{۶}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$)

۲) ضربدر با مدل ۴۵ درجه:



ضلع‌های این ضربدر، با افق زاویه‌ی ۴۵ درجه (یعنی $\frac{\pi}{۴}$) می‌سازن. بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۴۵ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۴}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۷\pi}{۴}$)

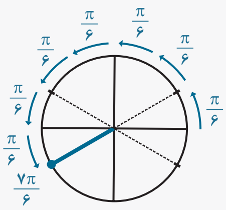
۳) ضربدر با مدل ۶۰ درجه:



اضلاع این ضربدر، زاویه‌ی ۶۰° یا $\frac{\pi}{۳}$ Rad با افق ایجاد می‌کنن. بنابراین زاویه‌هایی که روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار دارن بر حسب $\frac{\pi}{۳}$ هستن. (یعنی: $\frac{۱\pi}{۳}$، $\frac{۲\pi}{۳}$، $\frac{۴\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$)

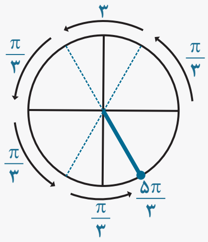
مثال زوایای زیر را روی دایره معلوم کنید.

۱) $\alpha = \frac{۷\pi}{۶}$



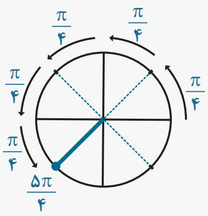
با توجه به اینکه این زاویه بر حسب $\frac{\pi}{۶}$ هست، پس روی ضربدربا مدل ۳۰ درجه قرار داره و برای معلوم کردن این زاویه روی دایره کافیه از مبدأ حرکت ۷ تا $\frac{\pi}{۶}$ رو طی کنیم تا به زاویه‌ی $\frac{۷\pi}{۶}$ برسیم.

۲) $\alpha = \frac{۵\pi}{۳}$



این زاویه برحسب $\frac{\pi}{۳}$ هست پس روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار داره.
اگه از مبدأ حرکت ۵ تا $\frac{\pi}{۳}$ رو طی کنیم، زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۳}$ روی دایره معلوم میشه.

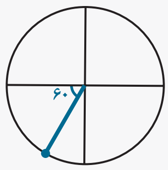
۳) $\alpha = \frac{۵\pi}{۴}$



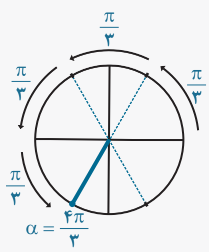
از اون‌جایی که این زاویه بر حسب $\frac{\pi}{۴}$ هست پس روی ضربدر با مدل ۴۵ درجه قرار داره. بنابراین اگه از مبدأ حرکت ۵ تا $\frac{\pi}{۴}$ رو طی کنیم، به زاویه‌ی $\frac{۵\pi}{۴}$ خواهیم رسید.

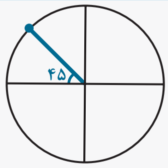
مثال در هر یک از شکل‌های زیر مقدار زاویه‌ی α را مشخص کنید.

۱)

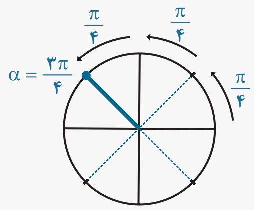


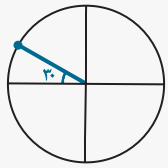
از اونجایی که α با افق زاویه‌ی ۶۰° می‌سازه، پس روی ضربدر با مدل ۶۰ درجه قرار داره و بر حسب $\frac{\pi}{۳}$ هست. لذا کافیه که ببینیم α از مبدأ حرکت چند تا $\frac{\pi}{۳}$ رو طی کرده.



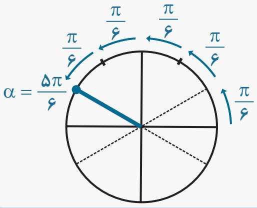


۲) از اونجایی که α با افق زاویه‌ی ۴۵° می‌سازه، حتماً روی ضربدر با مدل ۴۵ درجه قرار داره و بر حسب $\frac{\pi}{۴}$ هست. بنابراین باید بفهمیم که α از مبدأ حرکت چند تا $\frac{\pi}{۴}$ رو طی کرده.





۳) از اونجایی که α با افق زاویه‌ی ۳۰° می‌سازه، پس روی ضربدر با مدل ۳۰ درجه قرار داره و بر حسب $\frac{\pi}{۶}$ هست. لذا کافیه معلوم بشه که α از مبدأ حرکت چند تا $\frac{\pi}{۶}$ رو طی کرده.

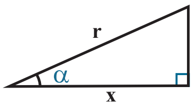


توجه توجه: بچه‌ها! تا نام و مکان زوایای معروف روی دایره‌رو توپِ توپِ توپ یاد نگرفتید، وارد قسمت بعدی نشید.

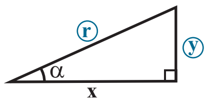
۲ زندگی نامه ی $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ۲

تعریف $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در یک مثلث قائم‌الزاویه

بچه‌ها! مثلث قائم‌الزاویه‌ی روبرو رو در نظر بگیرید. با توجه به این مثلث می‌خوام دو تا قرارداد باهاتون ببندم.

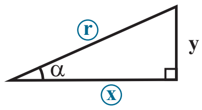


قرارداد ۱: در مثلث قائم‌الزاویه ی



داریم: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$. یعنی: $\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}}$

قرارداد ۲: در مثلث قائم‌الزاویه ی

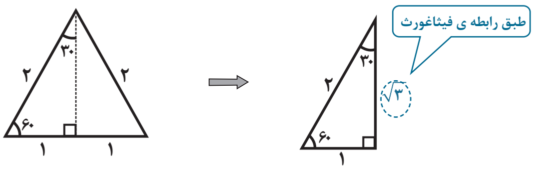


داریم: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$. یعنی: $\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$

حالا یه سؤال: با توجه به قراردادی که بستم، آیا می‌تونید مقادیر $\sin ۳۰$، $\sin ۴۵$، $\sin ۶۰$، $\cos ۳۰$،، $\cos ۶۰$ رو محاسبه کنید؟

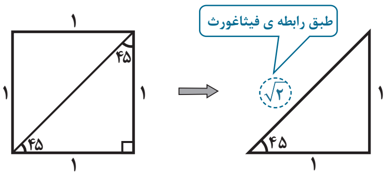
آقا اجازه؟! بله می‌تونیم. باید مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های معلوم درست کنیم که دارای زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ باشه. در این صورت می‌تونیم $\sin ۳۰$، $\sin ۶۰$، $\cos ۳۰$، $\cos ۶۰$ رو طبق قراردادی که گفتید به دست بیاریم.

اما برای ایجاد یک مثلث قائم‌الزاویه با شرایط بالا، میشه یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲ واحد رو از وسط نصف کرد. یعنی:



$$\begin{cases} \sin ۳۰ = \frac{\text{ضلع مقابل ۳۰}}{\text{وتر}} = \boxed{\frac{۱}{۲}} \\ \sin ۶۰ = \frac{\text{ضلع مقابل ۶۰}}{\text{وتر}} = \boxed{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \end{cases} , \quad \begin{cases} \cos ۳۰ = \frac{\text{ضلع مجاور ۳۰}}{\text{وتر}} = \boxed{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \\ \cos ۶۰ = \frac{\text{ضلع مجاور ۶۰}}{\text{وتر}} = \boxed{\frac{۱}{۲}} \end{cases}$$

آقا اجازه؟!برای ایجاد مثلثی قائم‌الزاویه با زاویه‌ی ۴۵° میشه از مربعی به ضلع ۱ واحدکمک گرفت؟ یعنی:



$$\begin{cases} \sin ۴۵ = \frac{\text{ضلع مقابل ۴۵}}{\text{وتر}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \\ \cos ۴۵ = \frac{\text{ضلع مجاور ۴۵}}{\text{وتر}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \boxed{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \end{cases}$$

آفرین به تو دانش‌آموز خوش فکرم!

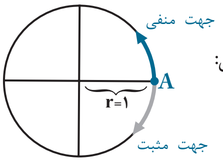
بچه‌ها! پس فهمیدیم که sin و cos زوایای ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° یکی از این ۳ مقدار هستن یعنی: $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۱}}{۲}$

اگه به سه مقداربدست اومده خوب دقت کنید می‌بینید که:

۱) مخرج‌ها مقداری ثابت دارن یعنی: ۲

۲) در صورت کسر، سربازهای ۳، ۲ و ۱ به ترتیب در حال رژه رفتن هستن که کلاه (رادیکال) روی سرشون قرار داره.

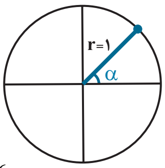
تعریف $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در دایره ی مثلثاتی



تعریف دایره‌ی مثلثاتی: دایره‌ای به شعاع ۱ واحدرو دایره‌ی مثلثاتی میگیم.این دایره جهت دار و نقطه ی A مبدا حرکتشه. یعنی:

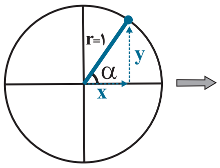
بچه‌ها! شاعر میگه: شنیدن کی بود مانند دیدن . من هم می‌گم : حفظ کردن کی بود مانند فهمیدن

از اینجا به بعد می‌خوام به کمک دایره‌ی معجزه‌گر (یعنی دایره‌ی مثلثاتی) کاری بکنم که شما یکبار برای همیشه طعم شیرین مثلثات رو بچشید. پس خوب به حرفام دقت کنید:



بچه‌ها! روی دایره‌ی مثلثاتی، عقربه‌ای رو که حاوی زاویه‌ی α هست در نظر بگیرید.

اگه این عقربه‌رو روی محور افق تصویر کنم، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آد.

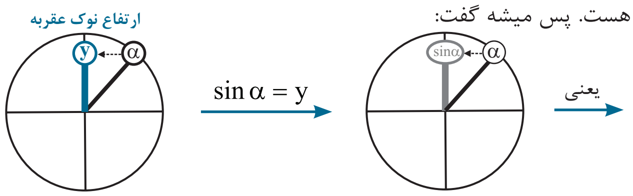


$$\begin{cases}\sin\alpha = \dfrac{y}{1} \Rightarrow \sin\alpha = y \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{1} \Rightarrow \cos\alpha = x\end{cases}$$

پس میشه $\sin\alpha$، $\cos\alpha$ رو طبق قرارداد تعریف کرد:

اولین معجزه‌ی دایره‌ی مثلثاتی: فقط در دایره‌ی مثلثاتیه که $\sin\alpha = y$ میشه. (در دایره‌های دیگه: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$)

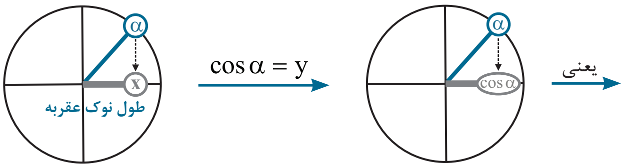
اگه به دایره‌ی مثلثاتی زیر نگاه کنید،می‌بینید که y ارتفاع نوک عقربه هست. پس میشه گفت:



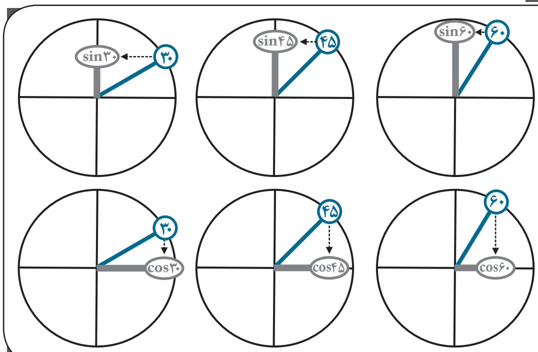
$\sin\alpha =$ ارتفاع نوک عقربه

دومین معجزه‌ی دایره‌ی مثلثاتی: فقط در دایره‌ی مثلثاتیه که $\cos\alpha = y$ میشه. (در دایره‌های دیگه: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$)

اگه باز هم به دایره‌ی مثلثاتی زیر دقت کنید می‌بینید که x طول نوک عقربه هست. پس میشه گفت:



$\cos\alpha =$ طول نوکه عقربه



با توجه به شکل $\longrightarrow \sin 30 < \sin 45 < \sin 60$

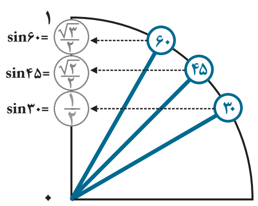
با توجه به شکل $\longrightarrow \cos 30 < \cos 45 < \cos 60$

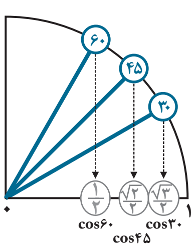
بچه‌ها! آیا یادتونه که در قسمت قبل نتیجه گرفتیم که sin و cos زاویه‌های 60° و 45° و 30° یکی از سه مقدار $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{1}{2}$ رو اختیار می‌کنن؟

آقا اجازه؟! بله یادمونه.

حالا ازتون می‌خوام این سه مقدار رو روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید.

آقا اجازه؟! با توجه به تصویرسازی‌هایی که برای ما کردید، خیلی راحت میشه این کار رو انجام داد.





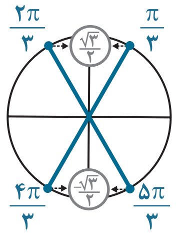
آقا اجازه؟! تا به حال ما این مقادیر رو به کمک یک جدول حفظ می‌کردیم و خیلی از اوقات اونهارو با هم قاطی می‌کردیم. اما حالا به کمک این دایره‌ی معجزه‌گر، خیلی راحت می‌تونیم بگیم که $(\sin ۰ = ۰\ ,\ \sin ۹۰ = ۱\ ,\ \cos ۰ = ۱\ ,\ \cos ۹۰ = ۰)$:

پس عزیزم، یواش یواش داره از مثلثات خوشت می‌آید. می‌خوام بهت بگم تازه کجاشو دیدی‌ی...!!!

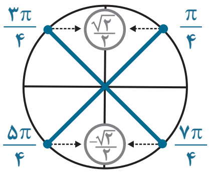
مقدار سینوس و کسینوس زاویه‌هایی که روی ضربدرهای مدل‌سازی شده قرار دارند!

بچه‌ها! درقسمت قبل، زاویه‌هایی‌رو به شما معرفی کردم که روی ضربدرهایی با مدل ۳۰°، ۴۵° و ۶۰° قرار داشتن. لطفاً sin و cos این زاویه‌ها رو به دست بیارید.

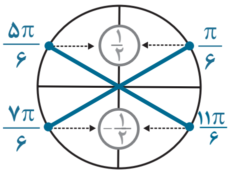
آقا اجازه؟! این ضربدرهای مدل‌سازی شده عجب چیز باحالی هستن. الان هر چی خواستید رو براتون به دست می‌آریم:



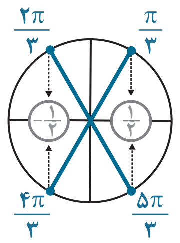
$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{۳} = \sin\frac{۲\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \sin\frac{۴\pi}{۳} = \sin\frac{۵\pi}{۳} = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$



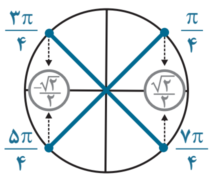
$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{۴} = \sin\frac{۳\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \sin\frac{۵\pi}{۴} = \sin\frac{۷\pi}{۴} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$



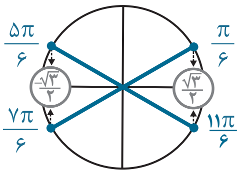
$$\begin{cases} \sin\frac{\pi}{۶} = \sin\frac{۵\pi}{۶} = \frac{۱}{۲} \\ \sin\frac{۷\pi}{۶} = \sin\frac{۱۱\pi}{۶} = \frac{-۱}{۲} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{۳} = \cos\frac{۵\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} \\ \cos\frac{۲\pi}{۳} = \cos\frac{۴\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{۴} = \cos\frac{۷\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \cos\frac{۳\pi}{۴} = \cos\frac{۵\pi}{۴} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{۶} = \cos\frac{۱۱\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \cos\frac{۵\pi}{۶} = \cos\frac{۷\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

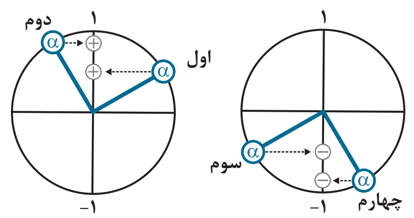
بچه‌ها! بهتون تبریک می‌گم. چون الان به مرحله‌ای رسیدید که می‌تونید sin و cos زوایای معروف رو به کمک دایره‌ی معجزه‌گر (مثلثاتی) به دست بیارید.

علامت $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در دایره‌ی مثلثاتی

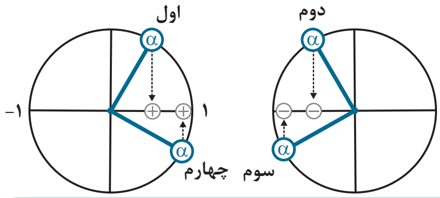
بچه‌ها! میشه بگید که مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در هر ربع از دایره‌ی مثلثاتی چه علامتی دارن؟

آقا اجازه؟! این که خیلی آسونه.

از اون‌جایی که $\sin\alpha$ ارتفاع نوک عقربه هست، پس اگه α در ربع اول و دوم باشه، علامت $\sin\alpha$ مثبته و اگه در ربع سوم و چهارم باشه، علامت $\sin\alpha$ منفیه. یعنی:



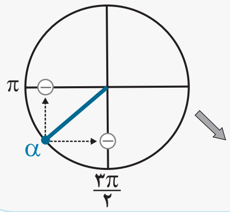
اما با توجه به این‌که $\cos\alpha$ طول نوک عقربه هست، پس میشه گفت:
در ربع اول و چهارم، علامت $\cos\alpha$ مثبته و در ربع دوم و سوم منفیه.



مثال اگر $\sin\alpha\cos\alpha > ۰$ و $\sin\alpha + \cos\alpha < ۰$ باشد، محدوده‌ی α کدام است؟

بچه‌ها! از اون‌جایی که $\sin\alpha\cos\alpha > ۰$ پس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ هم علامتند. یعنی:
(هر دو مثبت یا هر دو منفی) اما چون مجموع $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مقداری منفیه، نتیجه
می‌گیریم که هر دوشون منفی هستند. یعنی α در ربع سوم قرار داره:

α در ربع سوم قرار داره $\Longrightarrow \pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$

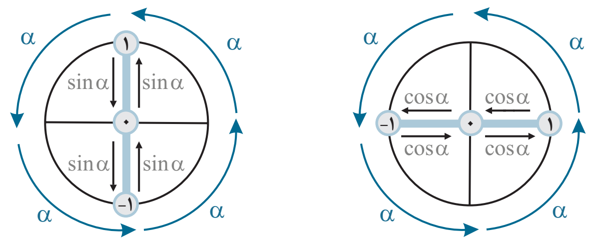


محدوده‌ی $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$

بچه‌ها! یه سؤال دیگه: میشه بگید $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در چه محدوده‌ای قرار دارن؟

آقا اجازه؟! می‌دونیم که در دایره‌ی مثلثاتی شعاع برابره با ۱

بنابراین اگر عقربه‌ی α رو هر قدر هم که بچرخونیم، $\sin\alpha$ حداکثر برابر ۱ و حداقل برابر ۱- میشه
این مطلب برای $\cos\alpha$ هم صدق می‌کنه. یعنی $\cos\alpha$ هم حداکثرش ۱ و حداقلش ۱- هست



بچه‌ها! باز هم یه سؤال: به نظر شما در هر ربع، با افزایش زاویه‌ی α،مقادیر sin و cos این زاویه افزایش پیدا می‌کنن یا کاهش؟

آقا اجازه؟! شکل‌های بالا همه چی‌رو دارن نشون می‌دن. یعنی:

sin
در ربع اول و چهارم با افزایش α، مقدار $\sin\alpha$ زیاد میشه.
اما در ربع دوم و سوم با افزایش α، مقدار $\sin\alpha$ کم میشه.

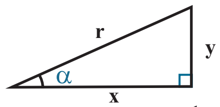
cos
در ربع اول و دوم با افزایش α، مقدار $\cos\alpha$ کم میشه.
در ربع سوم و چهارم با افزایش α، مقدار $\cos\alpha$ زیاد میشه.

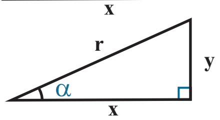
۳ زندگی نامه ی $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ۳

تعریف $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ در یک مثلث قائم‌الزّاویه

بچه‌ها! همون‌طور که قبلاً دیدید، با دو تا قرارداد، $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ رو براتون تعریف کردم.

حالا می خوام دوتا قرارداد دیگه رو باهاتون تنظیم کنم.

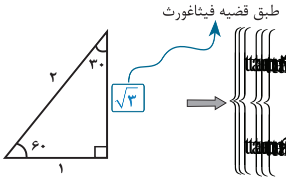
قرارداد ۳ : در مثلث قائم‌الزاویه ی  داریم : $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ یعنی : $\tan\alpha = \frac{\alpha \text{ ضلع مقابل}}{\alpha \text{ ضلع مجاور}}$

قرارداد ۴ : در مثلث قائم‌الزاویه ی  داریم : $\cot\alpha = \frac{x}{y}$ یعنی : $\cot\alpha = \frac{\alpha \text{ ضلع مجاور}}{\alpha \text{ ضلع مقابل}}$

بچه‌ها! با توجه به قراردادهایی که با شما بستم، لطفاً مقادیر $\tan 30$، $\tan 45$، $\tan 60$، $\cot 30$، $\cot 45$، $\cot 60$ رو محاسبه کنید.

آقا اجازه؟! به روی چشم.

از همون مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که برای محاسبه‌ی sin و cos زوایای ۶۰، ۴۵ و ۳۰ استفاده کردیم، میشه برای محاسبه‌ی tan، cot هم استفاده کرد. یعنی:



$$\tan 30 = \frac{\text{ضلع مقابل ۳۰}}{\text{ضلع مجاور ۳۰}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}} \qquad \cot 30 = \frac{\text{ضلع مجاور ۳۰}}{\text{ضلع مقابل ۳۰}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \boxed{\sqrt{3}}$$

$$\tan 60 = \frac{\text{ضلع مقابل ۶۰}}{\text{ضلع مجاور ۶۰}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \boxed{\sqrt{3}} \qquad \cot 60 = \frac{\text{ضلع مجاور ۶۰}}{\text{ضلع مقابل ۶۰}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

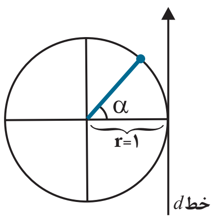
آفرین عزیزم.

بچه‌ها! پس فهمیدیم که tan و cot زوایای 30° و 45° و 60° یکی از این سه مقدار هستند: $\sqrt{3}$ و ۱ و $\frac{\sqrt{3}}{3}$

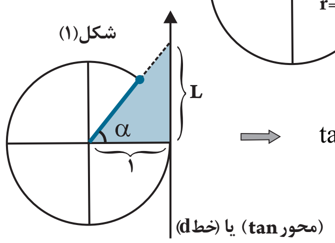
اگه به این سه مقدار $\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3}$ خوب دقت کنید می‌بینید که تشکیل یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $\sqrt{3}$ رو می‌دن.

تعریف $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ در دایره‌ی مثلثاتی

بچه‌ها! روی دایره‌ی مثلثاتی، عقربه‌ای رو که حاوی زاویه‌ی α هست در نظر بگیرید.



همون‌طور که می‌بینید،خط d در سمت راست دایره، به دایره مماس شده.اگر من این عقربه رو امتداد بدم تا خط d رو قطع کنه، یک مثلث قائم‌الزاویه به‌وجود می‌آد. پس میشه طبق قرارداد $\tan\alpha$ رو در این مثلث قائم‌الزاویه تعریف کرد:

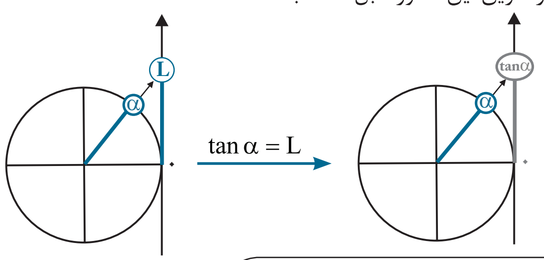


$$\tan\alpha = \frac{L}{1} \Rightarrow \tan\alpha = L$$

از این به بعد، اسم (خط d) رو بذارید (محور tan). چون مقدار tan یک زاویه از طریق این محور قابل محاسبه هست.

سومین معجزه‌ی دایره‌ی مثلثاتی:

فقط در دایره‌ی مثلثاتیه که $\tan\alpha = L$ میشه (در دایره‌های دیگه: $\tan\alpha = \frac{L}{r}$)

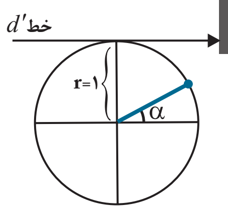


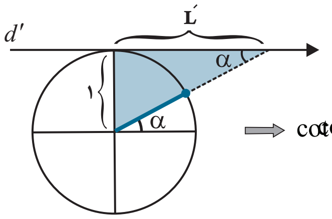
بچه‌ها!

اگه می‌خواید $\tan\alpha$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی پیدا کنید،کافیه عقربه‌ی α رو امتداد بدید تا محور tan رو قطع کنه. در این صورت: (ارتفاع نقطه‌ی برخورد = $\tan\alpha$)

بچه‌ها یه سؤال! آیا ممکنه مقدار $\cot\alpha$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی معلوم کنید؟

آقا اجازه؟! فکر کنیم باید خطی افقی به نام d′ رو که در بالای دایره قرار داره، به دایره مماس کنیم.اگه عقربه رو امتداد بریم تا خط d′ رو قطع کنه، یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آد که می‌شه طبق قرارداد،مقدار $\cot\alpha$ رو به کمک این مثلث معلوم کرد. یعنی:





(۲)

$\cot\alpha = \frac{L'}{1}$ ⟹ $\boxed{\cot\alpha = L'}$

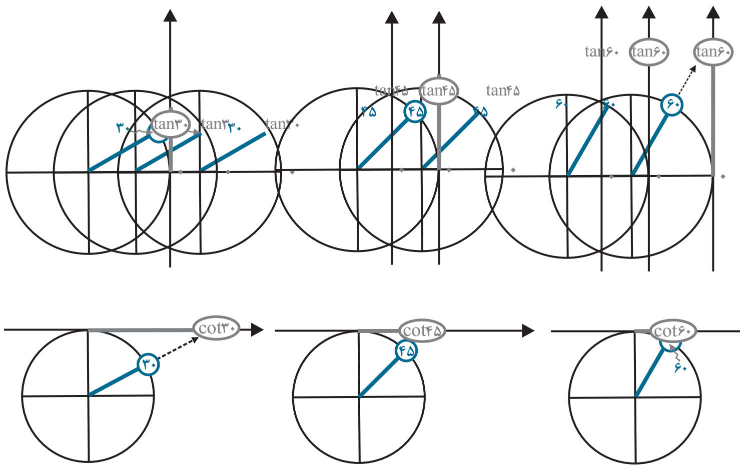
آفرین به تو دانش‌آموز خلاقم.

بچه‌ها! از این به بعد اسم (خط d') رو بذارید (محور cot)، چون مقدار cot یک زاویه به کمک این محور قابل محاسبه هست.

چهارمین معجزه‌ی دایره‌ی مثلثاتی : فقط در دایره‌ی مثلثاتی رابطه‌ی $\cot\alpha = L'$ برقراره. (در دایره‌های دیگه: $\cot\alpha = \frac{L'}{r}$)

بچه‌ها!

اگه می‌خواید $\cot\alpha$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی پیدا کنید، کافیه عقربه‌ی α روامتداد بدید تا محور cot رو قطع کنه. در این صورت: (طول نقطه‌ی برخورد = $\cot\alpha$)

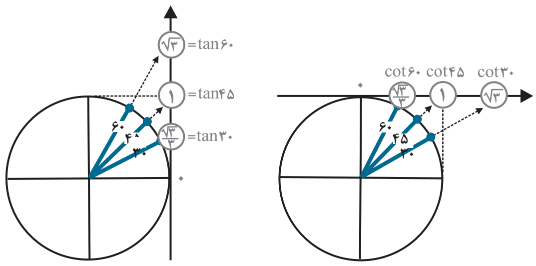


$\Rightarrow \tan ۳۰ < \tan ۴۵ < \tan ۶۰$

$\Rightarrow \cot ۳۰ > \cot ۴۵ > \cot ۶۰$

بچه‌ها! اگه یادتون باشه قبلاً گفتیم که: cot و tan زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ یکی از سه مقدار $\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}, ۱, \sqrt{۳}\right)$ رو اختیار می‌کنن.

حالا ازتون می‌خوام این سه مقدار رو روی دایره‌ی مثلثاتی معلوم کنید.

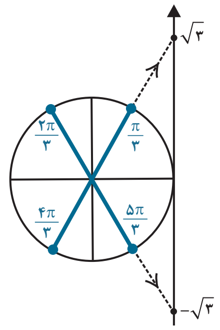


آقا اجازه؟! بفرمائید.

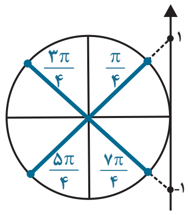
مقدار تانژانت و کتانژانت زاویه‌هایی که روی ضربدرهای مدل‌سازی شده قرار دارند!

بچه‌ها! لطفاً زاویه‌هایی که روی ضربدرهای ۳۰، ۴۵ و ۶۰ قرار دارن رو مشخص کنید و بعد tan و cot این زاویه‌ها رو بدست بیارید.

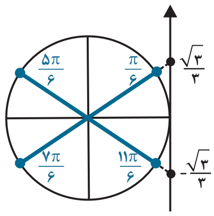
آقا اجازه؟! اگه کمی فرصت بدید خواسته‌ی شمارو اجرا می‌کنیم.



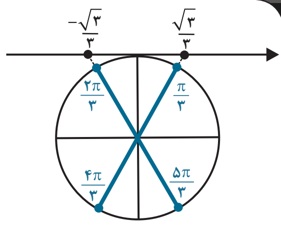
$$\begin{cases} \tan\frac{\pi}{3} = \tan\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3} \\ \tan\frac{2\pi}{3} = \tan\frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3} \end{cases}$$



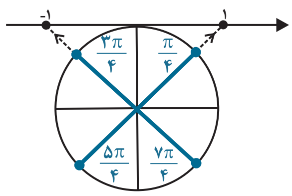
$$\begin{cases} \tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{5\pi}{4} = 1 \\ \tan\frac{3\pi}{4} = \tan\frac{7\pi}{4} = -1 \end{cases}$$



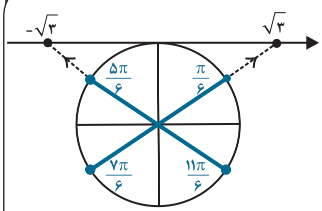
$$\begin{cases} \tan\frac{\pi}{6} = \tan\frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cot\frac{\pi}{3} = \cot\frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot\frac{2\pi}{3} = \cot\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



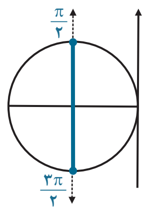
$$\begin{cases} \cot\frac{\pi}{4} = \cot\frac{5\pi}{4} = 1 \\ \cot\frac{3\pi}{4} = \cot\frac{7\pi}{4} = -1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cot\frac{\pi}{6} = \cot\frac{7\pi}{6} = \sqrt{3} \\ \cot\frac{5\pi}{6} = \cot\frac{11\pi}{6} = -\sqrt{3} \end{cases}$$

آفرین به تو. دستت درد نکنه. اما اگه به این سؤال من جواب بدی معلومه که مفهوم tan و cot یک زاویه‌رو کاملاً درک کردی.

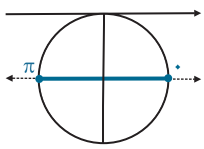
سؤال: $\tan\frac{\pi}{2}$ و $\tan\frac{3\pi}{2}$ چقدره؟



آقا اجازه؟! کافیه در دایره‌ی مثلثاتی، عقربه‌هایی که روی زاویه‌ی $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ قرار دارن رو امتداد بریم تا با محور tan برخورد کنه. نگاه کنید:

آقا ببخشید مثل اینکه مشکلی پیش اومده! این عقربه‌ها که با محور tan موازی هستن و امتدادشون اصلاً محور tan رو قطع نمی کنه، پس $\tan\frac{\pi}{2}$ و $\tan\frac{3\pi}{2}$ اصلاً مقدار نداره!

آقا با این حساب میشه گفت که $\cot(0)$ و $\cot(\pi)$ هم مقدار نداره. چون امتداد این دو زاویه، اصلاً با محور cot برخوردی نداره.



بسیار عالی! خیالم راحت شد که تا اینجارو خوب درک کردی.

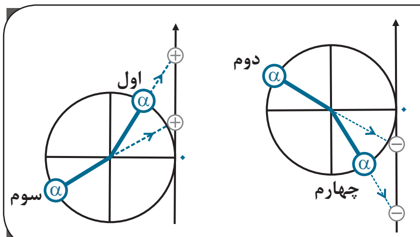
نتیجه

$\tan\frac{\pi}{2}, \tan\frac{3\pi}{2}, \cot 0, \cot\pi =$ تعریف نشده

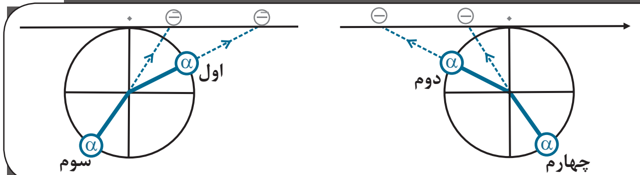
علامت $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ در دایره ی مثلثاتی

بچه‌ها! میشه بگید که $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ در هر ربع از دایره‌ی مثلثاتی چه علامتی دارن؟

آقا اجازه؟! از روی دایره‌ی مثلثاتی همه چی معلومه.
یعنی علامت $\tan\alpha$ اگه α در ربع اول و سوم باشه،
مثبت و اگه α در ربع دوم و چهارم باشه منفیه.



آقا همین‌طور میشه فهمید که علامت $\cot$
اگه α در ربع اول و سوم باشه، مثبت و
اگه α در ربع دوم و چهارم باشه منفیه.



آفرین به شما.

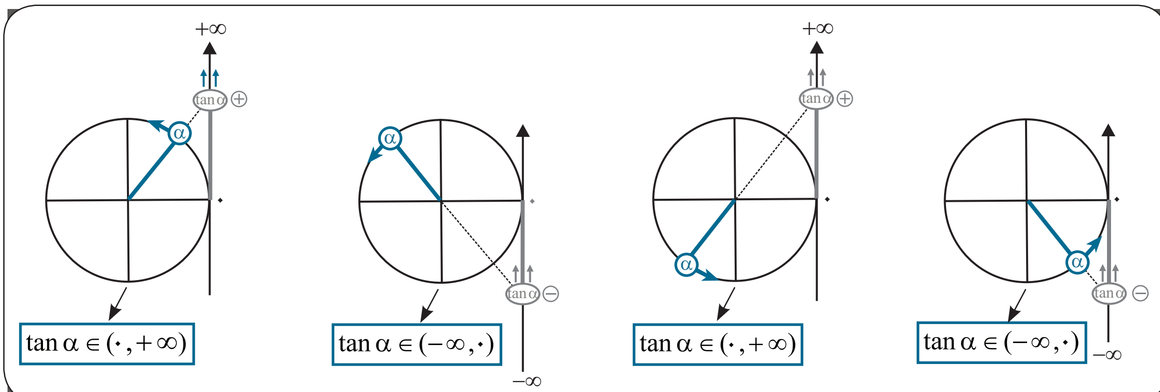
نکته

در هر ربع، $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ هم علامتند.

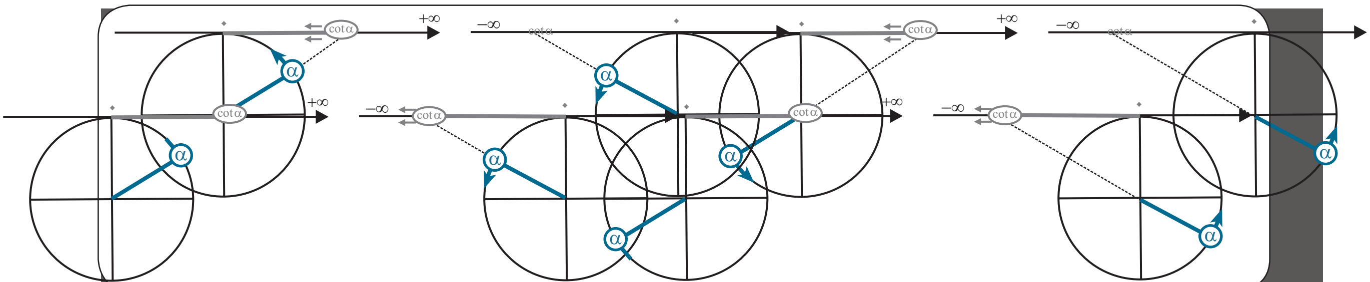
محدوده ی $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$

بچه‌ها! به نظر شما در هر ربع، با افزایش زاویه‌ی α، مقادیر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ زیاد میشن یا کم؟

آقا اجازه؟! چهار شکل زیر نشون میده که در هر کدوم از ۴ ربع، با افزایش α، مقدار $\tan\alpha$ داره زیاد میشه. از طرفی کاملاً مشخصه که با چرخیدن عقربه‌ی α درجهت مثبت، مقدار $\tan\alpha$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کنه.

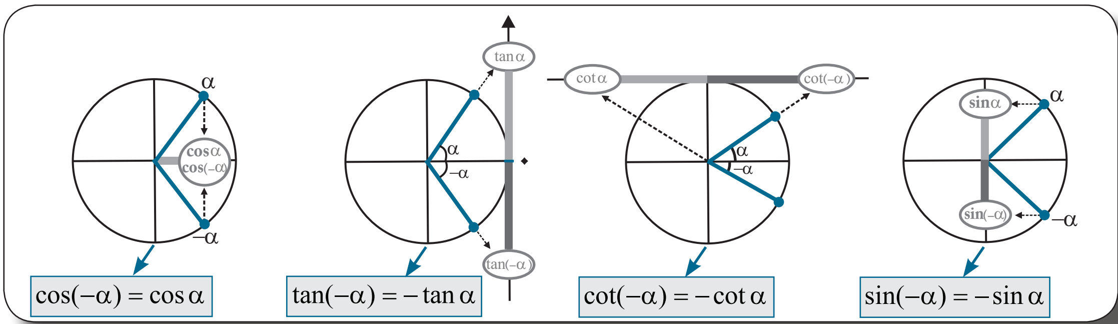


آقا اجازه؟! چهار شکل زیر هم، داره نشون می‌ده که در هر کدوم از ۴ ربع، با افزایش α، مقدار $\cot\alpha$ داره کم میشه. همچنین کاملاً معلومه که با دور زدن عقربه‌ی α، مقدار $\cot\alpha$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کنه.



۴ دو زاویه ی قرینه ۴

بچه‌ها! می‌خوام رابطه‌ی بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $(-\alpha)$ رو به دست بیارم. دایره‌ی مثلثاتی این رابطه‌رو خیلی واضح به ما نشون می‌ده. دقت کنید:



آقا اجازه؟! از شکل‌های بالا میشه فهمید که:

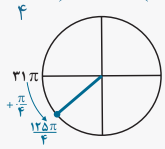
۱) $\cos$ *دو زاویه‌ی قرینه، با هم برابرن:* $\boxed{\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)}$

۲) $\sin$، $\tan$ و $\cot$ *دو زاویه‌ی قرینه، قرینه‌ی هم دیگه هستن. یعنی:*

$$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot(\alpha)$$

معنی روابط بالا به بیان خودمونی اینه:
۱) $\cos$ منفی خوره
۲) $\sin$، $\tan$ و $\cot$ منفی‌انداز هستن.

مثال حاصل $2\cos(\frac{-125\pi}{4})-3\tan(\frac{-125\pi}{4})+4\cot(\frac{-125\pi}{4})$ **کدام است؟**



$$2\cos(\frac{125\pi}{4})+3\tan(\frac{125\pi}{4})-4\cot(\frac{125\pi}{4})=2(\frac{-\sqrt{2}}{2})+3(1)-4(1)=-\sqrt{2}-1$$

۵ دو زاویه‌ی مکمل ۵

بچه‌ها! اگه مجموع دو زاویه‌ی α و β برابر 180° بشه می‌گیم α و β مکمل یکدیگه هستن.

$\boxed{\alpha+\beta=\pi \implies \text{مکملند } \alpha \text{ و } \beta}$

مکمل زاویه‌ی (α) برابره با $(\pi-\alpha)$، چون: $(\alpha)+(\pi-\alpha)=\pi$

مثال مکمل زوایای داده شده را مقابلشان بنویسید.

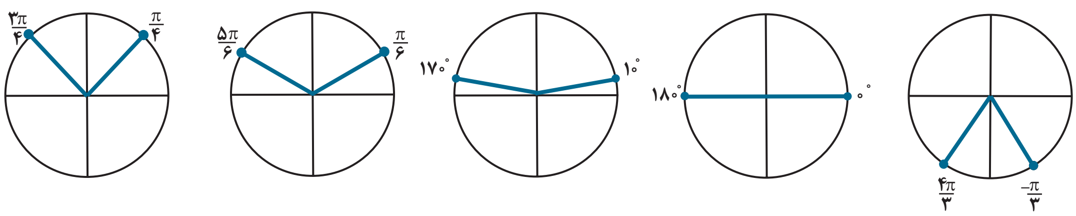
۱) $\alpha-\frac{\pi}{6}\xrightarrow{\text{مکمل}}-\alpha+\frac{7\pi}{6}$

۲) $\alpha+\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\text{مکمل}}-\alpha+\frac{2\pi}{3}$

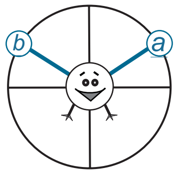
۳) $\frac{\pi}{4}-\gamma\xrightarrow{\text{مکمل}}\frac{3\pi}{4}+\gamma$

۴) $\beta-\frac{2\pi}{5}\xrightarrow{\text{مکمل}}-\beta+\frac{7\pi}{5}$

بچه‌ها! در هر کدوم از دایره‌های پایین، دو زاویه‌ی مکمل رسم کردم.



با توجه به این شکل‌ها، فکر می‌کنید که دو زاویه‌ی مکمل به چه موجودی شباهت دارن؟

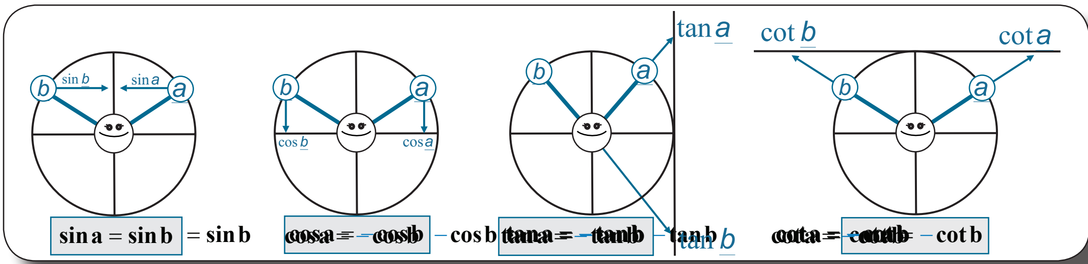


آقا اجازه؟! میشه دو زاویه‌ی مکمل‌رو شبیه به دو بال یک پرنده در نظر گرفت.

از این به بعد «به دو زاویه‌ی مکمل می‌گیم دو بال پرنده»

بچه‌ها! سؤال: نسبت‌های مثلثاتی دو بال پرنده چه رابطه‌ای با هم دارن؟

آقا اجازه؟! خیلی راحته:



آقا اجازه؟! شکل قبل داره میگه که دو زاویه‌ی مکمل، sin هاشون با هم برابرن اما cos ها، tan ها و cot هاشون قرینه‌ی هم‌دیگه هستن.

پس میشه گفت:

۱) مجموع cos های دو زاویه‌ی مکمل برابره با صفر؛

۲) مجموع tan های دو زاویه‌ی مکمل برابره با صفر (در صورت وجود)؛

۳) مجموع cot های دو زاویه‌ی مکمل برابره با صفر (در صورت وجود)؛

$$\cos a+\cos b=0$$
$$\tan a+\tan b=0$$
$$\cot a+\cot b=0$$

مثال حاصل $\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{7\pi}{14}+\cos\frac{9\pi}{14}+\cos\frac{11\pi}{14}$ را به دست آورید.

$$\underbrace{\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{11\pi}{14}}_{0}+\underbrace{\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{9\pi}{14}}_{0}+\cos\frac{7\pi}{14}=0+0+\cos\frac{\pi}{2}$$

مثال اگر $\sin\frac{3\pi}{8}=m$ باشد حاصل $\sin\frac{5\pi}{8}+\cot(\alpha+\frac{3\pi}{8})+\sin\frac{3\pi}{8}+\cot(\frac{5\pi}{8}-\alpha)$ بر حسب m کدام است؟

$$\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}+\underbrace{\cot\left(\alpha+\frac{3\pi}{8}\right)+\cot\left(\frac{5\pi}{8}-\alpha\right)}_{0}=\sin\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}+0=2\sin\frac{3\pi}{8}=2m$$

۶ دو زاویه‌ی متمم ۶

بچه‌ها! اگه مجموع دو زاویه‌ی α و β برابر 90° بشه، می‌گیم α و β متمم یکدیگه هستن.

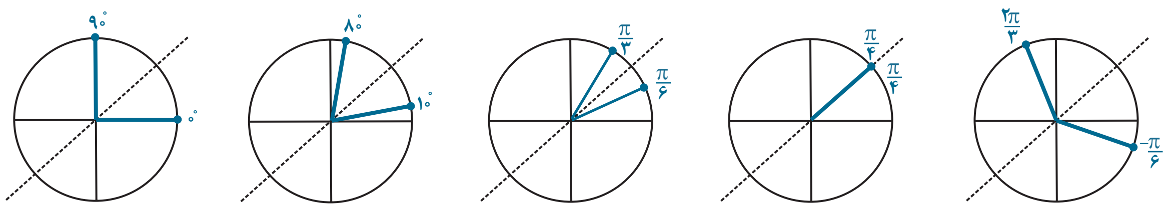
β و α متممند $\Longrightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

مکمل زاویه‌ی (α) برابره با $(\frac{\pi}{2}-\alpha)$، چون: $(\alpha)+(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{\pi}{2}$

مثال متمم زوایای زیر را روبرویشان بنویسید.

$$\alpha+\frac{\pi}{3}\longrightarrow-\alpha+\frac{\pi}{6}\qquad -\frac{\pi}{4}-\beta\longrightarrow\frac{3\pi}{4}+\beta\qquad \alpha-\frac{\pi}{6}\longrightarrow-\alpha+\frac{2\pi}{3}\qquad \frac{2\pi}{3}-\alpha\longrightarrow-\frac{\pi}{6}+\alpha$$

بچه‌ها! به زاویه‌های متممی که در شکل‌های زیر رسم کردم خوب دقت کنید.



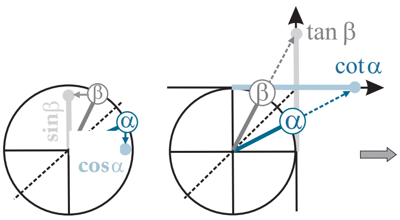
فکر می‌کنید این زاویه‌های متمم نسبت به چه خطی متقارن هستن؟

آقا اجازه؟! خط $y = x$ (یعنی نیمساز ربع اول و سوم)

فکر می‌کنید نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه‌ی متمم چه رابطه‌ای با هم دارن؟

آقا اجازه؟! $\sin$ یکی با $\cos$ اون یکی و $\tan$ یکی با $\cot$ اون یکی برابره.

بنابراین میشه گفت که اگه α و β متمم یکدیگه باشن اون موقع:



$$\boxed{\begin{array}{l}\sin\beta = \cos\alpha \\ \tan\beta = \cot\alpha\end{array}}$$

مثال حاصل عبارت $\sin(\alpha + \frac{\pi}{۳}) + \cos(\frac{\pi}{۴} - \beta) - \cos(\frac{\pi}{۶} - \alpha) - \sin(\frac{\pi}{۴} + \beta)$ کدام است؟

$$\underbrace{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{۳}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{۶} - \alpha\right)}_{۰} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{۴} - \beta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{۴} + \beta\right)}_{۰} = ۰ + ۰ = ۰$$

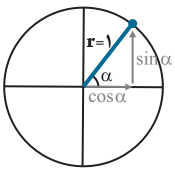
متمم — متمم

۷ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α (روابط پایه) ۷

بچه‌ها! به $(\cot\alpha, \tan\alpha, \cos\alpha, \sin\alpha)$ میگن «نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α» و حالا من قصد دارم به کمک **دایره‌ی مثلثاتی**، بین نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی α رابطه برقرار کنم.

آقا اجازه؟! مگه میشه به کمک دایره‌ی مثلثاتی، روابط مثلثاتی ایجاد کرد؟!

فکر کنم شما هنوز به معجزات دایره‌ی مثلثاتی ایمان نیاوردید!!! حالا که اینطوره پس نگاه کنید:



$$\boxed{\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱} \Rightarrow \begin{cases}\sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha \\ \cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha\end{cases}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha \cdot \cot\alpha = ۱} \Rightarrow \begin{cases}\tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha} \\ \cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha}\end{cases}$$

بچه‌ها! با توجه به روابطی که براتون استخراج کردم، آیا می‌تونید برای این دو عبارت مثلثاتی که در پایین نوشتم، عبارت معادل پیداکنید؟

۱) $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ?$ ۲) $\sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha = ?$

آقا اجازه؟! فکر کنیم که بشه از رابطه‌ی $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$، هم ارزهای $\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha$ و $\sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha$ رو بدست آورد.

۱) $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ = (۱)^۲ \Rightarrow \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha + ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha = ۱$

$$\boxed{\sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}$$

۲) $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \xrightarrow{\text{به توان ۳}} (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۳ = (۱)^۳ \Rightarrow (\sin^۲\alpha)^۳ + ۳(\sin^۲\alpha)^۲(\cos^۲\alpha) + ۳(\sin^۲\alpha)(\cos^۲\alpha)^۲ + (\cos^۲\alpha)^۳ = ۱$

$$\sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha + ۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha\underbrace{(\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)}_{۱} = ۱ \Rightarrow \boxed{\sin^۶\alpha + \cos^۶\alpha = ۱ - ۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}$$

آفرین عزیزم. کاملاً درسته.

اما بچه‌ها! اگه به دو رابطه‌ی به دست اومده توجه کنید می‌بینید که با هم فامیلن. یعنی این دو رابطه فقط در ضریب ۲ و ۳ با هم اختلاف دارن و بقیه‌ی ساختارشون مثل همه:

$$\sin^{۴}\alpha+\cos^{۴}\alpha=۱-۲\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$$

$$\sin^{۶}\alpha+\cos^{۶}\alpha=۱-۳\sin^{۲}\alpha\cos^{۲}\alpha$$

مثال ساده شده‌ی عبارت $\left(\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}-\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}\right)\times\cos x$ چیست؟

بچه‌ها! بهتره عبارت درون پرانتز رو به یک کسر تبدیل کنید (ساده کنید) یعنی:

$$\frac{(۱+\sin x)^{۲}-(۱-\sin x)^{۲}}{(۱-\sin x)(۱+\sin x)}\times\cos x=\frac{۴\sin x}{\underbrace{۱-\sin^{۲}x}_{\cos^{۲}x}}\times\cos x=\frac{۴\sin x}{\cos x}=۴\tan x$$

مثال عبارت $\tan x+\cot x$ با کدام گزینه برابر است؟

۱) $\frac{۲}{\sin x\cos x}$ ۲) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cdot\cos x}$ ۳) $\frac{۱}{\sin x\cos x}$ ۴) ۱

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x}{\cos x\sin x}=\frac{۱}{\sin x\cos x}$$

مثال ساده شده‌ی کسر $\frac{\sin^{۳}x+\cos^{۳}x}{۱-\sin x\cos x}$ چیست؟

یادآوری:

$$\begin{cases}a^{۳}+b^{۳}=(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})\\ a^{۳}-b^{۳}=(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})\end{cases}$$

تغییر علامت

تغییر علامت

$$\frac{\sin^{۳}x+\cos^{۳}x}{۱-\sin x\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)(\overbrace{\sin^{۲}x-\sin x\cos x+\cos^{۲}x}^{۱})}{۱-\sin x\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)}{(۱-\sin x\cos x)}=\sin x+\cos x$$

مثال اگر $\tan x=۲$ باشد، حاصل کسر $\frac{\sin x+\cos x}{۳\sin x-۲\cos x}$ کدام است؟

$$\frac{\sin x+\cos x}{۳\sin x-۲\cos x}=\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}{\frac{۳\sin x-۲\cos x}{\cos}}=\frac{\tan x+۱}{۳\tan x-۲}=\frac{۲+۱}{۳(۲)-۲}=\frac{۳}{۴}$$

$\tan x=۲$

خواسته‌ی مسئله‌رو بر حسب $\tan x$ می‌نویسم
یعنی صورت و مخرج کسر رو به $\cos x$ تقسیم میکنم

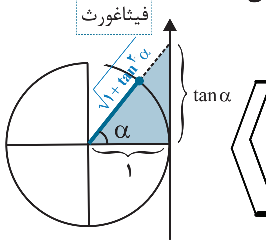
مثال ساده شده‌ی عبارت $\frac{\sin^{۳}x}{۱-\cos x}-\sin x\cos x$ کدام است؟

بچه‌ها لطفاً گوش کنید: اگه توی یک عبارت مثلثاتی، عامل‌هایی مثل $(۱-\cos x)$ یا $(۱+\cos x)$ یا $(۱-\sin x)$ یا $(۱+\sin x)$ دیدید اون عامل‌رو در مزدوجش ضرب و تقسیم کنید. معمولاً با این حرکت قفل اون عبارت مثلثاتی شکسته میشه.

$$\frac{\sin^{۳}x}{۱-\cos x}-\sin x\cos x=\frac{\sin^{۳}x(۱+\cos x)}{\underbrace{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}_{\underbrace{(۱-\cos^{۲})}_{\sin^{۲}x}}}-\sin x\cos x=\sin x(۱+\cos x)-\sin x\cos x=\sin x+\cancel{\sin x\cos}-\cancel{\sin x\cos x}=\sin x$$

بچه‌ها! این‌دفعه می‌خوام هر کدوم از نسبت‌های مثلثاتی $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ رو فقط بر حسب $\tan\alpha$ بنویسم.

اگه من بتونم در دایره‌ی مثلثاتی، یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد کنم که اضلاع این مثلث بر حسب $\tan\alpha$ باشه همه چی حله:

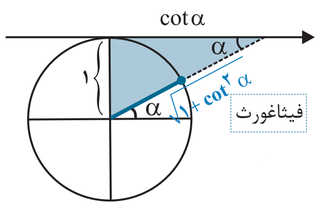


$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$$

بچه‌ها! فکر کنم الان شما بتونید تک‌تک نسبت‌های مثلثاتی $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ رو بر حسب $\cot\alpha$ بنویسید. مگه نه؟

آقا اجازه؟! باید در دایره‌ی مثلثاتی، یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد کنیم که اضلاعش بر حسب $\cot\alpha$ باشه. یعنی:



$$\sin\alpha = \frac{1}{\text{وتر}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\text{وتر}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} \Rightarrow \boxed{\cos^2\alpha = \frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}}$$

بچه‌ها! حالا می‌خوام ۴ رابطه‌ی بالا رو توی ذهنتون حک کنم: (دو مرحله)

۱) مخرج کسرها در هر ۴ رابطه، یا $1+\tan^2\alpha$ است و یا $1+\cot^2\alpha$.

۲) اما یکی از دو جمله‌ی مخرج‌رو، شما در صورت کسر می‌بینید. حالا سؤال اینه که کدوم جمله‌ی مخرج، در صورت کسر قرار می‌گیره؟ یعنی :

$$\frac{?\quad ?}{1+\boxed{\tan^2\alpha}} \quad \text{و} \quad \frac{?\quad ?}{1+\boxed{\cot^2\alpha}}$$

اما قبلش لازمه که یک مطلب مهم‌رو بهتون بگم: $\sin\alpha$ با $\tan\alpha$ فامیله، $\cos\alpha$ هم با $\cot\alpha$. به همین دلیل:

در رابطه ای که بین $\sin^2\alpha$ و $\tan^2\alpha$ برقراره ، عبارت $\sin^2\alpha$ پارتی بازی میکنه و فامیلش (یعنی $\tan^2\alpha$) رو میاره بالا. $\sin^2\alpha = \dfrac{\tan^2\alpha}{1+\boxed{\tan^2\alpha}}$

اما $\sin^2\alpha$ از $\cot^2\alpha$ استفاده نمی‌کنه، چون باهاش غریبس . $\sin^2\alpha = \dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}$

در رابطه ای که بین $\cos^2\alpha$ و $\cot^2\alpha$ برقراره ، عبارت $\cos^2\alpha$ پارتی بازی میکنه و فامیلش (یعنی $\cot^2\alpha$) رو میاره بالا. $\cos^2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha}{1+\boxed{\cot^2\alpha}}$

اما $\cos^2\alpha$ از $\tan^2\alpha$ استفاده نمی‌کنه، چون باهاش غریبس . $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$

بچه‌ها! اسم این ۴ رابطه‌ی مهم رو می‌ذارم «روابط دوست و دشمن»، لازمه که بگم این روابط، توی پیدایش روابط مثلثاتی دیگه خیلی دخالت دارن.

دشمن

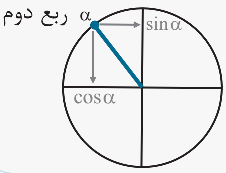
دوست

روابط دوست و دشمن :

$$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\cot^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha} = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

مثال اگر α در ربع دوم دایره‌ی مثلثاتی باشد. ساده شده‌ی عبارت $\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ کدام است؟



$$\sqrt{\frac{1}{1+\cot^2\alpha}}+\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}=\sqrt{\sin^2\alpha}+\sqrt{\cos^2\alpha}=|\overset{\text{مثبت}}{\sin\alpha}|+|\overset{\text{منفی}}{\cos\alpha}|=\sin\alpha-\cos\alpha$$

۸ روابط $\sin(\alpha\pm\beta)$ ، $\cos(\alpha\pm\beta)$ ، $\tan(\alpha\pm\beta)$ ۸

بچه‌ها! میشه مقدار $\sin(75^\circ)$ رو محاسبه کنید.

آقا اجازه؟! این که کاری نداره. کافیه زاویه‌ی 75° رو به صورت $45^\circ+30^\circ$ بنویسیم و sin رو روی این دو زاویه پخش کنیم.

$$\sin 75=\sin(45+30)=\sin 45+\sin 30=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

آیا فکر نمی‌کنی جوابی‌رو که بدست آوردی، غلطه؟

آقا؟! ببخشید مثل اینکه اشتباه کردم. چون، sin یک زاویه امکان نداره از ۱ بیشتر بشه، ولی در اینجا این اتفاق افتاده!

$$\sin 75=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\simeq\frac{1/4+1}{2}=\frac{2/4}{2}=1/2\ \ (\text{غلط})$$

ببین عزیزم، در راه حل شما یک اشتباه بزرگ نهفته. اشتباه اینه که شما فکر می‌کنی: $\sin(45+30)=\sin\times(45+30)$

در صورتیکه شما نمی‌تونی یک نسبت مثلثاتی رو در زاویه‌های درونش پخش کنی. (ضرب کنی)

چون یک نسبت مثلثاتی اصلاً در زاویه‌ی درون خودش ضرب نمی‌شه. یعنی:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&\neq\sin\alpha+\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&\neq\cos\alpha+\cos\beta\\ \tan(\alpha+\beta)&\neq\tan\alpha+\tan\beta\end{aligned}$$

در واقع نسبتهای مثلثاتی زوایه ها بصورت مقابل محاسبه می شن: (اگه اثبات روابط زیر رو میخواید، انتهای همین فصل رو ببینید.)

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\\ \tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{cases}$$

مثال در مثلثی رابطه‌ی $\sin B\cos A(\cot B-\tan A)=0$ برقرار است. نوع مثلث کدام است؟

$$\sin B\cos A\left(\frac{\cos B}{\sin B}-\frac{\sin A}{\cos A}\right)=0\Rightarrow\sin B\cos A\left(\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin B\cos A}\right)=0\Rightarrow$$

$$\cos A\cos B-\sin A\sin B=0\Rightarrow\cos(A+B)=0\Rightarrow A+B=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\widehat{C}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$ قائم‌الزاویه

مثال حاصل کسر $\frac{\tan(x+y)+\tan(x-y)}{1-\tan(x+y).\tan(x-y)}$ کدام است؟

بچه‌ها! اگه کمی دقت کنید می‌بینید که ساختار رابطه‌ی بالا مربوط به $\tan(\alpha+\beta)$ هست. بنابراین میشه نوشت:

$$\frac{\tan(x+y)+\tan(x-y)}{1-\tan(x+y).\tan(x-y)}=\tan\big((x+y)+(x-y)\big)=\tan 2x$$

مثال بیش‌ترین مقدار عبارت $(\sin x+\sin 2x)^2+(\cos x+\cos 2x)^2$ را به‌دست آورید.

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+2\sin x\sin 2x+\cos^2 x+\cos^2 2x+2\cos x\cos 2x=$$

$$\underbrace{\sin^2 x\cos^2 x}\ \ldots\ (\cos 2x\cos x \ldots)=\underbrace{2+2\cos x}_{Max=?}$$

$$\cos x\in[-1,1]\xrightarrow{\times 2}2\cos x\in[-2,2]\xrightarrow{+2}2+2\cos x\in[0,4]\qquad Max(2+2\cos x)=4$$

روابط ناقلا

بچه‌ها! یه روزی من از $\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}$ پرسیدم، تو اولش چی بودی که حالا بعد از ساده شدن به شکل $\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}$ دراومدی؟
اون جواب درستی به من نداد و گفت: من از همون اول همین شکلی بودم!!! (در واقع اون خواست منو بپیچونه) اما وقتی که فکر کردم دیدم اون از اول $\frac{\tan ۴۵+\tan\alpha}{۱-\tan ۴۵\tan\alpha}$ بوده و بهش گفتم ای ناقلا تو از اول این شکلی بودی:

$$\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}=\frac{\tan ۴۵+\tan\alpha}{۱-\tan ۴۵\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha}=\tan(۴۵+\alpha)}$$

از اون‌جا بود که من اسم این رابطه‌رو گذاشتم: رابطه‌ی ناقلا

البته این ناقلا یه داداش هم داره:

$$\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\frac{\tan ۴۵-\tan\alpha}{۱+\tan ۴۵\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha}=\tan(۴۵-\alpha)}$$

تازه یه مطلبی رو یادم رفت بهتون بگم. روابط ناقلای بالا گاهی اوقات خودشون رو طوری مخفی می‌کنن که اصلاً نمی‌تونید بفهمید که این‌ها ناقلا هستن. من اسمشون رو گذاشتم روابط ناقلای مخفی. اگه صورت و مخرج این روابط رو به $\cos\alpha$ تقسیم کنید دستشون رو میشه خوند. نگاه کنید:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{۱+\tan\alpha}{۱-\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan(۴۵+\alpha)}$$

$$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{۱-\tan\alpha}{۱+\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\tan(۴۵-\alpha)}$$

مثال حاصل $\frac{۱-\tan ۲۵}{۱+\tan ۲۵}$ با کدام برابر است؟

۱) $\tan ۲۵$ ۲) $\tan ۲۰$ ۳) $\tan ۱۵$ ۴) $\tan ۱۰$

$$\frac{۱-\tan ۲۵}{۱+\tan ۲۵}=\tan(۴۵-۲۵)=\tan ۲۰$$

مثال حاصل $\frac{\sin ۱۵+\cos ۱۵}{\sin ۱۵-\cos ۱۵}$ کدامست؟

$$\frac{\cos ۱۵+\sin ۱۵}{-(\cos ۱۵-\sin ۱۵)}=-\frac{۱+\tan ۱۵}{۱-\tan ۱۵}=-\tan(۴۵+۱۵)=-\tan ۶۰=-\sqrt{۳}$$

۹ روابط $\sin ۲\alpha$, $\cos ۲\alpha$, $\tan ۲\alpha$ ۹

روابط اصلی ($\sin ۲\alpha$, $\cos ۲\alpha$, $\tan ۲\alpha$)

بچه‌ها ایندفه بریم سراغ نسبت‌های مثلثاتی زاویه ی ۲α.

فکر می‌کنید برای $\sin ۲\alpha$ چه رابطه‌ای رو می‌شه نوشت؟

آقا اجازه؟! اگه $\sin ۲\alpha$ رو به صورت $\sin(\alpha+\alpha)$ بنویسیم اون موقع:

رابطه ی مادر

$$\sin ۲\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha}$$

فکر می کنید می‌شه $\sin ۲\alpha$ رو برحسب $\tan\alpha$ نوشت؟

آقا اجازه؟! این که کاری نداره، کافیه رابطه ی مادر رو بر حسب $\tan\alpha$ بازنویسی کنیم.

رابطه ی دشمن

$$\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲\sin\alpha\cdot\cos^۲\alpha=۲\tan\alpha\times\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha} \Rightarrow \boxed{\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}}$$

$$\sin \bigcirc = 2\sin \frown \cos \frown = \frac{2\tan \frown}{1+\tan^2 \frown}$$

مثال $\sin 100 = 2\sin 50 \cos 50 = \dfrac{2\tan 50}{1+\tan^2 50}$

مثال $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha = \dfrac{2\tan 2\alpha}{1+\tan^2 2\alpha}$

مثال $\sin \alpha = 2\sin \dfrac{\alpha}{2} \cos \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2 \frac{\alpha}{2}}$

مثال حاصل عبارات زیر را بیابید؟

$$\sin 15 \cos 15 = \frac{1}{2}(2\sin 15 \cos 15) = \frac{1}{2}\sin 30 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

این رابطه یه ضریب ۲ کم داره

$$\frac{\tan 7/5}{1+\tan^2 7/5}\times \cos 15 = \frac{1}{2}\times\frac{2\tan 7/5}{1+\tan^2 7/5}\times\cos 15 = \frac{1}{2}\sin 15 \cos 15 = \frac{1}{4}\times 2\sin 15\cos 15 = \frac{1}{4}\sin 30 = \frac{1}{8}$$

این رابطه یه ضریب ۲ کم داره

مثال اگر $\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{5}$ باشد حاصل $\sin 4x$ کدام است؟

$$(\sin 2x - \cos 2x)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 2x + \cos^2 2x - \boxed{2\sin 2x \cos 2x} = \frac{1}{25} \Rightarrow \sin 4x = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \sin 4x = \frac{24}{25}$$

بچه‌ها! حالا که به خوبی از پس رابطه‌های $\sin 2\alpha$ براومدید برید سراغ $\cos 2\alpha$.

آقا اجازه؟! اولین حرکت باز کردن زاویه‌ی 2α به شکل $(\alpha+\alpha)$ هست یعنی:

رابطه‌ی مادر

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha \Longrightarrow \boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

آقا اگه بخوایم $\cos 2\alpha$ رو فقط بر حسب $\cos\alpha$ بنویسیم کافیه در رابطه‌ی مادر همه چی‌رو به $\cos\alpha$ تبدیل کنیم.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \underbrace{\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \Longrightarrow \boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

آقا اگه بخوایم $\cos 2\alpha$ رو فقط بر حسب $\sin\alpha$ بنویسیم کافیه در رابطه‌ی مادر همه چی‌رو به $\sin\alpha$ تبدیل کنیم.

$$\cos 2\alpha = \underbrace{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Longrightarrow \boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

آقا اگه بخوایم $\cos 2\alpha$ رو فقط بر حسب $\tan\alpha$ بنویسیم کافیه در رابطه‌ی مادر همه چی‌رو به $\tan\alpha$ تبدیل کنیم.

رابطه ی دشمن

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} - \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \Longrightarrow \boxed{\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}$$

رابطه ی دوست

$$\boxed{\cos \bigcirc = \cos^2 \frown - \sin^2 \frown = 2\cos^2 \frown - 1 = 1 - 2\sin^2 \frown = \frac{1-\tan^2 \frown}{1+\tan^2 \frown}}$$

بچه‌ها! فکر می‌کنید یک دانش‌آموز حواس پرت، ممکنه رابطه‌ی $\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos 2\alpha$ رو با کدوم رابطه اشتباه کنه؟

آقا اجازه؟! با رابطه‌ی $\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ یعنی

بچه‌ها! حالا نوبت به $\tan 2\alpha$ می‌رسه.

آقا اجازه؟! روش پیدا کردن این رابطه هم مثل قبلی‌هاست یعنی:

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} \Rightarrow \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

بچه‌ها! فکر می‌کنید یه دانش‌آموز ممکنه رابطه‌ی $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ رو با چه رابطه‌ای اشتباه بگیره؟

آقا اجازه؟! با رابطه‌ی $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

آفرین عزیزم. حالا رابطه‌ای رو که به‌دست آوردی، من به صورت تعمیم‌یافته می‌نویسم.

$$\boxed{\tan\bigcirc=\frac{2\tan\frac{\bigcirc}{2}}{1-\tan^2\frac{\bigcirc}{2}}}$$

مثال $\tan 200=\frac{2\tan 100}{1-\tan^2 100}$

مثال $\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

مثال حاصل $\frac{\tan\alpha\cot 2\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ کدام است؟

$$\frac{1}{2}\times\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\times\cot 2\alpha=\frac{1}{2}\tan 2\alpha\cot 2\alpha=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

مثال اگر $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=3$ باشد مقدار $\tan 2x$ کدام است؟

$$\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=3 \Rightarrow \sin x=3\sin x+3\cos x \Rightarrow -2\sin x=3\cos x \Rightarrow \tan x=-\frac{3}{2}$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\times(-\frac{3}{2})}{1-(-\frac{3}{2})^2}=\frac{-3}{1-\frac{9}{4}}=\frac{-3}{-\frac{5}{4}}=\frac{12}{5}$$

روابط فرعی

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$$

بچه‌ها! چرا $\boxed{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha}$؟

علت: $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+2\sin\alpha\cos\alpha$

بچه‌ها! چرا $\boxed{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\sin 2\alpha}$؟

علت: $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}-2\sin\alpha\cos\alpha$

بچه‌ها! چرا $\boxed{\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}}$؟

علت: $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$

بچه‌ها! چرا $\boxed{\tan\alpha-\cot\alpha=-2\cot 2\alpha}$؟

علت: $\tan\alpha-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}$

بچه ها! چرا $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = 1-\frac{2}{4}\sin^2 2\alpha$ ؟ $=1-\frac{2}{4}(\sin 2\alpha)(\sin 2\alpha)$

علت $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha = 1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1-\frac{2}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\alpha\cos\alpha)$

بچه ها! چرا $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$ ؟ $=1-\frac{3}{4}(\sin 2\alpha)(\sin 2\alpha)$

علت $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha = 1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1-\frac{3}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\alpha\cos\alpha)$

این طور که معلومه ساقتار دو رابطه‌ی بالا مثل هم هستن و فقط ضریب $\frac{2}{4}$ و $\frac{3}{4}$ اون‌هارو از هم متمایز کرده.

بچه ها! چرا $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ ؟ $2\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

علت $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \Rightarrow 2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$

بچه ها! چرا $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$ ؟ $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

علت $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

آقا اجازه؟! از تقسیم دو رابطه ی قبل به همریگه، می‌شه به رابطه‌ی روبرو رسید:

$$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

۱۰ روابط (3α) ۱۰

بچه‌ها! فکر می‌کنید برای $\sin 3\alpha$ چه رابطه‌ای میشه نوشت؟

آقا اجازه؟! اگه بفوایم رابطه ای برحسب زاویه‌ی α بنویسیم باید 3α رو فورد کنیم. یعنی:

$$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha+\alpha) = \boxed{\sin 2\alpha}\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = \boxed{2\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

نتیجه $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

درضمن $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

۲۱ تبدیل ضرب به جمع ۲۱

بچه‌ها! ازتون خواهش می‌کنم که ۴ رابطه‌ی پایین رو با دقت نگاه کنید و با دوربین ذهنتون یک عکس یادگاری از این ۴ رابطه بگیرید.

الف (قسمت اول / قسمت دوم)

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \boxed{\sin\alpha\cos\beta} + \boxed{\cos\alpha\sin\beta} \\ \sin(\alpha-\beta) = \boxed{\sin\alpha\cos\beta} - \boxed{\cos\alpha\sin\beta} \end{cases}$$

ب (قسمت اول / قسمت دوم)

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \boxed{\cos\alpha\cos\beta} - \boxed{\sin\alpha\sin\beta} \\ \cos(\alpha-\beta) = \boxed{\cos\alpha\cos\beta} + \boxed{\sin\alpha\sin\beta} \end{cases}$$

بچه‌ها! اگه به دو رابطه ی قسمت الف دقت کنید می بنید که بسط $\sin(\alpha\pm\beta)$ از دو قسمت تشکیل شد که قسمت اولش **$\sin\alpha.\cos\beta$** و قسمت دومش **$\cos\alpha.\sin\beta$** هست.

سوال ۱) به نظر شما چه عملی بین $\sin(\alpha+\beta)$ و $\sin(\alpha-\beta)$ باید صورت بگیره تا $\sin\alpha\cos\beta$ ایجاد بشه؟

آقا اجازه؟! برای اینکه قسمت اول *بسط* $\sin(\alpha\pm\beta)$ *رو به وجود بیاریم ، باید* $\sin(\alpha+\beta)$ *رو با* $\sin(\alpha-\beta)$ جمع *کنیم. یعنی:*

قسمت اول — قسمت دوم

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\boxed{\sin\alpha\cos\beta}+\cancel{\boxed{\cos\alpha\sin\beta}}\\ \sin(\alpha-\beta)=\boxed{\sin\alpha\cos\beta}-\cancel{\boxed{\cos\alpha\sin\beta}}\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو تساوی}}\boxed{2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$$

سوال ۲) چه عملی بین $\sin(\alpha+\beta)$ و $\sin(\alpha-\beta)$ باید صورت بگیره تا $\cos\alpha\sin\beta$ ایجاد بشه؟

آقا اجازه؟! برای اینکه قسمت دوم *بسط* $\sin(\alpha\pm\beta)$ *رو به وجود بیاریم، باید* $\sin(\alpha+\beta)$ *رو* منهای $\sin(\alpha-\beta)$ *کنیم. یعنی:*

قسمت اول — قسمت دوم

$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\cancel{\boxed{\sin\alpha\cos\beta}}+\boxed{\cos\alpha\sin\beta}\\ \sin(\alpha-\beta)=\cancel{\boxed{\sin\alpha\cos\beta}}-\boxed{\cos\alpha\sin\beta}\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل دو تساوی}}\boxed{2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$$

اما دوستان من! اگه به دو رابطه ی قسمت ب توجه کنید مشاهده می کنید که بسط $\cos(\alpha\pm\beta)$ هم از دو قسمت تشکیل شده که قسمت اولش $\cos\alpha\cos\beta$ قسمت دومش $\sin\alpha\sin\beta$ هست.

سوال ۳) چه عملی بین $\cos(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ باید صورت بگیره تا $\cos\alpha\cos\beta$ ایجاد بشه؟

آقا اجازه؟! برای اینکه قسمت اول *بسط* $\cos(\alpha\pm\beta)$ *رو به وجود بیاریم، باید* $\cos(\alpha+\beta)$ *رو با* $\cos(\alpha-\beta)$ جمع *کنیم. یعنی:*

قسمت اول — قسمت دوم

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\boxed{\cos\alpha\cos\beta}-\cancel{\boxed{\sin\alpha\sin\beta}}\\ \cos(\alpha-\beta)=\boxed{\cos\alpha\cos\beta}+\cancel{\boxed{\sin\alpha\sin\beta}}\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو تساوی}}\boxed{2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$$

سوال ۴) چه عملی بین $\cos(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ باید صورت بگیره تا $\sin\alpha\sin\beta$ ایجاد بشه؟

آقا اجازه؟! برای اینکه قسمت دوم *بسط* $\cos(\alpha\pm\beta)$ *رو به وجود بیاریم، باید* $\cos(\alpha+\beta)$ *رو* منهای $\cos(\alpha-\beta)$ *کنیم. یعنی:*

قسمت اول — قسمت دوم

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cancel{\boxed{\cos\alpha\cos\beta}}-\boxed{\sin\alpha\sin\beta}\\ \cos(\alpha-\beta)=\cancel{\boxed{\cos\alpha\cos\beta}}+\boxed{\sin\alpha\sin\beta}\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل دو تساوی}}\boxed{-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$$

بچه‌ها! به چهار رابطه ای که تولید کردید میگن روابط ضرب به جمع. چون سمت چپ تساوی به صورت ضرب و سمت راست تساوی به صورت جمع یا منهاست.

مثال حاصل عبارت $2\sin2x\cos x-2\sin5x\cos2x+\sin7x$ کدام است؟

قسمت اول $\sin(\alpha\pm\beta)$ — قسمت اول $\sin(\alpha\pm\beta)$

$$2\sin2x\cos x-2\sin5x\cos2x+\sin7x=[\sin(2x+x)+\sin(2x-x)]-[\sin(5x+2x)+\sin(5x-2x)]+\sin7x$$

$$=\cancel{\sin3x}+\sin x-\cancel{\sin7x}-\cancel{\sin3x}+\cancel{\sin7x}=\sin x$$

مثال مقدار عددی $\sin75^\circ\sin15^\circ$ کدام است؟

عبارت $\sin75\sin15$ یه ضریب -2 کم داره. اگه کنارش این ضریبرو بذاریم اون موقع میشه براش تبدیل ضرب به جمع رو نوشت:

$$\sin75\sin15=\frac{-1}{2}(-2\sin75\sin15)=\frac{-1}{2}\Big(\cos(75+15)-\cos(75-15)\Big)=\frac{-1}{2}(\cos90-\cos60)=\frac{-1}{2}\Big(0-\frac{1}{2}\Big)=\frac{1}{4}$$

بخش دوم $\cos(\alpha\pm\beta)$

۱۱ تبدیل جمع به ضرب ۱۱

بچه‌ها! در قسمت قبل دیدید که اگه روابط $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$ و $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$

رو به صورت ستونی یکبار با هم جمع و یکبار از هم کم کنیم به چهار رابطه ی مهم میرسیم. نگاه کنید:

۱) $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cancel{\cos\alpha\sin\beta}\\ \quad + \qquad\qquad + \qquad\qquad + \\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cancel{\cos\alpha\sin\beta}\end{cases} \Rightarrow \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

قسمت اول $\sin(\alpha\pm\beta)$

۲) $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\cancel{\sin\alpha\cos\beta}+\cos\alpha\sin\beta\\ \quad - \qquad\qquad - \qquad\qquad - \\ \sin(\alpha-\beta)=\cancel{\sin\alpha\cos\beta}-\cos\alpha\sin\beta\end{cases} \Rightarrow \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

قسمت دوم $\sin(\alpha\pm\beta)$

۳) $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\cancel{\sin\alpha\sin\beta}\\ \quad + \qquad\qquad + \qquad\qquad + \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\cancel{\sin\alpha\sin\beta}\end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

قسمت اول $\cos(\alpha\pm\beta)$

۴) $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cancel{\cos\alpha\cos\beta}-\sin\alpha\sin\beta\\ \quad - \qquad\qquad - \qquad\qquad - \\ \cos(\alpha-\beta)=\cancel{\cos\alpha\cos\beta}+\sin\alpha\sin\beta\end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

قسمت دوم $\cos(\alpha\pm\beta)$

به روابط نتیجه شده، می‌گیم تبدیل جمع به ضرب. چون سمت چپ این روابط به صورت جمع و سمت راستشون به شکل ضربه.

آقا اجازه؟! معمولاً در روابط مثلثاتی، زاویه‌هایی که در سمت چپ تساوی قرار دارن یک جمله‌ای هستن نه دو جمله‌ای در حالی که روابط بدست اومده این خاصیت رو ندارن!!

دو جمله ای　　دو جمله ای

۱) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

۲) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

۳) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

۴) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

خب عزیزم. این که غصه نداره. اگه در سمت چپ این تساوی‌ها به جای $(\alpha+\beta)$ و به جای $(\alpha-\beta)$ بذاری x و y، به آرزوت می‌رسی. اما حواست باشه که در سمت راست این تساوی‌ها، زاویه‌ها رو حتماً بر حسب x و y بنویسی. یعنی:

$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases}$

$\oplus \rightarrow 2\alpha=x+y \Rightarrow \boxed{\alpha=\dfrac{x+y}{2}} \xrightarrow{\text{در اصطلاح خودمونی}} \alpha=\dfrac{\text{جمع}}{2}$

$\ominus \rightarrow 2\beta=x-y \Rightarrow \boxed{\beta=\dfrac{x-y}{2}} \xrightarrow{\text{در اصطلاح خودمونی}} \beta=\dfrac{\text{کم}}{2}$

$\sin\underbrace{(\alpha+\beta)}_{x}+\sin\underbrace{(\alpha-\beta)}_{y}=2\sin\underbrace{\alpha}_{\frac{x+y}{2}}\cos\underbrace{\beta}_{\frac{x-y}{2}}$

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

بچه‌ها! برای این‌که ۴ رابطه‌ی بالارو خوب به ذهنتون بسپرید و هیچ وقت فراموش نکنید، بهتون توصیه می‌کنم که این روابط رو حتماً در دو مرحله تکمیل کنید: **مرحله‌ی ۱:** ساختار نویسی **مرحله‌ی ۲:** زاویه‌گذاری

برای این‌که درک کنید چی میگم مثالی براتون می‌زنم. می‌خوام رابطه‌ی $\sin x+\sin y$ رو در دو مرحله تکمیل کنم:

مرحله‌ی ۱: فرض میکنم $\sin x+\sin y$ همون $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ هست که جوابش میشه قسمت اول $\sin(\alpha\pm\beta)$ (یعنی ساختار $2\sin\ \cos$)

$$\alpha=\frac{x+y}{2}\ ,\ \beta=\frac{x-y}{2}$$

مرحله‌ی ۲: $\frac{\text{جمع}}{2}$ (یعنی $\frac{x+y}{2}$) رو به جای اولین زاویه و $\frac{\text{کم}}{2}$ (یعنی $\frac{x-y}{2}$) رو درون دومین زاویه قرار می‌دیم:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$\sin x+\sin y$	قسمت اول $\sin(\alpha\pm\beta)$	$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$\sin x-\sin y$	قسمت دوم $\sin(\alpha\pm\beta)$	$2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
$\cos x+\cos y$	قسمت اول $\cos(\alpha\pm\beta)$	$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$\cos x-\cos y$	قسمت دوم $\cos(\alpha\pm\beta)$	$-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

مثال حاصل $\frac{\sin 80+\sin 40}{\cos 20}$ چیست؟

$$\frac{\sin 80+\sin 40}{\cos 20}=\frac{2\sin\frac{80+40}{2}\cos\frac{80-40}{2}}{\cos 20}=\frac{2\sin 60\cos 20}{\cos 20}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

مثال حاصل کسر $\frac{\cos 6x+\cos 2x}{\sin 6x+\sin 2x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{24}$ چیست؟

$$\frac{\cos 6x+\cos 2x}{\sin 6x+\sin 2x}=\frac{2\cos\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2}}{2\sin\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2}}=\frac{2\cos 4x\cos 2x}{2\sin 4x\cos 2x}=\cot 4x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{24}}\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

۱۲ رابطه ی معرکه (نوع دیگری از تبدیل جمع به ضرب) ۱۲

بچه‌ها! می‌خوام برای هر کدوم از عبارت‌های $\left\{\begin{matrix}\sin x\pm\cos x\\ \sin x\pm\sqrt{3}\cos x\\ \sin x\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x\end{matrix}\right\}$ و $\left\{\begin{matrix}\cos x\pm\sin x\\ \cos x\pm\sqrt{3}\sin x\\ \cos x\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x\end{matrix}\right\}$ معادلی پیدا کنم.

اگه خوب به عبارت‌های بالا نگاه کنید می‌بینید که جمله ی دوم این عبارت‌ها ضرایب $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1,\sqrt{3}\right)$ دارن . این ضرایب همون $\tan 60$، $\tan 45$ و $\tan 30$ هستن. حالا دو رابطه‌ی کلی درست می‌کنم تا همه‌ی روابط بالارو در بربگیره، یعنی:

$$1)\ \sin x\pm\tan\theta\cos x=\sin x\pm\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos x=\frac{\sin x\cos\theta\pm\cos x\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin(x\pm\theta)}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\sin(x\pm\theta)$$

$$2)\ \cos x\pm\tan\theta\sin x=\cos x\pm\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin x=\frac{\cos x\cos\theta\pm\sin x\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\cos(x\mp\theta)$$

نتیجه

$$\sin x\pm\tan\theta\cos x=\frac{1}{\cos\theta}\sin(x\pm\theta)$$
$$\cos x\pm\tan\theta\sin x=\frac{1}{\cos\theta}\cos(x\mp\theta)$$

حالا می‌خوام کاری کنم که شما توی سه مرحله این دو تا رابطه ی معرکه‌رو راحت به ذهنتون بسپارید.

۱) ضریب $\frac{1}{\cos\theta}$ رو برای هر دو رابطه بنویسید. علت: اگه در سمت چپ تساوی، $\tan\theta$ رو باز کنیم، در سمت راست تساوی، ضریب $\frac{1}{\cos\theta}$ به‌وجود می‌آد (به اثبات نگاه کنید)

$$\sin x\pm\tan\theta\cos x=\frac{1}{\cos\theta}\cdots$$
$$\cos x\pm\tan\theta\sin x=\frac{1}{\cos\theta}\cdots$$

۲) اگر در سمت چپ دیدید که sin تنهاست اون موقع سمت راست رو بر حسب sin بنویسید. $\underset{\text{تنها}}{\sin x} \pm \tan\theta\cos x = \frac{1}{\cos\theta}\sin(x \bigcirc \theta)$

و اگه در سمت چپ دیدید که cos تنهاست اون موقع سمت راست رو بر حسب cos بنویسید. $\underset{\text{تنها}}{\cos x} \pm \tan\theta\sin x = \frac{1}{\cos\theta}\cos(x \bigcirc \theta)$

۳) اگه جواب‌رو بر حسب sin نوشتید علامت سمت چپ‌رو بدون تغییر در سمت راست بنویسید $\sin x \pm \tan\theta\cos x = \frac{1}{\cos\theta}\sin(x \pm \theta)$

و اگه جواب‌رو بر حسب cos نوشتید علامت سمت چپ‌رو تغییر بدید و در سمت راست بنویسید. $\cos x \pm \tan\theta\sin x = \frac{1}{\cos\theta}\cos(x \mp \theta)$

نتیجه

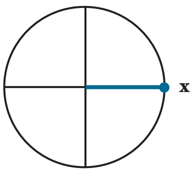
$\sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(x \pm 30)$ $\frac{1}{\cos 30} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x \pm 60)$ $\frac{1}{\cos 60} = \frac{1}{(\frac{1}{2})} = 2$

$\sin x \pm 1\cos x = \sqrt{2}\sin(x \pm 45)$ $\frac{1}{\cos 45} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \sqrt{2}$

۱۳ حل معادلات مثلثاتی ۱۳

عقربه های n سر



بچه‌ها! یه سوال: میشه بگید در شکل روبرو مقدار زاویه‌ی x چنده؟

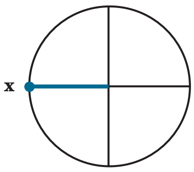
آقا اجازه؟! چه سؤال راحتی!! معلومه که مقدار x برابر با صفره.

به نظر شما $x = 2\pi$ نمی‌تونه باشه؟ *آقا $x = 2\pi$ هم می‌تونه باشه.*

نظرتون راجع به $x = 4\pi$ چیه؟

آقا اجازه؟! فهمیدم. شما می‌خواید بگید که مقدار x فقط صفر نیست بلکه می‌تونه مضرب زوجی از π باشه. یعنی:

$$x = \{\ldots, 0(\pi), 2(\pi), 4(\pi), 6(\pi), \ldots\} \xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = (\text{زوج})\pi \Rightarrow x = 2k\pi$$



حالا یه سؤال دیگه: در شکل ر وبرو مقدار زاویه‌ی x چنده؟

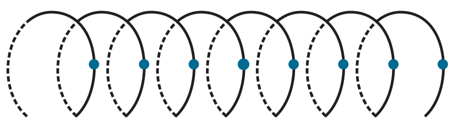
آقا اجازه؟! اینرفعه دیگه اشتباه نمی‌کنم. x می‌تونه بی‌شمار زاویه باشه که همشون مضرب فردی از π هستن. یعنی:

$$x = \{\ldots, 1(\pi), 3(\pi), 5(\pi), 7(\pi), \ldots\} \xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = (2k+1)\pi$$

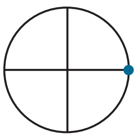
بچه‌ها! می‌خوام یه موضوع مهمی رو باهاتون در میون بزارم. پس خوب گوش کنید:

«دایره‌ی مثلثاتی اصلاً دایره نیست، بلکه یک فنره که از دو سر نامتناهیه»

اگه به این فنر از روبرو نگاه کنید مثل یک دایره هست. اما اگه از کنار بهش نگاه کنید فنر بودنش رو کاملاً حس می‌کنید.

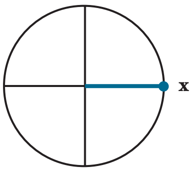


(نگاه از کنار)

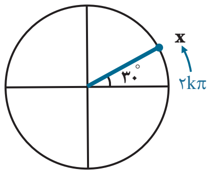


(نگاه از مقابل)

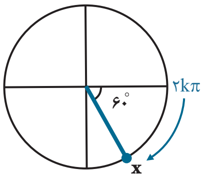
از اونجایی که این نقاط در امتداد هم قرار دارن، ما این نقاط رو از روبرو فقط یک نقطه می‌بینیم. پس وقتی ازتون پرسیدن، زاویه‌ی عقربه‌ای که روی دایره‌ی مثلثاتی قرار داره، چنده، بهتره به جای گفتن زاویه‌ی اختصاصی،فرمول عمومی اون زاویه رو بگید تا همه‌ی زوایای مربوطه رو در بربگیره. یعنی:



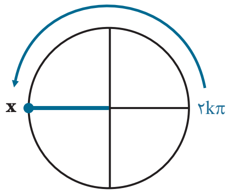
$\xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = 2k\pi$



$\xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$

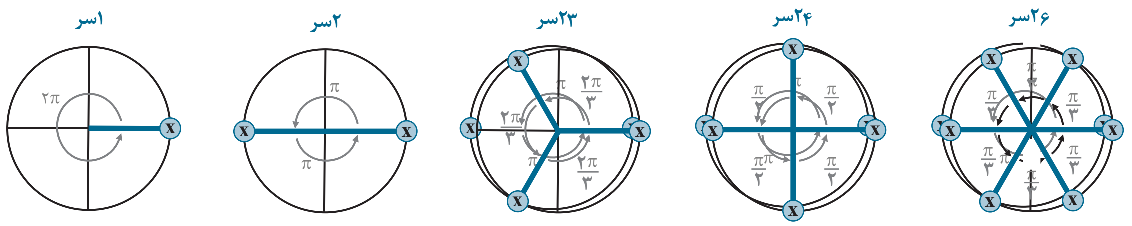


$\xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$



$\xrightarrow{\text{فرمول عمومی}} x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = (2k+1)\pi$

بچه‌ها! به عقربه هایی که در ۵ دایره زیر رسم شده خوب نگاه کنید.



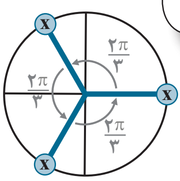
سؤال ۱: آیا در هر دایره، یکی از عقربه ها، روی مبدا حرکت، قرار داده یا نه؟ *بله آقا قرارداره.*

سؤال ۲: آیا در دایره‌های بالا، زاویه‌ی بین هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی، یکسان هست یا نه؟ *بله آقا یکسانه.*

تعریف: به n تا عقربه که روی یک دایره قرار بگیرن و دو شرط زیر رو داشته باشن، عقربه های n سَر میگیم:

۱) یکی از عقربه های روی مبدا حرکت باشه.

۲) زاویه‌ی بین هر عقربه تا عقربه ی بعدی مقداری ثابت باشه.

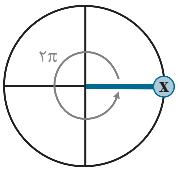


مثلا xهای شکل روبرو یک عقربه ی ۳ سر رو ایجاد کردند.

چون یکی از عقربه ها روی مبدا حرکت قرار داره و زاویه ی بین هر عقربه تا عقربه ی بعدی مقدار ثابت $\frac{2\pi}{3}$ هست.

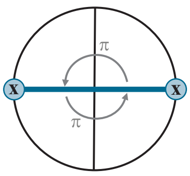
بچه‌ها! حالا ازتون می‌خواهم فرمول عمومی x رو در هر یک از شکل‌های زیر بدست بیارید. *آقا اجازه؟! به روی چشم.*

عقربه‌های ۱سر: *در این حالت، زاویه‌ی هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی برابره با 2π. بنابراین فرمول عمومی x در عقربه ی یک سر به صورت زیر محاسبه میشه:*



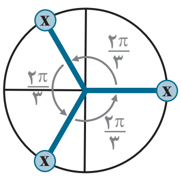
$$\Rightarrow x = \{\dots, 0(2\pi), 1(2\pi), 2(2\pi), 3(2\pi), \dots\} \Rightarrow x = k(2\pi)$$

عقربه‌های ۲سر: *در این حالت، زاویه‌ی هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی برابره با π. بنابراین فرمول عمومی x در عقربه ی دو سر به صورت زیر محاسبه میشه:*



$$\Rightarrow x = \{\dots, 0(\pi), 1(\pi), 2(\pi), 3(\pi), \dots\} \Rightarrow x = k(\pi)$$

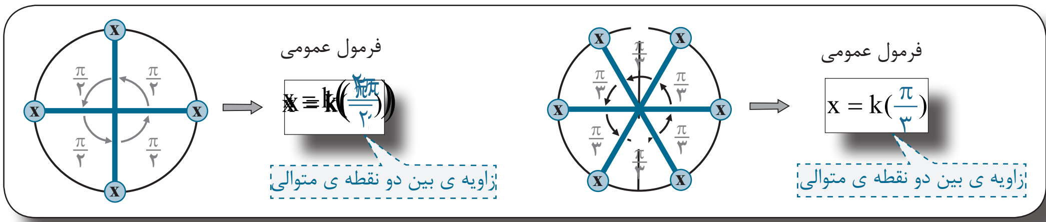
عقربه‌های ۳ سر: *در این حالت، زاویه‌ی هر عقربه تا عقربه‌ی بعدی برابره با $\frac{2\pi}{3}$.. علتش هم اینه که یک دور کامل از دایره (یعنی زاویه‌ی 2π) به ۳ قسمت تقسیم شده بنابراین:*



$$\Rightarrow x = \{\dots, 0(\tfrac{2\pi}{3}), 1(\tfrac{2\pi}{3}), 2(\tfrac{2\pi}{3}), 3(\tfrac{2\pi}{3}), \dots\} \Rightarrow x = k(\tfrac{2\pi}{3})$$

آقا اجازه؟! فکر کنم از سه فرمولی که پیدا شده، بشه یه قانون درست کرد.

منظورم اینه که: اگه زاویه‌ی بین دو عقربه‌ی متوالی‌رو در k ضرب کنیم، فرمول عمومی x پیدا میشه. یعنی:



آقا اجازه؟! اگه اشتباه نکنم یه رابطه‌ی کلی کشف کردم. در عقربه های n سر، یک دور کامل از دایره (یعنی 2π) به n قسمت تقسیم میشه، پس زاویه‌ی دو عقربه‌ی متوالی برابره با $\frac{2\pi}{n}$ بنابراین اگه این زاویه رو در k ضرب کنیم فرمول عمومی x در عقربه های n سر ایجاد میشه. یعنی:

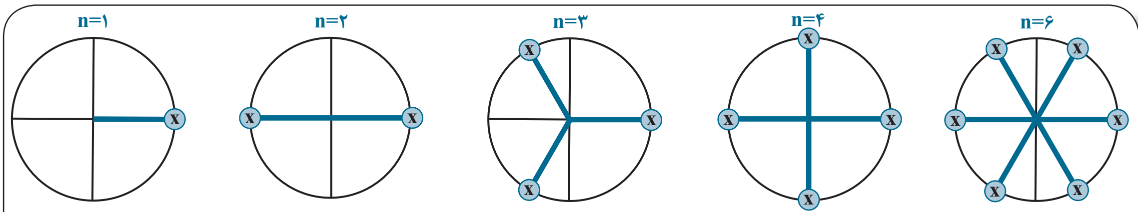
فرمول عمومی x برای عقربه های n سر

$$x = k(\frac{2\pi}{n}) \Rightarrow \boxed{x = \frac{2k\pi}{n}}$$

آفرین به تو دانش‌آموز کاشفم. با رابطه‌ای که ایجاد کردی، روش جدیدی در حل معادلات مثلثاتی بوجود اومد. پس الان همه با هم می‌تونیم بگیم: **مثلثات سنتی** خداحافظ، **مثلثات نوین** سلام.

بچه‌ها! اگه موافق باشید فرمول عمومی x رو برای عقربه های ۱ سر، ۲ سر، ۳ سر، ۴ سر و ۶ سر به کمک رابطه ی جدید به دست بیاریم.

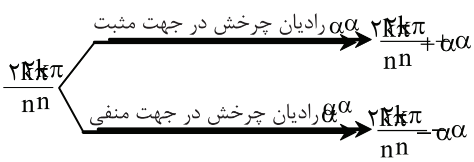
$$x = k(\frac{2\pi}{n})$$



n=۱	n=۲	n=۳	n=۴	n=۶
$x = \frac{2k\pi}{1}$	$x = \frac{2k\pi}{2}$	$x = \frac{2k\pi}{3}$	$x = \frac{2k\pi}{4}$	$x = \frac{2k\pi}{6}$

عقربه های n سر دوران یافته

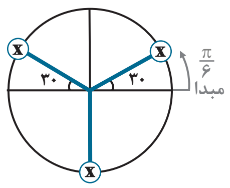
بچه‌ها! عقربه های n سر، ممکنه به اندازه‌ی α رادیان دوران کنن. دراین صورت فرمول عمومی x رو برای عقربه‌های n سر دوران یافته، میشه اینطوری نوشت:



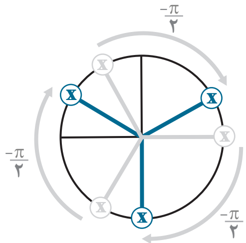
آقا اجازه؟! از کجا بفهمیم که عقربه های n سر به چه قدر دوران پیدا کرده؟

از اونجایی که در عقربه های n سر، همیشه یکی از عقربه ها روی مبدأ حرکت قرار داره، در صورت دوران، این عقربه از مبدأ جدا میشه. بنابراین کافیه شما نزدیک‌ترین نقطه به مبدأرو شناسایی کنید. در نتیجه زاویه‌ی بین این عقربه تا مبدأ حرکت، همون مقدار دورانه.

مثلاً: در شکل روبه رو شما یک عقربه‌ی ۳ سر رو می‌بینید. (یعنی $\frac{2k\pi}{3}$) همونطورکه می‌بینید این عقربه‌ی ۳ سر، مقداری چرخیده. (چون هیچ کدوم ازنقاطش روی مبدأ حرکت قرار ندارن) کاملاً واضحه که نزدیک‌ترین عقربه به مبدأ، زاویه‌ای ۳۰ درجه در جهت مثبت ایجاد کرده: $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

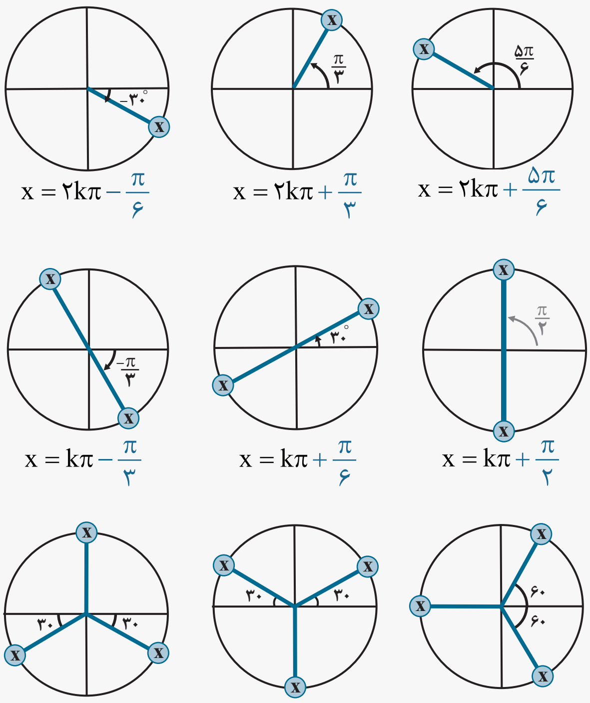


آقا اجازه؟! آیا دراین مثال میشه فرمول عمومی رو به صورت $x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{2}$ هم نوشت؟



بله عزیزم. در واقع شما داری میگی که زاویه‌ی ۳ سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{3}$) به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ در جهت منفی چرخیده. اما بچه‌ها! یه چیزی یادتون باشه: معمولاً مقدار چرخش رو با نزدیک‌ترین عقربه به مبدأ می‌سنجند.

مثال فرمول عمومی زاویه‌ی x رو در هر یک از شکل‌ها به‌دست بیارید.



$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ ، $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ، $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$

$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ، $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ ، $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ ، $x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

A) *آقا اجازه؟! در هر سه شکل زاویه‌ای یک سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{1}$) داریم که هر کدومشون، مقداری دوران پیدا کردن پس:*

$$\text{مقدار دوران} + \frac{2k\pi}{1} = \text{فرمول عمومی}$$

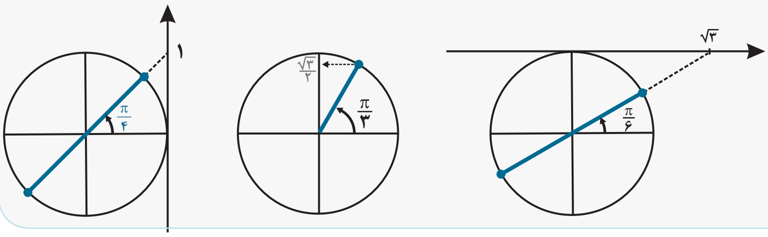
B) *آقا اجازه؟! در هر سه شکل، زاویه‌ی دو سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{2}$) داریم که همشون مقداری دوران پیدا کردن. بنابراین:*

$$\text{مقدار دوران} + \frac{2k\pi}{2} = \text{فرمول عمومی}$$

C) *آقا اجازه؟! هر سه شکل روبه‌رو زاویه‌ی ۳ سر (یعنی: $\frac{2k\pi}{3}$) هستن که مقداری چرخیدن. درنتیجه:*

$$\text{مقدار چرخش} + \frac{2k\pi}{3} = \text{فرمول عمومی}$$

مثال مقدار $\dfrac{\tan(k\pi + \frac{\pi}{4}) \times \sin(2k\pi + \frac{\pi}{3})}{\cot(k\pi + \frac{\pi}{6})}$ کدام است؟



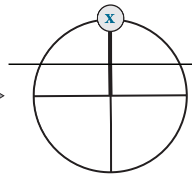
$$\frac{\tan\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right)}{\cot\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

حل معادله‌ی $\sin x = a$ به روش شهودی

بچه‌ها! تا الان هر چی مقدمه‌چینی کردیم بخاطر این بود که شما بتونید معادلات مثلثاتی رو به روش شهودی حل کنید. برای اینکه منظورم رو بهتر بفهمید چند تا سؤال ازتون می‌پرسم.

سؤال ۱: از معادله‌ی $\sin x = 1$ مقدار x رو بیابید.

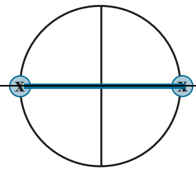
آقا اجازه؟! منظور سؤال اینه که xای رو روی دایره‌ی مثلثاتی پیدا کنید که سینوسش برابر ۱ بشه (یعنی ارتفاع اون x برابر ۱ بشه):

$\sin x = 1 \Rightarrow$ 

x زاویه ای یک سره که $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثبت چرخیده $\longrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

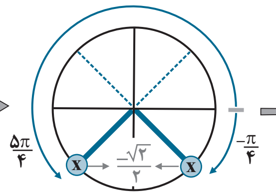
سؤال ۲: جواب کلی معادله‌ی $\sin x = 0$ را به دست آورید.

آقا اجازه؟! xهایی که ارتفاعشون صفره فقط در چپ و راست دایره‌ی مثلثاتی قرار دارن و عقربه ی دو سر ایجاد می کنن:

$\sin x = 0 \Rightarrow$  $\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi$

سؤال ۳: مجموعه جواب معادله‌ی $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ کدام است؟

آقا اجازه؟! xهایی که ارتفاعشون برابره با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ روی ضربدر با مدل 45° قرار دارن (البته دو زاویه‌ی پایینی):

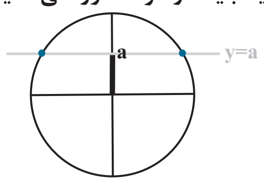
$\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ 

$\xrightarrow[\text{منفی و اون یکی به اندازه‌ی } \frac{5\pi}{4} \text{ در جهت مثبت چرخیده}]{\text{دو تا عقربه‌ی یک سر داریم که یکی به اندازه‌ی } \frac{\pi}{4} \text{ در جهت}}$ $\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$

بچه‌ها! چرا xهایی که روی این دایره هستن رو عقربه ی دو سر در نظر نگرفتید؟

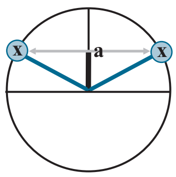
آقا اجازه! چون زاویه ی هر عقربه تا عقربه ی بعدی مقدار ثابتی نداره.

هر وقت خواستید جواب معادله ی $\sin x = a$ رو پیدا کنید باید دو مرحله رو طی کنید:



۱) روی محور sin مقدار a رو انتخاب و از این نقطه خطی بر محور sin عمود کنید تا دایره‌ی مثلثاتی رو قطع کنه.

۲) نقطه‌ی برخورد، همون x یا جواب مورد نظره. البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی x، جواب کلی معادله هست.

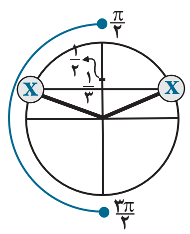


سؤال ۴: معادله‌ی $\sin x = \frac{1}{3}$ در بازه‌ی $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ چند جواب داره؟

آقا اجازه! من چه می‌دونم کروم زاویه ارتفاعش برابر $\frac{1}{3}$ هست!!!

دانش‌آموز عزیزم! اگه به سؤال دقت کنی می‌بینی که مسئله مقدار x رو ازت نخواسته بلکه تعداد x رو خواسته (اون‌هم تو بازه‌ی $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$).

آهان فهمیدم آقا! در این مسئله کافیه که روی محور sin، مقدار $\frac{1}{3}$ رو انتخاب کرده و از این نقطه، خط افقی رسم کنیم تا دایره رو دو نقطه قطع کنه. این دو مکان، جواب کلی معادله ی $\sin x = \frac{1}{3}$ هستن. اما به دنبال تعداد جوابهای این معادله در بازه‌ی $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ هستیم. پس:

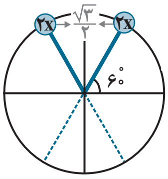
$\sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow$ 

$\xrightarrow{\text{در بازه‌ی } [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}$ تعداد جواب $= 1$

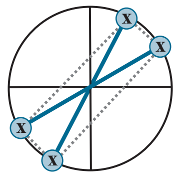
سؤال ۵: از وصل کردن جواب‌های معادله‌ی $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ روی دایره‌ی مثلثاتی کدام چند ضلعی حاصل می‌شود؟

آقا اجازه؟! فکر کنم که این معادله‌رو باید در دو مرحله حل کنیم. اول باید مقدار $2x$ رو به دست بیاریم و بعد مقدار x رو بیابیم.

$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$



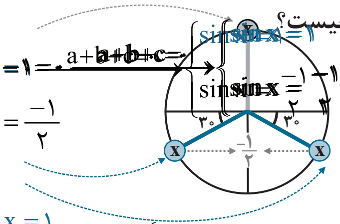
$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$



شکل حاصل از وصل کردن xها، مستطیله.

سؤال ۶: جواب کلی معادله‌ی $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ چیست؟

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{-1}{2} \end{cases}$



توجه: با توجه به شکل، اجتماع جواب‌ها زاویه‌ی ۳ سری رو تشکیل میدن که $\frac{\pi}{6}$ در جهت منفی دوران پیدا کرده، یعنی جواب کلی معادله به صورت $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$

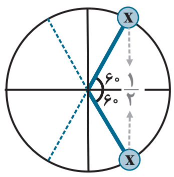
حل معادله‌ی $\cos x = a$ به روش شهودی

بچه‌ها! وقتی معادلات سینوسی رو به این زیبایی جواب دادید فکر کنم به راحتی از پس معادلات کسینوسی هم بربیاید.

سؤال ۱: جواب کلی معادله‌ی $\cos x = \frac{1}{2}$ رو به‌دست بیارید.

آقا اجازه؟! باید xهایی رو روی دایره‌ی مثلثاتی پیدا کنیم که کسینوس اون xها برابر $\frac{1}{2}$ بشه. (یعنی طول اون xها برابر $\frac{1}{2}$ بشه).
این xها روی ضربدر با مدل 60° قرار دارن. (البته دو زاویه‌ی سمت راست ضربدر)

$\cos x = \frac{1}{2}$

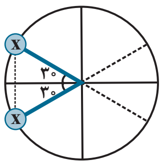


$\xrightarrow[\text{مثبت چرخیده و یکی دیگه در جهت منفی}]{\text{دو تا عقربه‌ی یک سر داریم که یکی } \frac{\pi}{3} \text{ در جهت}} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

سؤال ۲: جواب کلی معادله‌ی $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ رو به دست بیارید.

آقا اجازه؟! روی محور cos، مقدار $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ رو انتقاب کرده و از این نقطه خطی عمود رسم می کنیم تا دایره رو در دو نقطه قطع کنه. این xها روی ضربدر با مدل 30° قرار دارن. (البته دو زاویه‌ی سمت چپ ضربدر)

$\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

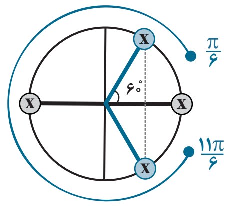


$\xrightarrow[\text{مثبت و یکی دیگه } \frac{5\pi}{6} \text{ در جهت منفی چرخیده}]{\text{دو تا عقربه‌ی یک سر داریم که یکی } \frac{5\pi}{6} \text{ در جهت}} x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

سؤال ۳: جواب‌های معادله‌ی $\sin x - 2\sin x\cos x = 0$ روی بازه‌ی $[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$ در کدام‌یک از فرمول‌های زیر صدق می‌کند؟

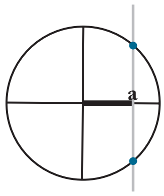
۱) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2k\pi}{3}$ ۳) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{k\pi}{2}$

$\sin x - 2\sin x\cos x = 0 \Rightarrow \sin x(1 - 2\cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

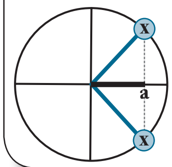


در بازه‌ی $[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$ زاویه‌ی ۳ سری رو مشاهده می‌کنیم که به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ در جهت مثبت چرخیده. بنابراین x های درون این بازه در فرمول $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ صدق می‌کنن.

هر وقت خواستید جواب معادله ی $\cos x = a$ رو پیدا کنید می تونید:



۱) روی محور $\cos$ مقدار a رو انتخاب و از این نقطه خطی بر محور $\cos$ عمود می‌کنیم تا دایره‌ی مثلثاتی رو قطع کنه.

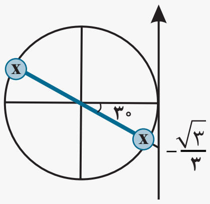


۲) نقطه‌ی برخورد، همون x یا جواب مورد نظره . البته توجه داشته باشید که فرمول عمومی x، جواب کلی این معادله هست.

حل معادله‌ی $\tan x = a$ به روش شهودی

مثال جواب کلی معادله‌ی $\tan x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ رو پیدا کنید.

آقا اجازه؟! باید روی محور $\tan$ مقدار $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ رو مشخص کنیم. x هایی که امتداد عقربشون به $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ برخورد کنه جواب معادله هست.

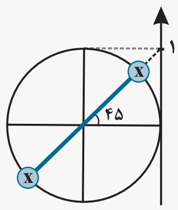


$$\Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۶}$$

مثال تمام مجموعه جواب معادله‌ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ کدام است؟

آقا اجازه؟! خیلی آسونه. کافیه معادله‌رو به توان ۲ برسونیم و بعد طرفین رو به $\cos x$ تقسیم کنیم تا معادله‌ی تانژانتی به‌وجود بیاد.

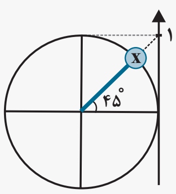
$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin x = \cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = ۱ \Rightarrow$$



$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

دانش‌آموز کنجکاو! خوب جلو رفتی اما بد تمومش کردی. مگه من در فصل (۱) نگفته بودم که اگه یک معادله رو به توان زوج برسونی ممکنه جواب زائد بهت بده؟

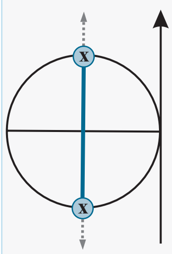
آقا اجازه؟! فهمیدم اشکال کارم کجاست. x ای که در ربع سوم قرار داره جواب معادله نیست، چون $\sin x$ و $\cos x$ رو منفی می‌کنه در نتیجه معادله‌ی $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ به ازای x های واقع در ربع سوم تعریف نمی‌شه. بنابراین:



$$\Rightarrow x = \cancel{k\pi + \frac{\pi}{۴}} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

مثال فرمول عمومی x هایی رو که تانژانتشون تعریف نمیشه، بنویسید؟

آقا اجازه؟! این x ها در بالا و پایین دایره قرار دارن، چون امتداد عقربشون با محور $\tan$ برخوردی نداره. (شکل روبرو)

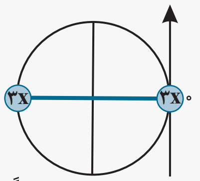


$$\Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

مثال جواب کلی معادله‌ی $\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = 1$ رو به‌دست بیارید.

آقا اجازه؟! اگه یه طرفین وسطین کنیم همه چی حله.

$$\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = \frac{1}{1} \Longrightarrow \tan 3x + \tan x = \tan x \Longrightarrow \tan 3x = 0 \Longrightarrow$$

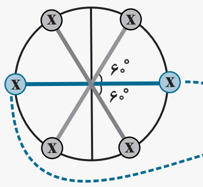


$$\Longrightarrow 3x = k\pi \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

دانش‌آموز عزیزم باز هم گول خوردی. آیا اصلاً به این موضوع فکر کردی که بعضی از جواب‌های به دست اومده ممکنه مخرج معادله رو صفر کنن؟

آقا اجازه؟! نمی‌دونیم چرا حواسمون به این مسائل نیست. الان بررسی می‌کنم:

$$\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan x} = 1$$



$\xrightarrow{\text{زاویه‌ی ۶ سر}}$ $x = \frac{2k\pi}{6}$ یا $x = \frac{k\pi}{3}$

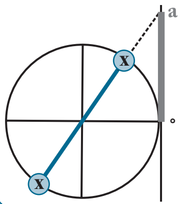
از اونجایی که x های واقع در چپ و راست دایره‌ی مثلثاتی باعث صفر شدن مخرج این معادله می‌شن، نمی‌تونن جواب معادله باشن پس جواب معادله $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

بچه‌ها! خطر خطر خطر: در حل معادلات مثلثاتی (خصوصاً کسری و رادیکالی که محدودیت دامنه دارن) جواب‌های به دست اومده رو حتماً تو معادله‌ی اولیه چک کنید. چون ممکن بعضی از جواب‌ها در دامنه‌ی معادله‌ی اولیه نباشند.

هر وقت خواستید جواب معادله ی $\tan x = a$ رو پیدا کنید:

۱) روی محور tan مقدار a رو مشخص کنید.

۲) x هایی که امتداد عقربشون به a برخورد کنه جواب معادله ی $\tan x = a$ هستن .

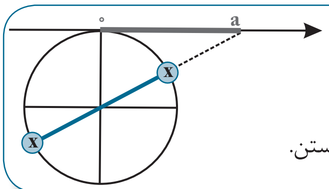


حل معادله‌ی $\cot x = a$ به روش شهودی

اگه خواستید جواب معادله ی $\cot x = a$ رو پیدا کنید میتونید:

۱) روی محور cot مقدار a رو مشخص کنید.

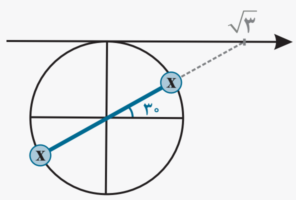
۲) x هایی که امتداد عقربشون به a برخورد کنه جواب معادله ی $\cot x = a$ هستن.



مثال : جواب کلی معادله ی $\cot x = \sqrt{3}$ کدام است؟

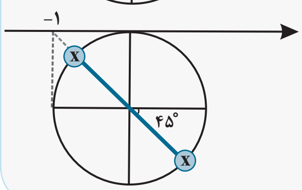
آقا اجازه؟! باید مقدار $\sqrt{3}$ رو روی محور cot مشخص کنیم.

x هایی که امتداد عقربشون به این نقطه می‌خوره جواب این سؤاله.



$$\Longrightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{6}}$$

مثال: جواب کلی معادله‌ی $\cot x = -1$ را به دست آورید؟

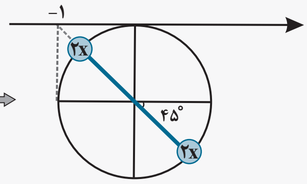


$$\Longrightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{4}}$$

مثال: تعداد جواب‌های معادله‌ی $\tan x - \cot x = 2$ در بازه‌ی $[0,\pi]$ را به دست آورید؟

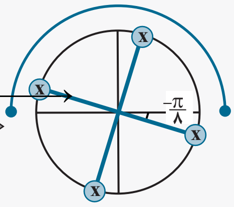
آقا اجازه؟! اگه بتونیم به کمک روابط مثلثاتی معادله‌ی بالارو که از دو نسبت مثلثاتی تشکیل شده به یک نسبت مثلثاتی تبدیل کنیم همه چی حله.

$$\tan x - \cot x = 2 \xrightarrow{\text{روابط فرعی } 2\alpha} -2\cot 2x = 2 \xrightarrow{\div(-2)} \cot 2x = -1 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

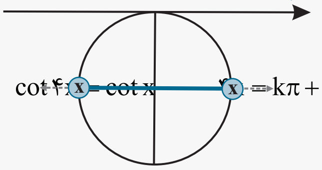
$$\xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$



$\Rightarrow$ تعداد جواب‌ها در بازه ی $[0,\pi]$ ۲ تاست.

مثال: فرمول عمومی x هایی رو بیابید که کتانژانتشون تعریف نشده؟

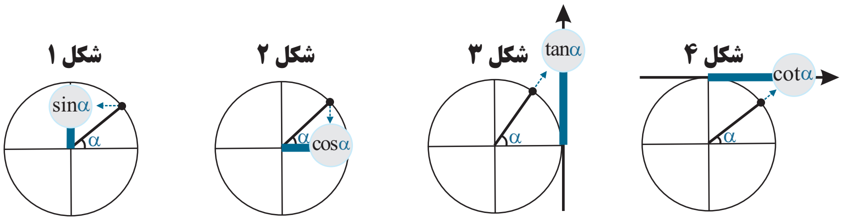
آقا اجازه؟! این x ها در چپ و راست دایره قرار دارن، چون امتداد عقربشون با محور cot نباید برخورد کنه.



$\cot 4x = \cot x \Rightarrow 4x = k\pi + x \Rightarrow 3x = k\pi \quad x = \frac{k\pi}{3} \quad x = \frac{2k\pi}{6} \longrightarrow$

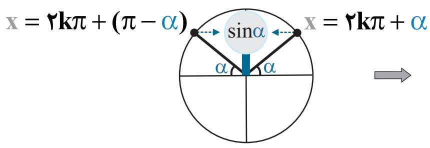
حل معادلات ($\cot x = \cot\alpha$, $\tan x = \tan\alpha$, $\cos x = \cos\alpha$, $\sin x = \sin\alpha$)

۱) فرض می‌کنیم α زاویه‌ای معلومه. در نتیجه مقادیر $\cot\alpha, \tan\alpha, \cos\alpha, \sin\alpha$ هم مشخصن.



با توجه به شکل (۱)

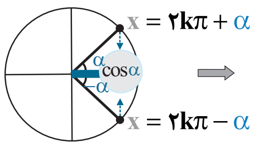
برای حل معادله‌ی $\sin x = \sin\alpha$ باید xهایی رو پیدا کنیم که سینوسشون با $\sin\alpha$ برابر شه.
همونطور که می‌بینید این xها (جواب کلی معادله)، دو تا عقربه‌ی یک سره (یکی $x = 2k\pi + \alpha$ و دیگری $x = 2k\pi + (\pi - \alpha)$)



$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

با توجه به شکل (۲)

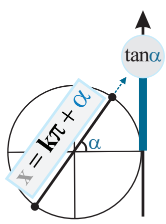
برای حل معادله‌ی $\cos x = \cos\alpha$ باید xهایی رو پیدا کنیم که کسینوسشون با $\cos\alpha$ برابر شه.
همونطور که می‌بینید این xها (جواب کلی معادله)، دو تا عقربه‌ی یک سره (یکی $x = 2k\pi + \alpha$ و دیگری $x = 2k\pi - \alpha$)



$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

با توجه به شکل (۳)

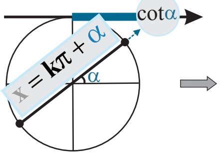
برای حل معادله‌ی $\tan x = \tan\alpha$ باید xهایی رو پیدا کنیم که تانژانتشون با $\tan\alpha$ برابر شه.
همونطور که می‌بینید این xها(جواب کلی معادله)، یک عقربه‌ی دو سره (یعنی $x = k\pi + \alpha$)



$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

با توجه به شکل (۴)

برای حل معادله ی $\cot x = \cot\alpha$ باید xهایی رو پیدا کنیم که کتانژانتشون با $\cot\alpha$ برابره.
همونطور که می‌بینید این xها(جواب کلی معادله)، یک عقربه‌ی دو سره (یعنی $x = k\pi + \alpha$)



$$\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

مثال جواب کلی معادله‌ی $\sin 3x = \sin 2x$ را به‌دست آورید.

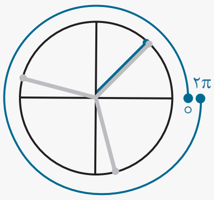
$$\sin 3x = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 5x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \dfrac{2k\pi}{5} + \dfrac{\pi}{5} \end{cases}$$

مثال معادله‌ی $\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

آقا اجازه؟! به کمک رابطه‌ی قبل، مسئله به راحتی حل میشه. یعنی:

$$\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \dfrac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (x + \dfrac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \dfrac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

آقا اجازه؟! از اون‌جایی که $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ زاویه‌ی یک سربوده و $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ زاویه‌ی ۳ سر هستش. پس در بازه ی $[0, 2\pi]$ ۴ جواب داریم.



دانش‌آموز عزیزم، اشتباه گفتی. آیا به این موضوع توجه کردی که $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ در دل $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ قرار داره؟ در واقع $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ زیرمجموعه‌ی $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ هست.
پس جواب کلی $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ خواهد بود و تعداد جواب‌ها در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابره ۳ تا.

مثال یکی از ریشه‌های معادله‌ی $1 + \cos 5x = 2\cos^2 x$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{7}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{7}$ ۴) $\frac{4\pi}{7}$

$$\cos 5x = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ 7x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2k\pi}{3} \\ x = \dfrac{2k\pi}{7} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} \xrightarrow{k=2} x = \frac{4\pi}{7}$$

با توجه به گزینه ها

مثال مجموعه جواب معادله ی $\tan 4x = \tan 2x$ را به دست آورید

$$\tan 4x = \tan \boxed{2x} \Rightarrow 4x = k\pi + \boxed{2x} \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

آقا اجازه؟! اعلام خطر شما دیگه برای همیشه تو ذهنمون می‌مونه. از اونجایی که این معادله محدودیت دامنه داره (چون در بعضی نقاط تعریف نمی‌شه) باید جواب به دست اومده رو توی معادله‌ی اولیه چک کنیم.

معادله‌ی اولیه

$$\tan 4x = \tan 2x \,\Big|_{x=\frac{k\pi}{2}} \Rightarrow \tan(2k\pi) = \tan(k\pi) \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$ جواب معادله

مثال مجموعه جواب معادله‌ی $\tan 4x \cdot \cot 2x = 1$ کدام است؟

$$\tan 4x = \frac{1}{\cot 2x} \Rightarrow \tan 4x = \tan 2x \Rightarrow 4x = k\pi + 2x \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

معادله‌ی اولیه

$x = \frac{k\pi}{2}$ رو توی معادله ی اولیه چک می کنیم

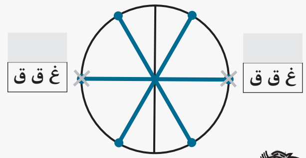
$$\tan 4x \cot 2x = 1 \,\Big|_{x=\frac{k\pi}{2}} \Rightarrow \tan(2k\pi)\cot(k\pi) = 1$$

تعریف نشده

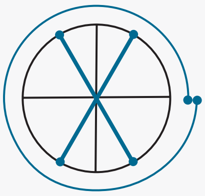
آقا اجازه؟! $x = \frac{k\pi}{2}$ مجموعه جواب پوشالیه چون اصلاً در معادله‌ی اولیه صدق نمی‌کنه. بنابراین معادله‌ی بالا اصلاً جواب نداره.

مثال معادله‌ی $\cot 4x = \cot x$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$\cot 4x = \cot x \Rightarrow 4x = k\pi + x \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{6} \longrightarrow$$



آقا اجازه!؟ نقاط سمت چپ و راست دایره در معادله‌ی $\cot 4x = \cot x$ صدق نمی‌کنن. (چون باعث تعریف‌نشدگی cot می‌شن)



تعداد جواب = ۴

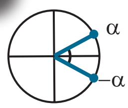
نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi \pm \alpha)$ ۱۴

بچه ها می خوام قانونی رو براتون بازگو کنم که خیلی سریع بتونید نسبت های مثلثاتی زوایای $(k\pi \pm \alpha)$ رو به نسبتهای مثلثاتی زاویه ی $(\pm\alpha)$ تبدیل کنید

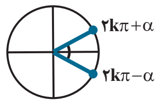
$$\sin(\cancel{2k\pi} \pm \alpha) = \sin(\pm\alpha)$$
$$\cos(\cancel{2k\pi} \pm \alpha) = \cos(\pm\alpha)$$

۱) اگه ضریب π در $(k\pi \pm \alpha)$ عددی زوج باشه اونو از کمان های sin و cos حذف کنید

راهنمایی: زوایای $\pm\alpha$ رو در یک دایره ی مثلثاتی



و دسته زوایای $2k\pi \pm \alpha$ رو در دایره ی مثلثاتی دیگه ای رسم کنید



و **sin** و **cos** این کمانها رو با هم مقایسه کنید.

$$\sin(\cancel{(2k+1)}\pi \pm \alpha) = -\sin(\pm\alpha)$$
$$\cos(\cancel{(2k+1)}\pi \pm \alpha) = -\cos(\pm\alpha)$$

۲) اگه ضریب π در $(k\pi \pm \alpha)$ عددی فرد باشه اونو از کمان های sin و cos حذف و نسبتهای مثلثاتی رو قرینه کنید

راهنمایی: زوایای $\pm\alpha$ رو در یک دایره ی مثلثاتی و دسته زوایای رو در $(2k+1)\pi \pm \alpha$ رو در دایره ی مثلثاتی دیگه ای رسم کنید و **sin** و **cos** این کمانها رو با هم مقایسه کنید.

$$\tan(\cancel{k\pi} \pm \alpha) = \tan(\pm\alpha)$$
$$\cot(\cancel{k\pi} \pm \alpha) = \cot(\pm\alpha)$$

۳) ضریب π در $(k\pi \pm \alpha)$ چه زوج و چه فرد باشه اونو از کمان های tan و cot حذف کنید

راهنمایی: زوایای $\pm\alpha$ رو در یک دایره ی مثلثاتی و دسته زوایای رو در $k\pi \pm \alpha$ رو در دایره ی مثلثاتی دیگه ای رسم کنید و tan و cot این کمانها رو با هم مقایسه کنید.

مثال نسبت‌های مثلثاتی زیر را برحسب α بنویسید.

۱) $\sin(285\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$

۲) $\sin(324\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

۳) $\sin(59\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

۴) $\sin(78\pi + \alpha) = \sin\alpha$

۵) $\cos(175\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$

۶) $\cos(24\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

۷) $\cos(33\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

۸) $\cos(46\pi + \alpha) = \cos\alpha$

۹) $\tan(96\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

۱۰) $\tan(97\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

۱۱) $\tan(99\pi + \alpha) = \tan\alpha$

۱۲) $\tan(100\pi + \alpha) = \tan\alpha$

۱۳) $\cot(23\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۱۴) $\cot(24\pi - \alpha) = \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۱۵) $\cot(27\pi + \alpha) = \cot\alpha$

۱۶) $\cot(28\pi + \alpha) = \cot\alpha$

۱۵ نسبت‌های مثلثاتی $(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ ۱۵

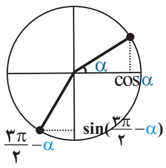
حالا می خوام قانونی رو بگم که نسبت های مثلثاتی زوایای $(\overbrace{(2k+1)}^{\text{فرد}}\frac{\pi}{2}\pm\alpha)$ رو به نسبتهای مثلثاتی زاویه ی α تبدیل می‌کنه $\cos((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=\sin\alpha$

$$\tan(\cancel{(2k+1)}\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=؟\cot\alpha \qquad \sin(\cancel{(2k+1)}\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=؟\cos\alpha$$

$$\cot(\cancel{(2k+1)}\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=؟\tan\alpha \qquad \cos(\cancel{(2k+1)}\frac{\pi}{2}\pm\alpha)=؟\sin\alpha$$

آقا اجازه ؟! این طور که معلومه شما مضربهای فرد $\frac{\pi}{2}$ رو از کمان های درون sin، cos، tan، cot، حذف کردید بعدش، نسبت های مثلثاتی رو عوض کردید. اولاً چرا؟ ثانیاً به جای ؟ چه علامتی رو بذاریم؟! مثبت یا منفی ؟!

عزیزم! برای اینکه جواب سوالت رو بگیری به این مثال توجه کن.



می‌خوام ببینم $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ با چی برابره. فرض می‌کنم α زاویه‌ای حاده هست. پس زاویه‌ی $(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ در ربع سوم قرار میگیره .

همونطور که می‌بینید $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ با $\cos\alpha$ هم اندازه هست، نه با $\sin\alpha$

به همین دلیله که نسبتهای مثلثاتی سمت چپ و راست با هم فرق دارن. $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=(؟)\cos\alpha$

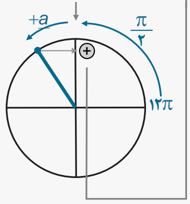
از اونجایی که α در ربع اوله پس $\cos\alpha$ مثبته. از طرفی $(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ در ربع سومه پس $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ منفیه و برای اینکه تساوی $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=؟\cos\alpha$ برقرار بشه باید به جای (؟) علامت منفی بذاریم.

$$\underbrace{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}_{-}=?\ \underbrace{\cos\alpha}_{+}$$

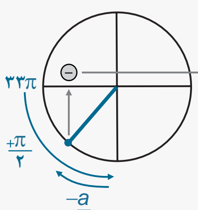
دوستان عزیزم!نتیجه اینکه برای تشخیص علامت ؟ کافیه علامت سمت چپ معادله ی بالا رو به دست بیارید و در طرف راست معادله قرار بدید.

مثال نسبت‌های مثلثاتی زیر را بر حسب α بنویسید.

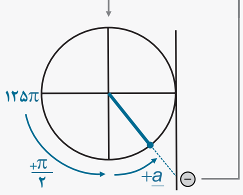
$$\sin(\frac{25\pi}{2}+\alpha)=+\cos\alpha \Rightarrow (\frac{24}{2}\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)$$



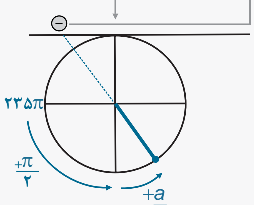
$$\cos(\frac{67}{2}\pi-\alpha)=-\sin\alpha \Rightarrow (\frac{66}{2}\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha)$$



$$\tan(\frac{251}{2}\pi+\alpha)=-\cot\alpha \Rightarrow (\frac{250}{2}\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)$$



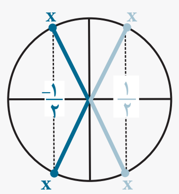
$$\cot(\frac{471}{2}\pi+\alpha)=-\tan\alpha \Rightarrow (\frac{470}{2}\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)$$



مثال جواب کلی معادله‌ی $\sin(\frac{3\pi}{2}-x)\cos(\pi-x)=\sin^2(\frac{7\pi}{6})$ کدام است؟

$$\sin(\frac{3\pi}{2}-x)\times\cos(\pi-x)=(\sin\frac{7\pi}{6})^2 \Rightarrow (-\cos x)(-\cos(-x))=(\frac{-1}{2})^2 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos x=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow$$

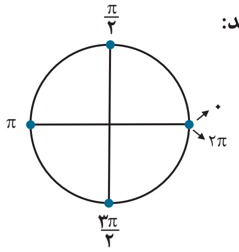


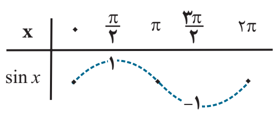
$$\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

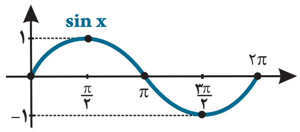
۱۶ نمودار توابع مثلثاتی ۱۶

رسم نمودار تابع $y=\sin x$

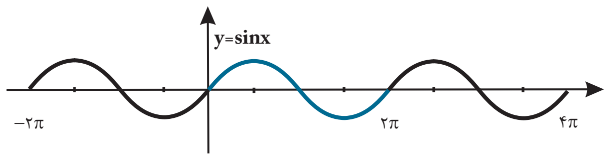
بچه‌ها! می‌خوام نمودار $y=\sin x$ رو در بازه‌ی $[\circ,\text{۲}\pi]$ رسم کنم. این کارو با ۵ نقطه انجام می‌دم. نگاه کنید:





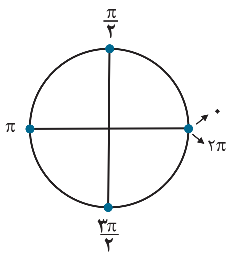


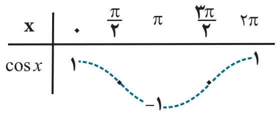
از اونجایی که در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات $\sin x$ مثل دور اولشه، پس نمودار $y=\sin x$ در بازه‌های $(\dots,[-۲\pi,\circ],[\circ,۲\pi],[۲\pi,۴\pi],\dots)$ کاملاً به همدیگه شبیه هستن. یعنی:

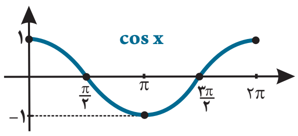


رسم نمودار تابع $y=\cos x$

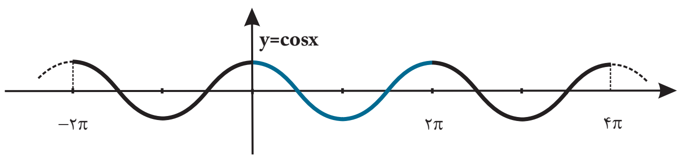
بچه‌ها! برای رسم نمودار $y=\cos x$ در بازه‌ی $[\circ,۲\pi]$ هم میشه از ۵ نقطه استفاده کرد. نگاه کنید:







با توجه به اینکه در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات $\cos x$ دور اولش هست. پس نمودار $y=\cos x$ در بازه‌های $(\dots,[-۲\pi,\circ],[\circ,۲\pi],[۲\pi,۴\pi],\dots)$ مثل همدیگه هستن. یعنی:

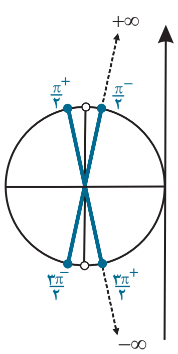


رسم نمودار تابع $y=\tan x$

بچه‌ها! حالا نوبت به رسم نمودار $y=\tan x$ رسیده.

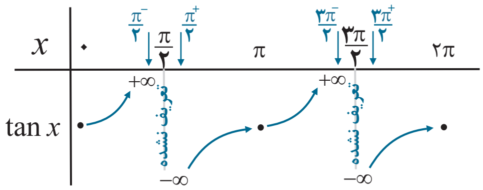
آقا اجازه؟! با توجه به اینکه $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ در بازه‌ی $[\circ,۲\pi]$ قرار دارن و در این نقطه مقداری برای $\tan x$ وجود نداره، چه جوری میشه نمودار $y=\tan x$ رو در بازه‌ی $[\circ,۲\pi]$ رسم کرد؟

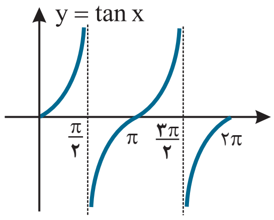
سؤال خوبی پرسیدی. با توجه به این‌که $\tan\frac{\pi}{۲}$ و $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نشده، لازمه بدونیم در همسایگی بسیار نزدیک $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ مقدار به چه سمتی میره. یعنی:



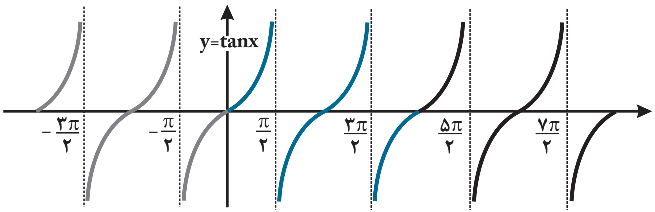
$$\begin{cases}\tan\frac{\pi^-}{۲}=+\infty\\ \tan\frac{\pi^+}{۲}=-\infty\end{cases}\quad,\quad\begin{cases}\tan\frac{۳\pi^-}{۲}=+\infty\\ \tan\frac{۳\pi^+}{۲}=-\infty\end{cases}$$

پس برای رسم نمودار $y=\tan x$ علاوه بر این‌که از ۵ نقطه‌ی $\left(\circ,\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲},۲\pi\right)$ استفاده می‌کنیم از همسایگی بسیار نزدیک $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ هم کمک می‌گیریم. یعنی: $\left(\frac{\pi^-}{۲},\frac{\pi^+}{۲},\frac{۳\pi^-}{۲},\frac{۳\pi^+}{۲}\right)$





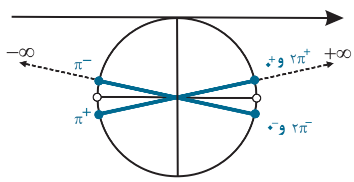
همونطور که می‌دونید در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات tan x مثل دور اولش هست. لذا نمودار y = tan x در بازه‌های $(...,[-۲\pi,۰],[۰,۲\pi],[۲\pi,۴\pi],...)$ کاملاً شبیه همدیگه هستن یعنی:



رسم نمودار تابع y = cot x

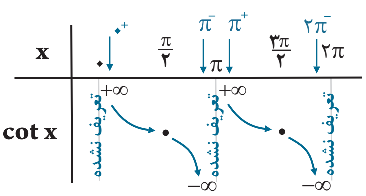
بچه‌ها! با توجه به صحبت‌هایی که در رسم نمودار y = tan x مطرح شد فکر کنم خودتون بتونید نمودار y = cot x رو رسم کنید.

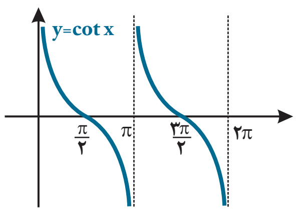
آقا اجازه؟! در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ نقاطی که cot شون تعریف نشده هست x = ۲π ، x = π و x = ۰ هستن. یعنی:



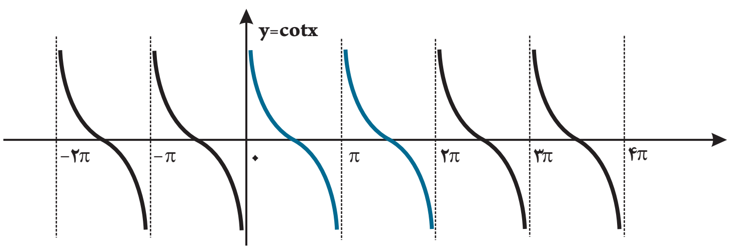
$$\Rightarrow \begin{cases}\cot ۰^- = -\infty \\ \cot ۰^+ = +\infty\end{cases} , \begin{cases}\cot \pi^- = -\infty \\ \cot \pi^+ = +\infty\end{cases} , \begin{cases}\cot ۲\pi^- = -\infty \\ \cot ۲\pi^+ = +\infty\end{cases}$$

برای رسم نمودار y = cot x علاوه بر این‌که از ۵ نقطه‌ی $(۰,\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$ استفاده می‌کنیم. از همسایگی راست ۰، همسایگی چپ و راست π و همسایگی چپ ۲π نیز کمک می‌گیریم. یعنی: $(۰^+,\pi^-,\pi^+,۲\pi^-)$





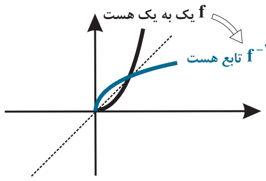
از اونجایی که در هر دور از دایره‌ی مثلثاتی، تغییرات cot x مثل دور اولش هست. پس نمودار y = cot x در بازه‌های $(...,[-۲\pi,۰],[۰,۲\pi],[۲\pi,۴\pi],...)$ مثل همدیگه هسن. یعنی:

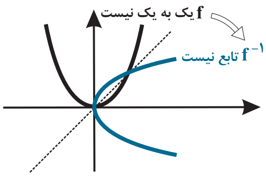


۱۷ توابع معکوس مثلثاتی $(y=\sin^{-1}x)$ یا $(y=\operatorname{Arcsin} x)$ ۱۷

نمودار و دامنه‌ی تابع $y=\sin^{-1}x$

بچه‌ها! می‌دونید که معکوس یک تابع یعنی قرینه‌ی اون تابع نسبت به خط $y=x$. حالا فکر می‌کنید معکوس تابع f (یعنی f^{-1}) در چه صورتی تابع خواهد بود؟





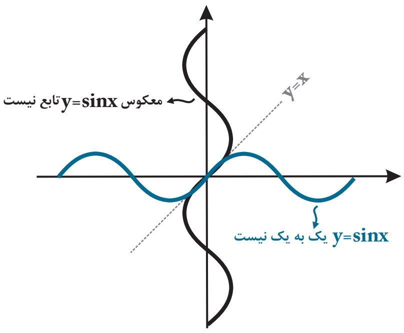
آقا اجازه؟! در صورتی که f تابعی یک به یک باشه، معکوسش (یعنی f^{-1}) تابع میشه و در غیراین صورت خیر. (شکل های روبرو)

آفرین به تو دانش‌آموز خوبم. بچه‌ها! حالا می‌خوام تابع $y=\sin^{-1}x$ رو که معکوس تابع $y=\sin x$ هست بهتون معرفی کنم.

آقا اجازه؟! شما گفتید تابع $y=\sin^{-1}x$ ؟!!!

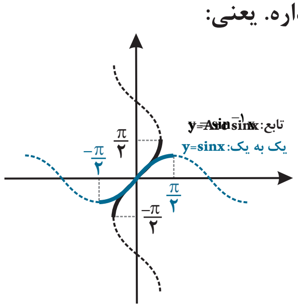
بله عزیزم. مگه عیبی داره؟

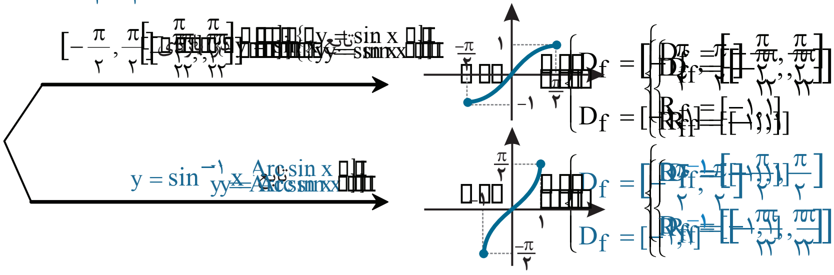
آقا اجازه؟! بله که عیب داره. همونطور که خودتون می‌دونید تابع $y=\sin x$ ، یک به یک نیست، پس چطور به معکوسش یعنی $y=\sin^{-1}x$ لقب تابع رو می‌دید؟!!! آقا اجازه؟! شکل روبه رو حرف‌های منو تأیید می‌کنه، نگاه کنید.



عزیزم، چرا عصبانی می‌شی؟ الان بهت میگم جریان چیه. منظور من، معکوس کل تابع $y=\sin x$ نیست بلکه معکوس قسمتی از $y=\sin x$ هست که یک به یکه.

طبق قرارداد: تابع $y=\sin^{-1}x$ معکوس بخشی از $y=\sin x$ هست که در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ قرار داره. یعنی:





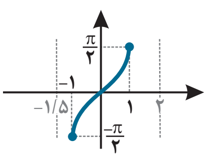
خب؛ حالا فهمیدی که چرا لقب تابع‌رو به $y=\sin^{-1}x$ دادم؟

آقا اجازه؟! بله فهمیدم. اما کاشکی از اول این موضوع رو می‌گفتید.

خواستم ذهنت‌رو کمی به چالش بکشم تا این مفهوم‌رو خوب درک کنی.

خب بچه‌ها! با توجه به نمودار $y=\sin^{-1}x$ مقدار $\sin^{-1}(2)$ و $\sin^{-1}(-1/5)$ رو به دست بیارید.

آقا اجازه؟! این که کاری نداره. کافیه نمودار $y=\sin^{-1}x$ رو رسم کنیم و $x=2$ و $x=-1/5$ رو به این نمودار تصویر کنیم. در این صورت ارتفاع های به دست اومده همون $\sin^{-1}(2)$ و $\sin^{-1}(-1/5)$ خواهند بود.



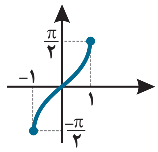
آقا اجازه؟! اذیت می کنی؟! تصویر $x=2$ و $x=-1/5$ اصلاً با نمودار $y=\sin^{-1}x$ برخوردی نداره! یعنی $\sin^{-1}(2)$ و $\sin^{-1}(-1/5)$ اصلاً وجود نداره!

بچه‌ها! اذیتتون نکردم. فقط خواستم بگم تابع $y=\sin^{-1}(x)$ ، x هایی‌رو جذب می‌کنه که در بازه‌ی $[-۱,۱]$ قرار داشته باشن. یعنی ورودی به $\sin^{-۱}$ حق نداره خارج از بازه‌ی $[-۱,۱]$ باشه.

$$\begin{cases} y=\sin^{-۱}(x) \Rightarrow D=\{x \mid -۱\le x\le ۱\} \\ y=\sin^{-۱}(g(x)) \Rightarrow D=\{x \mid -۱\le g(x)\le ۱\}\end{cases}$$

بچه‌ها! با توجه به نمودار $y=\sin^{-۱}x$ مقدار هر کدوم از عبارت‌های زیر رو مقابلشون بنویسید.

آقا اجازه؟! به روی چشم.



۱) $\sin^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\sin^{-۱}(۱/۲)=$ تعریف نشده

۲) $\sin^{-۱}(۰)=۰$ ۵) $\sin^{-۱}(۱^{+})=$ تعریف نشده

۳) $\sin^{-۱}(۱)=\frac{\pi}{۲}$ ۶) $\sin^{-۱}(-۱^{-})=$ تعریف نشده

مثال دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.(توجه: برای حل این دو مثال، بهتره اعمال روی بازه ها (فصل ۲) رو بلد باشید)

۱) $y=\sin^{-۱}(\frac{۱}{x-۲})$

$$\frac{۱}{x-۲}\in[-۱,۱]\xrightarrow{\text{وارون}} x-۲\in(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)\xrightarrow{+۲} \underbrace{x\in(-\infty,۱]\cup[۳,+\infty)}_{\text{دامنه}}$$

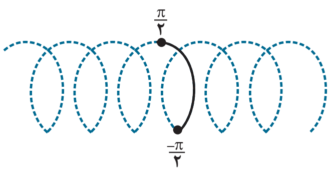
۲) $y=\sin^{-۱}(\sqrt{۴-x^۲})$

$$\sqrt{۴-x^۲}\in[-۱,۱]\xrightarrow{\sqrt{۴-x^۲}\ \text{منفی باشه}}\sqrt{۴-x^۲}\in[۰,۱]\xrightarrow{(\ )^۲} ۴-x^۲\in[۰,۱]\to -x^۲\in[۰,۱]$$

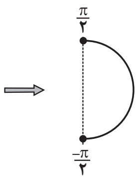
$$\xrightarrow{-۴} -x^۲\in[-۴,-۳]\xrightarrow{\times(-۱)} x^۲\in[۳,۴]\xrightarrow{\sqrt{\ }} |x|\in[\sqrt{۳},۲]\xrightarrow{\text{حذف قدر مطلق}} x\in[-۲,-\sqrt{۳}]\cup[\sqrt{۳},۲]$$

یافتن مقدار $\sin^{-۱}x$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

شما می‌دونید برای رسیدن به تابع $y=\sin^{-۱}x$ اول باید قسمت یک به یک تابع $y=\sin x$ رو که در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ هست انتخاب کرده و بعد معکوس کنید. پس اگه قصد محاسبه‌ی $\sin^{-۱}$ رو دارید (اون‌هم به کمک دایره‌ی مثلثاتی)، فقط بخشی از فنر مثلثاتی رو انتخاب کنید که در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ قرار داره. یعنی:

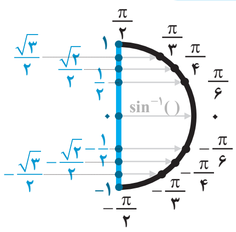


(نگاه از کنار)



(نگاه از مقابل)

بنابراین برای محاسبه‌ی $\sin^{-۱}x$ نیاز به نیمه‌ی راست دایره‌ی مثلثاتی داریم، اما سؤال اینه که نیم‌دایره‌ی مثلثاتی سمت راست چه کمکی در به دست آوردن $\sin^{-۱}$ می‌کنه؟ پس خوب نگاه کنید تا بفهمید.



$\sin^{-۱}(۱)=\frac{\pi}{۲}$

$\sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\pi}{۳}$

$\sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\pi}{۴}$

$\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})=\frac{\pi}{۶}$

$\sin^{-۱}(۰)=۰$

$\sin^{-۱}(-\frac{۱}{۲})=-\frac{\pi}{۶}$

$\sin^{-۱}(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{\pi}{۴}$

$\sin^{-۱}(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})=-\frac{\pi}{۳}$

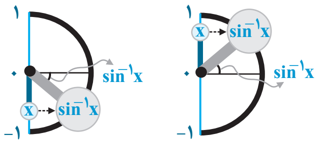
$\sin^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۲}$

نمایش زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ روی نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

همونطور که دیدید $\sin^{-1}x$ از جنس زاویه است. برای نمایش زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ شما به دو چیز نیاز دارید:

۱) محور $\sin$ ۲) نیمه ی سمت راست دایره ی مثلثاتی

یعنی روی محور $\sin$، مقدار x رو انتخاب می‌کنید و بعد اون x رو به کمان سمت راست دایره‌ی مثلثاتی تصویر می‌کنید تا زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ معلوم بشه.



اگه مقدار x از -۱ به سمت ۱ افزایش پیدا کنه، زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ از $-\frac{\pi}{۲}$ به سمت $\frac{\pi}{۲}$ افزایش پیدا می‌کنه.

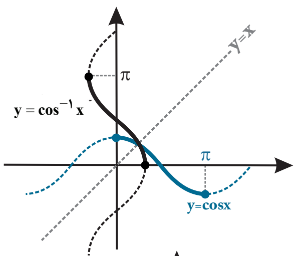
۱۸ توابع معکوس مثلثاتی ($y=\cos^{-1}x$) یا ($y=\operatorname{Arccos}x$) ۱۸

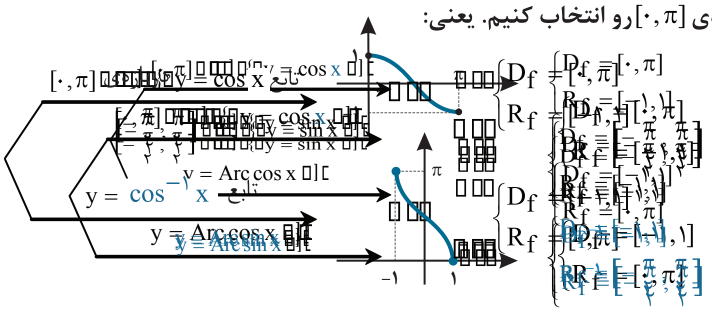
نمودار و دامنه ی تابع $y=\cos^{-1}x$

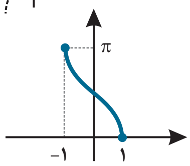
بچه‌ها! تابع $y=\cos^{-1}x$ معکوس تابع $y=\cos x$ هست، اما معکوس بخشی از $y=\cos x$ نه همش.

آقا اجازه؟! اون بخشی از $y=\cos x$ رو که می‌خواید معکوس کنید باید یک به یک باشه تا $y=\cos^{-1}x$ لیاقت تابع بودن رو پیدا کنه. اما سؤال اینه که شما قصد دارید چه بازه‌ای از $y=\cos x$ رو انتخاب کنید؟

طبق قرارداد باید بازه‌ی $[۰,\pi]$ رو انتخاب کنیم. یعنی:







بچه‌ها! با توجه به شکل روبه‌رو، فکر می‌کنید تابع $y=\cos^{-1}x$ چه x هایی رو می‌تونه جذب کنه؟

آقا اجازه؟! فقط x هایی رو که در بازه‌ی $[-۱,۱]$ قراردارند.

نتیجه

$$\begin{cases} y=\cos^{-1}(x) \Rightarrow D=\{x \mid -۱\le x\le ۱\} \\ y=\cos^{-1}(g(x)) \Rightarrow D=\{x \mid -۱\le g(x)\le ۱\}\end{cases}$$

بچه‌ها! در شکل بالا با توجه به نمودار $y=\cos^{-1}x$، مقدار هر کدوم از عبارت‌های زیر رو مقابلشون بنویسید.

۱) $\cos^{-1}(-۱)=\pi$ ۲) $\cos^{-1}(۰)=\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\cos^{-1}(۱)=۰$

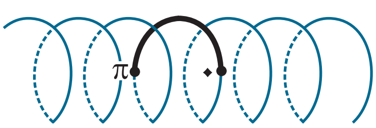
۴) $\cos^{-1}(-۳/۵)=$ تعریف نشده ۵) $\cos^{-1}(۱^{+})=$ تعریف نشده ۶) $\cos^{-1}(-۱^{-})=$ تعریف نشده

مثال دامنه‌ی تابع $y=\cos^{-1}(۲|x|-۳)$ کدام است؟

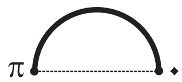
$$۲|x|-۳\in[-۱,۱] \xrightarrow{+۳} ۲|x|\in[۲,۴] \xrightarrow{\div ۲} |x|\in[۱,۲] \Rightarrow \underbrace{x\in[-۲,-۱]\cup[۱,۲]}_{\text{دامنه}}$$

یافتن مقدار $\cos^{-1}(x)$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

همون‌طور که می‌دونید برای این‌که به تابع $y=\cos^{-1}x$ برسید باید قسمت یک به یک تابع $y=\cos x$ رو که در بازه‌ی $[\cdot,\pi]$ قرار داره انتخاب کرده و بعد معکوسش کنید. بنابراین اگه قصد محاسبه‌ی مقدار $\cos^{-1}x$ رو (اون‌هم به کمک دایره‌ی مثلثاتی) دارید، کافیه بخشی از فنر مثلثاتی رو انتخاب کنید که در بازه‌ی $[\cdot,\pi]$ قرار داره. یعنی:



(نگاه از کنار)



(نگاه از مقابل)

بنابراین $y=\cos x^{-1}$ رو به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی به راحتی می‌شه حساب کرد. نگاه کنید:

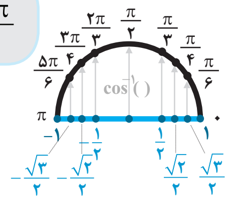
$\cos^{-1}(\cdot)=\frac{\pi}{۲}$

$\cos^{-1}(-\frac{۱}{۲})=\frac{۲\pi}{۳}$ $\quad$ $\cos^{-1}(\frac{۱}{۲})=\frac{\pi}{۳}$

$\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})=\frac{۳\pi}{۴}$ $\quad$ $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\pi}{۴}$

$\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})=\frac{۵\pi}{۶}$ $\quad$ $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\pi}{۶}$

$\cos^{-1}(-۱)=\pi$ $\quad$ $\cos^{-1}(۱)=\cdot$



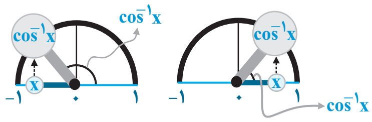
نمایش زاویه‌ی $\cos^{-1}(x)$ روی نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

برای نمایش زاویه‌ی $\cos^{-1}x$ شما به دو چیز نیاز دارید:

۱) محور $\cos x$ $\quad$ ۲) نیمه ی بالایی دایره ی مثلثاتی

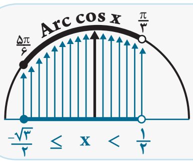
یعنی روی محور cos، مقدار x رو انتخاب می‌کنید و بعدش x انتخاب شده رو به کمان بالا تصویر می‌کنید تا زاویه‌ی $\cos^{-1}x$ معلوم بشه.

اگه مقدار x از ۱− به سمت ۱ افزایش پیدا کنه، زاویه‌ی $\cos^{-1}x$ از π به سمت ۰ کاهش پیدا می‌کنه.



مثال برد تابع $y=\cos^{-1}x$ وقتی $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\le x<\frac{۱}{۲}$ می‌باشد کدام است؟

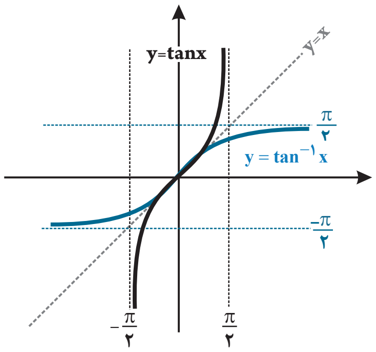
$\Rightarrow \frac{\pi}{۳}<\cos^{-1}x\le\frac{۵\pi}{۶}$



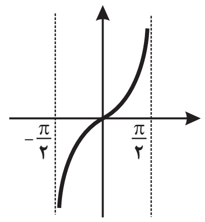
۱۹ توابع معکوس مثلثاتی ($y=\tan^{-1}x$)یا($y=\text{Arctan}\,x$) ۱۹

نمودار و دامنه‌ی تابع $y=\tan^{-1}x$

بچه‌ها! همون‌طور که می‌دونید تابع $y=\tan x$ یک به یک نیست، پس معکوس این تابع، تابع نخواهد بود. به همین دلیل بخشی از نمودار $y=\tan x$ رو انتخاب می‌کنم که یک به یک باشه (طبق قرارداد، بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$) در نتیجه معکوس این قطعه از $y=\tan x$، صددرصد تابع هست. پس، تابع $y=\tan^{-1}x$ معکوس قسمتی از $y=\tan x$ هست که در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرار داره. نگاه کنید:

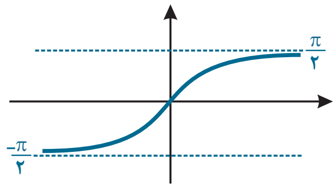


$y=\tan x$



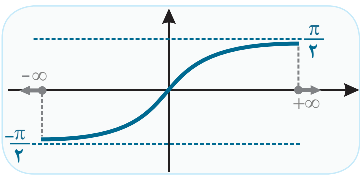
$$\begin{cases} D_f=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \\ R_f=\mathbb{R} \end{cases}$$

$y=\tan^{-1}x$



$$\begin{cases} D_{f^{-1}}=\mathbb{R} \\ R_{f^{-1}}=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

بچه‌ها! با توجه به نمودار $y=\tan^{-1}x$، این تابع می‌تونه تمام x ها رو جذب کنه، یعنی دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ هست.



$$\Rightarrow \begin{cases} \tan^{-1}\underset{x\to(-\infty)}{x} \approx -\frac{\pi}{2}^{+} \\ \tan^{-1}(0)=0 \\ \tan^{-1}\underset{x\to(+\infty)}{x} \approx \frac{\pi}{2}^{-} \end{cases}$$

بچه‌ها یه سؤال: فکر می‌کنید دامنه‌ی تابع $y=\tan^{-1}(g(x))$ چیه؟

آقا اجازه؟! از اونجایی که $y=\tan^{-1}(\quad)$ هر مقدار حقیقی رو پذیراست.پس همه چی به $g(x)$ بستگی داره.اگه $g(x)$ تعریف بشه پس $y=\tan^{-1}(g(x))$ هم تعریف میشه ودر غیر اینصورت خیر.بنابراین:

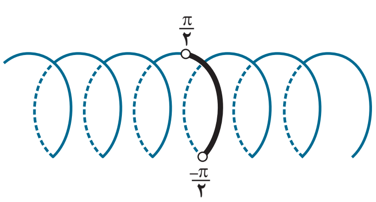
$$y=\tan^{-1}(g(x)) \Rightarrow D=\{x \mid x\in D_g\} \Rightarrow D=D_g$$

مثال دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

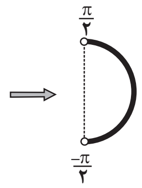
$$y=\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{x-2}{5-x}}\right) \Rightarrow \frac{x-2}{5-x}\geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & 2 & & 5 & \\ \hline \frac{x-2}{5-x} & - & 0 & + & \parallel & - \end{array} \Rightarrow D=[2,5)$$

یافتن مقدار $y=\tan^{-1}x$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

همون‌طور که می‌دونید برای رسم نمودار تابع $y=\tan^{-1}x$ بایدقسمت یک به یک تابع $y=\tan x$ رو که در بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ قرار داره انتخاب کرده و بعد معکوسش کنید. بنابراین اگه می‌خواید مقدار $\tan^{-1}$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی محاسبه کنید، کافیه قسمتی از فنر مثلثاتی رو انتخاب کنید که در بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ قرار داره. یعنی:

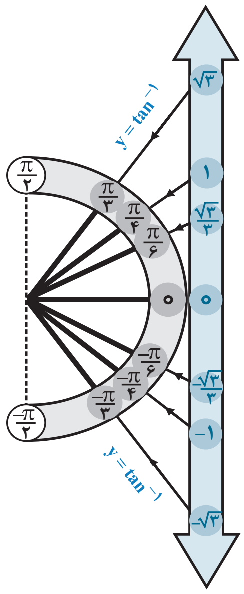


(نگاه از کنار)



(نگاه از مقابل)

بنابراین زاویه ی $y=\tan^{-1}x$ رو از طریق نیم‌دایره‌ی مثلثاتی به راحتی می‌شه حساب کرد. نگاه کنید:



$\tan^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$

$\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

$\tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{\pi}{6}$

$\tan^{-1}(0)=0$

$\tan^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{3})=-\frac{\pi}{6}$

$\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$

$\tan^{-1}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$

نمایش زاویه‌ی $y=\tan^{-1}x$ روی نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

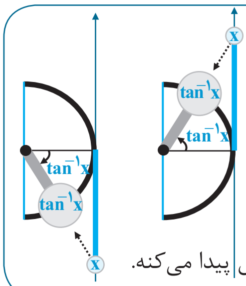
برای این‌که بتونید زاویه‌ی $y=\tan^{-1}x$ رو نمایش بدید به دو چیز نیاز دارید:

۱) محور tan ۲) نیمه ی سمت راست دایره ی مثلثاتی

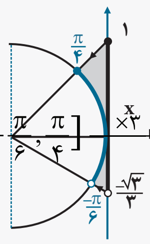
یعنی روی محور tan، مقدار x رو انتخاب می‌کنید. x انتخاب شده رو توسط

یک خط به مرکز نیم‌دایره وصل می‌کنید تا زاویه‌ی $\tan^{-1}x$ ~~معلوم~~ بشه.

اگه مقدار x از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش پیدا کنه، زاویه‌ی $\tan^{-1}x$ هم از $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ افزایش پیدا می‌کنه.



مثال اگر $\frac{-\sqrt{3}}{3}<x\le 1$ باشد، برد تابع $f(x)=3\tan^{-1}x+\frac{\pi}{2}$ کدام است؟



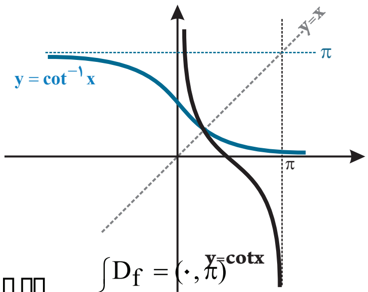
$$\frac{-\sqrt{3}}{3}<x\le 1 \Rightarrow \operatorname{Arctan}x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right] \xrightarrow{\times 3} 3\operatorname{Arctan}x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right] \xrightarrow{+\frac{\pi}{2}} 3\operatorname{Arctan}x+\frac{\pi}{2}\in\underbrace{\left(0,\frac{5\pi}{4}\right]}_{\text{برد}}$$

۲۰ توابع معکوس مثلثاتی ($y=\cot^{-1}x$)یا($y=\operatorname{Arccot}x$) ۲۰

نمودار و دامنه ی تابع $y=\cot^{-1}x$

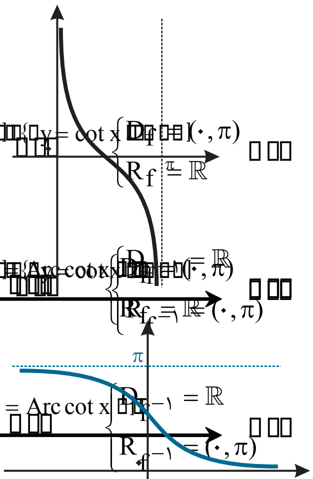
بچه‌ها! با توجه به این‌که تابع $y=\cot x$ یک به یک نیست پس معکوسش هم تابع نخواهد بود.بنابراین بخشی از نمودار $y=\cot x$ رو انتخاب می‌کنم که یک به یکه (طبق قرارداد، بازه‌ی $(0,\pi)$) در نتیجه معکوس این قطعه از $y=\cot x$ قطعاً تابع خواهد بود.

پس قرارداد، تابع $y=\cot^{-1}x$ معکوس قسمتی از $y=\cot x$ هست که در بازه‌ی $(0,\pi)$ قرار داره. یعنی:



$\begin{cases} D_f=(0,\pi) \\ R_f=\mathbb{R} \end{cases}$

برش $y=\cot x$ از بازه‌ی $(0,\pi)$



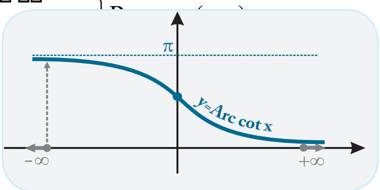
$\begin{cases} D_f=(0,\pi) \\ R_f=\mathbb{R} \end{cases}$

$\begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ R_f=(0,\pi) \end{cases}$

تابع $y=\cot^{-1}x$ ، $y=\text{Arc}\cot x$

$\begin{cases} D_{f^{-1}}=\mathbb{R} \\ R_{f^{-1}}=(0,\pi) \end{cases}$

بچه‌ها! اگه به نمودار تابع $y=\cot^{-1}x$ دقت کنید می‌بینید که این تابع قدرت جذب همه‌ی x ها رو داره یعنی:



$$\begin{cases} \cot^{-1}x \underset{x\to-\infty}{\approx} \pi \\ \cot^{-1}(0)=\frac{\pi}{2} \\ \cot^{-1}x \underset{x\to+\infty}{\approx} 0 \end{cases}$$

بچه‌ها یه سؤال: دامنه‌ی $y=\cot^{-1}(g(x))$ چیه؟

آقا اجازه! $y=\text{Arc}\cot(g(x)) \Rightarrow D=\{x \mid x\in D_g\} \Rightarrow D=D_g$

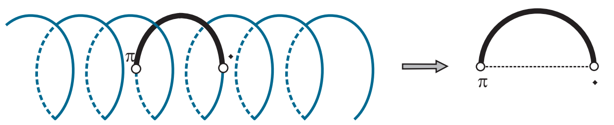
مثال دامنه‌ی تابع $y=\cot^{-1}\left(\frac{1}{x+|x|}\right)$ کدام است؟

همونطور که می دونید ، دامنه ی این تابع، x هایی هستن که باعث میشن $x+|x|\neq 0$ بشه. پس:

$$x+|x|\neq 0 \begin{cases} x>0 \text{ اگر } : x+x\neq 0 \Rightarrow x\neq 0 \\ x=0 \text{ اگر } : 0+0\neq 0 \text{ غ ق ق} \\ x<0 \text{ اگر } : x-x\neq 0 \Rightarrow 0\neq 0 \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow x>0 \Rightarrow D=(0,+\infty)$$

یافتن مقدار $y=\cot^{-1}x$ به کمک نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

همون‌طور که می‌دونید برای رسم نمودار تابع $y=\cot^{-1}x$ باید قسمت یک به یک تابع $y=\cot x$ رو که در بازه‌ی $(0,\pi)$ قرار داره انتخاب کرده و بعد معکوسش کنید. بنابراین اگه می‌خواید مقدار $y=\cot^{-1}x$ رو به کمک دایره‌ی مثلثاتی محاسبه کنید، کافیه قسمتی از فنر مثلثاتی رو انتخاب کنید که در بازه‌ی $(0,\pi)$ قرار داره. یعنی:



(نگاه از کنار) (نگاه از مقابل)

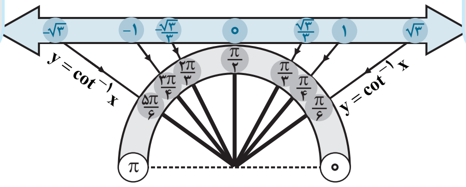
بنابراین مقدار $\cot^{-1}x$ رو به راحتی میشه از طریق نیم‌دایره‌ی مثلثاتی حساب کرد. نگاه کنید:

$\cot^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$

$\cot^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$ $\qquad$ $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$

$\cot^{-1}(-1)=\frac{3\pi}{4}$ $\qquad$ $\cot^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

$\cot^{-1}(-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}$ $\qquad$ $\cot^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}$



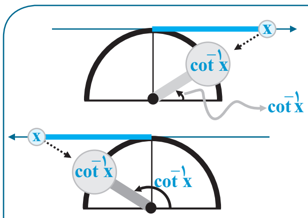
نمایش زاویه‌ی $y=\cot^{-1}x$ روی نیم‌دایره‌ی مثلثاتی

برای این‌که بتونید زاویه‌ی $\cot^{-1}x$ رو نمایش بدید به دو چیز نیاز دارید:

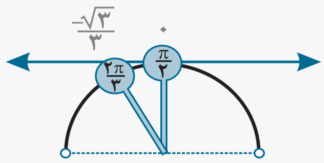
۱) محور cot $\quad$ ۲) نیمه ی بالایی دایره ی مثلثاتی

یعنی روی محور cot، مقدار x رو انتخاب می‌کنید. x انتخاب شده رو توسط یک خط به مرکز نیم‌دایره وصل می‌کنید تا زاویه‌ی $\cot^{-1}x$ معلوم بشه.

اگه مقدار x از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش پیدا کنه، زاویه‌ی $\cot^{-1}x$ هم از π به سمت صفر کاهش پیدا می‌کنه.



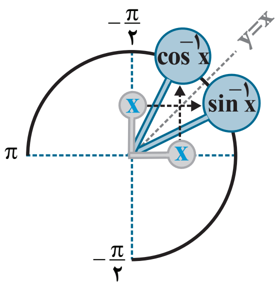
مثال مقدار عبارت $\sin\left(\frac{3}{4}\cot^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)+\cos\left(2\cot^{-1}(0)\right)$ کدام است؟



$$\sin\left(\frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi=1-1=0$$

۲۱ روابط موجود بین زوایای $\sin^{-1}x$ ، $\cos^{-1}x$ ، $\tan^{-1}x$ ، $\cot^{-1}x$

مجموع دو زاویه‌ی متمم



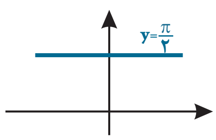
بچه‌ها! آیا می‌تونید مقدار $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ رو به کمک نیم‌دایره‌های مثلثاتی پیدا کنید؟

آقا اجازه؟! با مطالب جدیدی که گفتید، خیلی راحت میشه مقدار $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ رو به‌دست آورد. با توجه به شکل روبرو ، دو مقدار یکسان x رو روی محور sin و cos انتخاب کرده و $\sin^{-1}x$ و $\cos^{-1}x$ این دو مقدار رو مشخص می کنیم. همونطور که می بینید زاویه‌های $\sin^{-1}x$ و $\cos^{-1}x$ متمم هم‌دیگه هستن،چون نسبت به خط $y=x$ متقارنن.

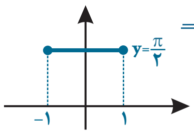
بنابراین: $\boxed{\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}}$

یه سؤال دیگه: آیا می‌تونید تابع $y=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ رو رسم کنید؟

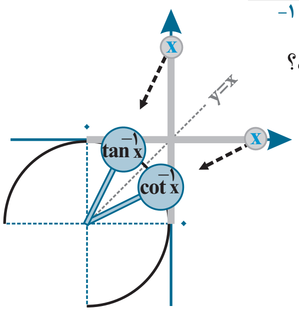
آقا اجازه؟! خیلی آسونه. این تابع، یک تابع ثابته. یعنی: $y=\frac{\pi}{2}$ پس نمودارش اینجوریه:



دانش‌آموز عزیزم باز هم حواست رو جمع نکردی. اگه به تابع $y = \text{Arcsin}\,x + \text{Arccos}\,x$ نگاه کنی می‌فهمی که این تابع فقط x هایی رو که در بازه‌ی $[-۱,۱]$ قرار داره می‌تونه جذب کنه، پس شما با تابع $y = \frac{\pi}{۲}$ که دامنه‌اش بازه‌ی $[-۱,۱]$ هست سروکار داری. یعنی:



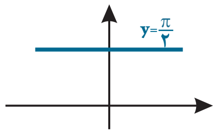
دوستان من! آیا می‌تونید مقدار $\tan^{-۱}x + \cot^{-۱}x$ رو به کمک نیم‌دایره‌های مثلثاتی پیدا کنید؟



آقا اجازه؟! کافیه دو مقدار یکسان رو روی محور cot, tan انتخاب کرده و $\cot^{-۱}, \tan^{-۱}$ رو برای اینرو مقدار رومشخص کنیم. کاملاً واضحه که زاویه‌های $\tan^{-۱}x$ با $\cot^{-۱}x$ متمم همدیگه هستن. بنابراین:

$$\tan^{-۱}x + \cot^{-۱}x = \frac{\pi}{۲}$$

تازه نمودار تابع $y = \tan^{-۱}x + \cot^{-۱}x$ با توجه به این‌که دامنه‌اش برابره با $\mathbb{R}$ ، به شکل روبروست:

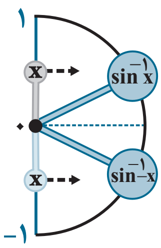


مثال معادله‌ی $\sin^{-۱}x + \cos^{-۱}(\frac{۱}{x}) = \frac{\pi}{۲}$ چند جواب دارد؟

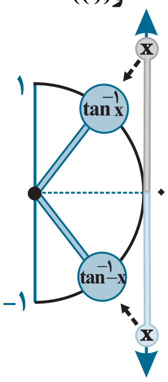
$$\sin^{-۱}x = \underbrace{\frac{\pi}{۲} - \cos^{-۱}\frac{۱}{x}}_{\sin^{-۱}\frac{۱}{x}} \Rightarrow \sin^{-۱}x = \sin^{-۱}\frac{۱}{x} \Rightarrow x = \frac{۱}{x} \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

مجموع دو زاویه‌ی قرینه

شکلهای زیر داره نشون میده که زاویای $\sin^{-۱}(x)$ و $\sin^{-۱}(-x)$ قرینه ی همدیگه هستن (همچنین زوایای $\tan^{-۱}(x)$, $\tan^{-۱}(-x)$)



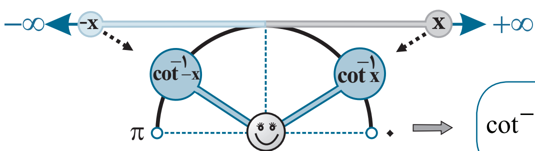
$$\sin^{-۱}(x) + \sin^{-۱}(-x) = ۰$$



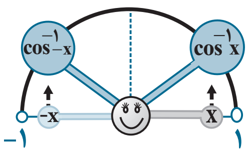
$$\tan^{-۱}(x) + \tan^{-۱}(-x) = ۰$$

مجموع دو زاویه‌ی مکمل

شکلهای زیر داره نشون میده که زاویای $\cos^{-۱}x$, $\cos^{-۱}(-x)$ مکمل همدیگه هستن (همچنین زوایای $\cot^{-۱}x$, $\cot^{-۱}(-x)$):



$$\cot^{-۱}(x) + \cot^{-۱}(-x) = \pi$$



$$\cos^{-۱}(x) + \cos^{-۱}(-x) = \pi$$

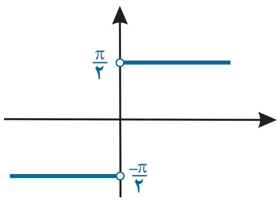
مقادیر $\tan^{-1}x , \tan^{-1}(\frac{1}{x})$, $\cot^{-1}x , \cot^{-1}(\frac{1}{x})$

بچه‌ها! رابطه‌ی

$$\operatorname{Arc\,tan} x + \operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0 \end{cases}$$

همواره برقراره.

پس نمودار تابع $y=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}$ هم به شکل روبه‌روست:



آقا اجازه؟! رو چه حسابی این حرف‌ها رو می‌زنید؟

بچه‌ها! تابع $y=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}$ رو در نظر بگیرید. دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}-\{0\}$ هست. یعنی: $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
اگه مشتق این تابع‌رو به دست بیارید می‌بینید که $y'=0$ میشه. یعنی این تابع علاوه بر این‌که در بازه‌ی $(0,+\infty)$ یک تابع ثابته، در بازه‌ی $(-\infty,0)$ هم تابعی ثابت خواهد بود. از اون‌جایی که یک تابع ثابت به ازای تمام x های دامنه، فقط یک مقدار داره، کافیه که در بازه‌ی $(0,+\infty)$ یک x دلخواه مثل $x=1$ رو درون تابع قرار بدیم تا مقدار این تابع ثابت در بازه‌ی $(0,+\infty)$ معلوم بشه. هم‌چنین در بازه‌ی $(-\infty,0)$ هم باید یک x دلخواه مثل (-1) رو به تابع بدیم تا مقدار تابع در بازه‌ی $(-\infty,0)$ هم مشخص بشه.

یعنی:

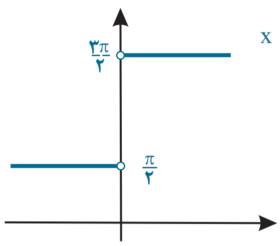
$$y=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x} = \begin{cases} x>0 & x=1 \Rightarrow \tan^{-1}(1)+\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \\ x<0 & x=-1 \Rightarrow \tan^{-1}(-1)+\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بچه‌ها! در ضمن رابطه‌ی

$$\operatorname{Arc\,cot} x + \operatorname{Arc\,cot}\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ \frac{3\pi}{2} & x<0 \end{cases}$$

هم همواره برقراره.

پس نمودار تابع $y=\cot^{-1}x+\cot^{-1}(\frac{1}{x})$ به شکل روبه‌روست:



آقا اجازه؟! آیا از دلایل بالا میشه برای اثبات این رابطه استفاده کرد؟

بله عزیزم.

آقا اجازه؟! فقط در اینجا یک سؤال وجود داره، چرا این رابطه به ازای $x<0$ مقدار $\frac{3\pi}{2}$ رو دارید؟

خب معلومه. اگه مثل بالا عمل کنی می‌فهمی که:

$$y=\cot^{-1}x+\cot^{-1}\frac{1}{x} = \begin{cases} x>0 & x=1 \Rightarrow \cot^{-1}(1)+\cot^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \\ x<0 & x=-1 \Rightarrow \cot^{-1}(-1)+\cot^{-1}(-1)=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $\tan^{-1}x , \cos^{-1}x , \sin^{-1}x$

بچه‌ها! همون‌طور که می‌دونید وقتی که دو تابع معکوس هم، با یکدیگه ترکیب بشن، همدیگه رو خنثی می‌کنن و فقط عبارت درونشون می‌مونه. یعنی:

$$f(f^{-1}(x))=x \quad , \quad f^{-1}(f(x))=x$$

بنابراین $\sin^{-1}x$ رو فقط $\sin$ میتونه خنثی کنه (یعنی: $\sin(\sin^{-1}x)=x$)

همچنین $\cos^{-1}x$ رو فقط $\cos$ میتونه خنثی کنه (یعنی: $\cos(\cos^{-1}x)=x$)

مثال حاصل $\cos\left(2\sin^{-1}\frac{2}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{5}\right)$ کدام است؟

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{5}+\underbrace{\sin^{-1}\frac{2}{5}+\cos^{-1}\frac{2}{5}}_{\frac{\pi}{2}}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\frac{2}{5}\right)=-\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{5}\right)=-\frac{2}{5}$$

توجه $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

پس اگه می خواید نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\sin^{-1}x$ رو محاسبه کنید کافیه اون نسبت مثلثاتی رو بر حسب sin بنویسید تا بتونه $\sin^{-1}$ رو خنثی کنه.وهمچنین برای محاسبه ی نسبت های مثلثاتی $\cos^{-1}x$ نسبت رو بر حسب cos بنویسید

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\sin^{-1}$

۱) $\cos\bigcirc=\sqrt{1-\sin^2\bigcirc}$ $\Rightarrow$ $\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}=\sqrt{1-x^2}$

۲) $\cot\bigcirc=\dfrac{\cos\bigcirc}{\sin\bigcirc}$ $\Rightarrow$ $\cot(\sin^{-1}x)=\dfrac{\cos(\sin^{-1}x)}{\sin(\sin^{-1}x)}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

۳) $\tan\bigcirc=\dfrac{\sin\bigcirc}{\cos\bigcirc}$ $\Rightarrow$ $\tan(\sin^{-1}x)=\dfrac{\sin(\sin^{-1}x)}{\cos(\sin^{-1}x)}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\cos^{-1}$

۱) $\sin\bigcirc=\sqrt{1-\cos^2\bigcirc}$ $\Rightarrow$ $\sin(\cos^{-1}x)=\sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}x)}=\sqrt{1-x^2}$

۲) $\cot\bigcirc=\dfrac{\cos\bigcirc}{\sin\bigcirc}$ $\Rightarrow$ $\cot(\cos^{-1}x)=\dfrac{\cos(\cos^{-1}x)}{\sin(\cos^{-1}x)}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

۳) $\tan\bigcirc=\dfrac{\sin\bigcirc}{\cos\bigcirc}$ $\Rightarrow$ $\tan(\cos^{-1}x)=\dfrac{\sin(\cos^{-1}x)}{\cos(\cos^{-1}x)}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\tan^{-1}x$

۱) $\sin\bigcirc=\dfrac{\tan\bigcirc}{\sqrt{1+\tan^2\bigcirc}}$ $\Rightarrow$ $\sin(\tan^{-1}x)=\dfrac{\tan(\tan^{-1}x)}{\sqrt{1+\tan^2(\tan^{-1}x)}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

۲) $\cos\bigcirc=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\bigcirc}}$ $\Rightarrow$ $\cos(\tan^{-1}x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\tan^{-1}x)}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

۳) $\cot\bigcirc=\dfrac{1}{\tan\bigcirc}$ $\Rightarrow$ $\cot(\tan^{-1}x)=\dfrac{1}{\tan(\tan^{-1}x)}=\dfrac{1}{x}$

بچه‌ها!لطف کنید، نسبت‌های مثلثاتی $\cot^{-1}x$ رو خودتون به دست بیارید.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای $2\sin^{-1}x$, $2\cos^{-1}x$, $2\tan^{-1}x$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin(2\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha}) = 2\sin(\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha})\cos(\sin^{-1}x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\sin(2\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha}) = 2\sin(\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha})\cos(\cos^{-1}x) = 2\sqrt{1-x^2}\,.x$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \Rightarrow \sin(2\tan^{-1}x) = \frac{2\tan(\tan^{-1}x)}{1+\tan^2(\tan^{-1}x)} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \Rightarrow \cos(2\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha}) = 1-2\sin^2(\underbrace{\sin^{-1}x}_{\alpha}) = 1-2x^2$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos(2\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha}) = 2\cos^2(\underbrace{\cos^{-1}x}_{\alpha}) - 1 = 2x^2-1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \Rightarrow \cos(2\tan^{-1}x) = \frac{1-\tan^2(\tan^{-1}x)}{1+\tan^2(\tan^{-1}x)} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan(2\tan^{-1}x) = \frac{2\tan(\tan^{-1}x)}{1-\tan^2(\tan^{-1}x)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

رابطه‌ی Extra

بچه‌ها! آخرین رابطه از مبحث توابع معکوس مثلثاتی رو می‌بینید که من اسمش رو گذاشتم رابطه‌ی فوق‌العاده به دلیل حجم زیاد اثبات، فقط خود رابطه رو براتون می‌گم:

$$\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) & x.y \le 1 \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) + \pi, \quad x > \boxed{x,y>0} & x.y > 1 \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) - \pi, \quad x < \boxed{x,y<0} & x.y > 1 \end{cases}$$

مثال: $\boxed{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \le 1}$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

مثال: $\boxed{2\times 3 = 6 > 1}$

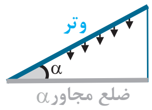
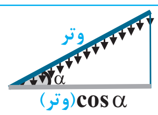
$$\tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3) = \tan^{-1}\left(\frac{2+3}{1-2\times 3}\right) + \pi = \tan^{-1}\left(\frac{5}{-5}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

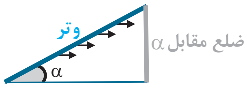
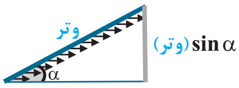
مثال: $\boxed{(-2)(-3) = 6 > 1}$

$$\tan^{-1}(-2) + \tan^{-1}(-3) = \tan^{-1}\left(\frac{(-2)+(-3)}{1-(-2)(-3)}\right) - \pi = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{-5}\right) - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = \frac{-3\pi}{4}$$

۲۲ کاربرد نسبتهای مثلثاتی دریک مثلث ۲۲

کلید حل مسائل کاربردی و هندسی

در مثلث قائم الزاویه ی  وظیفه ی $\cos\alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مجاور α ست. یعنی : 

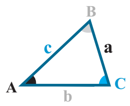
در مثلث قائم الزاویه ی  وظیفه ی $\sin\alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مقابل α ست. یعنی : 

علت بالایی : $\cos\alpha = \dfrac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} \Rightarrow$ ضلع مجاور α = وتر . $\cos\alpha$

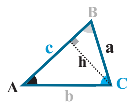
بچه ها ! در یک مثلث ، روابطی بین اضلاع و زوایای اون مثلث وجود داره که من ۳ دسته از اونها رو براتون بازگو می کنم:

دسته ی اول : (معروف به روابط sin)

این قانون باعث برقراری ارتباط، بین دو ضلع دلخواه و زوایای روبروشون میشه.



$$\Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

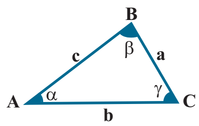
علت) در مثلث  داریم:

$$\begin{cases} h = a\sin B \\ h = b\sin A \end{cases} \Rightarrow a\sin B = b\sin A \Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

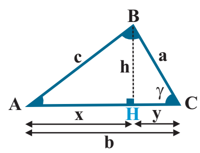
بقیه ی اثبات با شما.

دسته ی دوم : (معروف به روابط cos)

در این قانون ، شما با داشتن اندازه ی دو ضلع و زاویه ی بین شون می تونید اندازه ی ضلع سوم مثلث رو بدست بیارید.



$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases} \odot$$

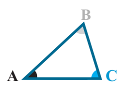
علت $\odot$: 

$$\begin{cases} \text{در مثلث } ABH: & h^2 = c^2 - x^2 \\ \text{در مثلث } BCH: & h^2 = a^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow c^2 - (b-y)^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow c^2 - (b^2 - 2by + \cancel{y^2}) = a^2 - \cancel{y^2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2by \xrightarrow{y = a\cos\gamma} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

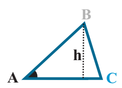
دسته ی سوم : مساحت مثلث

در این قانون ، مساحت یک مثلث ، به کمک دو ضلع و زاویه ی بین اون دو ضلع ، قابل محاسبه هست:



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{AB.AC.\sin A}{2} = \frac{AB.BC.\sin B}{2} = \frac{BC.AC.\sin C}{2}$$

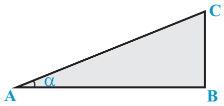
$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\text{حاصلضرب اندازه ی دو ضلع} \times \sin(\text{زاویه ی بین دو ضلع})}{2}$$

علت)  : $S = \dfrac{h.AC}{2} \xrightarrow[\text{با توجه به}]{h = AB\sin A} S = \dfrac{AB\sin A.AC}{2} \Rightarrow S = \dfrac{AB.AC.\sin A}{2}$

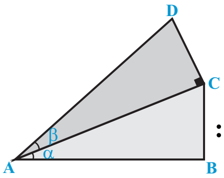
۲۳ اثبات بسط $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ ۲۳

بچه‌ها! می‌خوام برای $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ رابطه‌ای ایجاد کنم. پس مراحلی رو که طی می‌کنم با دقت زیرنظر بگیرید:

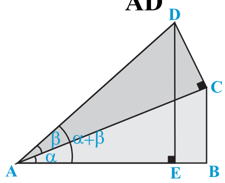
۱) مثلث قائم‌الزاویه‌ای درست می‌کنم که حاوی زاویه‌ی α باشه :



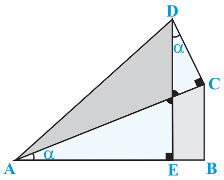
۲) مثلث قائم‌الزاویه‌ای دیگه‌ای رو روی وتر این مثلث ایجاد می‌کنم که حاوی زاویه‌ی β باشه :



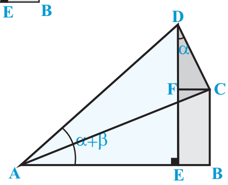
۳) برای زاویه‌ی $\alpha+\beta$ یک مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آرم:



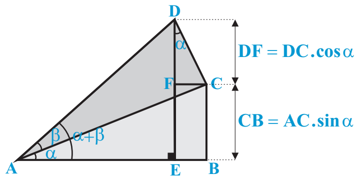
توجه داشته باشید که :



۴) حالا مستطیل FCBE رو ایجاد می‌کنم :



دوستان عزیزم! همه ی مقدمه چینی های بالا به خاطر این بود که به شکل روبرو برسم :



$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DE}{AD}=\frac{DF+FE}{AD}\xlongequal{\text{با توجه به مستطیل}}\frac{DF+CB}{AD}=\frac{DC.\cos\alpha+AC.\sin\alpha}{AD}=\cos\alpha\cdot\underbrace{\boxed{\frac{DC}{AD}}}^{\sin\beta}+\sin\alpha\cdot\underbrace{\boxed{\frac{AC}{AD}}}^{\cos\beta}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AE}{AD}=\frac{AB-EB}{AD}\xlongequal{\text{با توجه به مستطیل}}\frac{AB-FC}{AD}=\dots$$

لطفاً خودتون ادامه بدید ....

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

۱) سینوس یک رادیان در چه فاصله ای است ؟(فاصله ی کوچکتر مورد نظر است) (آزاد – ۶۴)

۱) $[\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲}]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}]$ ۳) $[\frac{\sqrt{۲}}{۲},۱]$ ۴) $[۰,\frac{۱}{۲}]$

۲) اگر $f(x)=\min\{\cos t\,|\,\frac{\pi}{۳}<t\le x\}$ ، در این صورت حاصل $f(\frac{۵\pi}{۶})+f(\frac{۷\pi}{۶})$ کدام است ؟ (آموزش و پرورش – ۸۵)

۱)وجود ندارد ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱$ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $-[۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}]$

۳) اگر $a\in R$, $\cos x=\sqrt{\frac{\cot x}{\cot x-a^۲}}$ ، انتهای کمان x در کدام ناحیه ی مثلثاتی است ؟ (سراسری – ۷۱)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۴) اگر $\cos x=-\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$ و انتهای کمان x در ناحیه ی سوم دایره ی مثلثاتی باشد ، $\tan(\frac{۳\pi}{۲}-x)$ کدام است ؟ (سراسری –۷۳)

۱) -۳ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

۵) حاصل $\cos\frac{۱۱\pi}{۱۴}+\cos\frac{۹\pi}{۱۴}+\cos\frac{۷\pi}{۱۴}+\cos\frac{۵\pi}{۱۴}+\cos\frac{۳\pi}{۱۴}$ کدام است ؟ (سراسری –۷۷)

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۶) اگر $\sin x+\frac{۱}{\sin x}=۲$ باشد ، آنگاه مقدار عبارت $\sin^۲ x+\cos^۵ x$ چقدر است ؟ (آزاد – ۷۵)

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $۲-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}-۱$

۷) اگر α و β ریشه های معادله ی $x^۲+x-۱=۰$ باشند ، حاصل $[\cos(\alpha^۲-\beta)]$ کدام است ؟ (استاد عادل مهرپاک – همدان)

۱) فقط صفر ۲) فقط ۱ ۳) فقط ۱- ۴) ۰ یا ۱

۸) اگر $\sin x+\tan x>۰$ و $\sin x\tan x<۰$ $-\frac{۱}{\cos x}$ باشد ، انتهای کمان x در کدام ناحیه ی مثلثاتی است ؟ (سراسری –۷۰)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۹) اگر $\sin^۲ x+۲\cos^۲ x=\frac{۳}{۲}$ باشد آنگاه $\tan^۲ x$ کدام است ؟ (آزاد –۸۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰) اگر $\sin x+\cos x=\frac{۱}{۳}$ باشد ، حاصل $\sin^۳ x+\cos^۳ x$ چقدر است ؟ (آزاد – ۸۶)

۱) $\frac{۱۳}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱۳}{۸۱}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۷}$ ۴) $\frac{۱۷}{۸۱}$

۱۱) اگر $\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۳}{۵}$ باشد ، حاصل $\sin^۶ x+\cos^۶ x$ کدام است ؟ (آزاد –۸۷)

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۱۲) اگر $\sin x+\cos x=a$ و $\sin x-\cos x=b$ ، آنگاه $\tan(x-\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟ (آزاد –۷۷)

۱) $\frac{b}{a}$ ۲) $\frac{a}{b}$ ۳) $a^۲-b^۲$ ۴) $\frac{a+b}{a-b}$

۱۳) در مثلث ABC ، رابطه ی $\tan(B+۳۰^\circ).\tan(C+۳۰^\circ)=۱$ برقرار است ، آنگاه : (آزاد –۸۳)

۱) $\hat{A}=۱۵۰^\circ$ ۲) $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ ۳) $\hat{A}=۶۰^\circ$ ۴) $\hat{A}=۳۰^\circ$

۱۴) اگر $\frac{\sin^۲ x-۲\cos^۲ x+۱}{\sin^۲ x+۲\cos^۲ x-۱}=۴$ باشد ، مقدار $\tan^۲ x$ چقدر است؟ (آزاد –۸۲)

۱) ۲ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۱

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

۱۵ اگر $۴\sin x \cos x = -۱$ باشد ، $\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ کدام است ؟ (سنجش -۷۸)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۴) ±۱

۱۶ مقدار عددی $\tan ۸۵^\circ + \tan ۵۰^\circ - \tan ۸۵^\circ \tan ۵۰^\circ$ برابر است با : (آزاد -۶۹)

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۳-

۱۷ اگر $\tan(\alpha+۲۲۰^\circ) = \frac{۳۳}{۴۴}$ باشد ، $\cot(۲۳۵^\circ - \alpha)$ کدام است ؟ (سراسری -۷۴)

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۸ اگر $\tan x = \sqrt{۲} - ۱$ و $\tan y = \sqrt{۲} + ۱$ و x,y حاده باشند ، کدام رابطه درست است ؟ (آزاد -۷۹)

۱) $y - x = \frac{\pi}{۳}$ ۲) $y - x = \frac{\pi}{۶}$ ۳) $y - x = \frac{\pi}{۴}$ ۴) $y - x = \frac{\pi}{۲}$

۱۹ اگر $\alpha + \beta = ۱۳۵^\circ$ و $\tan(\alpha - \beta) = \frac{۳}{۴}$ ، مقدار کسر $\frac{\cos^۲\alpha.\cos^۲\beta - \sin^۲\alpha.\sin^۲\beta}{\sin^۲\alpha.\cos^۲\beta - \cos^۲\alpha.\sin^۲\beta}$ کدام است ؟ (سراسری -۸۴)

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $-\frac{۴}{۳}$

۲۰ حاصل عبارت $A = (۱+\tan ۱۷^\circ)(۱+\tan ۲۸^\circ)$ کدام است ؟ (گزینه ی دو - ۸۵)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۱ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

۲۱ خلاصه شده ی $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)\sin(\pi+\alpha) - \sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)$ کدام است ؟ (سراسری -۸۲)

۱) $-\sin ۲\alpha$ ۲) $\sin ۲\alpha$ ۳) $\cos ۲\alpha$ ۴) صفر

۲۲ حاصل عبارت $\sqrt{۲}\cos x + \frac{\sqrt{۲}\cos ۲x}{\sin x + \cos x} - \frac{\cos ۲x}{\sqrt{۲}\sin x - ۱}$ کدام است ؟ (آزاد - ۸۰)

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) صفر ۴) $۲\sqrt{۲}\cos x$

۲۳ خلاصه شده ی عبارت $\tan ۲۰^\circ(۱+\cos ۴۰^\circ)$ برابر کدام است؟ (سراسری - ۷۸)

۱) $\sin ۲۰$ ۲) $\sin ۴۰$ ۳) $\cos ۲۰$ ۴) $\cos ۴۰$

۲۴ حاصل عبارت $۲\cos^۲(\frac{۷\pi}{۴} - x) - \cos^۲ x(۱+\tan^۲ x)$ برابر کدام است ؟ (سراسری - ۷۷)

۱) $\sin ۲x$ ۲) $-\cos ۲x$ ۳) $-\sin ۲x$ ۴) $\cos ۲x$

۲۵ مقدار عددی $\frac{۲\tan(\frac{\pi}{۴}+\alpha)}{۱-\tan^۲(\frac{\pi}{۴}+\alpha)}$ به ازای $\alpha = \frac{\pi}{۸}$ کدام است ؟ (آموزش و پرورش -۸۷)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱-

۲۶ ساده شده ی عبارت $\cos ۴x + \tan x \sin ۴x$ کدام است ؟ (سراسری - ۷۴)

۱) $۲\cos^۲ x - ۱$ ۲) $۲\sin^۲ x + ۱$ ۳) $۴\sin^۲ x + ۱$ ۴) $۴\cos^۲ x - ۳$

۲۷ حاصل $\cot\alpha + \frac{۱}{\sin\alpha}$ برابر کدام است ؟ (سنجش - ۸۶)

۱) $\sin\frac{\alpha}{۲}$ ۲) $\tan\frac{\alpha}{۲}$ ۳) $\cos\frac{\alpha}{۲}$ ۴) $\cot\frac{\alpha}{۲}$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

۲۸) حاصل عبارت $\cos ۸۰^\circ \cos ۴۰^\circ \sin ۲۰^\circ$ برابر کدام است ؟ (آموزش و پرورش – ۸۶)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

۲۹) اگر $a+b=\frac{\pi}{۴}$ باشد ، حاصل $۸\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{۲}-a)\cos(\frac{\pi}{۲}-b)$ کدام است ؟ (سراسری – ۸۳)

۱) $\sin ۴a$ ۲) $\cos ۴a$ ۳) $\sin^۲ ۲a$ ۴) $\cos^۲ ۲a$

۳۰) بیشترین مقدار تابع $f(x)=(\sin x-\cos ۲x)^۲+(\cos x-\sin ۲x)^۲$ چیست ؟ (گزینه ی ۲ – ۸۷)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۳۱) اگر $\sin x=\frac{۳}{۵}$ و $۰<x<\frac{\pi}{۲}$، آنگاه $\tan(\frac{\pi}{۲}+۲x)$ کدام است؟ (آزاد – ۸۵)

۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $\frac{۲۴}{۷}$ ۳) $-\frac{۷}{۲۴}$ ۴) $-\frac{۲۴}{۷}$

۳۲) در مثلثی $۱-\cos ۲c=\tan c$ آنگاه : (آزاد – ۸۳)

۱) $\hat{C}=۳۰^\circ$ ۲) $\hat{C}=۶۰^\circ$ ۳) $\hat{C}=۴۵^\circ$ ۴) $\hat{C}=۹۰^\circ$

۳۳) در مثلث قائم الزاویه ی ABC ، ($\hat{A}=۹۰$) ، مقدار $\tan\frac{C}{۲}$ چقدر است ؟ (آزاد– ۷۵)

۱) $\frac{b}{a+c}$ ۲) $\frac{c}{a+b}$ ۳) $\frac{a}{b+c}$ ۴) $\frac{a+b}{c}$

۳۴) حاصل عبارت $\sqrt{۱+\sin ۲x}+\cos x$ وقتی $\frac{۳\pi}{۴}<x<\pi$ باشد برابر کدام است ؟ (آزاد –۸۱ با کمی تغییر)

۱) صفر   ۲) $-۲\sin x$ ۳) $-\sin x$ ۴) $۲\cos x+\sin x$

۳۵) حاصل عبارت $\tan^۲(\frac{\pi}{۴}+\alpha).\frac{۱-\sin ۲a}{۱+\sin ۲a}$ برابر کدام است ؟ (گزینه ی دو – ۸۵)

۱) $۱-\tan\alpha$ ۲) $۱+\tan\alpha$ ۳) ۱-   ۴) ۱

۳۶) اگر $\sin x+\cos x=\frac{۵}{۴}$ باشد ، حاصل $\tan x+\cot x$ چقدر است ؟ (آزاد – ۷۵)

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۳۲}{۹}$ ۳) $\frac{۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۱۸}{۷}$

۳۷) اگر $\sin ۲x=\frac{۴}{۵}$ باشد ، حاصل کسر $\frac{\tan^۲ x+\cot^۲ x}{\tan^۳ x+\cot^۳ x}$ چقدر است ؟ (آزاد– ۷۴)

۱) $\frac{۳۴}{۶۵}$ ۲) ۱   ۳) $\frac{۶۵}{۳۴}$ ۴) $\frac{۱۷}{۳۵}$

۳۸) از معادله ی $\tan x-\cot x=۶$ ، مقدار $\tan ۲x$ کدام است ؟ (سراسری – ۷۵)

۱) ۳-   ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

۳۹) اگر انتهای کمان α در ناحیه ی اول دایره ی مثلثاتی باشد ، عبارت $\sqrt{\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}}-\sqrt{۱+\cot^۲\alpha}$ برابر کدام است ؟ (سراسری– ۷۵)

۱) $-\tan\alpha$ ۲) $-\cot\alpha$ ۳) $\tan\alpha$ ۴) $\cot\alpha$

۴۰) یکی از ریشه های معادله ی $۳\sin x-k=۴\sin^۳ x$ برابر $\frac{\pi}{۱۸}$ است . مقدار k کدام است ؟ (آزاد – ۷۱)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱-

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

۴۱) اگر $2\sin x+\sin 2x+\cos x\sin 2x+\dots=2$ باشد، آنگاه $\sin x$ برابر کدام است؟ (استاد عادل مهرپاک – همدان)

۱) $\sin^2 x$ ۲) $\cos^2 x$ ۳) $2\sin^2\frac{x}{2}$ ۴) $2\cos^2\frac{x}{2}$

۴۲) اگر $\sin x+\sqrt{3}\cos x=a$ باشد، مقدار $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$ کدام است؟ (گزینه ی دو – ۷۸)

۱) a^2-2 ۲) $a^2-a\sqrt{3}+1$ ۳) a^2-a-1 ۴) a^2-1

۴۳) اگر $\sin x(\cos x-\sin x)=-1$ باشد، آنگاه $\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ چقدر است؟ (آزاد – ۸۱)

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) 3 ۳) 0 ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۴) اگر $\frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{7\pi}{4}$ و $A=\sin 2x+\cos 2x$ باشد تمام مقادیر A کدام است؟ (آزاد – ۷۵)

۱) $-1\le A\le 1$ ۲) $-1\le A\le\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}\le A\le 1$ ۴) $-\sqrt{2}\le A\le 0$

۴۵) در ک . م . م دو عبارت $2\cos^2 x-1$ و $1+\sin 2x$ چه تعداد از عبارات زیروجود دارند؟ (استاد عادل مهرپاک – همدان)

$2\sin(x+\frac{\pi}{4})$ $\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$ $2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$ $\sqrt{2}\sin^2(x-\frac{\pi}{4})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۶) مقدار عددی $\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ-\cos 10^\circ}{\sin 40^\circ}$ کدام است؟ (آموزش و پرورش – ۸۶)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۴۷) اگر $\frac{2\sin x\cos 3x}{\sin 2x}=2\cos 2x+a$ مقدار a کدام است؟ (سراسری – ۷۶)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

۴۸) حاصل عبارت $\cos 20^\circ\cos 40^\circ+\cos^2 80^\circ$ برابر کدام است؟ (سراسری – ۸۶)

۱) $\cos 10$ ۲) $\sin 70$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۴۹) حاصل عبارت $4\cos 40^\circ-\frac{1}{\cos 20^\circ}$ برابر کدام است؟ (سراسری – ۸۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\sqrt{3}$ ۴) 2

۵۰) حاصل عبارت $\frac{\sin x+\sin 5x}{\cos x+\cos 5x}+\frac{\cos x+\cos 5x}{\sin x+\sin 5x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{36}$ چقدر است؟ (آزاد – ۸۴)

۱) 4 ۲) 1 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{3}$

۵۱) عبارت $\sin 3x-2\sin 4x+\sin 5x$ با کدام عبارت زیر برابر است؟ (سراسری – ۸۴)

۱) $2\sin 4x\sin^2\frac{x}{2}$ ۲) $-2\sin 4x\sin^2\frac{x}{2}$ ۳) $4\sin 4x\sin^2\frac{x}{2}$ ۴) $-4\sin 4x\sin^2\frac{x}{2}$

۵۲) ساده شده ی کسر $\frac{\sin a+\sin 3a+2\cos a}{(\sin a+\cos a)^2}$ برابر است با : (سراسری – ۷۴)

۱) $\cos a$ ۲) $2\cos a$ ۳) $1+\cos a$ ۴) $1+\sin a$

۵۳) حاصل عبارت $\frac{\sin^2 x+\sin x\sin 3x+\sin x\sin 5x}{\cos^2 x+\cos x\cos 3x+\cos x\cos 5x}$ کدام است؟ (آزاد – ۸۰)

۱) $\tan^2 x\tan 3x$ ۲) $\tan x\tan 3x$ ۳) $\tan^2 x\tan^2 3x$ ۴) $\tan x\tan^2 3x$

۵۴) حاصل $\cos^2 110^\circ-\sin^2 70^\circ$ برابر است با :) (آزاد – ۶۷)

۱) $\sin 50$ ۲) $\cos(-40)$ ۳) $-\cos 40$ ۴) $\sin 40$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

۵۵- حاصل عبارت $۲+\frac{۱}{\cos ۲۰^\circ}$ برابر کدام است ؟ (سراسری – ۸۷)

۱) $۲\sin ۴۰$ ۲) $۴\cos ۴۰$ ۳) $۲\cos ۴۰$ ۴) $۴\sin ۴۰$

۵۶- حاصل $\frac{\sin ۱۰۰^\circ+\cos ۲۳۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ}$ برابر کدام است ؟ (سنجش – ۸۷)

۱) $۲\sin ۱۰$ ۲) $۲\cos ۱۰$ ۳) $۲\cos ۲۰$ ۴) $۲\sin ۲۰$

۵۷- حاصل کسر $\frac{\tan a+\tan b}{\cot a+\cot b}$ برابر است با : (آزاد – ۷۹)

۱) $\tan a+\tan b$ ۲) $\tan a.\tan b$ ۳) $\cot a+\tan b$ ۴) $\tan a.\cot b$

۵۸- اگر $\sin ۲x=\frac{۳}{۵}$ و $۰<x<\frac{\pi}{۴}$ باشد ، حاصل $\cos x\cos ۳x(\tan x+\tan ۳x)$ کدام است ؟

۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۳) $\frac{۲۴}{۲۵}$ ۴) $-\frac{۲۴}{۲۵}$

۵۹- ساده شده ی عبارت $\cos ۵۰^\circ(\tan ۷۰^\circ+\tan ۱۰^\circ)$ برابر کدام است ؟ (سراسری –۸۵)

۱) $\sin ۲۰$ ۲) $\cos ۲۰$ ۳) $۲\sin ۲۰$ ۴) $۲\cos ۲۰$

۶۰- حاصل عبارت $(\tan ۲۰^\circ+\cot ۴۰^\circ)\sin ۵۰^\circ$ برابر کدام است ؟ (گزینه ی دو –۸۶)

۱) ۱ ۲) $\tan ۵۰$ ۳) $\sqrt{۳}\sin ۵۰$ ۴) $\cos ۵۰$

۶۱- معادله ی $۲\sin^۲ x = ۳\cos x$ چند جواب متمایز در بازه ی $[۰,\frac{۵\pi}{۲}]$ دارد ؟ (گزینه ی دو –۸۶)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۲- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $۱=\frac{\sin ۳x+\sin x}{\sin x}$ به کدام صورت است ؟ (سراسری –۸۲)

۱) $\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۴) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۶۳- جواب کلی معادله ی مثلثاتی $۰=\frac{\cos ۲x}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}$ به کدام صورت است ؟ (آزاد – ۸۳)

۱) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ۲) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{۴}$

۶۴- معادله ی $\cos ۲x\cos ۳x=۰$ در بازه ی $[۰,۲\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد – ۸۶)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۶۵- صورت کلی تمام قوس هایی که در معادله ی $\sin(\frac{\pi}{۲}+x)\cos(۲\pi-x)=\sin^۲\frac{۷\pi}{۶}$ صدق می کنند کدام است ؟ (سراسری–۷۸)

۱) $۲k\pi-\frac{\pi}{۳}$ ۲) $۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

۶۶- معادله ی $۲\sin^۲(x-\frac{\pi}{۸})+۳\cos(x-\frac{۵\pi}{۸})=۵$ در بازه ی $[۰,۲\pi]$ چند جواب دارد ؟ (سنجش–۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۷- مجموع ریشه های معادله ی $\tan(x+\frac{\pi}{۷})+\tan(\frac{۵\pi}{۱۴}-x)=۲$ در بازه ی $[۰,\pi]$ کدام است ؟ (آموزش و پرورش–۸۶)

۱) $\frac{۳\pi}{۱۴}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲۸}$ ۳) $\frac{\pi}{۱۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۷}$

۶۸- تمام جواب های معادله ی $\cos^۲ x-\tan(x+\frac{\pi}{۴})\cot(x+\frac{\pi}{۴})=۰$ کدام است؟ (آزاد – ۸۰)

۱) $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۲) $x=۲k\pi$ ۳) $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $x=k\pi$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

۶۹) معادله ی $\tan x \tan 2x = \sin x \sin 2x$ در بازه ی $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد – ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۰

۷۰) معادله ی $\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 2\cot 2x + \tan x$ در فاصله ی $[0, 2\pi]$: (آزاد–۷۸)

۱) یک ریشه دارد ۲) ریشه ندارد ۳) دو ریشه دارد ۴) چهار ریشه دارد .

۷۱) معادله ی $\sin x - \cos x = -1$ در فاصله ی $0 \le x \le 2\pi$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد–۷۸)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۳

۷۲) تمام جواب های معادله ی $\tan^2 x - \cos 2x = 1$ کدام است ؟ (آزاد–۸۲)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$

۷۳) جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 2x = \sin x$ به صورت $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$ بیان شده است . مجموع ی مقادیر i به کدام صورت است ؟ (سراسری –۸۳)

۱) $\{7,9\}$ ۲) $\{1,3,5\}$ ۳) $\{1,4,7\}$ ۴) $\{1,5,9\}$

۷۴) معادله ی $\sin^2 x = \cos^2 x + \frac{1}{4}$ در بازه ی $0 \le x \le \pi$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد–۸۳)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۰

۷۵) معادله ی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{2}$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد–۸۴)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۷۶) مجموع جوابهای معادله ی $\tan x + \tan(\frac{3\pi}{2} - x) = 2\tan(\frac{3\pi}{4})$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟ (سنجش–۸۷)

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) $\frac{5\pi}{2}$ ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) $\frac{9\pi}{2}$

۷۷) تعداد جواب های معادله ی مثلثاتی $2 = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$ در بازه ی $[0, 2\pi]$ کدام است ؟ (آموزش و پرورش–۸۷)

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۷۸) معادله ی مثلثاتی $\tan 60 \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = m - 1$ دارای جواب است . مجموعه ی مقادیر m برابرکدام فاصله است ؟ (سراسری– ۷۸)

۱) $[-1,3]$ ۲) $[-3,1]$ ۳) $[0,2]$ ۴) $[-2,4]$

۷۹) جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 1 + \sin(\frac{5\pi}{2} + x)$ کدام است ؟ (سراسری–۸۵)

۱) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۲) $2k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۸۰) معادله ی $\sin^3 x + \cos^3 x + 3\sin^2 x \cos x + 3\cos^2 x \sin x = \frac{1}{3}$ در بازه ی $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ چند جواب دارد ؟ (آزاد–۸۷)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۰ ۴) ۱

۸۱) اگر θ زاویه ی حاده باشد و به ازای هر $x \in R$ رابطه ی $2\sin x + 1 = a\sin\frac{x+\theta}{2}\cos\frac{x-\theta}{2}$ برقرار باشد ، مقدار عددی $a.\theta$ کدام است ؟ (آموزش و پرورش – ۸۷)

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۸۲) جواب های معادله ی $\cos 4x - \cos 2x = \cos(3x - \frac{3\pi}{2})$ چند نقطه برروی دایره ی مثلثاتی معلوم می کنند ؟ (گزینه ی دو–۸۵)

۱) ۹ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

۸۳) جواب کلی $\frac{1}{4} = \sin(x+\frac{\pi}{6})\sin(x-\frac{\pi}{6})$ در کدام گزینه آمده است ؟ (گزینه ی دو-۸۵)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}$ ۳) $k\pi$ ۴) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

۸۴) مجموع جواب های معادله ی مثلثاتی $\cos 6x\cos 4x = \frac{1}{2}\cos 10x$ در بازه ی $[0,2\pi]$ چقدر است ؟ (گزینه ی دو-۸۷)

۱) π ۲) 2π ۳) 3π ۴) 4π

۸۵) معادله ی $\sin 3x+\cos 2x = 0$ در فاصله ی $[0\ ,\ \pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد-۷۷)

۱) ۲ریشه ۲) ۳ریشه ۳) ۴ریشه ۴) ۶ریشه

۸۶) معادله ی $\sin 2x\cos 2x\cos 4x = 2\sin x$ در بازه ی $[0\ ,2\pi]$ چند ریشه ی متمایز دارد ؟ (آزاد-۸۶)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۵

۸۷) معادله ی $\sin x-\cos(x+\frac{\pi}{4}) = 0$ در بازه ی $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آموزش و پرورش-۸۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۸) جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\tan 2x\tan 3x = 1$ به کدام صورت است ؟ (گزینه ی دو-۸۷)

۱) $\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$ ۲) $\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$ ۳) $\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5}$ ۴) $\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{5}$

۸۹) معادله ی $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=3+\sin^2 x$ در بازه ی $[\pi,5\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد-۸۲)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

۹۰) معادله ی $\tan x+\cot x = 2-\sqrt{\cos 2x}$ در بازه ی $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد-۸۲)

۱) اریشه ۲) ۳ریشه ۳) ۴ریشه ۴) ۲ریشه

۹۱) معادله ی $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{1}{8}-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})$ چند ریشه در بازه ی $[0,2\pi]$ دارد ؟ (آزاد-۸۷)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) ۰

۹۲) معادله ی $\tan^2 x-2\cot^2 x = 1$ در بازه ی $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد-۸۲)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۹۳) معادله ی $\tan^3 x\cot x+\cot^4 x\tan^2 x = 4$ در بازه ی $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد-۸۴)

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۸ ۴) ۴

۹۴) چند عدد طبیعی دو رقمی در معادله ی $\cos\frac{\pi x}{2} = 3^{x-[x]}$ صدق می کنند ؟ (عادل مهرپای - همدان)

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳

۹۵) اگر سه جمله ی غیر صفر $\sin\alpha,\sin 2\alpha,\sin 4\alpha$ تشکیل یک دنباله ی هندسی را بدهند جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\cos x = \sin\alpha$ کدام است ؟ (عادل مهرپای - همدان)

۱) $x = 2k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۲) $x = 2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۳) $x = k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $x = k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۹۶) کاملترین مجموعه ی جواب معادله ی $\sin\pi[x] = \sqrt{[-x]}-\sqrt{[x]}$ کدام است ؟ (عادل مهرپای - همدان)

۱) Z^- ۲) $Z-Z^-$ ۳) $Z-Z^+$ ۴) Z

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

۹۷) مقدار عددی $\cos(\sin^{-1}(-\frac{۸}{۱۷}))$ برابر است با : (آزاد-۶۹)

۱) $\frac{۱۵}{۱۷}$ ۲) $-\frac{۱۵}{۱۷}$ ۳) $\frac{۸}{۱۷}$ ۴) هیچکدام

۹۸) حاصل $\sin[\frac{۳}{۴}\cot^{-1}(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})]+\cos[۲\tan^{-1}(\sqrt{۳})]$ کدام است ؟ (سراسری-۷۷)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۹۹) حاصل $\sin[\cos^{-1}(\frac{۳}{۵})+\cot^{-1}(-۱)]$ کدام است ؟ (گزینه ی دو-۸۶)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۵}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$

۱۰۰) حاصل عبارت $a=\frac{\sin[\tan^{-1}(\frac{۲}{۳})]}{\cos[\cot^{-1}(-\frac{۳}{۲})]}$ ، چند برابر حاصل عبارت $b=\cot[\sin^{-1}(\frac{۱}{\sqrt{۳}})]$ است ؟ (آموزش و پرورش-۸۵)

۱) $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۱۰۱) حاصل عبارت $\sin[۲\sin^{-1}(\frac{۳}{۵})+۳\cos^{-1}(\frac{۳}{۵})]$ کدام است ؟ (آزاد-۸۱)

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $-\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $-\frac{۳}{۵}$

۱۰۲) اگر $a=\cos^{-1}(\frac{۲}{۳})+\cos^{-1}(\frac{۱}{۳})$ باشد ، حاصل $\sin^{-1}(\frac{۲}{۳})+\sin^{-1}(\frac{۱}{۳})$ کدام است ؟ (گزینه ی دو-۸۶)

۱) $\frac{\pi}{۲}-a$ ۲) $\frac{\pi}{۲}+a$ ۳) $\pi-a$ ۴) $۲\pi-a$

۱۰۳) حاصل عبارت $\tan^{-1}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})+\tan^{-1}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})$ کدام است ؟ (آزاد-۷۸)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) صفر ۳) $\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$

۱۰۴) ساده شده ی عبارت $\cos^{۲}[۲\tan^{-1}(\frac{۱}{۲})]$ کدام است ؟ (گزینه ی دو-۸۵)

۱) $۰/۳۶$ ۲) $۰/۱۲$ ۳) $۰/۲۵$ ۴) $۰/۱۶$

۱۰۵) مقدار عددی $\sin^{۲}[\frac{۱}{۲}\cos^{-1}(\frac{۳}{۵})]$ کدام است ؟ (آموزش و پرورش-۸۷)

۱) $۰/۱$ ۲) $۰/۲$ ۳) $۰/۳$ ۴) $۰/۴$

۱۰۶) مقدار عددی $\tan^{۲}[\frac{۱}{۲}\cos^{-1}(\frac{۱}{۳})]$ برابر است با : (آزاد-۷۳)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۰۷) حاصل عبارت $\tan^{-1}(\frac{۱}{۴})+\tan^{-1}(\frac{۳}{۵})$ برابر است با : (آزاد-۷۳)

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۱۰۸) حاصل عبارت $\tan^{-1}(\frac{x}{x+۱})-\cot^{-1}(\frac{x+۱}{x})$ برابر است با : $(x<-۱$ یا $x>۰)$ (آزاد-۷۸)

۱) $\frac{۱}{x}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۱-

۱۰۹) حاصل $\sin^{-1}(\frac{۳}{۵})+\cos^{-1}(\frac{۴}{۵})$ کدام است ؟ (آزاد-۸۴)

۱) $\sin^{-1}(\frac{۷}{۲۴})$ ۲) $\cos^{-1}(\frac{۷}{۲۴})$ ۳) $\tan^{-1}(\frac{۷}{۲۴})$ ۴) $\cot^{-1}(\frac{۷}{۲۴})$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست

۱۱۰ از رابطه ی $\cos^{-1}(\sin x)=\sin\alpha$ کدام نتیجه گیری صحیح است ؟ (سنجش-۷۸)

۱) $x+\sin\alpha=\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\sin x+\alpha=\frac{\pi}{۲}$ ۳) $x+\cos\alpha=\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\cos x+\alpha=\frac{\pi}{۲}$

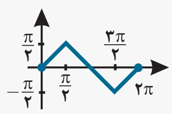
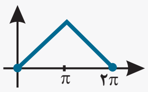
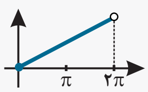
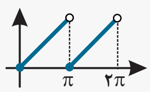
۱۱۱ حاصل $\sin^{-1}[\sin^{۴}(\frac{\pi}{۷})-\cos^{۴}(\frac{\pi}{۷})]$ کدام است ؟ (آزاد -۸۷)

۱) $-\frac{۳\pi}{۱۴}$ ۲) $-\frac{۲\pi}{۷}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۱۴}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۷}$

۱۱۲ حاصل $\sin^{-1}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$ اگر $۰<\alpha+\beta<\frac{\pi}{۲}$ باشد،کدام است ؟ (آزاد-۸۷)

۱) $\alpha+\beta$ ۲) $\frac{\pi}{۲}-\alpha-\beta$ ۳) $\alpha-\beta$ ۴) $\alpha+\beta-\frac{\pi}{۲}$

۱۱۳ نمودار $y=\sin^{-1}(\sin x)$ در بازه ی $[۰, ۲\pi]$ به کدام صورت است ؟ (گزینه ی دو-۷۸)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۱۱۴ مجموع جواب های معادله ی $\tan^{-1}(۲x)-\cot^{-1}(x)=\frac{\pi}{۴}$ کدام است ؟ (سراسری-۷۰- با کمی تغییر)

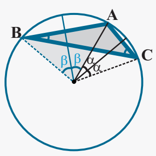
۱) ۱ ۲) ۲- ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۴}$

۱۱۵ جواب معادله ی $\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}(۳x)=\frac{\pi}{۲}$ برابر است با : (آزاد-۷۲)

۱) $x=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $x=\sqrt{۳}$ ۴) $x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

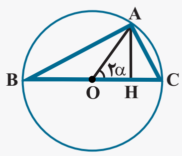
۱۱۶ مجموع جواب های معادله ی $\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}(x)=\sin^{-1}|۲x-۱|$ کدام است ؟ (گزینه ی دو - ۷۸)

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲



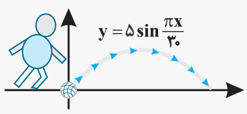
۱۱۷ مثلث ABC در دایره ی مقابل محاط شده است . از نقطه ی A بر ضلع BC عمود می کنیم
و پای عمود را H می نامیم. اندازه ی BH کدام است ؟ (متن کتاب)

۱) $۲\sin\alpha\cos\beta$ ۲) $۲\cos\alpha\sin\beta$ ۳) $۲\sin\alpha\sin\beta$ ۴) $۲\cos\alpha\cos\beta$



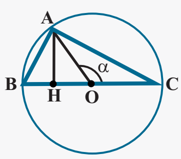
۱۱۸ در شکل مقابل نقطه ی o مرکز دایره ای به شعاع واحد است . اندازه ی HC کدام است؟ (متن کتاب)

۱) $۲\sin\alpha\cos\alpha$ ۲) $۲\cos^{۲}\alpha$ ۳) $۲\sin^{۲}\alpha$ ۴) $۱-۲\sin^{۲}\alpha$



۱۱۹ مطابق شکل روبرو معادله ی مسیرتوپی که علی به آن ضربه می زند به صورت $y=۵\sin\frac{\pi x}{۳۰}$ (بر حسب درجه) می باشد . فاصله ای که علی از اولین نقطه ی برخورد توپ با زمین دارد چند برابر بیشترین ارتفاع توپ از سطح زمین است ؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

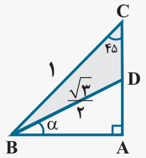


۱۲۰ در شکل روبرو نقطه ی o مرکز دایره ای به شعاع واحد است . مساحت مثلث AHO کدام است ؟

متن کتاب با کمی تغییر

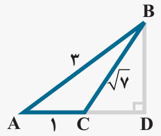
۱) $\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ ۲) $-\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$ ۳) $\frac{۱}{۴}\sin ۲\alpha$ ۴) $-\frac{۱}{۴}\sin ۲\alpha$

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست



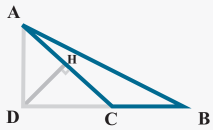
۱۲۱) در شکل روبرو مساحت مثلث BCD کدام است ؟ (متن کتاب)

۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۸}\sqrt{۱-\sin ۲\alpha}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}-\alpha)$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sin\alpha-\cos\alpha)$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱+\sin ۲\alpha)$



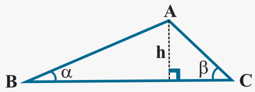
۱۲۲) در شکل روبرو مقدار CD کدام است ؟ (متن کتاب)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$



۱۲۳) در شکل مقابل مساحت مثلث ABC سه سانتی متر مربع می باشد . (متن کتاب)
اندازه ی ضلع DH چند است ؟ $(BC=۲ , AC=۶)$

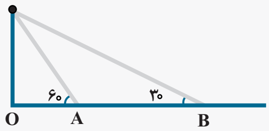
۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$



۱۲۴) در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است ؟ دکتر سازگار (سر گروه مازندران)

۱) $\frac{h^۲\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$ ۲) $\frac{h^۲\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$

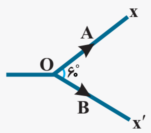
۳) $\frac{h^۲\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$ ۴) $\frac{h^۲\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$



دکتر ثنائی (سر گروه گلستان)

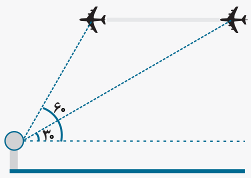
۱۲۵) مطابق شکل روبرو دوراننده با اتومبیل های A و B همزمان از پای یک برج (نقطه ی o) شروع به حرکت کردند و پس از گذشت ۳۰ ثانیه اتومبیل B از اتومبیل A یک کیلومتر فاصله گرفت به طوری که در آن لحظه زاویه ی دید اتومبیل های A و B از نوک برج به ترتیب ۶۰ و ۳۰ درجه بود . سرعت متوسط اتومبیل B در ۳۰ ثانیه ی اول چقدر بوده است ؟

۱) $۱۲۰\frac{km}{h}$ ۲) $۱۵۰\frac{km}{h}$ ۳) $۱۸۰\frac{km}{h}$ ۴) $۲۰۰\frac{km}{h}$



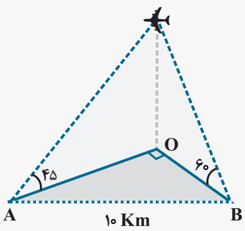
۱۲۶) مطابق شکل روبرو دو اتومبیل A و B در یک اتوبان به ترتیب با سرعت ثابت $\frac{km}{h}$ ۱۲۰ و $\frac{km}{h}$ ۱۰۰ در حرکتند و در نقطه ی o به یکدیگر می رسند . و با همان سرعت قبلی از هم جدا شده و در جهات ox و ox′ به حرکت خود ادامه می دهند . پس از گذشت ۳ دقیقه فاصله ی اتومبیل A از B چقدر است ؟

۱) ۵km ۲) $\sqrt{۳۱}$ km ۳) ۶km ۴) $\sqrt{۴۲}$ km



۱۲۷) مطابق شکل روبرو هواپیمایی با سرعت ثابت $\frac{km}{h}$ ۶۰۰ در حال پرواز از بالای فرودگاهی می باشد . برج مراقبت فرودگاه که در ارتفاع ۱۰۰ متری از سطح زمین قرار دارد در یک لحظه هواپیما را با زاویه ی ۳۰ درجه و در ۶ ثانیه ی بعدی با زاویه ی ۴۵ درجه مشاهده می کند . ارتفاع هواپیما از سطح زمین چقدر است ؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۵}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۳}+۱}{۱۰}$

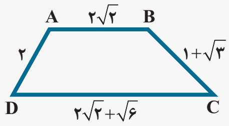


امیر محسن نصیری (تهران)

۱۲۸) مطابق شکل روبرو دو پدافند ضد هوایی که در فاصله ی ۱۰ کیلومتری از یکدیگر قرار دارند روی نقاط A و B مستقر هستند . در هنگام ظهر این دو پدافند ، یک هواپیمای شکای را به ترتیب با زاویه های ۴۵ و ۶۰ درجه به طور همزمان مورد شلیک قرار می دهند . درصورتی که $A\hat{O}B=۹۰^\circ$ باشد ، ارتفاع هواپیما چقدر است ؟ (o سایه ی هواپیما برروی زمین می باشد .)

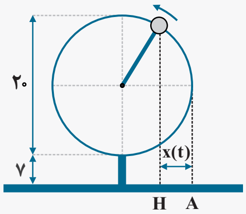
۱) ۵km ۲) $۵\sqrt{۲}$ km ۳) $۵\sqrt{۳}$ km ۴) ۱۰km

آموزش تکمیلی فصل (۹) در قالب تست



۱۲۹) در ذوذنقه ی مقابل زاویه ی B چند درجه است ؟ استاد عادل مهر پاک (همدان)

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۳۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۰۵



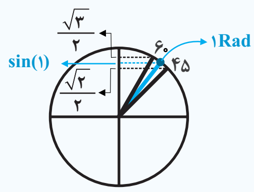
۱۳۰) مطابق شکل روبرو چرخ و فلکی به قطر ۲۰ متر در هردو دقیقه یک دور در جهت مثبت می چرخد . کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر بگیرید که در لحظه ی $t=0$ بازمین ۱۷ متر فاصله داشته و رو به بالا حرکت می کند . اگر پایین ترین نقطه ی چرخ و فلک ، ۷ متر بالاتر از سطح زمین باشد ، پس از گذشت t ثانیه ، کابین چه کمانی را بر حسب رادیان طی می کند و تابعی که ارتفاع کابین(m) نسبت به زمان (ثانیه) نشان می دهد کدام است ؟ (متن کتاب)

۱) $\begin{cases} \text{کمان} = \frac{\pi t}{6} \\ h(t) = 20\sin\frac{\pi t}{6} + 17 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} \text{کمان} = \frac{\pi t}{60} \\ h(t) = 20\sin\frac{\pi t}{60} + 17 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} \text{کمان} = \frac{\pi t}{6} \\ h(t) = 10\sin\frac{\pi t}{6} + 17 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} \text{کمان} = \frac{\pi t}{60} \\ h(t) = 10\sin\frac{\pi t}{60} + 17 \end{cases}$

۱۳۱) در تست قبل اگر در لحظه ی t فاصله ی سایه ی کابین روی زمین تا نقطه ی A رابا $X_{(t)}$ نشان دهیم ، ضابطه ی $X_{(t)}$ کدام است ؟

۱) $X_{(t)} = 10 - 10\cos\frac{\pi t}{60}$ ۲) $X_{(t)} = 20 - 20\cos\frac{\pi t}{6}$ ۳) $X_{(t)} = 10 - 10\cos\frac{\pi t}{6}$ ۴) $X_{(t)} = 20 - 20\cos\frac{\pi t}{60}$

۱: (۲) همونطور که در قسمت آموزش گفتم ۱ رادیان تقریباً ۵۷ درجه هست . بنابراین :

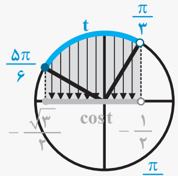


$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin 1 \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲: (۴) داده ی مسئله $\boxed{f(x) = \min\left\{\cot \middle| \frac{\pi}{3} < t \le x\right\}}$ ① و خواسته ی مسئله $\boxed{f(\frac{5\pi}{6}) + f(\frac{7\pi}{6})}$ هست . پس کافیه مقادیر $f(\frac{5\pi}{6})$ و $f(\frac{7\pi}{6})$ رو بدست بیارم و بعدش این دو مقدار رو با هم جمع کنم :

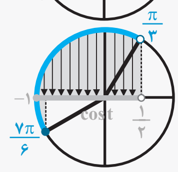
با توجه به ① داریم : $f(\frac{5\pi}{6}) = \min\left\{\cos t \middle| \frac{\pi}{3} < t \le \frac{5\pi}{6}\right\}$

با معلوم شدن محدوده ی t می تونم محدوده ی $\cos t$ و بعدش کمترین مقدار $\cos t$ رو بدست بیارم :



$$\Rightarrow \min(\cos t) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

با توجه به ① داریم $f(\frac{7\pi}{6}) = \min\left\{\cos t \middle| \frac{\pi}{3} < t \le \frac{7\pi}{6}\right\}$.بنابراین :

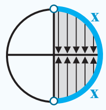


$$\Rightarrow \min(\cos t) = -1 \Rightarrow f(\frac{7\pi}{6}) = -1$$

خواسته ی مسئله : $f(\frac{5\pi}{6}) + f(\frac{7\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2} - 1 = -(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)$

۳: (۴) شرط لازم برای برقراری رابطه ی $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$ اینه که : ۱) $\cos x > 0$ ۲) $\frac{\cot x}{\cot x - a^2} > 0$

برای اینکه $\cos x > 0$ باشه باید x در ربع اول یا چهارم قرار داشته باشه .



حالا باید ببینیم در بین ربع اول و چهارم ، xهای کدوم ربع ، درون رادیکال رو منفی می کنن تا اون ربع رو از گردونه خارج کنیم .

بررسی ربع اول: در ربع اول $\cot x > 0$ اما نمی‌دونیم $(\overset{\text{مثبت}}{\boxed{\cot x}} - \overset{\text{مثبت}}{\boxed{a^2}})$ مثبته یا منفی. پس این امکان وجود داره که $\frac{\cot x}{\cot x - a^2}$ منفی بشه و رابطه رو به هم بریزه.

بررسی ربع چهارم : در ربع چهارم $\cot x < 0$ و $\overset{\text{منفی}}{\boxed{\cot x}} - \overset{\text{مثبت}}{\boxed{a^2}} < 0$. در نتیجه $\frac{\cot x}{\cot x - a^2} > 0$ ...

پس تمام x های ربع چهارم ، با رابطه ی $\cos x = \sqrt{\frac{\cot x}{\cot x - a^2}}$ دوست هستن .

۴: (۳) صورت مسئله : $\cos x = \frac{-\sqrt{10}}{10}$ و (x در ربع سوم قرار داره) $\Rightarrow \tan(\frac{3\pi}{2} - x) = ?$

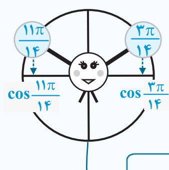
در قسمت آموزش فهمیدیم که : $\tan(\frac{3\pi}{2} - x) = +\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{-\sqrt{10}}{10}}{\frac{-3\sqrt{10}}{10}} = \frac{1}{3}$

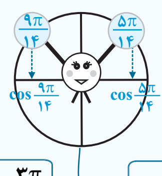
$$\boxed{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - (\frac{-\sqrt{10}}{10})^2 = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10} \xrightarrow{\text{x در ربع سوم}} \sin x = \frac{-3\sqrt{10}}{10}}$$

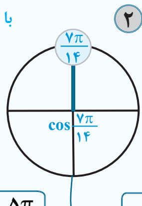
۵: (۲)

$$\cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} + \cos\frac{7\pi}{14} + \cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{11\pi}{14} = \boxed{\cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{11\pi}{14}} + \boxed{\cos\frac{5\pi}{14} + \cos\frac{9\pi}{14}} + \boxed{\cos\frac{7\pi}{14}} = 0$$

با توجه به ① با توجه به ② با توجه به ③

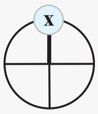






① $\boxed{\cos\frac{11\pi}{14} = -\cos\frac{3\pi}{14}}$ ② $\boxed{\cos\frac{9\pi}{14} = -\cos\frac{5\pi}{14}}$ ③ $\boxed{\cos\frac{7\pi}{14} = 0}$

(۲) : ۶

داده ی مسئله : $\sin x+\frac{۱}{\sin x}=۲ \Rightarrow \sin x=۱ \Rightarrow$  $\Rightarrow \cos x=۰$

خواسته ی مسئله : $\sin^۲x+\cos^۵x=(۱)^۲+(۰)^۵=۱$

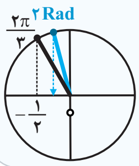
(۳) : ۷

با توجه به مسئله : α و β ریشه های معادله ی $x^۲+x-۱=۰$ هستن و مقدار $[\cos(\alpha^۲-\beta)]$ مورد سؤاله .

$x^۲+x-۱=۰$:
- $\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-۱}{۱} \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=-۱}$ ①
- ریشه ی معادله هست α : $\alpha^۲+\alpha-۱=۰ \Rightarrow \boxed{\alpha^۲=۱-\alpha}$ ②

خواسته ی مسئله : $[\cos(\alpha^۲-\beta)] \xrightarrow{\text{با توجه به ۲}} [\cos(۱-\alpha-\beta)]=[\cos(۱-(\alpha+\beta))] \xrightarrow{\text{با توجه به ۱}} [\cos(۲)]$

همونطور که می دونید یک رادیان تقریباً ۵۷ درجه هست . پس : $۲Rad \simeq ۱۱۴^\circ$

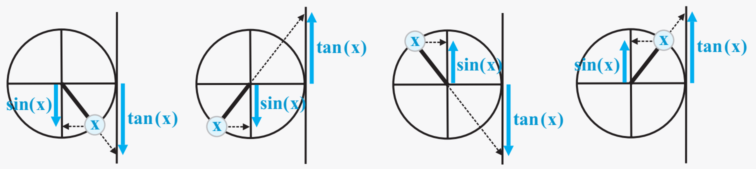


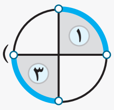
$\Rightarrow \frac{-۱}{۲}<\cos ۲<۰ \Rightarrow [\cos ۲]=-۱$

(۳) : ۸

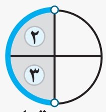
x در کدوم ربع قرار داره ؟ $\Leftarrow \frac{۱}{\cos x}-\sin x\tan x<۰$ و خلاصه ی مسئله : $\sin x+\tan x>۰$

بررسی نامساوی $\sin x+\tan x>۰$: لطفاً روی شکلهای زیر کمی تفکر کنید :



اگه به شکل های بالا نگاه کنید می بینید فقط x های ربع اول و سوم () باعث میشن که : $\sin x+\tan x>۰$

بررسی نامساوی $\frac{۱}{\cos x}-\sin x\tan x<۰$:

$\frac{۱}{\cos x}-\frac{\sin^۲x}{\cos x}<۰ \Rightarrow \frac{۱-\sin^۲x}{\cos x}<۰ \Rightarrow \frac{\cos^۲x}{\cos x}<۰ \Rightarrow \cos x<۰ \Rightarrow$ 

برای اینکه هر دو نامساوی برقرار باشه باید x در ربع سوم قرار بگیره .

توجه : زاویه ی x در هر ربعی که باشه ، همیشه اندازه ی $\tan x$ از اندازه ی $\sin x$ بزرگتره . یعنی : $|\tan x|>|\sin x|$

(۱) : ۹

خلاصه مسئله : $\boxed{\sin^۲x+۲\cos^۲x=\frac{۳}{۲}}$ ① $\Rightarrow \tan^۲x=?$ $\Rightarrow$ ① $\Rightarrow \underbrace{\sin^۲x+\cos^۲x}_{۱}+\cos^۲x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \boxed{\cos^۲x=\frac{۱}{۲}}$ ②

خواسته ی مسئله : $\tan^۲x=\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}=\frac{۱-\cos^۲x}{\cos^۲x} \xrightarrow{\text{با توجه به ۲}} \frac{۱-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=۱$

(۱) : ۱۰

داده ی مسئله : $\boxed{\sin x+\cos x=\frac{۱}{۳}}$ ① $\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^۲x+\cos^۲x+۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۹} \Rightarrow \boxed{\sin x\cos x=\frac{-۴}{۹}}$ ②

خواسته ی مسئله : $\sin^۳x+\cos^۳x \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} (\sin x+\cos x)(\sin^۲x+\cos^۲x-\sin x\cos x)=(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)$

$\xrightarrow{\text{با توجه به ۱ و ۲}} (\frac{۱}{۳})\left(۱-(\frac{-۴}{۹})\right)=(\frac{۱}{۳})(\frac{۱۳}{۹})=\frac{۱۳}{۲۷}$

(۳) : ۱۱

داده ی مسئله : $\sin^۴x+\cos^۴x=\frac{۳}{۵} \Rightarrow ۱+۲\sin^۲x\cos^۲x=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \boxed{\sin^۲x\cos^۲x=\frac{-۱}{۵}}$ ①

خواسته ی مسئله : $\sin^۶x+\cos^۶x=۱-۳\sin^۲x\cos^۲x \xrightarrow{\text{با توجه به ۱}} ۱-۳(\frac{-۱}{۵})=\frac{۲}{۵}$

(۱) : ۱۲

داده ی مسئله : $\begin{cases}\sin x-\cos x=b\\ \sin x+\cos x=a\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{b}{a}$ صورت ومخرج رو به $\cos x$ تقسیم می کنم تا $\tan x$ ایجاد بشه $\longrightarrow$

$\dfrac{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}=\dfrac{b}{a}\Longrightarrow\dfrac{\tan x-1}{\tan x+1}=\dfrac{b}{a}\Longrightarrow\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}=-\dfrac{b}{a}\xrightarrow{\text{رابطه ی ناقلا}}\tan(\dfrac{\pi}{4}-x)=-\dfrac{b}{a}$

خواسته ی مسئله : $\tan(x-\dfrac{\pi}{4})=-\tan(\dfrac{\pi}{4}-x)=\dfrac{b}{a}$

(۱) : ۱۳

$\tan(B+30)\tan(C+30)=1\Longrightarrow\tan(B+30)=\dfrac{1}{\tan(C+30)}\Longrightarrow\tan(B+30)=\cot(C+30)$

$\tan\alpha=\cot\alpha$ اگه α و β متمم هم باشن اون موقع $\longrightarrow(B+30)+(C+30)=90\Longrightarrow B+C=30$ می دونیم که $A+B+C=180^\circ$ $\longrightarrow A=150^\circ$

(۳) : ۱۴

$\dfrac{\sin^2x-2\cos^2x+1}{\sin^2x+2\cos^2x-1}=4\Longrightarrow\dfrac{\sin^2x-2\cos^2x+\overbrace{\boxed{1-\cos^2x}}^{\sin^2x}}{2\cos^2x-\underbrace{(1-\sin^2x)}_{\cos^2x}}=4\Longrightarrow\dfrac{2\sin^2x-\cos^2x}{\cos^2x}=4\Longrightarrow 2\tan^2x-1=4\Longrightarrow\tan^2x=\dfrac{5}{2}$

خواسته ی مسئله

(۳) : ۱۵

داده ی مسئله : $\boxed{4\sin x\cos x=-1}$ (۱)

خواسته ی مسئله : $\sin(x+\dfrac{\pi}{4})=\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\pm\dfrac{1}{2}$

$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x\overset{\text{با توجه به (۱)}}{=}1+2(-\dfrac{1}{4})=\dfrac{1}{2}\Longrightarrow\sin x+\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) : ۱۶

خواسته ی مسئله : $\tan50+\tan85-\tan50\tan85=?$

می دونیم : $\tan(\underbrace{50+85}_{135})=\dfrac{\tan50+\tan85}{1-\tan50\tan85}\Longrightarrow-1=\dfrac{\tan50+\tan85}{1-\tan50\tan85}\Longrightarrow\tan50+\tan85=-1+\tan50\tan85$

$\tan50+\tan85-\tan50\tan85$

$-1=\dfrac{\tan50+\tan85}{1-\tan50\tan85}\Longrightarrow\tan50+\tan85=-1+\tan50\tan85\Longrightarrow\tan50+\tan85-\tan50\tan85=1$

(۳) : ۱۷

داده : $\tan(\alpha+20)=\dfrac{3}{4}$

خواسته : $\cot(25-\alpha)=\dfrac{1}{\tan(25-\alpha)}=\dfrac{1}{\tan(45-(\alpha+20))}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1-\tan(\alpha+20)}{1+\tan(\alpha+20)}\right)}=\dfrac{1+\tan(\alpha+20)}{1-\tan(\alpha+20)}=\dfrac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=7$

زاویه ی $(25-\alpha)$ رو بر حسب $(\alpha+20)$ مرتب می کنم تا به داده ی مسئله نزدیک بشم

(۳) : ۱۸

داده ها : $\begin{cases}\tan x=\sqrt{2}-1\\ \tan y=\sqrt{2}+1\end{cases}$ و (x و y زوایای حاده هستن)

خواسته : $y-x=?$

$\tan(y-x)=\dfrac{\tan y-\tan x}{1+\tan y\tan x}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{1+\underbrace{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}_{1}}\Longrightarrow\tan(y-x)=1\Longrightarrow y-x=\dfrac{\pi}{4}$

چون x و y حاده هستن پس تفاضلشون هم حاده است

(۴) : ۱۹

داده ها : $\boxed{\alpha+\beta=135}$ (۱) و $\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{4}}$ (۲)

خواسته : $\dfrac{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}=\dfrac{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}=\dfrac{(1-\tan\alpha\tan\beta)(1+\tan\alpha\tan\beta)}{(\tan\alpha+\tan\beta)(\tan\alpha-\tan\beta)}$

$=\dfrac{1}{\tan(\alpha+\beta)}\times\dfrac{1}{\tan(\alpha-\beta)}\overset{\text{با توجه به (۱) و (۲)}}{=}\dfrac{1}{\underbrace{\tan(135^\circ)}_{-1}}\times\dfrac{1}{(\frac{3}{4})}=-\dfrac{4}{3}$

(۴) : ۲۰

خواسته ی مسئله : $(1+\tan 18)(1+\tan 27) = 1+\boxed{\tan 27+\tan 18+\tan 27\tan 18} = 1+1 = 2$

$\tan(27+18) = \frac{\tan 27+\tan 18}{1-\tan 27\tan 18} \Rightarrow 1 = \frac{\tan 27+\tan 18}{1-\tan 27\tan 18} \Rightarrow \tan 27+\tan 18 = 1-\tan 27\tan 18 \Rightarrow \tan 27+\tan 18+\tan 27\tan 18 = 1$

(۱) : ۲۱

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\pi+\alpha)-\sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha) = (\cos\alpha)(-\sin\alpha)-(\sin\alpha)(\cos\alpha) = -2\sin\alpha\cos\alpha = -\sin 2\alpha$

در قسمت آموزش ، چگونگی محاسبه ی نسبتهای مثلثاتی $(k\pi\pm\alpha)$ و $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ رو توضیح دادم

(۱) : ۲۲

خواسته ی مسئله : $\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x-1}-\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{\sin x+\cos x} = \frac{(1-\sqrt{2}\sin x)(1+\sqrt{2}\sin x)}{-(1-\sqrt{2}\sin x)}-\frac{\sqrt{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\cos x+\sin x}$

$= \frac{(1-\sqrt{2}\sin x)(1+\sqrt{2}\sin x)}{-(1-\sqrt{2}\sin x)}-\frac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)} = -1-\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\cos x = -1$

(۲) : ۲۳

خواسته ی مسئله : $\tan 20(1+\cos 40) = \frac{\sin 20}{\cos 20}(\cancel{1}+2\cos^2 20-\cancel{1}) = 2\sin 20\cos 20 = \sin 40$

(۳) : ۲۴

خواسته ی مسئله : $2\cos^2(\frac{7\pi}{4}-x)-\cos^2 x(1+\tan^2 x) = 2\cos^2(\frac{7\pi}{4}-x)-\left(\frac{1}{1+\tan^2 x}\right)\left(1+\tan^2 x\right) = 2\cos^2(\frac{7\pi}{4}-x)-1 = \cos 2(\frac{7\pi}{4}-x) = \cos(\frac{7\pi}{2}-2x)$

$2\cos^2(\frac{7\pi}{4}-x)-1 = \cos 2(\frac{7\pi}{4}-x) = \cos(\underbrace{\frac{7\pi}{4}-2x}_{ربع سوم}) = -\sin 2x$

$2\cos^2\alpha-1 = \cos 2\alpha$

(۲) : ۲۵

اگر در عبارت $\frac{2\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{1-\tan^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$ به جای α زاویه ی $\frac{\pi}{8}$ رو قرار بدم ، به زاویه ای می رسم که نمی شه باهاش عبارت رو محاسبه کرد . پس بهتره عبارت رو برحسب 2α مرتب کنم . چون $\boxed{2\alpha = \frac{\pi}{4}}$ (۱) میشه و عبارت قابل محاسبه خواهد شد :

$\frac{2\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)}{1-\tan^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)} = \tan 2(\frac{\pi}{4}+\alpha) = \tan(\underbrace{\frac{\pi}{2}+2\alpha}_{ربع دوم}) = -\cot 2\alpha \overset{\text{با توجه به ۱}}{=} \cot\frac{\pi}{4} = 1$

$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta$

(۴) : ۲۶

$\cos 4x+\tan x\sin 4x = \cos 4x+\frac{\sin x\sin 4x}{\cos x} = \frac{\cos 4x\cos x+\sin 4x\sin x}{\cos x} = \frac{\cos(4x-x)}{\cos x} = \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\cos x} = \frac{\cancel{\cos x}(4\cos^2 x-3)}{\cancel{\cos x}} = 4\cos^2 x-3$

روابط $\alpha\pm\beta$ — روابط 3α

(۴) : ۲۷

خواسته : $\cot\alpha+\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cancel{-1}\cancel{+1}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2}$

به کمک روابط $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$ و $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ زاویه ی α رو نصف می کنم ، چون در گزینه ها زوایا بر حسب $\frac{\alpha}{2}$ هست

(۳) : ۲۸

خواسته : $\cos 20\cos 40\cos 80 = \frac{\overbrace{\sin 20\cos 20}\cos 40\cos 80}{\sin 20} = \frac{\frac{1}{2}\overbrace{\sin 40\cos 40}\cos 80}{\sin 20} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overbrace{\sin 80\cos 80}}{\sin 20} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 160}{\sin 20} = \frac{\frac{1}{8}\times\sin(\underbrace{180-20}_{ربع دوم})}{\sin 20} = \frac{\frac{1}{8}\times\sin 20}{\sin 20} = \frac{1}{8}$

(۱) : ۲۹

داده : $\boxed{a+b=\frac{\pi}{۴}}$ ① خواسته : $۸\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{۲}-a)\cos(\frac{\pi}{۲}-b)=?$

از اونجایی که در گزینه ها ، زوایا بر حسب ۲a یا ۴a هستن ، بهتره که خواسته ی مسئله رو بر حسب ۲a یا ۴a مرتب کنیم :

خواسته : $۸\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{۲}-a)\cos(\frac{\pi}{۲}-b)\xlongequal{\text{خاصیت زوایای متمم}}۸\cos a\cos b\sin a\sin b=\underbrace{۲\sin a\cos a}_{\sin ۲a}\times\underbrace{۲\sin b\cos b}_{\sin ۲b}$

$\xlongequal{\text{با توجه به ①}}۲\sin ۲a\sin\left(۲(\frac{\pi}{۴}-a)\right)=۲\sin ۲a\sin(\frac{\pi}{۲}-۲a)\xlongequal{\text{خاصیت زاویه متمم}}۲\sin ۲a\cos ۲a=\sin ۴a$

(۴) : ۳۰

می خوام بیشترین مقدار تابع $f(x)=(\sin x-\cos ۲x)^۲+(\cos x-\sin ۲x)^۲$ رو بدست بیارم . به همین منظور اول تابع f رو تا حد امکان ساده می کنم و بعدش می رم سراغ f تا بیشترین مقدار f مشخص بشه :

$f(x)=\sin^۲ x+\cos^۲ ۲x-۲\sin x\cos ۲x+\cos^۲ x+\sin^۲ ۲x-۲\cos x\sin ۲x\Rightarrow$

$f(x)=\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}+\underbrace{\sin^۲ ۲x+\cos^۲ ۲x}_{۱}-۲\underbrace{(\sin x\cos ۲x+\cos x\sin ۲x)}_{\sin(x+۲x)}\Rightarrow f(x)=۲-۲\sin ۳x$

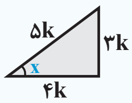
حالا که تابع f ساده شده ، بهتره برم سراغ f :

$\sin ۳x\in[-۱,۱]\Rightarrow-۲\sin ۳x\in[-۲,۲]\Rightarrow\underbrace{+۲-۲\sin ۳x}_{f(x)}\in[۰,۴]\Rightarrow \operatorname{Max}(f(x))=۴$

(۳) : ۳۱

خواسته: $\tan(\underbrace{\frac{\pi}{۲}+۲x}_{\text{ربع دوم}})=-\cot ۲x=-\frac{۱}{\tan ۲x}=\frac{-۱}{\left(\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}\right)}=\frac{\tan^۲ x-۱}{۲\tan x}=\frac{\frac{۹}{۱۶}-۱}{۲\times\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{-۷}{۱۶}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{-۷}{۲۴}$

داده ها : $\boxed{\sin x=\frac{۳}{۵}}$ ① $\boxed{۰<x<\frac{\pi}{۲}}$ ②

ایجاد یک مثلث قائم الزاویه با رابطه ی ① و ② $\longrightarrow$  $\Rightarrow \tan x=\frac{۳}{۴}$

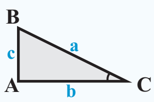
(۳) : ۳۲

داده : $۱-\cos ۲c=\tan c$ خواسته : $c=?$

خواسته : $۱-\cos ۲c=\tan c\Rightarrow\cancel{۱}-(\cancel{۱}-۲\sin^۲ c)=\frac{\sin c}{\cos c}\Rightarrow ۲\sin^۲ c=\frac{\sin c}{\cos c}\Rightarrow ۲\sin c=\frac{۱}{\cos c}$

$\Rightarrow ۲\sin c.\cos c=۱\Rightarrow\sin ۲c=۱\Rightarrow ۲c=۹۰\Rightarrow\boxed{c=۴۵}$

(۲) : ۳۳

داده :  خواسته : $\tan\frac{c}{۲}=?$

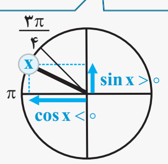
می دونیم : $\tan^۲\frac{c}{۲}=\frac{۱-\cos c}{۱+\cos c}\Rightarrow\tan^۲\frac{c}{۲}=\frac{۱-\frac{b}{a}}{۱+\frac{b}{a}}=\frac{a-b}{a+b}\Rightarrow\tan^۲\frac{c}{۲}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a+b)}=\frac{a^۲-b^۲}{(a+b)^۲}$

با توجه به ① : $\boxed{\cos\hat{c}=\frac{b}{a}}$

$\xrightarrow[\text{فیثاغورث}]{\text{با توجه به ①}}\tan^۲\frac{c}{۲}=\frac{c^۲}{(a+b)^۲}\Rightarrow\tan\frac{c}{۲}=\frac{c}{a+b}$

(۳) : ۳۴

خواسته ی مسئله : $\sqrt{۱+\sin ۲x}+\cos x=\sqrt{(\sin x+\cos x)^۲}+\cos x=|\sin x+\cos x|+\cos x=-\sin x\cancel{-\cos x}\cancel{+\cos x}=-\sin x$

داده ی مسئله : $\frac{۳\pi}{۴}<x<\pi\Rightarrow$  $\Rightarrow\sin x+\cos x<۰$

(۴) : ۳۵

$$\left(\frac{\sin a-\cos a}{\sin a+\cos a}\right)^2\times\left(\frac{1+\tan a}{1-\tan a}\right)^2=\left(\frac{\sin a-\cos a}{\sin a+\cos a}\right)^2\times\left(\frac{1+\frac{\sin a}{\cos a}}{1-\frac{\sin a}{\cos a}}\right)^2=\left(\frac{\sin a-\cos a}{\sin a+\cos a}\right)^2\times\left(\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}\right)^2=1$$

(۲) : ۳۶

داده : $\sin x+\cos x=\frac{5}{4}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=\frac{25}{16}\Longrightarrow\boxed{\sin 2x=\frac{9}{16}}$ ①

خواسته : $\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}\xrightarrow{\text{با توجه به ①}}\frac{2}{(\frac{9}{16})}=\frac{32}{9}$

(۱) : ۳۷

داده : $\boxed{\sin 2x=\frac{4}{5}}$ ①

$$\begin{cases}a+b=S\\ a.b=P\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=S^2-2P\\ a^3+b^3=S^3-3PS\end{cases}$$

خواسته : $\frac{\tan^2 x+\cot^2 x}{\tan^3 x+\cot^3 x}=\frac{(\tan x+\cot x)^2-2\tan x\cot x}{(\tan x+\cot x)^3-3(\tan x.\cot x)(\tan x+\cot x)}=\frac{(\frac{2}{\sin 2x})^2-2(1)}{(\frac{2}{\sin 2x})^3-3(1)(\frac{2}{\sin 2x})}$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به ①}}\frac{\left(\frac{2}{(\frac{4}{5})}\right)^2-2}{\left(\frac{2}{(\frac{4}{5})}\right)^3-3\left(\frac{2}{(\frac{4}{5})}\right)}=\frac{(\frac{5}{2})^2-2}{(\frac{5}{2})^3-3(\frac{5}{2})}=\frac{\frac{17}{4}}{\frac{5}{2}(\frac{25}{4}-3)}=\frac{\frac{17}{4}}{\frac{5}{2}\times\frac{13}{4}}=\frac{34}{65}$$

(۲) : ۳۸

داده : $\tan x-\cot x=6$ خواسته : $\tan 2x=?$

$$\tan x-\cot x=6\Longrightarrow -2\cot 2x=6\Longrightarrow\cot 2x=-3\Longrightarrow\tan 2x=\frac{-1}{3}$$

(۴) : ۳۹

داده : α در ربع اول است   خواسته : $\sqrt{1+\cot^2\alpha}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=?$

$$\sqrt{1+\cot^2\alpha}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}}-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\underbrace{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}_{1-\cos^2\alpha}}}=\frac{1}{|\sin\alpha|}-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}}$$

$$=\frac{1}{\underbrace{|\sin\alpha|}_{+}}-\frac{\overbrace{|1-\cos\alpha|}^{+}}{|\sin\alpha|}=\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$$

باتوجه به اینکه α در ربع اوله

(۳) : ۴۰

از اونجایی که $x=\frac{\pi}{18}$ ریشه ی معادله ی $3\sin x-4\sin^3 x=K$ هست ، پس در این معادله صدق می کنه . اما به دلیل اینکه نمی تونم در این معادله ، $\sin\frac{\pi}{18}$ رو محاسبه کنم بهتره که به کمک روابط 3α، زاویه ی x رو به 3x تبدیل کنم تا :

$$3\sin x-4\sin^3 x=K\xrightarrow{\text{ساده کردن معادله}}\sin 3x=K\xrightarrow{x=\frac{\pi}{18}\text{ در معادله صدق می کنه}}\sin 3(\frac{\pi}{18})=K\Longrightarrow\sin\frac{\pi}{6}=K\Longrightarrow K=\frac{1}{2}$$

(۳) : ۴۱

اگه به سمت چپ معادله ی ۲ = $\underbrace{\boxed{2\sin x+\sin 2x+\cos x\sin 2x+\dots}}_{\text{سمت چپ معادله}}$ دقت کنید یک تصاعد هندسی نامحدوده. پس به کمک رابطه ی حد مجموع ، می تونم سمت چپ معادله رو ساده تر کنم :

سمت چپ معادله : $2\sin x+\sin 2x+\cos x\sin 2x+\dots=\frac{2\sin x}{1-\cos x}$ ($\times\cos x$ ، $\times\cos x$)

$$\boxed{\text{حد مجموع}=\frac{a_1}{1-q_1}}$$

حالا معادله به صورت $\frac{2\sin x}{1-\cos x}=2$ در می آد که خیلی ساده قابل حله :

$$\frac{\cancel{2}\sin x}{1-\cos x}=\cancel{2} \Rightarrow \underbrace{\sin x = 1-\cos x}_{\text{خواسته ی مسئله}} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها ، باید زاویه ی } \frac{x}{2} \text{ ایجاد کنیم}} \sin x = 1-(1-2\sin^2\frac{x}{2}) \Rightarrow \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

(۱) : ۴۲ برای اینکه از رابطه ی $\sin x+\sqrt{3}\cos x=a$، حاصل عبارت $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$ رو بدست بیارم ، قبل از هر حرکتی باید زاویه ی x رو به 2x تبدیل کنم تا به خواسته ی مسئله نزدیک بشم :

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=a \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 x+3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=a^2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+\underbrace{2\cos^2 x}_{(2\cos^2 x-1)+1}+\sqrt{3}\sin 2x=a^2 \Rightarrow 1+\cos 2x+1+\sqrt{3}\sin 2x=a^2 \xrightarrow[\text{نزدیک میشم}]{\text{دارم به خواسته ی مسئله}} \cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=a^2-2$$

(۱) : ۴۳ داده : $\sin x(\cos x-\sin x)=-1$ خواسته : $\cos(2x-\frac{\pi}{4})=?$

$$\sin x(\cos x-\sin x)=-1 \Rightarrow \sin x\cos x-\sin^2 x=-1 \xrightarrow[\text{بر حسب زاویه ی 2x مرتب کنم و به خواسته ی مسئله نزدیک بشم .}]{\text{اگه طرفین معادله رو در ۲ ضرب کنم ، می تونم معادله رو}}$$

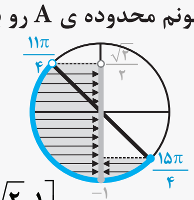
$$2\sin x\cos x-2\sin^2 x=-2 \Rightarrow \underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}+\underbrace{1-2\sin^2 x}_{\cos 2x}=-1$$

$$\sin 2x+\cos 2x=-1 \xrightarrow{\text{به کمک رابطه ی معرکه}} \sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})=-1 \Rightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{4})=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

(۳) : ۴۴ (محدوده ی A) : خواسته $A=\sin 2x+\cos 2x)$ و $(\frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{7\pi}{4}$: داده ها

$$A=\sin 2x+\cos 2x \Rightarrow \boxed{A=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})} \ (1)$$

حالا با داشتن محدوده ی x میتونم محدوده ی A رو بدست بیارم :



$$x\in[\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}] \Rightarrow 2x\in[\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}] \Rightarrow 2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{11\pi}{4},\frac{15\pi}{4}] \Rightarrow$$

$$\sin(2x+\frac{\pi}{4})\in[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}] \Rightarrow \overbrace{\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})}^{A}\in[-\sqrt{2},1] \Rightarrow A\in[-\sqrt{2},1]$$

(۴) : ۴۵ برای پیدا کردن ک.م.م عبارت های $(1+\sin 2x)$ و $(2\cos^2 x-1)$ باید اونها رو تا حد امکان تجزیه کنم :

$$1+\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2=(\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}))^2=\boxed{2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})} \ (1)$$

$$2\cos^2 x-1=\cos 2x=(\cos x-\sin x)^2=(\sin x-\cos x)^2=(\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}))^2=\boxed{2\sin^2(x-\frac{\pi}{4})} \ (2)$$

با توجه به (۱) و (۲) : $[1+\sin 2x, 2\cos^2 x-1]=2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})\sin^2(x-\frac{\pi}{4})$

همونطور که می بینید ، هر چهار عبارت $\sqrt{2}\sin^2(x-\frac{\pi}{4}), 2\sin^2(x+\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}), 2\sin(x+\frac{\pi}{4})$ در ک.م.م وجود دارن .

(۳) : ۴۶

$$\frac{\sqrt{3}\cos 20-\cos 10}{\sin 40}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20-\cos 10}{\sin 40}=\frac{\overbrace{2\cos 30\cos 20}^{\text{ضرب به جمع}}-\cos 10}{\sin 40}=$$

$$\frac{\cos(30+20)+\cancel{\cos(30-20)}-\cancel{\cos 10}}{\sin 40}=\frac{\cos 50}{\sin 40}\overset{\text{متمم}}{=}\frac{\sin 40}{\sin 40}=1$$

(۲) : ۴۷ داده : $\frac{2\sin x\cos 3x}{\sin 2x\sin 2x}=2\cos 2x+a \xrightarrow{\text{ضرب به جمع}} \frac{\sin(x+3x)+\sin(x-3x)}{\sin 2x\sin 2x}=2\cos 2x+a$

$$\Rightarrow \frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin 2s}=2\cos 2x+a \Rightarrow \frac{2\sin 2x\cos 2x-\sin 2x}{\sin 2x}=2\cos 2x+a$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\sin 2x}(2\cos 2x-1)}{\cancel{\sin 2x}}=2co2x+a \Rightarrow 2co2x-1=2co2x+a \Rightarrow \underset{\text{خواسته ی مسئله}}{\boxed{a=-1}}$$

(۴) : ۴۸

$$\cos 20\cos 40+\cos^2 80=\frac{1}{2}(\underbrace{2\cos 40\cos 20}_{\text{ضرب به جمع}})+\cos^2 80=\frac{1}{2}(\cos(\underbrace{40+20}_{60})+\cos(\underbrace{40-20}_{20}))+\cos^2 80$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\cos 20)+\cos^2 80=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 20+\cos^2 80=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1-2\sin^2 10)+\sin^2 10$$

روابط متمم

$$-\sin^2 10+\sin^2 10=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\cancel{\sin^2 10}+\cancel{\sin^2 10}=\frac{3}{4}$$

(۴) : ۴۹

$$4\cos 40-\frac{1}{\cos 20}=\frac{4\cos 40\cos 20-1}{\cos 20}=\frac{2(2\cos 40\cos 20)-1}{\cos 20}=\frac{2(\cos 60+\cos 20)-1}{\cos 20}$$

ضرب به جمع

$$=\frac{2(\frac{1}{2}+\cos 20)-1}{\cos 20}=\frac{\cancel{1}+2\cos 20-\cancel{1}}{\cos 20}=2$$

(۱) : ۵۰

اگه $x=\frac{\pi}{36}$ رو درون عبارت $\frac{\sin x+\sin 5x}{\cos x+\cos 5x}+\frac{\cos x+\cos 5x}{\sin x+\sin 5x}$ قرار بدم نمی تونم مقدار عبارت رو بدست بیارم مگه اینکه زوایای x , 5x رو تغییر بدم . به همین منظور از تبدیل جمع به ضرب استفاده می کنم تا به زاویه ی دلخواه خودم برسم :

$$\frac{\cos 5x+\cos x}{\sin 5x+\sin x}+\frac{\sin 5x+\sin x}{\cos 5x+\cos x}=\frac{\cancel{2}\cos(\frac{5x+x}{2})\cancel{\cos(\frac{5x-x}{2})}}{\cancel{2}\sin(\frac{5x+x}{2})\cancel{\sin(\frac{5x-x}{2})}}+\frac{\cancel{2}\sin(\frac{5x+x}{2})\cancel{\cos(\frac{5x-x}{2})}}{\cancel{2}\cos(\frac{5x+x}{2})\cancel{\cos(\frac{5x-x}{2})}}$$

$$=\frac{\cos 3x}{\sin 3x}+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\cot g3x+tg3x=\frac{2}{\sin 6x}$$

$$\boxed{\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}}$$

حالا که زاویه ها تغییر کرد ، می تونم $x=\frac{\pi}{36}$ رو درون عبارت ساده شده قرار بدم :

$$\frac{2}{\sin 6x}\Bigg|_{x=\frac{\pi}{36}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2}{(\frac{1}{2})}=4$$

(۴) : ۵۱

همونطور که می بینید عبارت $\sin 3x-2\sin 4x+\sin 5x$ رو به دلیل یکی نبودن زاویه هاش ، نمی شه به راحتی ساده کرد . اگه من $\sin 3x,\sin 5x$ رو در کنار هم قرار بدم و از تبدیل جمع به ضرب استفاده کنم به زاویه ی $4x=\frac{5x+3x}{2}$ می رسم که با زاویه ی جمله ی وسط (یعنی $-2\sin 4x$) یکی میشه و این باعث میشه که قفل عبارت شکسته بشه :

$$\underbrace{\sin 5x+\sin 3x}-2\sin 4x=2\sin(\frac{5x+3x}{2})\cos(\frac{5x-3x}{2})-2\sin 4x=2\sin 4x\cos x-2\sin 4x$$

$$=2\sin 4x(\cos x-1)=2\sin 4x((1-2\sin^2\frac{x}{2})-1)=2\sin 4x(-2\sin^2\frac{x}{2})=-4\sin 4x\sin^2\frac{x}{2}$$

اگه به گزینه ها نگاه کنید زاویه ی $\frac{x}{2}$ رو می بینید

(۲) : ۵۲

$$\frac{\overbrace{\sin 3a+\sin a}^{\text{جمع به ضرب}}+2\cos a}{(\sin a+\cos a)^2}=\frac{2\sin(\frac{3a+a}{2})\cos(\frac{3a-a}{2})+2\cos a}{1+\sin 2a}=\frac{2\sin 2a\cos a+2\cos a}{1+\sin 2a}=\frac{2\cos a(\cancel{\sin 2a+1})}{\cancel{1+\sin 2a}}=2\cos a$$

بچه ها ! در حل این مسئله دیدید که تبدیل جمع به ضرب باعث شد تا در صورت کسر ، عامل های مشترک ایجاد بشه و عبارت کسری ساده بشه .

(۲) : ۵۳

$$\frac{\sin^2 x+\sin x\sin 5x+\sin x\sin 3x}{\cos^2 x+\cos x\cos 5x+\cos x\cos 3x}=\frac{\sin x(\sin x+\overbrace{\sin 5x+\sin 3x}^{\text{جمع به ضرب}})}{\cos x(\cos x+\underbrace{\cos 5x+\cos 3x}_{\text{جمع به ضرب}})}=\tan x\times\frac{2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x}{2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x}=\tan x\times\frac{\sin 3x(2\cos 2x+1)}{\cos 3x(2\cos 2x+1)}=ta$$

$$\frac{\cos 2x+\sin 3x}{\cos 2x+\cos 3x}=\tan x\times\frac{\sin 3x(\cancel{2\cos 2x+1})}{\cos 3x(\cancel{2\cos 2x+1})}=\tan x.\tan 3x$$

در حل این مسئله هم مثل سؤال قبل ، تبدیل جمع به ضرب باعث ایجاد عامل های مشترک در صورت و مخرج شد و باعث شد ، کسر ساده بشه.

(۳) : ۵۴

$$\cos^2\underbrace{\boxed{110}}_{\text{مکمل}} - \sin^2\underbrace{\boxed{70}}_{\text{متمم}} = \cos^2\boxed{70} - \cos^2\boxed{20} = \frac{1}{2}(2\cos^2 70 - 2\cos^2 20) = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(2\cos^2 70 - 1)}_{\cos 2(70)} - \underbrace{(2\cos^2 20 - 1)}_{\cos 2(20)}\Big) = \frac{1}{2}(\cos 140 - \cos 40) =$$

تبدیل جمع به ضرب

$$\frac{1}{2}\left(-2\sin\left(\frac{140+40}{2}\right)\sin\left(\frac{140-40}{2}\right)\right) = -\sin 90\,\sin 50 = -\underbrace{\sin 50}_{\text{متمم}} = -\cos 40$$

(۲) : ۵۵

$$\frac{1}{\cos 20} + 2 = \frac{1+2\cos 20}{\cos 20} = \frac{2(\frac{1}{2}+\cos 20)}{\cos 20} = \frac{2(\cos 60 + \cos 20)}{\cos 20} = \frac{2\left(2\cos\frac{60+20}{2}\cos\frac{60-20}{2}\right)}{\cos 20} = \frac{4\cos 40\cos 20}{\cos 20} = 4\cos 40$$

تبدیل جمع به ضرب

(۲) : ۵۶

$$\frac{\sin 100 + \cos 230}{\sin 10} = \frac{\sin(90+10)+\cos(180+50)}{\sin 10} = \frac{\cos 10 - \cos 50}{\sin 10} = \frac{-2\sin(\frac{10+50}{2})\sin(\frac{10-50}{2})}{\sin 10} =$$

$$\frac{-2\sin 30\sin(-20)}{\sin 10} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{\frac{1}{2}}\times\sin 20}{\sin 10} = \frac{2\cancel{\sin 10}\cos 10}{\cancel{\sin 10}} = 2\cos 10$$

(۲) : ۵۷

$$\frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b} = \frac{\frac{\cancel{\sin(a+b)}}{\cos a\cos b}}{\frac{\cancel{\sin(a+b)}}{\sin a\sin b}} = \frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b} = \tan a.\tan b$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\cos a\cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin b\cos a + \cos b\sin a}{\sin a\sin b} = \frac{\sin(b+a)}{\sin a\sin b}$$

(۳) : ۵۸

داده های مسئله : $\sin 2x = \frac{3}{5}$ ۱ و $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ۲

خواسته ی مسئله : $\cos x\cos 3x(\tan x + \tan 3x)$

$$\cancel{\cos x}\ \cancel{\cos 3x}\times\frac{\sin(x+3x)}{\cancel{\cos x}\ \cancel{\cos 3x}} = \sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos^2 2x = 1-\sin^2 2x \xrightarrow{\text{با توجه به ۱}} 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos 2x = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow[0<2x<\frac{\pi}{2}]{\text{با توجه به ۲}} \cos 2x = \frac{4}{5}$$

(۴) : ۵۹

$$\cos 50(\tan 70 + \tan 10) = \cos 50\times\frac{\sin(70+10)}{\cos 70\cos 10} = \frac{\cos 50\sin 80}{\cos 70\cos 10} \stackrel{\text{متمم}}{=} \frac{\sin 40\cancel{\cos 10}}{\sin 20\cancel{\cos 10}} = \frac{2\cancel{\sin 20}\cos 20}{\cancel{\sin 20}} = 2\cos 20$$

تبدیل جمع به ضرب

(۲) : ۶۰

$$(\tan 20 + \cot 40)\sin 50 \stackrel{\text{متمم}}{=} (\tan 20 + \tan 50)\sin 50 = \frac{\sin(20+50)}{\cos 20\cos 50}\times\sin 50 = \frac{\cancel{\sin 70}\sin 50}{\cancel{\cos 20}\cos 50} = \tan 50$$

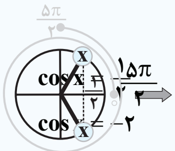
تبدیل جمع به ضرب

(۱) : ۶۱

خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $\boxed{2\sin^2 x = 3\cos x}$ ۱ در بازه ی $\left[0, \frac{5\pi}{2}\right]$

$$\xrightarrow{1} 2(1-\cos^2 x) = 3\cos x \Rightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = 9+16} \cos x = \frac{-3\pm 5}{4}$$

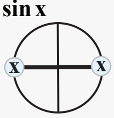
$$\rightarrow \begin{cases}\cos x = \frac{1}{2}\\ \cos x = -2 \ \ (\text{غ ق ق})\end{cases}$$



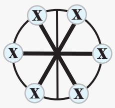
در مسیر ۰ تا $\frac{5\pi}{2}$ معادله سه جواب داره

(۳) : ۶۲

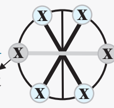
$\dfrac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1 \xrightarrow{\text{با شرط } \sin x \neq 0 \text{ وسطین می کنیم}} \sin 3x + \sin x = \sin x \Rightarrow \sin 3x = 0$



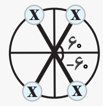
$\Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}$ یا $\dfrac{2k\pi}{6}$ $\xrightarrow{\text{عقربه های ۶ سر}}$



$\xrightarrow{\sin x \neq 0 \text{ می دونیم}}$



غ ق ق   غ ق ق

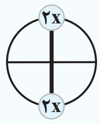


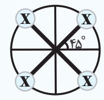
$\Rightarrow \boxed{x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}}$

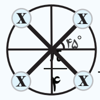
(۴) : ۶۳

$\dfrac{\pi}{2}$ $2x$

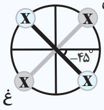
$\dfrac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\cos 2x = 0} \ (1) \\ \boxed{\cos(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0} \ (2) \end{cases}$

(۱)  $\xrightarrow[\text{مثبت چرخیده}]{\text{عقربه ی دوسر } 2x \text{ که } \frac{\pi}{2} \text{ در جهت}} 2x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \xrightarrow[\text{در جهت مثبت چرخیده}]{\text{عقربه ی چهار سره که } x \ \frac{\pi}{4}}$



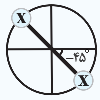


$\xrightarrow{\text{با توجه به (۲)}}$



غ ق ق

$\Rightarrow$



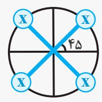
$\Rightarrow x = k\pi - \dfrac{\pi}{4}$

(۳) : ۶۴

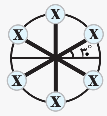
خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $\cos 2x \cos 3x = 0$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

$\cos 2x \cos 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \\ \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$

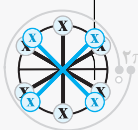
جواب قسمت اول



جواب قسمت دوم



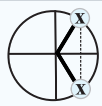
$\xrightarrow{\text{اجتماع جوابها}}$

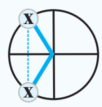


$\Rightarrow$ در مسیر ۰ تا 2π معادله ۱۰ جواب داره

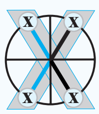
(۴) : ۶۵

$\sin(\dfrac{\pi}{2} + x)\cos(2\pi - x) = \sin^2\dfrac{7\pi}{6} \Rightarrow (\cos x)(\cos x) = (\dfrac{-1}{2})^2 \Rightarrow \cos^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$





$\xrightarrow{\text{اجتماع جوابها}}$



$\Rightarrow x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

(۱) : ۶۶

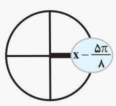
خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $\boxed{2\sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 3\cos(x - \frac{5\pi}{8}) = 5}$ در بازه ی $[0, 2\pi]$

(۱)

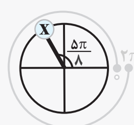
بچه ها! اگه به زوایای معادله ی (۱) نگاه کنید می بینید که $(x - \dfrac{\pi}{8}) - (x - \dfrac{5\pi}{8}) = \dfrac{\pi}{2}$ در نتیجه : $x - \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2} + (x - \dfrac{5\pi}{8})$

$\xrightarrow{\text{بازنویسی معادله}} 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} + (x - \dfrac{5\pi}{8})\right) + 3\cos(x - \dfrac{5\pi}{8}) - 5 = 0 \Rightarrow 2\cos^2(x - \dfrac{5\pi}{8}) + 3\cos(x - \dfrac{5\pi}{8}) - 5 = 0$

$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} \begin{cases} \cos(x - \dfrac{5\pi}{8}) = 1 \\ \cos(x - \dfrac{5\pi}{8}) = \dfrac{-5}{2} \quad \text{(غ ق ق)} \end{cases}$



$\Rightarrow x - \dfrac{5\pi}{8} = 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{8} \Rightarrow$



$\xrightarrow{\text{در بازه ی } [0, 2\pi]}$ یک جواب

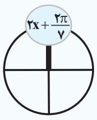
(۲) : ۶۷ خواسته ی مسئله : مجموع ریشه های معادله ی $\boxed{\tan(x+\frac{\pi}{۷})+\tan(\frac{۵\pi}{۱۴}-x)=۲}$ ۱ در بازه ی $[۰,\pi]$.

در اینجا بین زوایای معادله ی ۱ رابطه ی $(x+\frac{\pi}{۷})+(\frac{۵\pi}{۱۴}-x)=\frac{\pi}{۲}$ برقراره . پس این دو زاویه ، متمم هم هستن .

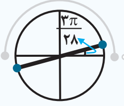
$\boxed{\tan\alpha=\cot\beta}$ می دونید که اگه α و β متمم هم باشن ،اون موقع

$\boxed{\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۲}{\sin ۲\alpha}}$

$\xrightarrow{\text{بازنویسی معادله ۱}}\tan(x+\frac{\pi}{۷})+\cot(x+\frac{\pi}{۷})=۲\Rightarrow\frac{۲}{\sin ۲(x+\frac{\pi}{۷})}=۲\Rightarrow\sin(۲x+\frac{۲\pi}{۷})=۱\Rightarrow$



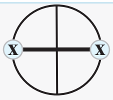
$\Rightarrow ۲x+\frac{۲\pi}{۷}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x+\frac{\pi}{۷}=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۳\pi}{۲۸}\Rightarrow$



$\Rightarrow (x=\frac{۳\pi}{۲۸})$ معادله فقط یک ریشه داره $[۰,\pi]$ در بازه ی $\Rightarrow$ مجموع ریشه ها $=\frac{۳\pi}{۲۸}$

(۴) : ۶۸

$\boxed{\cos^۲ x-\tan(x+\frac{\pi}{۴})\cot(x+\frac{\pi}{۴})=۰}$ ۱ $\xrightarrow{\boxed{\tan\alpha\cot\alpha=۱}}\cos^۲ x-۱=۰\Rightarrow\cos x=\pm۱\Rightarrow$



$\Rightarrow x=k\pi$

از اونجایی که $x=k\pi$ در معادله ی ۱ صدق میکنه پس جواب معادله هست .

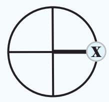
(۳) : ۶۹ خواسته ی مسئله : تعداد جوابهای معادله ی $\tan x\tan ۲x=\sin x\sin ۲x$ در بازه ی $\left[\frac{\pi}{۴},\frac{۹\pi}{۴}\right]$

$\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=\sin x\cdot\sin ۲x\Rightarrow\begin{cases}\frac{۱}{\cos x\cos ۲x}=۱ & ۱\ \sin x=۰\\ \sin ۲x=۰ & ۲\\ \cos x\cos ۲x=۱ & ۳\end{cases}$

$\xrightarrow{۱} x=k\pi\xrightarrow{\text{در بازه ی }\left[\frac{\pi}{۴},\frac{۹\pi}{۴}\right]}\boxed{x=\pi,۲\pi}$ A

$\xrightarrow{۲} ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\xrightarrow{\text{در بازه ی }\left[\frac{\pi}{۴},\frac{۹\pi}{۴}\right]}\boxed{x=\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲},۲\pi}$ B

$\xrightarrow{۳}\cos x\cos ۲x=۱\begin{cases}\cos x=۱\quad \cos ۲x=۱\xrightarrow{\text{از جوابهای دو معادله اشتراک می گیریم}}\\ \cos x=-۱\quad \cos ۲x=-۱\xrightarrow{\text{از جوابهای دو معادله اشتراک می گیریم}}\varnothing\end{cases}$



$\xrightarrow{\text{در بازه ی }\left[\frac{\pi}{۴},\frac{۹\pi}{۴}\right]}\boxed{x=۲\pi}$ C

از اجتماع A وB و C به جوابهای $x=\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲},۲\pi$ می رسیم . اما $x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$ در معادله ی اولیه صدق نمی کنه . پس :
جوابهای نهایی معادله : $x=\pi,۲\pi$

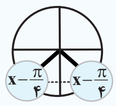
(۲) : ۷۰ خواسته ی مسئله : تعداد ریشه های معادله ی $\boxed{۲\cot ۲x+\tan x=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}}$ ۱ در بازه ی $[۰,۲\pi]$

$\xrightarrow{۱}(\cot x-\tan x)+\tan x=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}\Rightarrow\frac{۱}{\tan x}=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}\Rightarrow\tan x-\tan^۲ x=۱+\tan x\Rightarrow\tan^۲ x=-۱\Rightarrow$ معادله ریشه نداره

$\boxed{۲\cot ۲x=\cot x-\tan x}$

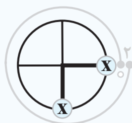
(۴) :۷۱ خواسته ی مسئله : تعداد ریشه های معادله ی $\sin x-\cos x=-۱$ در بازه ی $[۰,۲\pi]$

$\sin x-\cos x\xrightarrow{\text{اطلاعات معرکه ی}}\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})=-۱\Rightarrow\sin(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow$



$\Rightarrow$

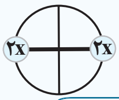
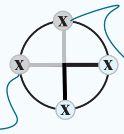
$\begin{cases}x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi\\ x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع جوابها}}$



$\xrightarrow{\text{در بازه ی }[۰,۲\pi]}x=۰,\frac{۳\pi}{۲},۲\pi$

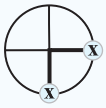
روش دوم: دو طرف معادله رو به توان ۲ می رسونم. اما حواسم باید جمع باشه که به توان زوج رسوندن یک معادله، ممکنه جوابهای زائد تولید کنه.

$\sin x-\cos x=-1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=1 \Rightarrow 1-\sin 2x=1 \Rightarrow \sin 2x=0$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2} \Rightarrow$ 

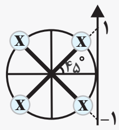
در معادله ی $\sin x-\cos x=-1$ صدق نمی کنه

در معادله ی $\sin x-\cos x=-1$ صدق نمی کنه

با توجه به معلوم شدن جوابهای زائد $\Rightarrow$  $\xrightarrow{\text{در بازه ی } [0,2\pi]} x=0,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi$

(۳) : ۷۲

$\tan^2 x-\cos 2x=1 \Rightarrow \tan^2 x-1=\cos 2x \Rightarrow -\cancel{(1-\tan^2 x)}=\frac{\cancel{(1-\tan^2 x)}}{(1+\tan^2 x)} \Rightarrow$

$1-\tan^2 x=0 \Rightarrow \tan^2 x=1 \Rightarrow \tan x=\pm 1 \Rightarrow$  $\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

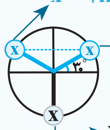
$-1=\frac{1}{1+\tan^2 x}$ غ ق ق

(۴) : ۷۳

داده ی مسئله: $\boxed{x=2k\pi+\frac{i\pi}{6}}$ ① جواب معادله ی $\cos 2x=\sin x$ هست   خواسته ی مسئله: مجموعه ی مقادیر i

$\cos 2x=\sin x \Rightarrow 1-2\sin^2 x=\sin x \Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sin x=-1 \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{cases}$

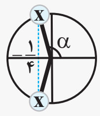
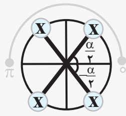
$x=2k\pi+\frac{1\pi}{6}$, $x=2k\pi+\frac{\boxed{5}\pi}{6}$

اجتماع جوابها روی دایره مثلثاتی $\Rightarrow$  $\to x=2k\pi+\frac{\boxed{1}\pi}{6}$, $x=2k\pi+\frac{9\pi}{6}$

با توجه به ① $\Rightarrow i=\{1,5,9\}$

(۱) : ۷۴

خواسته ی مسئله: تعداد جوابهای معادله ی $\sin^2 x=\cos^2 x+\frac{1}{4}$ در بازه ی $[0,\pi]$

$\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{-1}{4} \Rightarrow \cos 2x=\frac{-1}{4} \Rightarrow$  $\Rightarrow 2x=2k\pi\pm\alpha \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$  $\xrightarrow{\text{در بازه ی } [0,\pi]}$ دو جواب

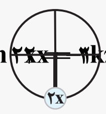
(۱) : ۷۵

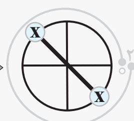
خواسته ی مسئله: تعداد ریشه های معادله ی $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{2}$ در بازه ی $[0,2\pi]$

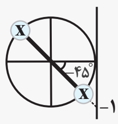
$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{3}{2} \Rightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{3}{2} \Rightarrow 2\sin^2 x\cos^2 x=-\frac{1}{2}$ (غ ق ق) $\Rightarrow$ معادله ریشه نداره

(۲) : ۷۶

خواسته ی مسئله: مجموع جواب های معادله ی $\boxed{\tan x+\tan(\frac{3\pi}{2}-x)=2\tan\frac{3\pi}{4}}$ ① در بازه ی $[0,2\pi]$:

$\xrightarrow{①} \tan x+\cot x=2(-1) \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x}=-2 \Rightarrow \sin 2x=-1 \Rightarrow$  $\Rightarrow 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

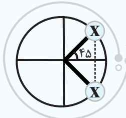
$\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow$  $\xrightarrow{\text{در بازه ی } [0,2\pi]}$ جوابها $=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4} \Rightarrow$ مجموع جوابها $=\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$

روش دوم: $\tan x+\cot x=2(-1) \Rightarrow \tan x+\frac{1}{\tan x}=-2 \Rightarrow \tan x=-1 \Rightarrow$  $\xrightarrow{\text{در بازه ی } [0,2\pi]} x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4} \Rightarrow$

مجموع جوابها $=\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=\frac{5\pi}{2}$

(۳) : ۷۷ خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $\boxed{\frac{\cos x}{\sqrt{2}\cos x - 1} = 2}$ (۱) در بازه ی $[0,2\pi]$

$\xrightarrow{(1)} \frac{2\cos^2 x - 1}{\sqrt{2}\cos x - 1} = 2 \Rightarrow \frac{(\sqrt{2}\cancel{\cos x} - 1)(\sqrt{2}\cos x + 1)}{(\sqrt{2}\cancel{\cos x} - 1)} = 2 \Rightarrow \sqrt{2}\cos x + 1 = 2 \Rightarrow \sqrt{2}\cos x = 1$

$\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$  $\xrightarrow{\text{در بازه ی } [0,2\pi]}$ دو جواب

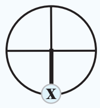
(۱) : ۷۸ داده ی مسئله : معادله ی $\boxed{\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \tan 60 \sin x = m - 1}$ (۱) جواب داره . خواسته ی مسئله : محدوده ی m چیست ؟

$\xrightarrow{(1)} \cos x + \sqrt{3}\sin x = m - 1 \xrightarrow{\text{رابطه ی معرکه}} 2\cos(x - \frac{\pi}{3}) = m - 1 \Rightarrow \boxed{\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{m-1}{2}}$ (۲)

برای اینکه معادله ی (۲) جواب داشته باشه لازمه که $-1 \le \frac{m-1}{2} \le 1$ باشه . یعنی $-2 \le m - 1 \le 2$ و در نتیجه : $-1 \le m \le 3$

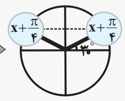
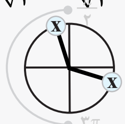
(۳) : ۷۹

$\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 1 + \sin(\underbrace{\frac{5\pi}{2} + x}_{\text{ربع دوم}}) \Rightarrow -\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1 + \cos x$

$\xrightarrow{\text{رابطه ی معرکه}} -(\sin x - \cos x) = 1 + \cos x \Rightarrow -\sin x + \cancel{\cos x} = 1 + \cancel{\cos x} \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow$  $\Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

(۴) : ۸۰ خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $\boxed{\sin^3 x + \cos^3 x + 3\sin^2 x\cos x + 3\cos^2 x\sin x = \frac{1}{3}}$ (۱) در بازه ی $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$\xrightarrow{\text{سمت چپ معادله ی (۱) اتحاد مکعبه}} (\sin x + \cos x)^3 = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \xrightarrow{\text{رابطه ی معرکه}} \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

$\Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3}} \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) \simeq \frac{1}{2} \Rightarrow$  $\xrightarrow[\text{تا زاویه ی } x+\frac{\pi}{4} \text{ به } x \text{ تبدیل بشه}]{\text{عقربه ها رو } \frac{\pi}{4} \text{ در جهت منفی می چرخونیم}}$  $\xrightarrow{\text{در بازه ی } [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]}$ یک جواب

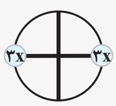
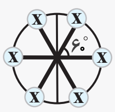
(۳) : ۸۱ داده ی مسئله : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و رابطه ی $\boxed{2\sin x + 1 = a\sin\frac{x+\theta}{2}\cos\frac{x-\theta}{2}}$ (۱) یک اتحاده خواسته ی مسئله : $a.\theta = ?$

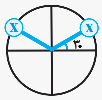
$\xrightarrow{(1)} 2\sin x + 1 = \frac{a}{2}(2\sin\frac{x+\theta}{2}\cos\frac{x-\theta}{2}) \xrightarrow[\text{تبدیل ضرب به جمع}]{} 2\sin x + 1 = \frac{a}{2}(\sin x + \sin\theta)$

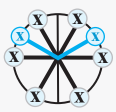
$\Rightarrow \boxed{2}\sin x + \boxed{1} = \boxed{\frac{a}{2}}\sin x + \boxed{\frac{a}{2}}\sin\theta \xrightarrow[\text{بودن این رابطه}]{\text{با توجه به اتحاد}} \begin{cases} 2 = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{a = 4} \\ 1 = \frac{a}{2}\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \xrightarrow{0 < \theta < \frac{\pi}{2}} \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}} \end{cases}$

(۴) : ۸۲ خواسته ی مسئله : جواب های معادله ی $\cos 4x - \cos 2x = \cos(3x - \frac{3\pi}{2})$ چند نقطه روی دایره ی مثلثاتی ایجاد می کنن؟

$\cos 4x - \cos 2x = \cos(\underbrace{\frac{3\pi}{2} - 3x}_{\text{ربع سوم}}) \Rightarrow -2\cancel{\sin 3x}\sin x = -\cancel{\sin 3x} \Rightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 & (1) \\ \sin x = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$

$\xrightarrow{(1)}$  $\Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} \xrightarrow{\text{۶ سر}}$  (۳)

$\xrightarrow{(2)}$ 

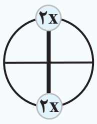
$\xrightarrow{(3) \cup (4)}$  $\Rightarrow$ ۸ نقطه

(۴) : ۸۳

آماده سازی برای تبدیل ضرب به جمع

$$\sin(x+\frac{\pi}{۶}).\sin(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۴} \Rightarrow -۲\sin(x+\frac{\pi}{۶})\sin(x-\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{تبدیل ضرب به جمع}}$$

$$\cos[(x+\cancel{\frac{\pi}{۶}})+(x-\cancel{\frac{\pi}{۶}})]-\cos[(\cancel{x}+\frac{\pi}{۶})-(\cancel{x}-\frac{\pi}{۶})]=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos۲x-\underbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{۳}}}_{\frac{۱}{۲}}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos۲x=۰ \Rightarrow$$



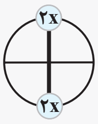
$$\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$: خواسته ی مسئله

(۴) : ۸۴

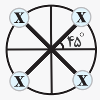
خواسته ی مسئله : مجموع جواب های معادله ی $\cos۶x.\cos۴x=\frac{۱}{۲}\cos۱۰x$ در بازه ی $[۰,۲\pi]$:

$$۲\cos۶x.\cos۴x \xrightarrow{\text{تبدیل ضرب به جمع}} \cos(۶x+۴x)+\cos(۶x-۴x)=\cos۱۰x \Rightarrow \cancel{\cos۱۰x}+\cos۲x=\cancel{\cos۱۰x}$$

$$\Rightarrow \cos۲x=۰ \Rightarrow$$



$$\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow$$



$$\xrightarrow{[۰,۲\pi]\ \text{در بازه ی}}$$

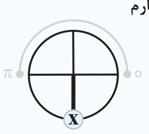
$$x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴} \Rightarrow \text{مجموع جواب ها}=\frac{\pi}{۴}+\frac{۳\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}+\frac{۷\pi}{۴}=\frac{۱۶\pi}{۴}=۴\pi$$

(۱) : ۸۵

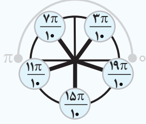
خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $\sin۳x+\cos۲x=۰$ در بازه ی $[۰,\pi]$

$$\sin۳x+\cos۲x=۰ \Rightarrow \sin۳x=-\cos۲x \Rightarrow \sin۳x=\sin(\underbrace{\frac{۳\pi}{۲}+۲x}_{\text{ربع چهارم}}) \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+(\frac{۳\pi}{۲}+۲x) \\ ۳x=۲k\pi+\pi-(\frac{۳\pi}{۲}+۲x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲} \\ ۵x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲} \\ x=\frac{۲k\pi}{۵}-\frac{\pi}{۱۰} \end{cases}$$



$\xrightarrow{[۰,\pi]\ \text{در بازه ی}}$ جواب نداره



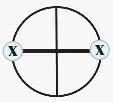
بچه ها ! همونطور که می بینید ، معادله در بازه ی $[۰,\pi]$ فقط دو ریشه داره .

(۳) : ۸۶

خواسته ی مسئله : تعداد ریشه های متمایز معادله ی $\sin۲x\cos۲x\cos۴x=۲\sin x$ در بازه ی $[۰,۲\pi]$

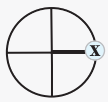
$$\boxed{۲\cancel{\sin x}\cos x}\cos۲x.\cos۴x=\cancel{۲\sin x} \Rightarrow \begin{cases} \sin x=۰ \quad ۱ \\ \cos x.\cos۲x.\cos۴x=۱ \quad ۲ \end{cases}$$

۱ $\rightarrow$



$\xrightarrow{[۰,۲\pi]\ \text{در بازه ی}} \boxed{x=۰,\pi,۲\pi}$ ۳

۲ $\rightarrow \cos x=۱ , \cos۲x=۱ , \cos۴x=۱ \xrightarrow{\text{اشتراک جوابهای این سه معادله}}$



$\xrightarrow{[۰,۲\pi]\ \text{در بازه ی}} \boxed{x \quad ۰,\pi,۲\pi}$ ۴

$۳\cup۴ \rightarrow x=۰ , \pi , ۲\pi \Rightarrow$ این معادله در بازه ی $[۰,۲\pi]$ سه ریشه داره

بچه ها ! از معادله ی ۲ نتایج دیگه ای هم میشه گرفت که قابل قبول نیستن . مثلاً:

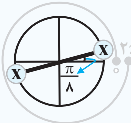
$$\cos x\cos۲x\cos۴x=۱ \Rightarrow \begin{cases} \cos x=-۱ , \cos۲x=-۱ , \cos۴x=۱ & \text{غ ق ق} \\ \cos x=-۱ , \cos۲x=۱ , \cos۴x=-۱ & \text{غ ق ق} \quad (\text{چرا ؟}) \\ \cos x=۱ , \cos۲x=-۱ , \cos۴x=-۱ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(۲) : ۸۷

خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $\sin x-\cos(x+\frac{\pi}{4})=0$ در بازه ی $[0,2\pi]$

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\sin x \Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+(\frac{\pi}{2}-x) \\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-(\frac{\pi}{2}-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{4} & (1) \\ \frac{3\pi}{4}=2k\pi & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$\xrightarrow{(1)} x=k\pi+\frac{\pi}{8} \Rightarrow$



$\xrightarrow{\text{در بازه ی } [0,2\pi]}$ دو جواب

(۲) : ۸۸

$$\tan 2x.\tan 3x=1 \Rightarrow \tan 3x=\frac{1}{\tan 2x} \Rightarrow \tan 3x=\cot 2x \Rightarrow \tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-2x)$$

$$3x=k\pi+(\frac{\pi}{2}-2x) \Rightarrow 5x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$$

(۴) : ۸۹

خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=3+\sin^2 x$ در بازه ی $[\pi,5\pi]$

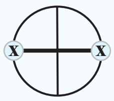
بچه ها ! شما نمی تونید به راحتی این معادله رو ساده کنید . اما اگه کمی دقت کنید می بینید که برد سمت چپ معادله با برد سمت راست فقط یک نقطه ی مشترک داره ، یعنی :

سمت راست معادله : $3+\underbrace{\boxed{\sin^2 x}}_{\geq 0}\geq 3$

سمت چپ معادله : $\underbrace{\boxed{\cos x}}_{\leq 1}+\underbrace{\boxed{\cos 2x}}_{\leq 1}+\underbrace{\boxed{\cos 3x}}_{\leq 1}\leq 3$

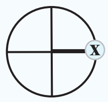
$\Rightarrow$ این معادله فقط در صورتی برقراره که هر دو طرف ، همزمان صفر بشن

$3+\sin^2 x=3 \Rightarrow \sin^2 x=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow$



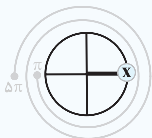
(۱)

$\cos x+\cos 2x+\cos 3x=3 \Rightarrow \cos x=1 , \cos 2x=1 , \cos 3x=1$ $\xrightarrow{\text{اشتراک جوابهای این سه معادله}}$



(۲)

$\xrightarrow{(1)\cap(2)}$



$\xrightarrow{\text{در بازه ی } [\pi,5\pi]}$ دو جواب

(۴) : ۹۰

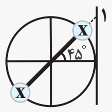
خواسته ی مسئله : تعداد ریشه های معادله ی $\tan x+\cot x=2-\sqrt{\cos 2x}$ در بازه ی $[0,2\pi]$

بچه ها ! این سؤال هم تو دسته ی سوالاتیه که برد سمت چپ و راست معادله ، فقط در یک نقطه اشتراک دارن . میگی نه نگاه کن :

$$\begin{cases} \cos 2x\in[-1,1] \Rightarrow \sqrt{\cos 2x}\in[0,1] \Rightarrow -\sqrt{\cos 2x}\in[-1,0] \Rightarrow \boxed{+2-\sqrt{\cos 2x}\in[1,2]} \\ \tan x+\frac{1}{\tan x}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty) \Rightarrow \boxed{\tan x+\cot x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)} \end{cases}$$

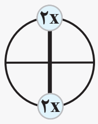
همونطور که می بینید ، عدد ۲ تنها نقطه ی مشترک بین برد های سمت چپ و راست معادله هست . پس این معادله فقط زمانی برقراره که همزمان $\tan x+\cot x=2$ و $2-\sqrt{\cos 2x}=2$ باشه .

$\tan x+\frac{1}{\tan x}=2 \Rightarrow \tan x=1 \Rightarrow$

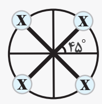


(۱)

$2-\sqrt{\cos 2x}=2 \Rightarrow \cos 2x=0 \Rightarrow$

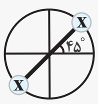


$\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow$



(۲)

$\xrightarrow{(1)\cap(2)}$



$\xrightarrow{\text{در بازه ی } [0,2\pi]}$ دو جواب

(۲) : ۹۱

خواسته ی مسئله : تعدادریشه های معادله ی $\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{1}{8}-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})$ در بازه ی $[0,2\pi]$

بچه ها ! قبل از هر عملی می خوام شما رو با رابطه ی $\boxed{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\in\left[\frac{1}{2^{n-1}},1\right]}$ آشنا کنم . مثلا:

$n=4:\sin^8x+\cos^8x\in\left[\frac{1}{2^{4-1}},1\right]\Rightarrow \boxed{\sin^8x+\cos^8x\in\left[\frac{1}{8},1\right]}$ (۱)

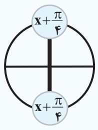
چه جالب ! محدوده ی سمت چپ معادله پیدا شد . حالا که تا اینجا اومدم ، بهتره برم سراغ محدوده ی سمت راست معادله :

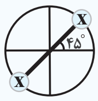
$\cos^2(x+\frac{\pi}{4})\in[0,1]\Rightarrow -\cos^2(x+\frac{\pi}{4})\in[-1,0]\Rightarrow \boxed{+\frac{1}{8}-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})\in[-\frac{7\pi}{8},\frac{1}{8}]}$ (۲)

باز هم در این سؤال ، مثل دو سؤال قبلی ، محدوده ی سمت چپ و راست معادله فقط در یک نقطه (یعنی $\frac{1}{8}$) مشترک هستن .

پس این معادله فقط در صورتی میتونه برقرار باشه که همزمان : $\begin{cases}\frac{1}{8}-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{8}\\ \sin^8x+\cos^8x=\frac{1}{8}\end{cases}$

بچه ها ! لزومی نداره که هر دو معادله ی بالا رو حل کنید و بین جوابهایی که از دو معادله بدست می آد اشتراک بگیرید . کافیه شما یکی از معادلات ساده تر رو انتخاب کنید ، جوابش رو بدست بیارید و جواب بدست اومده رو در معادله ی دیگه چک کنید . اگه صدق کرد به اون جواب می گیم جواب مشترک دو معادله و یا به عبارت دیگه جواب نهایی معادله . مثلاً:

$\underbrace{\boxed{\frac{1}{8}-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{8}}}_{\text{معادله ی ساده تر}}\Rightarrow\cos(x+\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow$  $\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$  $\xrightarrow{\text{در بازه ی }[0,2\pi]} x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\xrightarrow{\text{چک کردن در معادله ی دوم}}$

معادله ی دوم

$\boxed{\sin^8x+\cos^8x=\frac{1}{8}}$

$x=\frac{\pi}{4}:\ (\frac{\sqrt{2}}{2})^8+(\frac{\sqrt{2}}{2})^8=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$ (صدق کرد)

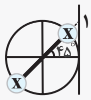
$x=\frac{5\pi}{4}:\ (-\frac{\sqrt{2}}{2})^8+(-\frac{\sqrt{2}}{2})^8=\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$ (صدق کرد)

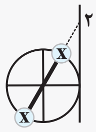
بنابراین $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ جوابهای معادله ی $\sin^8x+\cos^8x=\frac{1}{8}-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})$ در بازه ی $[0,2\pi]$ هستن .

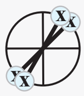
(۳) : ۹۲

خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $\tan^2x-2\cot^2x=1$ در بازه ی $[0,2\pi]$

$\tan^2x-2\cot^2x=1\xrightarrow{\times\tan^2x}\tan^4x-2=\tan^2x\Rightarrow(\tan^2x)^2-(\tan^2x)-2=0\xrightarrow{a+b=c}$

$\begin{cases}\tan x=-1\\ \tan x=2\end{cases}\Rightarrow$ 

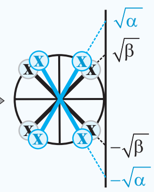
$\begin{cases}\tan x=-1\\ \tan x=2\end{cases}\Rightarrow$ 

$\xrightarrow{\text{اجتماع جوابها}}$  $\xrightarrow{\text{در بازه ی }[0,2\pi]}$ ۴ جواب

(۳) : ۹۳

خواسته ی مسئله : تعداد جواب های معادله ی $\tan^3x\cot x+\cot^4x\tan^2x=4$ در بازه ی $[0,2\pi]$

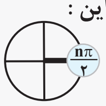
$\tan^2x.\underbrace{\tan x\cot x}_{1}+\cot^2x.\underbrace{\cot^2x\tan^2x}_{1}=4\Rightarrow\tan^2x+\cot^2x=4\xrightarrow{\times\tan^2x}\tan^4x+1=4\tan^2x\Rightarrow(\tan^2x)^2-4(\tan^2x)+1=0$

$\xrightarrow{\Delta=16-4=12}\begin{cases}\tan^2x=\overbrace{\boxed{\frac{4+\sqrt{12}}{2}}}^{\alpha}\\ \tan^2x=\underbrace{\boxed{\frac{4-\sqrt{12}}{2}}}_{\beta}\end{cases}\xrightarrow{\alpha>\beta}\begin{cases}\tan^2x=\alpha\Rightarrow\tan x=\pm\sqrt{\alpha}\\ \tan^2x=\beta\Rightarrow\tan x=\pm\sqrt{\beta}\end{cases}\Rightarrow$  $\xrightarrow{\text{در بازه ی }[0,2\pi]}$ هشت جواب

(۳) : ۹۴

خواسته ی مسئله : تعداد n های طبیعی و دو رقمی که در معادله ی $3^{x-[x]} = \cos\frac{n\pi}{2}$ صدق می کنه .

فرض می کنم n یه عدد طبیعیه که در معادله ی ۱ صدق می کنه . بنابراین :

$$3^{n-[n]} = \cos\frac{n\pi}{2} \Rightarrow 3^{0} = \cos\frac{n\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{n\pi}{2} = 1 \Rightarrow$$  $$\Rightarrow \frac{n\cancel{\pi}}{2} = 2k\cancel{\pi} \Rightarrow n = 4k$$

حالا که فهمیدم n مضرب ۴ هست ، باید به دنبال تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۴ بگردم . یعنی :

$$k=3 \quad k=4 \quad k=24 \Rightarrow \text{تعداد اعداد دو رقمی مضرب ۴} = (24-3)+1 = 22$$

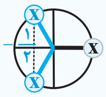
$$n = 4k \Rightarrow n = \underbrace{12 , 16 , \dots , 96}_{\text{اعداد دورقمی مضرب ۴}}$$

(۳) : ۹۵

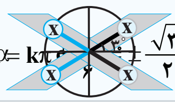
خواسته ی مسئله : $\cos\alpha = $ جملات غیر صفر $\sin\alpha , \sin 2\alpha , \sin 4\alpha$ یک دنباله ی هندسی رو تشکیل دادن .

خواسته ی مسئله : جواب کلی معادله ی $\cos x = \sin\alpha$

$$\sin\alpha , \sin 2\alpha , \sin 4\alpha \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \Rightarrow 2\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = 1 \\ \cos\alpha = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$  $$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} , 0$$

از اونجایی که $\sin\alpha$ اولین جمله ی این دنباله ی هندسیه و جملات دنباله غیر صفر هستن پس : $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

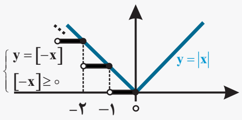
خواسته ی مسئله : $\cos x = \sin\alpha \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$  $\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۳) : ۹۶

اگه به معادله ی $\sqrt{[-x]} - \sqrt{|x|} = \sin\pi[x]$ دقت کنید می بینید که $[x]$ عدد صحیحه ، بنابراین $\sin\pi[x] = 0$

پس شما با معادله ی $\sqrt{[-x]} - \sqrt{|x|} = 0$ سروکار دارید .

$$\sqrt{[-x]} = \sqrt{|x|} \xrightarrow{\text{با شرط } [-x]\geq 0} [-x] = |x| \xrightarrow{\text{روش هندسی}}$$



همونطور که می بینید x های صحیح و نا مثبت محل برخورد نمودار دو تابع $y=[-x]$ و $y=|x|$ هستن . بنابراین : $x \in \mathbb{Z} - \mathbb{Z}^{+}$

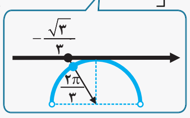
(۱) : ۹۷

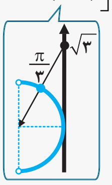
$$\cos\left[\sin^{-1}(\frac{-8}{17})\right] = \sqrt{1-(\frac{-8}{17})^2} = \sqrt{1-\frac{64}{289}} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$$

$$\boxed{\cos(\sin^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}}$$

(۲) : ۹۸

$$\sin\left[\frac{3}{4}\cot^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{3})\right] + \cos\left[2\tan^{-1}(\sqrt{3})\right] = \sin\left[\frac{3}{4}(\frac{2\pi}{3})\right] + \cos\left[2(\frac{\pi}{3})\right] = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{2\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$





(۴) : ۹۹

$$\sin\left[\cos^{-1}(\frac{3}{5}) + \cot^{-1}(-1)\right] = \sin\left[\cos^{-1}(\frac{3}{5}) + \frac{3\pi}{4}\right] = \sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos(\frac{3\pi}{4}) + \cos\left(\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)\sin(\frac{3\pi}{4}) =$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

$$\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} \times (\frac{-\sqrt{2}}{2}) + (\frac{3}{5})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = (\frac{4}{5})(\frac{-\sqrt{2}}{2}) + (\frac{3}{5})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-4\sqrt{2}}{10} + \frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{-\sqrt{2}}{10}$$

(۱) : ۱۰۰

$$\boxed{x>0 : \tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}} \quad \boxed{\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}(x)} \quad \boxed{\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha} \quad \boxed{\tan(\cot^{-1}x) = \frac{1}{x}}$$

$$a = \frac{\sin(\tan^{-1}\frac{2}{3})}{\cos(\cot^{-1}\frac{-3}{2})} \Rightarrow a = \frac{\sin(\cot^{-1}\frac{3}{2})}{\cos(\pi - \cot^{-1}\frac{3}{2})} \Rightarrow a = \frac{\sin(\cot^{-1}\frac{3}{2})}{-\cos(\cot^{-1}\frac{3}{2})} \Rightarrow -\tan\left(\cot^{-1}(\frac{3}{2})\right) = \frac{-2}{3}$$

$$b=\cot\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Longrightarrow b=\frac{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Longrightarrow b=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Longrightarrow b=\frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Longrightarrow b=\sqrt{2}$$

$$\begin{cases}\cos(\sin^{-1}x)=\sqrt{1-x^2}\\ \sin(\sin^{-1}x)=x\end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \cot(\sin^{-1}x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\xrightarrow{a=\frac{-2}{3} \text{ و } b=\sqrt{2}} \frac{a}{b}=\frac{(\frac{-2}{3})}{(\frac{\sqrt{2}}{1})}=\frac{-2}{3\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{3}$$

۱۰۱ : (۲)

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}+\ldots\right)=-\sin(\cos^{-1}\frac{3}{5})=-\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}$$

$$\boxed{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha}$$

۱۰۲ : (۳)

خلاصه ی مسئله : $\boxed{\cos^{-1}\frac{1}{3}+\cos^{-1}\frac{2}{3}=a}$ ① $\Longrightarrow \sin^{-1}\frac{1}{3}+\sin^{-1}\frac{2}{3}=?$

خواسته ی مسئله : $\sin^{-1}\frac{1}{3}+\sin^{-1}\frac{2}{3}=\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{2}{3}\right)=\pi-\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}+\cos^{-1}\frac{2}{3}\right)=\pi-a$ (با توجه به ①)

۱۰۳ : (۱)

$$\tan^{-1}(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\tan^{-1}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)+\tan^{-1}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=1 \Longrightarrow \sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}\xlongequal{x>0}\frac{\pi}{2}}$$

۱۰۴ : (۱)

$$\cos^2(2\tan^{-1}\frac{1}{2})=\left[\cos(2\tan^{-1}\frac{1}{2})\right]^2=\left(\frac{1-\tan^2(\tan^{-1}\frac{1}{2})}{1+\tan^2(\tan^{-1}\frac{1}{2})}\right)^2=\left(\frac{1-(\frac{1}{2})^2}{1+(\frac{1}{2})^2}\right)^2=\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}=0/36$$

$$\boxed{\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}$$

۱۰۵ : (۲)

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}\right)=\frac{1-\cos(\cos^{-1}\frac{3}{5})}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{2}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{1}}=\frac{1}{5}=0/2$$

$$\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}}$$

۱۰۶ : (۴)

$$\tan^2\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)=\frac{1-\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)}{1+\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)}=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\tan^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}}$$

۱۰۷ : (۲)

$$\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{3}{5}\;\underset{\boxed{\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}<1}}{=\!=\!=}\;\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-(\frac{1}{4})(\frac{3}{5})}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{17}{20}}{\frac{17}{20}}\right)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$

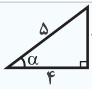
۱۰۸ : (۲)

از فرض مسئله (یعنی $x>0$ یا $x<-1$) میشه فهمید که : $\frac{x}{x+1}>0$

خواسته ی مسئله : $\tan^{-1}\frac{x}{x+1}-\cot^{-1}\frac{x+1}{x}=\!=\!=\cot^{-1}\frac{x+1}{x}-\cot^{-1}\frac{x+1}{x}=0$

$\boxed{\tan^{-1}\bigcirc=\cot^{-1}\frac{1}{\bigcirc}}$ اگر $\bigcirc>0$ باشه اون موقع

(۴) : ۱۰۹

بچه ها ! اگه به مثلث معروف  دقت کنید می بینید که : $\sin^{-1}\frac{۳}{۵}+\cos^{-1}\frac{۴}{۵}=?$

$\sin\alpha=\frac{۳}{۵}\Rightarrow \boxed{\alpha=\sin^{-1}\frac{۳}{۵}}$ ۱ $\qquad \tan\alpha=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \boxed{\alpha=\tan^{-1}\frac{۳}{۴}}$ ۳

$\cos\alpha=\frac{۴}{۵}\Rightarrow \boxed{\alpha=\cos^{-1}\frac{۴}{۵}}$ ۲ $\qquad \cot\alpha=\frac{۴}{۳}\Rightarrow \boxed{\alpha=\cot^{-1}\frac{۴}{۳}}$ ۴

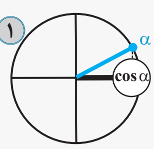
خواسته ی مسئله : $\sin^{-1}\frac{۳}{۵}+\cos^{-1}\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\text{با توجه به روابط ۱ و ۲ و ۳}}\tan^{-1}\frac{۳}{۴}+\tan^{-1}\frac{۳}{۴}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۴}}{۱-(\frac{۳}{۴})(\frac{۳}{۴})}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{۲۴}{۱۶}}{\frac{۷}{۱۶}}\right)=\tan^{-1}\frac{۲۴}{۷}=\cot^{-1}\frac{۷}{۲۴}$

(۱) : ۱۱۰

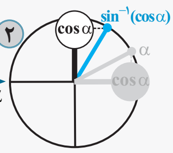
توجه : اگه α یک زاویه ی حاده باشه ، اون موقع زوایای $\sin^{-1}(\cos\alpha)$ ، $\cos^{-1}(\sin\alpha)$ ، $\tan^{-1}(\cot\alpha)$ و $\cot^{-1}(\tan\alpha)$ متمم زاویه ی α هستن . یعنی :

$\boxed{\sin^{-1}(\cos\alpha)=\frac{\pi}{۲}-\alpha}$ $\quad \boxed{\cos^{-1}(\sin\alpha)=\frac{\pi}{۲}-\alpha}$ $\quad \boxed{\tan^{-1}(\cot\alpha)=\frac{\pi}{۲}-\alpha}$ $\quad \boxed{\cot^{-1}(\tan\alpha)=\frac{\pi}{۲}-\alpha}$

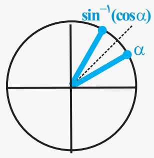
علت

۱ 

مقدار cos α رو روی محور sin ها قرار می دیم

۲ 

۱ و ۲



حالا بریم سراغ حل مسئله و ببینیم که از رابطه ی $\cos^{-1}(\sin x)=\sin\alpha$ چه نتیجه ای رو میشه گرفت .

$\cos^{-1}(\sin x)=\sin\alpha\Rightarrow\frac{\pi}{۲}-x=\sin\alpha\Rightarrow x+\sin\alpha=\frac{\pi}{۲}$

فرض کنید x یک زاویه ی حاده هست

(۱) : ۱۱۱

$\sin^{-1}\left(\sin^{۴}\frac{\pi}{۷}-\cos^{۴}\frac{\pi}{۷}\right)=\sin^{-1}\left[(\sin^{۲}\frac{\pi}{۷}+\cos^{۲}\frac{\pi}{۷})(\sin^{۲}\frac{\pi}{۷}+\cos^{۲}\frac{\pi}{۷})\right]=\sin^{-1}(-\cos\frac{۲\pi}{۷})=$

۱

$\boxed{\sin^{۲}\alpha-\cos^{۲}\alpha=-\cos ۲\alpha}$ $\quad \sin^{-1}(\cos\alpha)=\frac{\pi}{۲}-\alpha$

$-\sin^{-1}(\cos\boxed{\frac{۲\pi}{۷}})=-(\frac{\pi}{۲}-\frac{۲\pi}{۷})=-\frac{۳\pi}{۱۴}$

زاویه ی حاده $\qquad \boxed{\sin^{-1}(\cos\alpha)=\frac{\pi}{۲}-\alpha}$

(۲) : ۱۱۲

داده ی مسئله : $۰<\alpha+\beta<\frac{\pi}{۲}$ $\qquad$ خواسته ی مسئله حاصل : $\sin^{-1}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$\sin^{-1}(\cos(\alpha+\beta))=\frac{\pi}{۲}-(\alpha+\beta)$

با توجه به داده ی مسئله ، $\alpha+\beta$ حاده هست

(۱) :۱۱۳

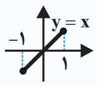
بچه ها ! بعضی ها فکر می کنن که دو تابع $y=\sin(\sin^{-1}x)$ و $y=\sin^{-1}(\sin x)$ با هم مساوی هستن .

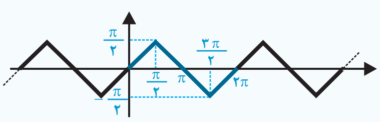
در صورتی که اگه به دامنه ی دو تابع دقت بشه معلوم میشه که از این خبرا نیست .

$y=\sin(\sin^{-1}(x))\xrightarrow{\text{در این تابع ، x باید وارد } \sin^{-1} \text{ بشه}} x\in[-۱,۱]$

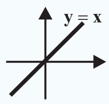
$y=\sin^{-1}(\sin(x))\xrightarrow{\text{در این تابع ، x باید وارد } \sin \text{ بشه}} x\in R$

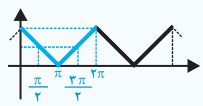
از طرفی تابع $y=\sin(\sin^{-1}x)$ متناوب نیست اما تابع $y=\sin^{-1}(\sin x)$ یک تابع متناوبه . اما بریم سراغ رسم نمودار :

$y=\sin(\sin^{-1}x)\ ,\ D=[-۱,۱]\Rightarrow$ 

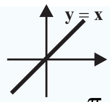
$y=\sin^{-1}(\sin x)\ ,\ D=R\longrightarrow$ 

بچه ها ! رسم نمودار توابع زیر نه تنها خالی از لطف نیست بلکه خیلی مهمه .

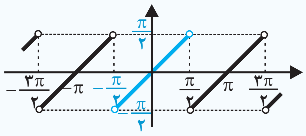
$y=\cos(\cos^{-1}x)\ ,\ D=[-۱,۱]\Rightarrow$ 

$y=\cos^{-1}(\cos x)\ ,\ D=R\longrightarrow$ 

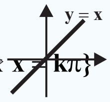
$y = \tan(\tan^{-1}(x))\ ,\ D = R \Longrightarrow$



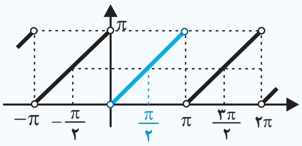
$y = \tan^{-1}(\tan(x))\ ,\ D = R - \{x \mid x = k\pi + \frac{\pi}{2}\} \Longrightarrow$



$y = \cot(\cot^{-1}(x))\ ,\ D = R \Longrightarrow$



$y = \cot^{-1}(\cot(x))\ ,\ D = R - \{x \mid x = k\pi\} \Longrightarrow$



(۴) : ۱۱۴

خواسته ی مسئله : مجموع جواب های معادله ی $\boxed{\tan^{-1} ۲x - \cot^{-1} x = \frac{\pi}{۴}}$ ①

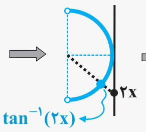
$$① \longrightarrow \tan^{-1}۲x = \frac{\pi}{۴} + \cot^{-1}x \xrightarrow{\text{از طرفین tan میگیریم}} ۲x = \frac{\tan\frac{\pi}{۴} + \tan(\cot^{-1}x)}{۱ - \tan\frac{\pi}{۴}\tan(\cot^{-1}x)} \Longrightarrow ۲x = \frac{۱ + \frac{۱}{x}}{۱ - \frac{۱}{x}} \Longrightarrow ۲x = \frac{\frac{x+۱}{\cancel{x}}}{\frac{x-۱}{\cancel{x}}}$$

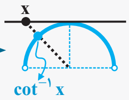
$$\Longrightarrow ۲x = \frac{x+۱}{x-۱} \Longrightarrow ۲x^۲ - ۲x = x + ۱ \Longrightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$$

از اونجایی که $a.c<۰$ ، این معادله ی درجه ی ۲ یک ریشه ی مثبت و یک ریشه ی منفی داره . پس قاعدتاً باید مجموع ریشه های معادله ی ① برابر بشه با : $\frac{-b}{a}$ یا $\frac{۳}{۲}$

اما اینطوری نیست . چون x های منفی در معادله ی ① صدق نمی کنن و در نتیجه جواب های معادله هم نخواهند بود. علتش اینه که :

$$x < ۰ \begin{cases} ۲x < ۰ \Longrightarrow \tan^{-1}(۲x) < ۰ \\ \cot^{-1}(x) < ۰ \end{cases} \Longrightarrow \tan^{-1}(۲x) - \cot^{-1}(x) < ۰$$





با توجه به اینکه $\tan^{-1}(۲x) - \cot^{-1}(x)$ منفی شد پس نمی تونه با $\frac{\pi}{۴}$ برابر بشه . یعنی : $(x < ۰ \Longrightarrow \tan^{-1}(۲x) - \cot^{-1}(x) \neq \frac{\pi}{۴})$

پس فقط ریشه ی مثبت معادله ی $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$ جواب معادله ی ① هست .

$$۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۹ + ۸ = ۱۷} x = \frac{۳ + \sqrt{۱۷}}{۴}$$

چون این معادله فقط یک جواب داره ، پس مجموع جواب ها برابر میشه با تنها جواب معادله . یعنی : $x = \frac{۳ + \sqrt{۱۷}}{۴}$

(۲) : ۱۱۵

قبل از اینکه جواب معادله ی $\tan^{-1} x + \tan^{-1} ۳x = \frac{\pi}{۲}$ رو بدست بیارم می خوام بگم که x های منفی نمی تونن جواب این معادله باشن . چون :

$$x < ۰ \Longrightarrow \boxed{\overset{\text{منفی}}{\tan^{-1} x}} + \boxed{\overset{\text{منفی}}{\tan^{-1} ۳x}} \neq \boxed{\overset{\text{مثبت}}{\frac{\pi}{۲}}}$$

اما با فرض $\boxed{x \geq ۰}$ بریم سراغ معادله ی $\tan^{-1} x + \tan^{-1} ۳x = \frac{\pi}{۲}$ ① :

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{۲} - \tan^{-1} ۳x \xrightarrow{\text{از طرفین tan می گیریم}} x = \tan(\frac{\pi}{۲} - \tan^{-1} ۳x) = \cot(\tan^{-1} ۳x) \Longrightarrow x = \frac{۱}{۳x}$$

$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cot\alpha$ $\quad$ $\cot(\tan^{-1} \bigcirc) = \frac{۱}{\bigcirc}$

$$۳x^۲ = ۱ \Longrightarrow x^۲ = \frac{۱}{۳} \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \xrightarrow{\text{با توجه به ①}} x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

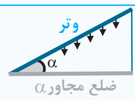
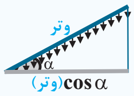
۱۱۶ : (۳)

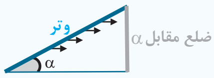
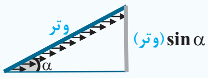
$$\boxed{\underbrace{\sin^{-1}x+\cos^{-1}x}_{\frac{\pi}{2}}=\sin^{-1}|2x-1|} \Longrightarrow \underbrace{\sin^{-1}|2x-1|}_{x}=\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{از طرفین } \sin \text{ می گیریم}}$$

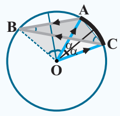
$$|2x-1|=\sin\frac{\pi}{2} \Longrightarrow |2x-1|=1 \Longrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \Longrightarrow x=1 \\ 2x-1=-1 \Longrightarrow x=0 \end{cases}$$

از اونجایی که $x=0$ و $x=1$ در دامنه ی معادله ی ۱ صدق می کنن پس جوابهای معادله هستن و در نتیجه: $0+1=1$ = مجموع جوابها

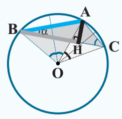
۱۱۷ : (۲)

در مثلث قائم الزاویه ی  وظیفه ی $\cos\alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مجاور α ست. یعنی : 

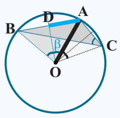
در مثلث قائم الزاویه ی  وظیفه ی $\sin\alpha$ ، تصویر کردن وتر روی ضلع مقابل α ست. یعنی : 

بچه ها! همونطور که در شکل  می بینید ، کمان AC روبروی زاویه ی مرکزی 2α قرارداره . پس : $\overset{\frown}{AC}=2\alpha$

از طرفی کمان AC روبروی زاویه ی محاطی $A\hat{B}C$ هم قرار داره . پس : $A\hat{B}C=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}=\alpha$

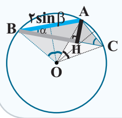
اما خواسته ی مسئله ، اندازه ی ضلع BH هست و من می دونم که $\overset{1}{\boxed{BH=AB.\cos\alpha}}$ 

پس اگه بتونم اندازه ی AB رو پیدا کنم ، اندازه ی BH هم مشخص میشه .

پیدا کردن اندازه ی AB : AD ضلع روبرو به زاویه ی β هست .  بنابراین :

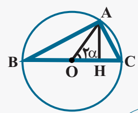
$$AD=OA\sin\beta \xrightarrow{OA=1} AD=\sin\beta \xrightarrow{AB=2AD} \boxed{AB=2\sin\beta}$$

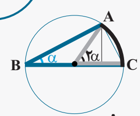
حالا که AB معلوم شد ، با توجه به رابطه ی ۱ اندازه ی BH هم مشخص میشه :

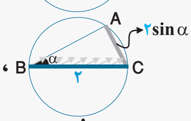


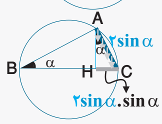
$$BH=AB.\cos\alpha \Longrightarrow BH=2\sin\beta.\cos\alpha$$

۱۱۸ : (۳)

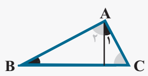
خلاصه ی سؤال : در شکل  اگه $(OA=OB=OC=1=\text{شعاع})$ باشه اندازه ی HC چقدره ؟

همونطور که می بینید  زاویه ی محاطی B و زاویه ی مرکزی 2α، هر دوشون روبرو به کمان AC هستن پس :
$\angle B=\angle\alpha$

با توجه به شکل  ، وتر $(BC=2)$ رو به ضلع مقابلش (یعنی AC) تصویر میکنم. پس: $AC=2\sin\alpha$

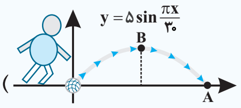
حالا با توجه به شکل  ، وتر AC رو که مقدارش مشخص شده ، به ضلع HC تصویر میکنم:

$HC=AC\sin\alpha \Longrightarrow HC=(2\sin\alpha)(\sin\alpha)$

توجه: در یک مثلث قائم الزاویه ، ارتفاع وارد بر وتر ، مثلثهای متشابه ایجاد می کنه ، بطوریکه : 

$\angle A_1=\angle B$, $\angle A_2=\angle C$

۱۱۹ : (۲)

بچه ها ! با توجه به شکل (


) می خوام ببینم فاصله ی علی از اولین نقطه ی برخورد توپ با زمین (یعنی A) ،چند برابر بیشترین ارتفاع توپ (یعنی B) هست .

پیدا کردن A : کوچکترین ریشه ی مثبت تابع $y = ۵\sin\frac{\pi x}{۳۰}$ همون فاصله ی علی از اولین نقطه ی برخورد توپ با زمینه . بنابراین :

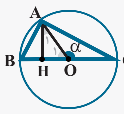
$$۵\sin\frac{\pi x}{۳۰} = ۰ \Longrightarrow \sin\frac{\pi x}{۳۰} = ۰ \Longrightarrow \frac{\pi x}{۳۰} = \pi \Longrightarrow x = ۳۰ \Longrightarrow \boxed{A = ۳۰}$$

پیدا کردن B : بیشترین ارتفاع توپ ، همون بیشترین مقدار تابع $y = ۵\sin\frac{\pi x}{۳۰}$ هست . بنابراین :

$$y_{Max} = ۵\times(\sin\frac{\pi x}{۳۰})_{Max} \Longrightarrow y_{Max} = ۵\times ۱ \Longrightarrow \boxed{B = ۵}$$

خواسته ی مسئله : $\frac{A}{B} + \frac{۳۰}{۵} = ۶$

۱۲۰ : (۳)

حل مسئله در یک نگاه : با توجه به شکل


می خوام مساحت مثلث AHO رو بدست بیارم . از اونجایی که $OA=۱$ هست ، کافیه زاویه ی $A_۱$ رو داشته باشم تا به کمک $A_۱$ ، یکبار OA رو روی OH تصویر کنم $\boxed{OA.\sin\hat{A}_۱ = OH}$ و بار دیگه OA رو روی AH تصویر کنم $\boxed{OA.\cos\hat{A}_۱ = AH}$

در واقع با بدست اومدن OH و AH مساحت مثلث ، یعنی $S = \frac{AH\times OH}{۲}$ هم مشخص میشه .

حالا بریم سراغ کلید حل این مسئله ، یعنی $A_۱$:

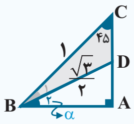
$$\begin{cases} O_۱ + \alpha = ۱۸۰ \Longrightarrow O_۱ = ۱۸۰ - \alpha \\ O_۱ + A_۱ = ۹۰ \Longrightarrow (۱۸۰ - \alpha) + A_۱ = ۹۰ \Longrightarrow \boxed{\hat{A}_۱ = \alpha - ۹۰} \end{cases}$$

① $OA \times \sin A_۱ = OH \Longrightarrow \sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) = OH \Longrightarrow \boxed{OH = -\cos\alpha}$

② $OA \times \cos A_۱ = AH \Longrightarrow \cos(\alpha - \frac{\pi}{۲}) = AH \Longrightarrow \boxed{AH = \sin\alpha}$

$$\Longrightarrow S = \frac{AH\times OH}{۲} = \frac{-\sin\alpha\cos\alpha}{۲} = -\frac{۱}{۴}\sin ۲\alpha$$

۱۲۱ : (۱)

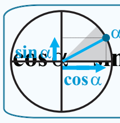
در شکل


اگه به مثلث ABC نگاه کنید می بینید که $\hat{B} = ۴۵^\circ$ پس : $B_۱ = ۴۵ - \alpha$

حالا اگه به مثلث BCD توجه کنید می بینید که دو ضلع و زاویه ی بین دو ضلع ، معلومه $(BC = ۱ , BD = \frac{\sqrt{۳}}{۲} , B = ۴۵ - \alpha)$ پس :

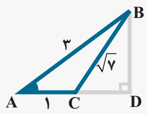
خواسته ی مسئله : $S_{B\overset{\Delta}{C}D} = \frac{BC.BD.\sin\hat{B}_۱}{۲} = \frac{۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\sin(۴۵-\alpha)}{۲} = \frac{-\sqrt{۳}}{۴}\sin(\alpha - ۴۵) = \frac{-\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۲}}\left(\sqrt{۲}\sin(\alpha - ۴۵)\right)$

$$\stackrel{\text{معرکه}}{=} \frac{-\sqrt{۶}}{۸}(\sin\alpha - \cos\alpha) = \frac{\sqrt{۶}}{۸}(\cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{\sqrt{۶}}{۸}\sqrt{(\cos\alpha - \sin\alpha)^۲} = \frac{\sqrt{۶}}{۸}\sqrt{۱ - \sin ۲\alpha}$$



از اونجایی که $۰ < \alpha < ۴۵$ پس $\cos\alpha > \sin\alpha$ نتیجه $\cos\alpha - \sin\alpha > ۰$

۱۲۲ : (۱)

در شکل


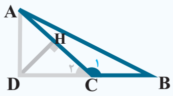
برای پیدا کردن ضلع CD کافیه زاویه ی A رو پیدا کنم تا بتونم به کمکش ، ضلع AB رو روی AD تصویر کنم . $\boxed{AB.\cos\hat{A} = AD}$ ۳

پس تکلیف روشن شد (پیدا کردن زاویه ی $\hat{A}$) . اگه کمی قت کنید می بینید که با معلوم شدن AD اندازه ی CD هم معلوم میشه .

در مثلث ABC : $(\sqrt{۷})^۲ = (۱)^۲ + (۳)^۲ - ۲(۱)(۳)\cos A \Longrightarrow ۷ = ۱ + ۹ - ۶\cos\hat{A} \Longrightarrow \boxed{\cos\hat{A} = \frac{۱}{۲}}$

① $۳\cos A = AD \Longrightarrow ۳\times\frac{۱}{۲} = AD \Longrightarrow AD = \frac{۳}{۲}$ می دونیم که $CD = AD - AC \Longrightarrow CD = \frac{۳}{۲} - ۱ = \frac{۱}{۲}$

۱۲۳ : (۴)

درشکل  داریم $\begin{cases} BC=۲ \\ AC=۶ \\ S_{ABC}=۳ \end{cases}$ بنابراین به کمک رابطه ی $S_{ABC}=\frac{AC.BC.\sin C_۱}{۲}$ مقدار زاویه ی C قابل محاسبه هست .

$$۳=\frac{۶\times۲\times\sin C_۱}{۲}\Rightarrow \sin C_۱=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{منفرجه}}\widehat{C}_۱=۱۵۰^\circ\xrightarrow{\text{با توجه به شکل}}\boxed{\widehat{C}_۲=۳۰^\circ}$$

۲ تا عمل تصویر کردن کافیه تا به DH برسیم .

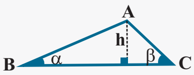
۱) به کمک $\widehat{C}_۲$ ضلع AC رو روی DC تصویر می کنم : $\boxed{AC.\cos\widehat{C}_۲=DC}$ (۱)

۲) به کمک $\widehat{C}_۲$ ضلع DC رو روی DH تصویر می کنم : $\boxed{DC.\sin\widehat{C}_۲=DH}$ (۲)

$$\xrightarrow{(۱)} ۶\times\cos۳۰=DC\Rightarrow DC=\frac{۶\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\xrightarrow{(۲)} ۳\sqrt{۳}\times\sin۳۰=DH\Rightarrow DH=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۲۴ : (۳)

اگه به گزینه ها نگاه کنیم متوجه میشیم که باید مساحت مثلث  رو فقط بر حسب β,α,h بنویسیم.

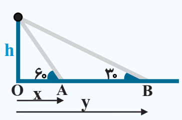
از طرفی می دونیم $S=\frac{h\times BC}{۲}$ پس باید روی BC اون قدر تغییر ایجاد کنیم تا بر حسب β,α,h نوشته بشه .

$$S=\frac{h\times BC}{۲}=\frac{h\times(BH+HC)}{۲}=\frac{h(\boxed{AB}\cos\alpha+\boxed{AC}\cos\beta)}{۲}=\frac{h(\boxed{\frac{h}{\sin\alpha}}\cos\alpha+\boxed{\frac{h}{\sin\beta}}\cos\beta)}{۲}=\frac{h^۲(\cot\alpha+\cot\beta)}{۲}$$

$$\underset{\text{تبدیل جمع به ضرب}}{=}\frac{h^۲\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\right)}{۲}=\frac{h^۲\sin(\alpha+\beta)}{۲\sin\alpha\sin\beta}\underset{\text{تبدیل ضرب به جمع}}{=}\frac{h^۲\sin(\alpha+\beta)}{-(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta))}=\frac{h^۲\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$$

۱۲۵ : (۳)

فرض می کنم ، بعد از گذشت ۳۰ ثانیه ، فاصله ی اتومبیلهای A و B ازپایین برج ، به ترتیب x و y کیلومتر باشه . از اونجایی که فاصله ی اتومبیل B از A بعد از گذشت ۳۰ ثانیه یک کیلومتر شد ، پس : $\boxed{y-x=۱}$ (۱)



با توجه به شکل $\begin{cases}\tan۶۰=\frac{h}{x}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{h}{x}\Rightarrow h=\sqrt{۳}x \\ \tan۳۰=\frac{h}{y}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{h}{y}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{۳}}{۳}y\end{cases}\Rightarrow\sqrt{۳}x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}y\Rightarrow\boxed{y=۳x}$ (۱)

$$\xrightarrow{(۱)\text{ و }(۲)}\begin{cases}y-x=۱\Rightarrow ۳x-x=۱\Rightarrow\boxed{x=\frac{۱}{۲}km} \\ y=۳x \qquad \boxed{y=\frac{۳}{۲}km}\end{cases}$$

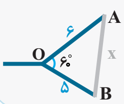
$$\text{سرعت متوسط ماشین B در ۳۰ ثانیه ی اول}=\frac{\text{مسافت طی شده}}{\text{زمان}}=\frac{\frac{۳}{۲}km}{\frac{۱}{۱۲۰}h}=۱۸۰\frac{km}{h}$$: خواسته ی مسئله

$$\boxed{۳۰sec=\frac{۱}{۱۲۰}h}$$

۱۲۶ : (۲)

ماشین A با سرعت $۱۲۰\frac{km}{h}$ بعد از گذشت ۳ دقیقه (یعنی $\frac{۳}{۶۰}$ ساعت) مسافت $۱۲۰\times\frac{۳}{۶۰}=۶$ کیلومتر رو طی می کنه .

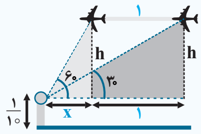
ماشین B با سرعت $۱۰۰\frac{km}{h}$ بعد از گذشت ۳ دقیقه(یعنی $\frac{۳}{۶۰}$ ساعت) مسافت $۱۰۰\times\frac{۳}{۶۰}=۵$ کیلومتر رو طی می کنه .



$$x^۲=۶^۲+۵^۲-۲(۵)(۶)\cos۶۰\Rightarrow x^۲=۳۶+۲۵-۶۰\cos۶۰^\circ\Rightarrow x^۲=۶۱-۳۰\Rightarrow x=\sqrt{۳۱}$$

(۴) : ۱۲۷ از اونجایی که سرعت هواپیما $600\frac{km}{h}$ هست ، بنابراین در طی ۶ ثانیه (یعنی $\frac{6}{3600}$ ساعت) مسافت طی شده توسط هواپیما برابره با : $600\times\frac{1}{600}=1\ km$

حالا میشه از روی شکل روبرو فهمید که :



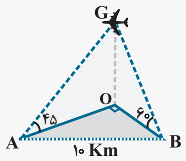
$$\begin{cases}\tan 30=\dfrac{h}{x+1} \Longrightarrow \dfrac{\sqrt3}{3}=\dfrac{h}{x+1} \Longrightarrow h=\dfrac{\sqrt3}{3}(x+1) \Longrightarrow \sqrt3 x=\dfrac{\sqrt3}{3}(x+1) \Longrightarrow 3x=x+1 \Longrightarrow \boxed{x=\dfrac{1}{2}}\\ \tan 60=\sqrt3=\dfrac{h}{x} \Longrightarrow \boxed{\sqrt3 x=h}\end{cases}$$

$$h=\sqrt3 x \longrightarrow \boxed{h=\frac{\sqrt3}{2}}$$

همونطور که در شکل بالا می بینید ، ارتفاع هواپیما از سطح زمین برابره با : $h+\frac{1}{10}$ بنابراین :

$$h+\frac{1}{10}=\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{10}=\frac{5\sqrt3+1}{10}$$

(۳) : ۱۲۸ بچه ها ! با توجه به شکل روبرو از مثلث میشه نتیجه گرفت : $\boxed{OA^2+OB^2=100}$ ①



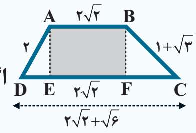
از اونجایی که هدف من ، پیدا کردن ارتفاع هواپیما (یعنی OG) هست ، بهتره یه جورایی در رابطه ی ① OA و OB رو بر حسب OG بنویسیم تا مقدار OG پیدا بشه .

$$\boxed{\tan 60=\frac{OG}{OB} \Longrightarrow OB=\frac{\sqrt3}{3}OG}$$

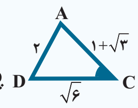
$$① \longrightarrow OA^2+OB^2=100 \Longrightarrow OG^2+\left(\frac{\sqrt3}{3}OG\right)^2=100 \Longrightarrow \frac{4}{3}OG^2=100 \Longrightarrow OG^2=75 \Longrightarrow OG=5\sqrt3$$

$$\boxed{\tan 45=\frac{OG}{OA} \Longrightarrow OA=OG}$$

(۲) : ۱۲۹ از ذوزنقه ی



اگه مستطیل ABFE رو حذف کنم ، دو تا مثلث باقی می مونه که در صورت وصل کردن اونها به هم شکل



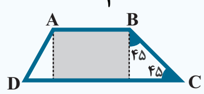
پدید می آد . اگه بتونم زاویه ی C رو پیدا کنم ، بدست آوردن زاویه ی B (یعنی خواسته ی مسئله) خیلی راحت میشه .

$$2^2=(\sqrt6)^2+(1+\sqrt3)^2-2\sqrt6(1+\sqrt3)\cos\hat C \Longrightarrow 4=6+4+2\sqrt3-2\sqrt6(1+\sqrt3)\cos\hat C \Longrightarrow$$

$$2\sqrt6(1+\sqrt3)\cos\hat C=6+2\sqrt3 \Longrightarrow \cos\hat C=\frac{6+2\sqrt3}{2\sqrt6(1+\sqrt3)} \Longrightarrow \cos\hat C=\frac{\cancel{2}(3+\sqrt3)}{\cancel{2}\sqrt6(1+\sqrt3)}\times\frac{(1-\sqrt3)}{(1-\sqrt3)} \Longrightarrow$$

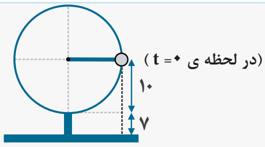
$$\cos\hat C=\frac{3-3\sqrt3+\sqrt3-3}{\sqrt6(1-3)} \Longrightarrow \cos\hat C=\frac{-2\sqrt3}{-2\sqrt6} \Longrightarrow \cos\hat C=\frac{\sqrt3}{\sqrt3\sqrt2} \Longrightarrow \cos\hat C=\frac{\sqrt2}{2} \Longrightarrow \boxed{\hat C=45^\circ}$$

حالا بریم سراغ ذوزنقه ی

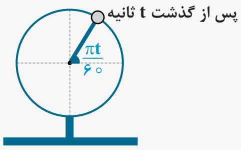


همونطور که می بینید : $\hat B=135^\circ$

۱۳۰ : (۴)



برداشت ۱) با توجه به اینکه کابین مورد نظر ، در لحظه ی $t=0$ با زمین ۱۷ متر فاصله داره ، در لحظه ی $t=0$ کابین روی مبدأ حرکت دایره قرار داره .

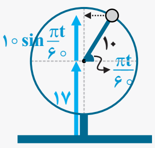


برداشت ۲) وقتی کابین در هر ۲ دقیقه یک دور (یعنی 2π رادیان) در جهت مثبت می چرخه ، بنابراین پس از گذشت t ثانیه (یعنی $\frac{t}{60}$ دقیقه) به اندازه ی $\frac{\pi t}{60}$ در جهت مثبت می چرخه .

علت :

دقیقه	رادیان
۲	2π
$\frac{t}{60}$	?

$$\Longrightarrow ? = \frac{2\pi \times \frac{t}{60}}{2} \Longrightarrow \boxed{? = \frac{\pi t}{60}}$$ (کمان طی شده توسط کابین بعد از گذشت t ثانیه)

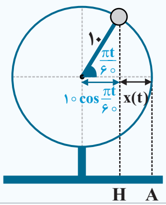


برداشت ۳) پس از گذشت t ثانیه ، ارتفاع کابین به اندازه $10\sin\frac{\pi t}{60}$ یجابجا میشه . چون :

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Longrightarrow \sin\frac{\pi t}{60} = \frac{y}{10} \Longrightarrow \boxed{y = 10\sin\frac{\pi t}{60}}$$

بنابراین بعد ازگذشت t ثانیه ، ارتفاع کابین به اندازه ی $h_{(t)} = 10\sin\frac{\pi t}{60} + 17$ متر از سطح زمین فاصله داره .

۱۳۱ : (۱) با توجه به شکل اگه فاصله ی نقطه ی A از سایه ی کابین که روی زمین افتاده رو با $x_{(t)}$ نشون بدیم ، اون موقع :



$$10\cos\frac{\pi t}{60} + x_{(t)} = 10 \Longrightarrow \boxed{x_{(t)} = 10 - 10\cos\frac{\pi t}{60}}$$

آزمون شماره ی ۱ فصل (۹)

۱) اگر به یک زاویه π رادیان اضافه شود ، کسینوس زاویه ... (آموزش و پرورش -۸۷)

۱) زیاد می شود ۲) کم می شود ۳) تغییر نمی کند ۴) قرینه می شود

۲) اگر $\cos x = -۱$ ، آنگاه $\cos ۱۷x$ کدام است ؟ (آزاد - ۷۶)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) -۱ ۴) ۱

۳) با فرض $\frac{۳\pi}{۴} < \alpha < \pi$ و $\tan\alpha = \frac{۲}{m-۱}$ ، حدود تغییرات m کدام است ؟ (سراسری - ۷۷)

۱) $m < -۱$ ۲) $m < ۱$ ۳) $-۱ < m < ۱$ ۴) $-۲ < m < -۱$

۴) اگر $\tan ۲۰^\circ = ۰/۳۶$ ، حاصل [illegible] کدام است ؟ (سراسری -۸۴)

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۶}$

۵) حاصل عبارت $(\tan x + \cot x)^۲ - \frac{\sin^۴ x + \cos^۴ x}{\sin^۲ x \cos^۲ x}$ کدام است ؟ (آزاد -۸۳)

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۰

۶) اگر $\tan x = ۲$ باشد مقدار عددی $\frac{۳\cos x - \sin x}{\sin x - \cos x}$ کدام است ؟ (آموزش و پرورش -۸۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۷) اگر $-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۱-m}{۲+m} = \frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$ باشد ، حدود تغییرات m کدام است ؟ (سراسری -۷۱)

۱) $-۱ < m < ۲$ ۲) $-۲ < m < ۱$ ۳) $m > ۱$ ۴) $m < -۲$

۸) حاصل $\cos(x+\frac{\pi}{۶}) - \sin(x+\frac{\pi}{۳}) + \cos(x+\frac{\pi}{۲})$ کدام است ؟ (سنجش -۸۷)

۱) صفر ۲) $۲\sin x$ ۳) $۲\cos x$ ۴) $\cos x - \sin x$

۹) اگر $\tan(۲\alpha + \frac{\beta}{۳}) = \sqrt{۳} + ۱$ و $\tan(۲\alpha - \frac{\beta}{۳}) = \sqrt{۳} - ۱$ باشد ، $\tan\frac{۲\beta}{۳}$ برابر است با : (سراسری - ۶۴)

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۰) ساده شده ی عبارت $\frac{\cos a}{۱+\cos a} \cdot \frac{\sin ۲a}{۱+\cos ۲a}$ کدام است ؟ (گزینه ی ۲ - ۸۴)

۱) $\tan\frac{a}{۲}$ ۲) $\tan a$ ۳) $\cot a$ ۴) $\cot\frac{a}{۲}$

۱۱) حاصل عبارت $(\cos^۲ x - \sin^۲ x)(۱+\tan^۲ x) + \frac{۱}{\cos^۲ x}$ برابر کدام است ؟ (سنجش -۸۶)

۱) $\tan^۲ x$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲) اگر $\cos x = -\frac{۱}{۳}$ باشد ، حاصل کسر $\frac{۱+\cos ۲x + \cos ۴x}{\sin ۲x + \sin ۴x}$ کدام است ؟ $(۰ < x < \frac{\pi}{۲})$ (آزاد -۸۶)

۱) $\frac{۷\sqrt{۲}}{۸}$ ۲) $\frac{-۷\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $\frac{۷\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{-۷\sqrt{۲}}{۴}$

۱۳) مقدار $\cos^۶\frac{\pi}{۸} + \sin^۶\frac{\pi}{۸}$ برابر کدام است ؟ (گزینه ی ۲ - ۸۴)

۱) $\frac{۵}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

آزمون شماره ی ۱ فصل (۹)

۱۴) اگر $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}=3$ باشد، $\tan 2x$ چقدر است؟ (آزاد – ۸۱)

۱) $\frac{6}{5}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{12}{5}$ ۴) -3

۱۵) حاصل $\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}.\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ برابر کدام است؟ (سراسری – ۷۷)

۱) $1-\tan\alpha$ ۲) $1+\tan\alpha$ ۳) $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ ۴) $\cot(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

۱۶) حاصل $(\sin x+\cos x+1)(\sin x+\cos x-1)$ به ازای $x=\frac{7\pi}{12}$ کدام است؟ (آزاد – ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) -1

۱۷) اگر $\frac{\sin x+2\cos x}{\sin x-3\cos x}=2$ باشد، حاصل $\frac{1}{\sin x\cos x}$ کدام است؟ (آزاد – ۸۲)

۱) $\frac{65}{8}$ ۲) $-\frac{65}{8}$ ۳) $\frac{17}{4}$ ۴) $-\frac{17}{4}$

۱۸) اگر $\tan\frac{x}{2}=\sqrt{2}$ باشد، حاصل کسر $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ چقدر است؟ (آزاد – ۷۹)

۱) 2 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۱۹) حاصل عبارت $[8\sin^3\frac{\pi}{36}-6\sin\frac{\pi}{36}][8\cos^3\frac{\pi}{36}-6\cos\frac{\pi}{36}]$ چقدر است؟ (آزاد – ۷۸)

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) $-\frac{1}{2}$

۲۰) حاصل $\sin 50^\circ+\sqrt{3}\cos 50^\circ$ برابر کدام است؟ (آزاد – ۷۵)

۱) $2\cos 110$ ۲) $2\cos 10$ ۳) $2\cos 20$ ۴) $\sqrt{3}\cos 20$

۲۱) حاصل عبارت $\frac{\sin x\cos 3x}{\sin 2x}-\cos 2x$ برابر کدام است؟ (سراسری – ۷۸)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\cos x$ ۳) $\sin x$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۲۲) ساده شده ی عبارت $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ برابر کدام است؟ (سراسری – ۸۱)

۱) $\cos\alpha-\sin\alpha$ ۲) $\cos 2\alpha$ ۳) $1+\sin 2\alpha$ ۴) $1-\sin 2\alpha$

۲۳) حاصل کسر $\frac{\cos 2x+\cos 6x}{\sin 2x+\sin 6x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{24}$ کدام است؟ (آزاد – ۸۳)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) 1 ۴) -1

۲۴) حاصل کسر $\frac{-\sin x+\sin 2x-\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 4x}$ برابر است با: (آزاد – ۸۴)

۱) $\tan x$ ۲) $\tan 2x$ ۳) $-\tan x$ ۴) $-\tan 2x$

۲۵) حاصل $\cos 165^\circ.\cos 105^\circ$ کدام است؟ (سراسری – ۸۲)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴)

آزمون شماره ی ۲ فصل (۹)

۱ اگر $a+b=\frac{\pi}{2}-a$، حاصل $\tan a+\tan b$ کدام است ؟ (سراسری –۸۰)

۱) $\sin b$ ۲) $\cos a$ ۳) $\frac{1}{\sin a}$ ۴) $\frac{1}{\cos b}$

۲ تمام جواب های معادله ی $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos x}$ کدام است ؟ (آزاد – ۸۱)

۱) $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ۲) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ۳) $x=2k\pi$ ۴) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

۳ معادله ی $(\sin x+1)^2-\frac{9}{4}=0$ در بازه ی $[0\,,\,\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد – ۸۳)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

۴ معادله ی $(2\sin^2 x-1)(2\sin^2 x-2)\ldots(2\sin^2 x-10)=0$ در بازه ی $[0\,,2\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد – ۸۵)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۱۰

۵ جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos x\cos 2x=0$ به شکل $k\pi+i\frac{\pi}{4}$ می باشد ، مجموعه ی مقادیر i کدام است ؟ (گزینه ی دو-۸۴)

۱) $\{2,3,4\}$ ۲) $\{1,2,5\}$ ۳) $\{1,2,3\}$ ۴) $\{1,3,5\}$

۶ جواب کلی معادله ی $\sin(x+\frac{\pi}{8})+2\cos(x+\frac{5\pi}{8})=3$ عبارت است از : (آزاد – ۷۷)

۱) $x=2k\pi+\frac{3\pi}{8}$ ۲) $x=k\pi+\frac{3\pi}{8}$ ۳) $x=2k\pi+\frac{5\pi}{8}$ ۴) جواب ندارد

۷ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin\frac{5\pi}{6}+\sin(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\pi+x)=0$ کدام است ؟ (سراسری–۷۸)

۱) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{4}$ ۳) $2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ ۴) $2k\pi+\frac{\pi}{2}$

۸ معادله ی $\sin 2x\cos 3x+\cos 2x\sin 3x=\frac{1}{2}$ در فاصله ی $(0\,,2\pi)$ چند جواب دارد ؟ (گزینه ی دو-۸۷)

۱) ۲ریشه ۲) ۶ ریشه ۳) ۱۰ریشه ۴) ۱۴ریشه

۹ انتهای کمان های جواب معادله ی $\cos 2x+\sin(\frac{\pi}{2}+x)=0$ روی دایره ی مثلثاتی راس های کدام چند ضلعی است ؟ (سراسری -۷۶)

۱) مربع ۲) مثلث قائم الزاویه ۳) مستطیل ۴) مثلث متساوی الاضلاع

۱۰ معادله ی $\sin x\cos x=\cos^2 x-\frac{1}{2}$ در بازه ی $[0\,,2\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد-۸۵)

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۰

۱۱ معادله ی $\tan x+\cot x=\sqrt{3}$ در بازه ی $[0\,,2\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد-۸۶)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۲ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$ با شرط $x\neq\frac{k\pi}{2}$ کدام است ؟ (سراسری-۸۶)

۱) $2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ۲) $2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

۱۳ جواب کلی معادله ی $\cos 3x\cos x=\cos^2 x$ کدام است ؟ (سراسری-۷۶)

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $k\pi$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$

۱۴ مجموع جواب های حاده ی معادله ی $\tan 4x=\cot x$ کدام است ؟ (سنجش-۸۵)

۱) $\frac{\pi}{5}$ ۲) $\frac{2\pi}{5}$ ۳) $\frac{3\pi}{5}$ ۴) $\frac{4\pi}{5}$

آزمون شماره ی ۲ فصل (۹)

۱۵ معادله ی مثلثاتی $2\sin x\cos x = \sin 3x\cos x+\cos 3x\sin$ در بازه ی $[0,2\pi]$ چند جواب دارد ؟ (سنجش-۸۶)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۶ معادله ی $2\sin x+\sin^2 x+5\sin^3 x = 8$ در بازه ی $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد ؟ (آزاد-۸۴)

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۴

۱۷ جواب معادله ی $2\cos x(\cos x+\sin x) = 1$ کدام است ؟ (سنجش-۸۷)

۱) $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{8}$ ۴) $k\pi-\frac{\pi}{8}$

۱۸ یکی از جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x = 1$ کدام است ؟ (سراسری-۷۸)

۱) $k\pi-\frac{\pi}{6}$ ۲) $k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{6}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{3}$

۱۹ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است ؟ (سراسری-۸۶)

۱) $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$ ۲) $2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi+\frac{5\pi}{6}$ ۴) $k\pi+\frac{\pi}{3}$

۲۰ جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin 3x+\sin x = 4\sin x\cos x$ کدام است ؟ (سراسری-۷۷)

۱) $\frac{k\pi}{2}$ ۲) $\frac{k\pi}{4}$ ۳) $k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ ۴) $(2k+1)\frac{\pi}{4}$

۲۱ حاصل عبارت $\cos[2\sin^{-1}(-\frac{3}{2})+\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$ کدام است ؟ (آزاد-۷۵)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) ۱

۲۲ ساده شده ی عبارت $\tan[\frac{5\pi}{4}-\tan^{-1}(\frac{3}{2})]$ برابر کدام است ؟ (سنجش-۸۷)

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{5}$

۲۳ حاصل $\cos^{-1}(-\frac{3}{5})-\sin^{-1}(\frac{3}{5})$ کدام است ؟ (سراسری-۷۰)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{-\pi}{2}$ ۴) $\frac{-2\pi}{3}$

۲۴ مقدار عددی $\cos[2\sin^{-1}(\frac{5}{13})]$ کدام است ؟ (آموزش و پرورش-۸۶)

۱) $\frac{113}{169}$ ۲) $\frac{115}{169}$ ۳) $\frac{117}{169}$ ۴) $\frac{119}{169}$

۲۵ اگر $A-B = \frac{\pi}{6}$ باشد ، حاصل $\frac{2\sin(A+B)-1}{4\cos A\cos B}$ کدام است ؟ (سنجش-۷۸)

۱) $\tan B$ ۲) $\tan A$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱